

Paul E. Tippens
Séptima edición revisada
Física
Conceptos y aplicaciones
EXCELLENCE AND LONGEVITY
WILLIAM HOLMES McGUFFEY
TEXT AND ACADEMIC AUTHORS ASSOCIATION INC.
AWARD WINNER
Mc Graw Hill

Factores de conversión

Longitud	1 metro (m) = 39.37 in = 3.281 ft = 6.214×10^{-4} mi = 10^{10} Å = 10^{15} fermis 1 in = 0.02540000 m 1 ft = 0.3048 m 1 mi = 1609 m 1 milla náutica = 1852 m = 1.1508 mi = 6076.10 ft 1 angstrom (Å) = 10^{-10} m 1 mil = 10^{-3} in 1 rod = 16.5 ft; 1 braza = 6 ft
Área	1 m^2 = 10.76 ft^2 = 1550 in^2 1 hectárea = 10^4 m^2 = 2.471 acres 1 ft^2 = 929 cm^2 1 in^2 = 6.452 cm^2 = 1.273×10^6 circular mils 1 acre = 43.560 ft^2
Volumen	1 m^3 = 35.31 ft^3 = 6.102×10^4 in^3 1 ft^3 = 0.02832 m^3 1 galón (US) = 231 in^3 = 3.79 litros 1 litro = 1.000028×10^{-3} m^3 = 61.02 in^3 = 0.26 galón (US)
Tiempo	1 año = 365.2422 días = 8.766×10^3 h $\times$ 5.259×10^5 min = 3.156×10^7 s 1 día sideral (periodo de revolución de la Tierra) = 86,164 s
Frecuencia	1 hertz (Hz) = 1 ciclo/s
Velocidad	1 m/s = 3.281 ft/s = 3.6 km/h = 2.237 mi/h = 1.944 nudos 1 km/h = 0.2778 m/s = 0.9113 ft/s = 0.6214 mi/h 1 mi/h = 1.467 ft/s = 1.609 km/h = 0.8689 nudo
Masa	1 kg = 2.205 lb_m = 0.06852 slug 1 lb_m = 0.4536 kg = 0.03108 slug 1 slug = 32.17 lb_m = 14.59 kg
Densidad	1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3 = 62.43 lb_m/ft^3 = 1.940 slug/ft^3 1 lb_m/ft^3 = 0.03108 slug/ft^3 = 16.02 kg/m^3 = 0.01602 g/cm^3
Fuerza	1 newton (N) = 10^5 dinas = 0.1020 kg n = 0.2248 lb 1 lb (fuerza) = 4.448 N = 0.4536 kg n = 32.17 poundals
Presión	1 N/m^2 = 9.869×10^{-6} atm = 1.450×10^{-4} lb/in^2 = 0.02089 lb/ft^2 = 7.501×10^{-4} cmHg = 4.015×10^{-3} in de agua = 10^{-5} bar 1 lb/in^2 = 144 lb/ft^2 = 6895 N/m^2 = 5.171 cmHg = 27.68 in de agua 1 atm = 406.8 in de agua = 76 cmHg = 1.013×10^5 N/m^2 = 10,330 kg wt/m^2 = 2116 lb/ft^2 = 14.70 lb/in^2 = 760 torr
Trabajo **Energía y calor**	1 joule (J) = 0.2389 cal = 9.481×10^{-4} Btu = 0.7376 ft · lb = 10^7 ergs = 6.242×10^{18} eV 1 kcal = 4186 joules = 3.968 Btu = 3087 ft · lb 1 eV = 1.602×10^{-19} joule; 1 uma = 931.48 MeV 1 kW · h = 3.6×10^6 joules = 3413 Btu = 860.1 kcal = 1.341 hp · h
Potencia	1 hp = 2545 Btu/h = 550 ft · lb/s = 745.7 watts = 0.1782 kcal/s 1 watt (W) = 2.389×10^{-4} kcal/s = 1.341×10^{-3} hp = 0.7376 ft · lb/s
Carga eléctrica	1 faraday = 96.487 coulombs 1 carga de electrón = 1.602×10^{-19} coulomb
Flujo magnético	1 weber (Wb) = 10^8 maxwells
Intensidad magnética	1 tesla (T) = 1 newton/amp · m = 1 weber/m^2 = 10,000 gauss

SÉPTIMA EDICIÓN REVISADA

Física, conceptos y aplicaciones

Séptima edición revisada

SÉPTIMA EDICIÓN REVISADA

Física, conceptos y aplicaciones

Séptima edición revisada

Paul E. Tippens

Profesor Emérito
Southern Polytechnic State University

Traducción

Ángel Carlos González Ruiz
Universidad Nacional Autónoma de México

Revisión técnica

Ana Elizabeth García Hernández
Cinvestav-Instituto Politécnico Nacional



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO AUCKLAND • LONDRES • MILÁN
MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Publisher: Javier Neyra Bravo
Director editorial: Ricardo Martín del Campo Mora
Editor sponsor: Luis Amador Valdez Vázquez

Física, Conceptos y aplicaciones
Séptima edición revisada



McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.
Corporativo Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015 Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN : 978-607-15-0471-5
(ISBN: 970-10-6260-4 edición anterior)

Translated from the 7th edition of

ISBN-13: 978-0-07-301267-X

2345678901 209876543201

Impreso en Perú. *Printed in Peru*
Impreso en Empresa Editora El Comercio S.A. *Printed by Empresa Editora El Comercio S.A.*

Acerca del autor



Paul E. Tippens ha escrito dos libros de texto de gran éxito para McGraw-Hill Companies, así como el material complementario correspondiente. Su libro más reconocido, *Física, conceptos y aplicaciones*, ganó el Premio McGuffey, prestigioso y antiguo galardón otorgado a los libros de texto cuya excelencia se ha demostrado a lo largo de los años. Por añadidura, es autor de *Física técnica básica,* segunda edición. Esos libros se han traducido al español, francés, chino y japonés. Entre otros trabajos del autor se cuentan cuatro volúmenes de tutoriales computarizados y numerosos documentos publicados en ediciones destacadas. El doctor Tippens es miembro activo de la Text and Academic Authors Association (TAA) y un firme defensor de la tarea de brindar información, asesoría y trabajo en red para los creadores de propiedad intelectual. Fungió durante un par de años como VP/presidente electo de la TAA, asociación que se considera como una institución muy importante para dar voz a los autores con objeto de asegurar sus derechos de propiedad intelectual. Tiene un doctorado en administración educativa por la Universidad de Auburn y una maestría en física por la Universidad de Georgia. Además, ha terminado varios cursos breves en al menos otras cuatro universidades reconocidas. En la actualidad, es profesor emérito de la Universidad Politécnica Estatal del Sur en Marieta, Georgia, donde ha dado clases de física para bachillerato durante 30 años.

Agradecimientos

Un texto clásico como el que ahora tiene el lector en sus manos es una obra en mejora permanente. La lectura crítica y la revisión del autor, de los editores y de profesores y estudiantes contribuyen a mejorarlo, a enriquecerlo. Así, el libro se convierte en una suerte de medio por el que los lectores mantienen un diálogo constante con el autor, lo que irremediablemente desemboca en nuevas ediciones o en ediciones revisadas, como la presente.

En este sentido, el profesor Víctor Manuel Jiménez Romero, del *Colegio Rossland,* merece un reconocimiento especial por la meticulosa y paciente revisión que hizo de esta obra. Sus ideas, observaciones y sugerencias resultaron muy valiosas en el momento de editar esta séptima edición revisada.

Asimismo, se extiende un agradecimiento a los profesores siguientes, quienes con sus ideas y comentarios han contribuido a enriquecer el libro.

Alfonso Alfaro Peña *CECyT 7 IPN*
Alfonso Espinosa Navarro *Colegio Michelet*
Ángel Peña Chaparro *CECyT 7 IPN*
Avelardo Cruz *Colegio Westminster*
Fernando Varela *CECyT 3 IPN*
Francisco J. Suárez Alvarado *CECyT 15 IPN*
Gabriel de Anda López *CECyT 7 IPN*
Gabriel Ramírez Guzmán *Colegio de Bachilleres de Quintana Roo, plantel 2*
Gamaliel Teja Gutiérrez *CECyT 7 IPN*
Homero García Martínez *ITESM campus Santa Fe*
Hugo Ramos Ángeles *CECyT 3 IPN*
Isaac Hernández Ardieta *UVM Coacalco*
Ismael Muñoz *ITESM campus Hidalgo*
Israel Ávila García *UVM Coacalco*
Javier Rangel Páez *Universidad de Guadalajara*
Jesús Homero Cruz Reyes *CECyT 7 IPN*
Jesús Manuel Heras Martínez *CECyT 7 IPN*
José Luis Noriega Corella *CECyT 7 IPN*
Leonel Infante *Colegio Hebreo Monte Sinaí y Hebreo Tarbut*
Leonel Ramírez Ramírez *La Salle Benjamin Franklin*
Lyzzette Tiburcio *Colegio Washington*
Manuel Cruz Nava *CECyT 7 IPN*
Marco Antonio Cárdenas Ayala *UVM Tlalpan*
Marcos Angulo Tamayo *CECyT 7 IPN*
Marcos F. Amaro Merino *CECyT 7 IPN*
Mariana Cárdenas Ramos *Universidad de Guadalajara*
Miguel Ángel Marcial *ENP 7 UNAM*
Miguel Ángel Vázquez Ibarra *UVM Lomas Verdes*
Moisés Gustavo Martínez *CECyT 7 IPN*
Rafael Morales Contreras *CECyT 7 IPN*
Raquel Núñez Mora *CECyT 7 IPN*
Rodolfo Vega García *CECyT 7 IPN*
Silvia Maffey García *CECyT 2 IPN*

Para Jared Andrew Tippens y Elizabeth Marie Tippens
Y para todo el elenco de apoyo: Sarah, Travis y Ryan Tippens
Ser bisnieto es estupendo: plenitud de alegría y sin responsabilidades

Resumen de contenido

Contenido

Prefacio

La séptima edición de *Física, conceptos y aplicaciones* está escrita para un curso propedéutico de un año de introducción a la física. El énfasis en las aplicaciones y la amplia gama de temas cubiertos lo hace adecuado para estudiantes que se especializan en ciencia y tecnología, lo mismo que en biología, las disciplinas de la salud y las ciencias del ambiente. También puede emplearse en cursos introductorios en una variedad de instituciones comerciales e industriales, donde las necesidades de un curso de aplicaciones no limiten las futuras opciones educativas de sus estudiantes. En cuanto a las matemáticas, que se han revisado ampliamente, se suponen ciertos conocimientos de álgebra, geometría y trigonometría, pero no de cálculo.

Esta obra comenzó en ediciones anteriores como un proyecto amplio para encarar la necesidad de un libro de texto que presente los conceptos fundamentales de la física de forma comprensible y aplicable por estudiantes con antecedentes y preparación diversos. El objetivo fue escribir un libro de texto legible y fácil de seguir, pero también que ofreciera una preparación sólida y rigurosa. Los generosos comentarios de muchos atentos lectores en torno a las primeras seis ediciones han contribuido a conservar el objetivo, y el trabajo ha recibido reconocimiento nacional que ha cobrado forma en el prestigioso Premio McGuffey presentado por la Text and Academic Authors Association (TAA) por su excelencia y larga duración.

En la física que se enseña en el bachillerato hay tres tendencias que influyen hoy día en la instrucción; las bases para el estudio avanzado en casi cualquier área:

1. La ciencia y la tecnología crecen exponencialmente.
2. Los empleos disponibles y las opciones de carreras precisan mayores conocimientos de las bases de la física.
3. En el nivel medio básico, la preparación en matemáticas y ciencias (por diversas razones) no está mejorando con la rapidez suficiente.

La meta de esta séptima edición de *Física, conceptos y aplicaciones* radica en atacar los dos frentes de los problemas ocasionados por tales tendencias. Si bien brindamos los conocimientos necesarios de matemáticas, no nos comprometemos con los resultados educativos.

Organización

El texto consta de 39 capítulos que abarcan todo el espectro de la física: *mecánica, física térmica, movimiento ondulatorio, sonido, electricidad, luz y óptica* y *física atómica y nuclear*. Esta sucesión normal se adecua a las necesidades de un plan de estudios de bimestral, aunque puede usarse en uno de tres semestres con un ligero cambio de orden en la exposición de los temas. También es posible utilizarlo en cursos más breves con una selección sensata de los temas. Donde es posible, la exposición fue diseñada de forma que sea posible cambiar el orden de éstos.

Hay ciertas áreas donde las explicaciones difieren de las que se ofrecen en la mayor parte de los libros de texto. Una diferencia relevante es el reconocimiento de que muchos estudiantes ingresan en su primer curso de física sin poder aplicar las habilidades básicas del álgebra y la trigonometría. Han cursado los cursos anteriores, pero por diversas razones parecen incapaces de aplicar los conceptos para resolver problemas. El dilema radica en cómo lograr el éxito sin sacrificar la calidad. En esta obra dedicamos todo un capítulo a repasar las matemáticas y el álgebra necesarias para resolver problemas de física. Cuando otros libros de texto realizan un repaso semejante, lo hacen en un apéndice o en material complementario. Nuestro método permite a los estudiantes reconocer la *importancia* de las matemáticas y ponderar muy pronto sus necesidades y sus deficiencias. Puede obviarse sin problema, según la preparación de los estudiantes o a discreción de cada maestro; sin embargo, no puede ignorarse como un requisito fundamental en la resolución de problemas.

En seguida, abordamos la necesidad de satisfacer los estándares de calidad mediante la exposición de la estática antes que la dinámica. La primera, segunda y tercera leyes de Newton se explican al principio para ofrecer conocimientos cualitativos de la fuerza, mas la exposición integral de la segunda ley se difiere hasta que se han comprendido los conceptos de diagrama de cuerpo libre y equilibrio estático. Lo anterior permite a los estudiantes forjar sus conocimientos sobre una base lógica y continua; de manera simultánea, las habilidades matemáticas se refuerzan de manera paulatina. En otros libros el tratamiento de la estática en capítulos ulteriores suele precisar un repaso de fuerzas y vectores. Con el método de esta obra, es posible ofrecer ejemplos más detallados de aplicaciones significativas de la segunda ley de Newton.

También incluimos un capítulo sobre *máquinas simples* a fin de ofrecer a los maestros la posibilidad de hacer énfasis en muchos ejemplos del mundo real que implican conceptos de fuerza, fuerza de torsión, trabajo, energía y eficiencia. Este capítulo puede omitirse sin dificultad si el tiempo es escaso, pero ha gozado de gran aceptación en algunos colegios donde las aplicaciones son primordiales.

La física moderna se aborda como un curso general sobre los principios de la *relatividad, física atómica y nuclear*. En este caso, la exposición es tradicional y los temas han sido elegidos de forma que los estudiantes puedan comprender y aplicar las teorías subyacentes a muchas aplicaciones modernas de la física atómica y la nuclear.

Novedades en la séptima edición

Cambios en el contenido

- **Exposición sobre vectores.** Se hace énfasis en el método tradicional de las componentes en la suma de vecto-

res, pero se ha añadido una opción que permite usar vectores unitarios.

- **Segunda ley de Newton.** Desde el principio se presenta la relación entre la aceleración y la fuerza a fin de ofrecer conocimientos cualitativos de fuerza, aunque después que se ha tenido práctica considerable con los diagramas de cuerpo libre se hace una exposición más detallada.
- **Energía cinética de rotación.** Una adición significativa amplía la explicación de la rotación en los problemas de conservación de la energía, ya que se abarca el problema de los objetos que tienen a la vez movimientos de traslación y de rotación.
- **Ondas electromagnéticas.** Antes de la exposición de la luz y la óptica se presenta más ampliamente el tema de las ondas electromagnéticas.
- **Ejemplos.** Se han agregado ejemplos nuevos y todos los presentados se han vuelto a trabajar para simplificar la explicación y esclarecer el proceso de resolución de los problemas.
- Se han eliminado las secciones sobre electroquímica y el capítulo sobre electrónica con base en comentarios vertidos por lectores y revisores.

Programa de imágenes mejoradas

- **Fotografías de entrada de capítulo.** Se ha hecho un esfuerzo por lograr que la física luzca más visual mediante la inclusión de fotografías introductorias en cada capítulo acompañadas por un breve comentario. Esas imágenes se eligieron con sumo cuidado para que demostraran los conceptos y las aplicaciones expuestas en los capítulos.
- **Figuras.** Todas las figuras fueron revisadas o redibujadas. En muchos casos, se insertaron fragmentos de fotografías en los dibujos para mejorarlos, además de que se usaron más recuadros de color para destacar conceptos.

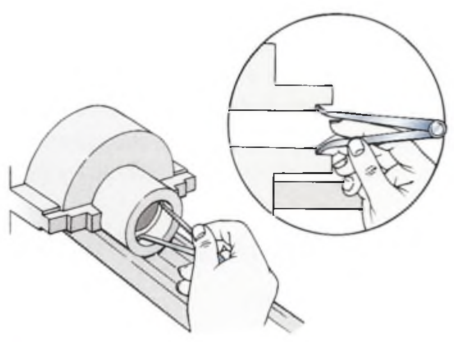
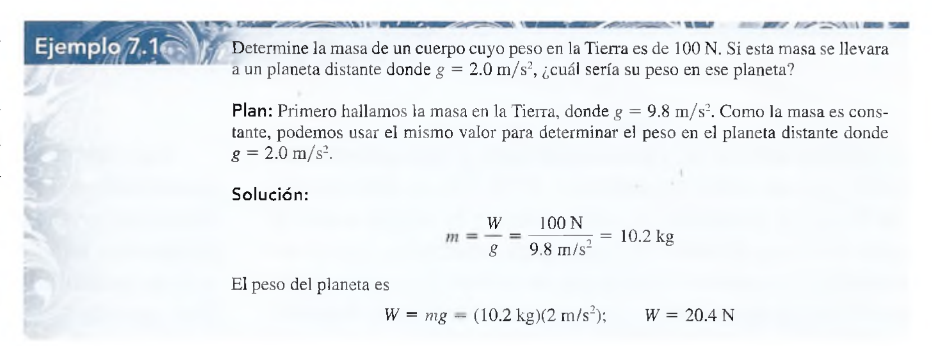


Figura 3.3 Se usan calibradores para medir un diámetro interno.



Ejemplo 7.1 Determine la masa de un cuerpo cuyo peso en la Tierra es de 100 N. Si esta masa se llevara a un planeta distante donde $g = 2.0\ \text{m/s}^2$, ¿cuál sería su peso en ese planeta?

Plan: Primero hallamos la masa en la Tierra, donde $g = 9.8\ \text{m/s}^2$. Como la masa es constante, podemos usar el mismo valor para determinar el peso en el planeta distante donde $g = 2.0\ \text{m/s}^2$.

Solución:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{100\ \text{N}}{9.8\ \text{m/s}^2} = 10.2\ \text{kg}$$

El peso del planeta es

$$W = mg = (10.2\ \text{kg})(2\ \text{m/s}^2); \qquad W = 20.4\ \text{N}$$

Párrafos de planeación

Los estudiantes de primer curso suelen decir: "es que no sé por dónde empezar". Para encarar esta queja hemos incluido un paso adicional para muchos de los ejemplos del libro. Los párrafos del plan tienden un puente entre la lectura de un problema y la aplicación de una estrategia de aprendizaje.

Temas de física cotidiana

Se han incluido apostillas a lo largo del texto para fomentar el interés y motivar el estudio ulterior.

FÍSICA HOY

¿Sabe cuánto tiempo pasan los satélites expuestos a la luz solar para recargar sus baterías? Para la órbita terrestre baja, toman 60 min de luz solar y 35 min de oscuridad. Los satélites en la órbita geosíncrona (GEO) de la Tierra, que se hallan mucho más distantes, pasan menos tiempo en la sombra de nuestro planeta. Se exponen 22.8 h a la luz del Sol y 1.2 a la oscuridad. Durante el periodo oscuro, la potencia para hacer caminar a los satélites debe proceder completamente de las baterías.

www. mhhe.com/ bachillerato/tippensfis7e

McGraw-Hill ofrece abundantes artículos en línea y apoyos para estudiar que mejoran de forma considerable la experiencia de enseñar y aprender física (en inglés).

Digital Content Manager/ Administrador de contenido digital

Es un disco compacto de sólo lectura (CD-ROM) que contiene todas las ilustraciones del libro. Los profesores pueden usarlas para elaborar presentaciones a la medida de su clase u otras herramientas similares (en inglés).

Programas interactivos

Hay un total de 16 programas interactivos disponibles en el CD-ROM y en línea en el Online Learning Center. Estos programas ofrecen un método fresco y dinámico para enseñar y aprender los fundamentos de la física mediante *applets* completamente precisos que funcionan con datos reales (en inglés).

Características que se conservan

Se han conservado varias características de las ediciones anteriores, las cuales captan y mantienen la atención de los estudiantes. Entre ellas se cuentan las siguientes:

Preparación en matemáticas

El capítulo 2 se dedica íntegramente a repasar las matemáticas y la trigonometría indispensables para resolver problemas de física.

Objetivos del capítulo

A fin de encarar los problemas de los resultados educativos, cada capítulo empieza con una definición clara de los objetivos. El estudiante sabe desde el principio qué temas son relevantes y qué resultados cabe esperar.

Estrategias de resolución de problemas

A lo largo del texto se han incluido secciones destacadas en color con procedimientos detallados, paso por paso, para resolver problemas difíciles de física. Los estudiantes pueden emplear estas secciones como guía hasta familiarizarse con el proceso de razonamiento necesario para aplicar los conceptos fundamentales expuestos en el libro. Gracias a los numerosos ejemplos incluidos se refuerzan estas estrategias.

Redacción informativa

Un sello de las ediciones previas que continua destacando en esta edición es la presentación de la física con un estilo amigable e informativo.

Uso de color

Se ha utilizado el color para destacar en el texto las características pedagógicas. Los ejemplos, las estrategias de aprendizaje y las ecuaciones más importantes se han destacado con color, además de que se han usado tonos diversos para hacer énfasis en algunas partes de las figuras.

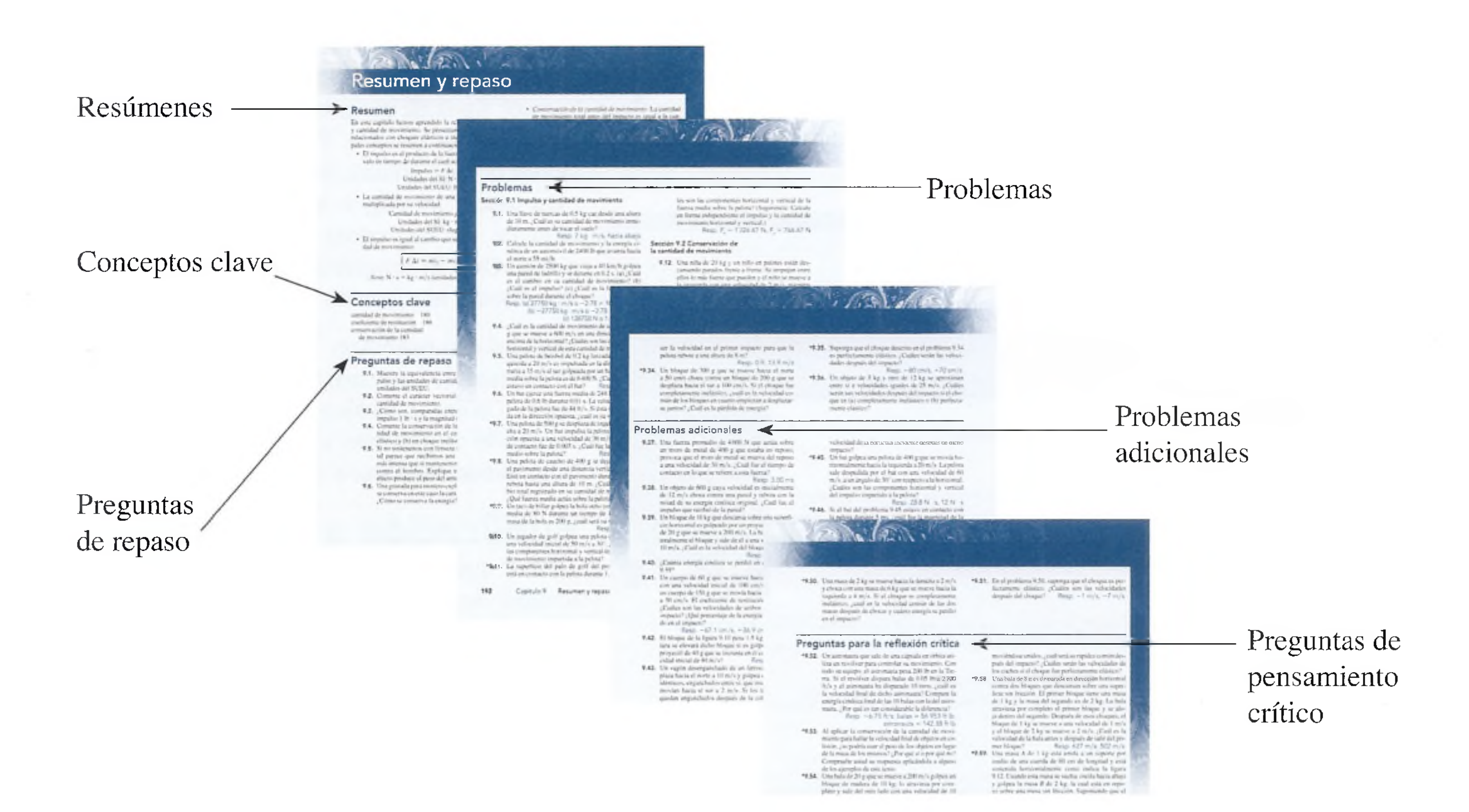
Ejemplos textuales

A lo largo de todos los capítulos hay una profusión de ejemplos resueltos, que sirven como modelos para que el estudiante mire cómo aplicar los conceptos expuestos en el libro. El alumno aprende a formarse un cuadro general de la situación y luego pone en práctica lo aprendido para resolver el problema.

Material al final de cada capítulo

Al terminar cada capítulo se incluye un juego de auxiliares para el aprendizaje que ayudan al estudiante a repasar el contenido recién expuesto, a evaluar lo captado de los conceptos más relevantes y a utilizar lo aprendido.

- **Resúmenes.** Se ofrece un resumen detallado de todos los conceptos esenciales. Asimismo, en el texto se destacan las ecuaciones importantes, además de que se resumen al terminar cada capítulo.
- **Palabras clave.** Al final de cada capítulo se enumeran las palabras clave, las cuales se destacan también en negritas la primera vez que aparecen en el texto. Entre estas palabras se cuentan los términos centrales explicados en el capítulo, de forma que el estudiante pueda comprobar cuánto comprende de los conceptos que les subyacen.
- **Preguntas de repaso.** Se han incluido más de 500 preguntas cuyo propósito es fomentar la reflexión y estimular las ideas, así como mejorar el pensamiento conceptual.
- **Problemas y problemas adicionales.** Se ofrecen más de 1 750 problemas elaborados especialmente y que van de lo simple a lo complejo, pasando por lo moderado. En la presente edición se ha hecho un gran



esfuerzo por comprobar la exactitud de los problemas y de las respuestas dadas a los de número impar. *Nota:* No se ha puesto asterisco al lado de los problemas sencillos; los moderados tienen uno y los complejos, dos.

- **Preguntas de pensamiento crítico.** Para la resolución de 250 problemas, aproximadamente, se precisa una reflexión moderada o mayor que los demás. Con ellos se brindan ejemplos de aprendizaje que guían al estudiante y construyen habilidades de resolución de problemas. *Nota:* Según la naturaleza de la pregunta, se dan algunas respuestas a ciertas preguntas pares y a ciertas impares.

Complementos en inglés

Online Learning Center/ Centro de aprendizaje en línea www. mhhe.com/bachillerato/tippensfis7e

Entre los recursos en línea para el estudiante se cuentan:

- **Preguntas para estudiar.** Hay preguntas de verdadero-faso, selección múltiple y de completar partes.
- **Tutoriales.** El autor ha preparado un completo juego de módulos de enseñanza en PowerPoint, basados en la Web, para cada capítulo del libro. Estos tutoriales son estupendos para hacer un repaso antes y después de clase, antes de los exámenes parciales y también de los finales. Asimismo, son de suma utilidad para los estudiantes que faltan a clase o que quieren mayor práctica y explicación acerca de los conceptos físicos.
- **Programas interactivos.** McGraw-Hill se enorgullece de brindarle una colección de *applets* interactivos excepcionales, sin par. Estos programas interactivos ofrecen un método fresco y dinámico para enseñar los fundamentos de la física al dar a los estudiantes programas muy precisos y que funcionan con datos reales. Los programas interactivos permiten a los estudiantes manipular parámetros y mejorar así su comprensión de 16 de los temas más difíciles de la física, ya que observan los efectos producidos por tal manipulación. En cada programa interactivo se incluye una herramienta de análisis (modelo interactivo), un tutorial que describe su funcionamiento y un texto que describe sus temas centrales. Los usuarios pueden ir de un ejercicio a otro y de una herramienta a otra con sólo hacer clic con el ratón.

Por añadidura, los recursos en línea también incluyen:

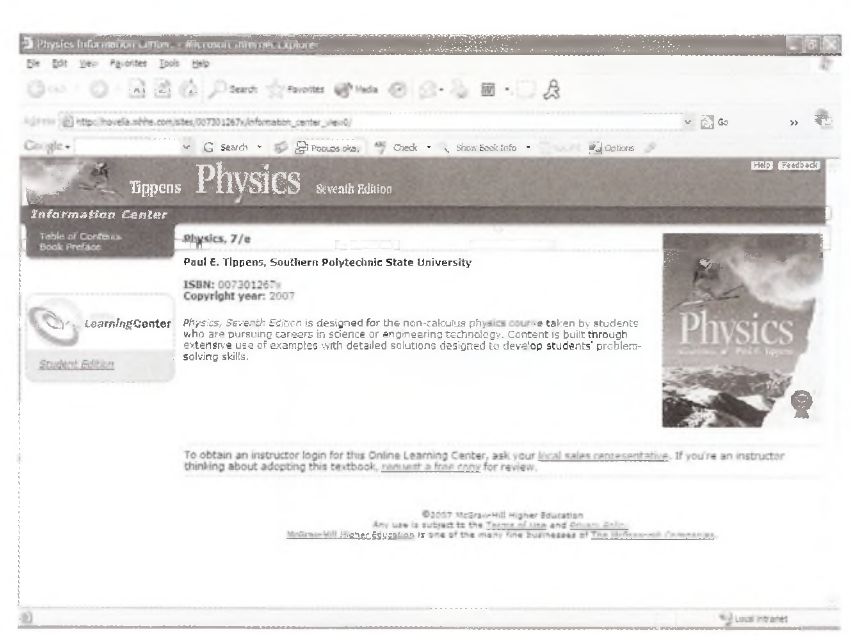
- Manual del profesor, con las soluciones a todos los problemas del final de cada capítulo, así como notas acerca de los experimentos de laboratorio.
- El Online Learning Center puede cargarse sin problema en sistemas de administración del curso como Blackboard, WebCT, eCollege y PageOut.

Digital Content Manager/ Administrador de contenido digital

En este disco compacto (CD-ROM) se incluyen todas las ilustraciones, fotografías y tablas presentadas en el texto, junto con los 16 programas interactivos. Con el software puede elaborar fácilmente una presentación multimedia a la medida. Puede organizar las figuras como desee; añadir etiquetas, líneas y sus propias ilustraciones; integrar material de otras fuentes; editar y escribir notas de la clase; y le ofrece la posibilidad de colocar su clase multimedia en una presentación hecha con otro programa, como PowerPoint.

CD-ROM de pruebas y recursos del maestro

El programa de pruebas electrónicas complementario es flexible y fácil de utilizar. Permite a los maestros crear pruebas con base en temas específicos del libro. Permite emplear diversos tipos de preguntas, además de que el profesor puede añadir las propias. Puede crear varias versiones de una prueba, y ésta puede exportarse para usarla con algún sistema de administración de cursos, como WebCT, BlackBoard o PageOut. El programa está disponible para Windows y Macintosh.



Manual del maestro

El manual del maestro está incluido en el Tippens Online Learning Center y en el disco compacto de pruebas y recursos del maestro. Sólo pueden acceder a él los maestros.

Publicación a la medida

¿Sabía que puede diseñar su propio texto o manual de laboratorio usando cualquier texto de McGraw-Hill y su propia material a fin de crear un producto a la medida que se ajuste específicamente a su programa de estudios y objetivos del curso? Comuníquese con su representante de ventas de McGraw-Hill para conocer más acerca de esta posibilidad.

Reconocimientos

Revisores de la presente edición

Deseamos reconocer y dar las gracias a los revisores de esta edición. Su contribución, aunada a sus sugerencias constructivas, ideas novedosas e invaluables consejos fueron significativos en el desarrollo tanto de esta edición como del material complementario. Entre los revisores se hallan:

Abraham C. Falsafi *National Institute of Technology*
Baher Hanna *Owens Community College*
Kevin Hulke *Chippewa Valley Technical College*
Benjamin C. Markham *Ivy Tech State College*
James L. Meeks *West Kentucky Community & Technical College*
John S. Nedel *Columbus State Community College*
Rusell Patrick *Southern Polytechnic State University*
Sulakshana Plumley *Community College of Allegheny County*
August Ruggiero *Essex County College*
Erwin Selleck *SUNY College of Technology en Canton*
Rich Vento *Columbus State Community College*
Carey Witkov *Broward Community College*
Todd Zimmerman *Madison Area Technical College*

Agradecimientos especiales

El autor y McGraw-Hill agradecen a Rich Vento, profesor de la Columbus State Community College, por revisar por completo la exactitud del manuscrito de esta edición. Los comentarios de Rich fueron invaluables para esta edición.

También damos un agradecimiento especial a Rusell Patrick, profesor en la Southern Polytechnic State University, por actualizar el banco de pruebas que complementa esta obra.

Revisores de ediciones previas

Las personas siguientes revisaron ediciones previas del libro. Sus comentarios y sus consejos mejoraron mucho la legibilidad, precisión y actualidad del texto.

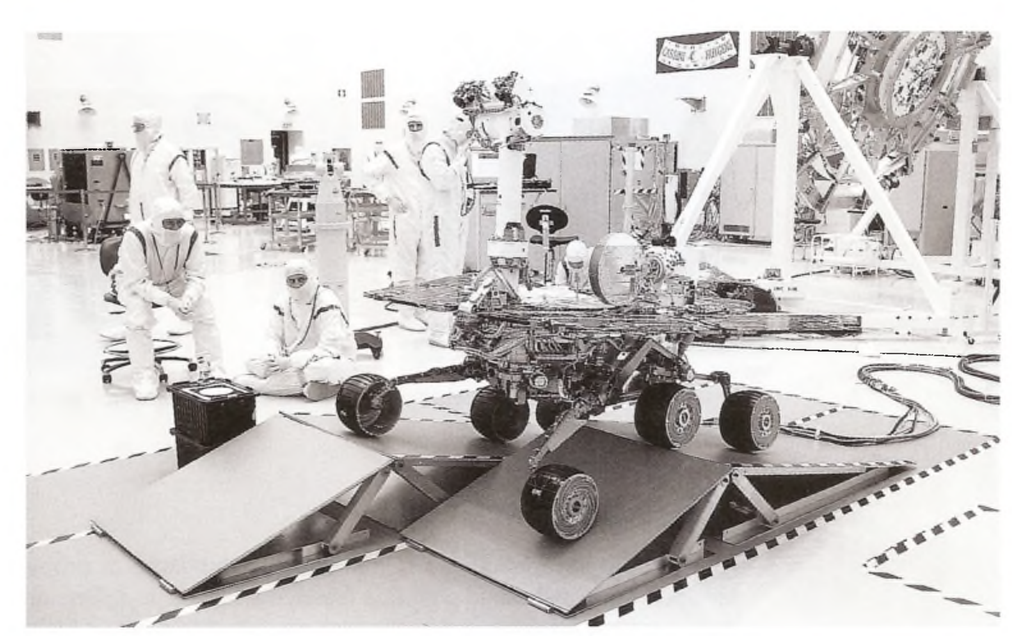
Shaikh Ali *City College of Fort Lauderdale*
Fred Einstein *County College of Morris*
Miles Kirkhuff *Lincoln Technical Institute*
Henry Merril *Fox Valley Technical College*
Sam Nalley *Chattanooga State Technical Community College*
Ajay Raychaudhuri *Seneca College of Arts and Technology*
Charles A. Schuler *California State University of Pennsylvania*
Scott J. Tippens *Southern Polytechnic State University*
Bob Tyndall *Forsyth Technical Community College*
Ron Uhey *ITT Tech Institute*
Cliff Wurst *Motlow State Community College*

El equipo del libro de McGraw-Hill

El autor desea expresar su enorme respeto y gratitud por el esfuerzo del gran equipo de profesionales de McGraw-Hill que ha dado incontables horas de su tiempo y conocimiento para desarrollar y producir esta edición de *Física*. Agradezco de manera particular a mi editor de desarrollo, Liz Recker, por mucho el mejor editor con que he trabajado en muchos años. Gloria Schiesl, la gerente senior de proyecto, trabajó larga y arduamente a fin de que la producción no tuviera ningún obstáculo. Daryl Bruflodt (Sponsoring Editor), Todd Turner (Marketing Manager), Jeffry Schmitt (Media Producer), Judi David (Media Project Manager), Carrie Burger (Lead Photo Research Coordinator), Laura Fuller (Production Supervision) y Shirley Oberbroeckling (Managing Developmental Editor) también realizaron tareas de suma importancia en esta revisión.



1 Introducción



Centro espacial Kennedy, en Florida. En las instalaciones de servicio de cargas peligrosas los trabajadores observan el Mars Exploration Rover-2 (MER-2) subir por la rampa para probar su movilidad y facilidad de maniobra. Los científicos y los ingenieros aplican el método científico para verificar que el vehículo puede realizar tareas semejantes a las requeridas en la exploración de Marte. (*Foto de la NASA.*)

El conocimiento de la física es esencial para comprender el mundo. Ninguna otra ciencia ha intervenido de forma tan activa para revelarnos las causas y efectos de los hechos naturales. Basta mirar al pasado para advertir que la experimentación y el descubrimiento forman un *continuum* que corre desde las primeras mediciones de la gravedad hasta los más recientes logros en la conquista del espacio. Al estudiar los objetos en reposo y en movimiento, los científicos han podido deducir las leyes fundamentales que tienen amplias aplicaciones en ingeniería mecánica. La investigación de los principios que rigen la producción de calor, luz y sonido ha dado paso a incontables aplicaciones que han hecho nuestra vida más cómoda y nos han permitido convivir mejor con nuestro entorno. La investigación y el desarrollo en las áreas de la electricidad, el magnetismo y la física atómica y nuclear han desembocado en un mundo moderno que habría sido inconcebible hace tan sólo 50 años (véase figura 1.1).

Es difícil imaginar siquiera un producto de los que disponemos hoy día que no suponga la aplicación de un principio físico. Ello significa que, independientemente de la carrera que se haya elegido, es indispensable entender la física, al menos hasta cierto punto. Es verdad que algunas ocupaciones y profesiones no requieren una comprensión tan profunda de ella como la que exigen las ingenierías, pero la realidad es que en todos los campos de trabajo se usan y aplican sus conceptos. Dotado de sólidos conocimientos de mecánica, calor, sonido y electricidad, el lector contará con los elementos necesarios para cimentar casi cualquier profesión. Además, si antes o después de graduarse le fuera necesario cambiar de carrera, sabrá que cuenta con un conocimiento básico de ciencias y matemáticas en general. Si toma con seriedad este curso y dedica a su estudio una dosis especial de tiempo y energía, tendrá menos problemas en el futuro. Así, en los cursos posteriores y en el trabajo podrá viajar sobre la cresta de la ola en lugar de mantenerse simplemente a flote en un mar tormentoso.

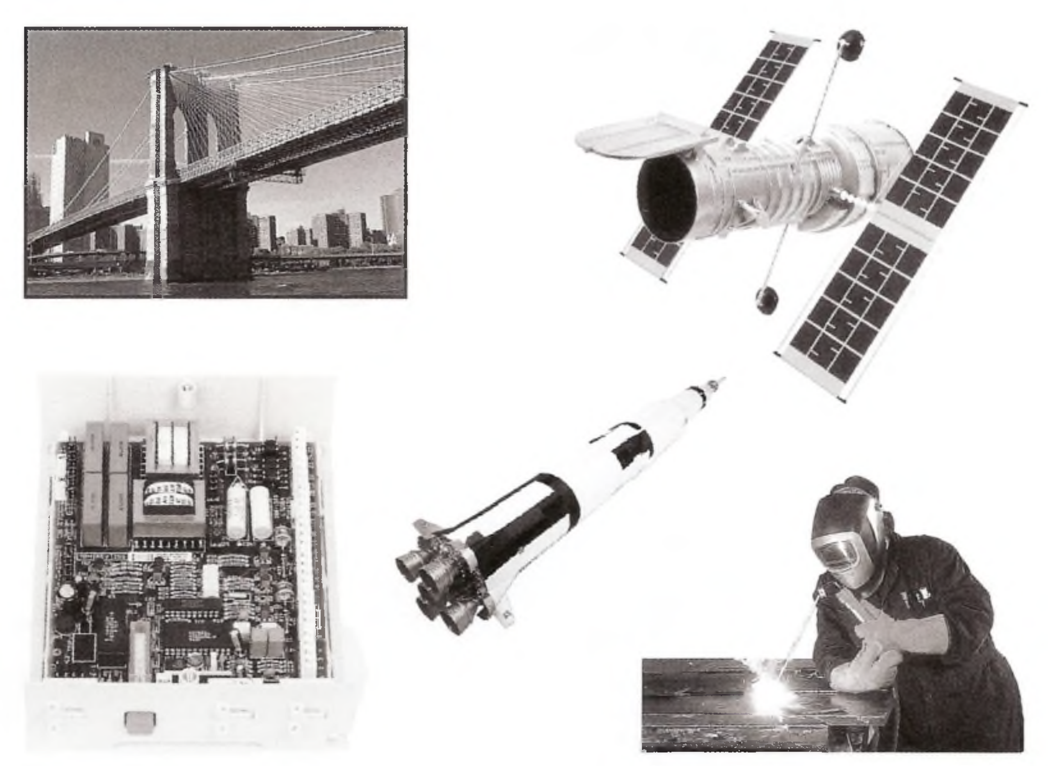


Figura 1.1 En muchas ocupaciones se hallan aplicaciones de los principios de la física. (*Fotos cortesía de Hemera, Inc.*)

¿Qué es la física?

Aun cuando haya estudiado la materia en secundaria, es probable que sólo tenga una vaga idea de lo que realmente significa la *física* y en qué se diferencia, por ejemplo, de la ciencia. Para nuestros propósitos, las ciencias pueden dividirse en *biológicas* y *físicas*. Las ciencias biológicas se ocupan de los seres vivos, en tanto que las físicas tienen como objeto de estudio la parte no viva de la naturaleza.

La **física** puede definirse como la ciencia que investiga los conceptos fundamentales de la materia, la energía y el espacio, así como las relaciones entre ellos.

De acuerdo con esta amplia definición, no hay fronteras claras entre las ciencias físicas, lo cual resulta evidente en áreas de estudio como la biofísica, la fisicoquímica, la astrofísica, la geofísica, la electroquímica y muchas otras especialidades.

El objetivo de esta obra es brindar una introducción al mundo de la física, con un énfasis en las aplicaciones. Con ello, el vasto campo de esta disciplina se simplifica a los conceptos esenciales subyacentes en todo conocimiento técnico. Estudiará usted mecánica, calor, luz, sonido, electricidad y estructura atómica. El tema fundamental de todos ellos, y probablemente el más importante para el alumno principiante es la mecánica.

La mecánica se refiere a la posición (estática) y al movimiento (dinámica) de la materia en el espacio. La *estática* es el estudio de la física aplicado a los cuerpos en reposo. La *dinámica* se ocupa de la descripción del movimiento y sus causas. En ambos casos, el ingeniero o técnico se encarga de medir y describir las cantidades físicas en términos de causa y efecto.

Un ingeniero, por ejemplo, aplica los principios de la física para determinar qué tipo de estructura será más eficaz en la construcción de un puente. Su interés se centra en el *efecto* de las fuerzas. Si un puente terminado llegara a fallar, la *causa* de la falla requeriría ser analizada para aplicar ese conocimiento a las construcciones futuras de ese tipo. Es importante señalar que el científico define como causa la sucesión de hechos físicos que desembocan en un *efecto*.

¿Qué importancia tienen las matemáticas?

Las matemáticas sirven para muchos fines. Son a la vez filosofía, arte, metafísica y lógica. Sin embargo, todos estos aspectos se subordinan a su función principal: son una herramienta para el científico, el ingeniero o el técnico. Una de las mayores satisfacciones que brinda un primer curso de física es que se cobra mayor conciencia de la importancia de las matemáticas. Un estudio de física revela aplicaciones concretas de las matemáticas básicas.

Supongamos que se desea predecir cuánto tarda en detenerse un automóvil que se desplaza con cierta rapidez. Primero es necesario controlar cuantas variables sea posible. En las pruebas, buscará que cada frenado sea uniforme, de modo que la rapidez media se aproxime a la mitad de la rapidez inicial. Expresado en símbolos esto puede escribirse:

$$v_{\text{media}} \approx \frac{v_i}{2}$$

También se controlarán las condiciones y la pendiente de la carretera, el clima y otros parámetros. En cada prueba se registrará la rapidez inicial (v_i), la distancia a la que se detiene el vehículo (x) y el tiempo en que lo hace (t). También puede tomar nota de la rapidez inicial, del cambio de rapidez, así como de la distancia y el tiempo necesarios para detener el automóvil. Cuando todos estos factores se han registrado, los datos sirven para establecer una relación tentativa. No es posible hacer esto sin usar las herramientas que ofrecen las matemáticas.

Con base en la definición de rapidez como la distancia recorrida por unidad de tiempo se observa que la distancia de frenado, x en nuestro ejemplo, puede ser producto de la velocidad media $v_i/2$ multiplicada por el tiempo, t. La relación tentativa podría ser

$$x = \frac{v_i}{2}t \qquad \text{o} \qquad x = \frac{v_i t}{2}$$

Obsérvese que hemos usado símbolos para representar los parámetros importantes y las matemáticas para expresar su relación.

Esta proposición es una *hipótesis viable*. A partir de esta ecuación es posible predecir la distancia a la que se detendrá cualquier vehículo con base en su rapidez inicial y el tiempo de frenado. Cuando una hipótesis se ha aplicado el suficiente número de veces para tener un grado de seguridad razonable de que es verdadera, se le llama *teoría científica*. En otras palabras, cualquier teoría científica no es más que una hipótesis viable que ha resistido la prueba del tiempo.

Por tanto, podemos darnos cuenta de que las matemáticas son útiles para obtener fórmulas que nos permiten describir los hechos físicos con precisión. Las matemáticas adquieren mayor relevancia aun en la resolución de esas fórmulas con cantidades específicas.

Por ejemplo, en la fórmula anterior sería relativamente fácil hallar los valores de x, v_i y t cuando se conocen las otras cantidades. Sin embargo, muchas relaciones físicas implican mayores conocimientos de álgebra, trigonometría e incluso cálculo. La facilidad con que pueda deducir o resolver una relación teórica depende de sus conocimientos de matemáticas.

En el capítulo 2 se presenta un repaso de los conceptos matemáticos necesarios para entender este texto. Si desconoce alguno de los temas expuestos debe estudiar atentamente ese capítulo. Preste especial atención a las secciones sobre potencias de 10, ecuaciones literales y trigonometría. De su habilidad para aplicar las herramientas matemáticas dependerá en gran medida su éxito en cualquier curso de física.

¿Cómo estudiar física?

La lectura de un texto técnico es diferente de la de otros temas. Es indispensable prestar atención al significado específico de las palabras para comprender el tema. En los textos técnicos se utilizan a menudo gráficas, dibujos, tablas y fotografías, elementos siempre útiles y a veces incluso esenciales para describir los hechos físicos. Debe estudiarlos con detenimiento para entender bien los principios.

Gran parte del aprendizaje se obtiene a partir de las exposiciones en el aula y de los experimentos. El alumno principiante suele preguntarse: "¿Cómo puedo concentrarme por

completo en la clase y al mismo tiempo tomar notas precisas?" Por supuesto, quizá no sea posible comprender cabalmente todos los conceptos expuestos y, además, tomar apuntes completos. Por ello, debe aprender a anotar sólo las partes importantes de cada lección. Cerciórese de escuchar bien la explicación de los temas. Aprenda a reconocer las palabras clave, como *trabajo, fuerza, energía* y *cantidad de movimiento*[1].

La preparación adecuada antes de la clase le dará una buena idea de qué partes de la exposición se explican en el texto y cuáles no. Si se presenta un problema o una definición en el texto generalmente es mejor que anote una palabra clave durante la clase y centre toda la atención en lo que explica el profesor; después puede complementar la nota.

Cada estudiante que entra en un curso de física para principiantes cuenta ya con los requisitos y las habilidades necesarias para aprobarlo; por ende, si no lo hace se deberá a otras razones: acaso falta de motivación, una excesiva carga de trabajo, un empleo externo, enfermedades o problemas personales. Los consejos siguientes provienen de profesores con experiencia que han tenido éxito en los cursos para estudiantes de los primeros niveles de física.

- ***La responsabilidad final del aprendizaje corresponde al estudiante.*** El maestro es un mero facilitador, la escuela es un simple campus y el texto es sólo un libro. Asista puntualmente a las clases, preparado para los temas que se expondrán. Estudie antes el material y anote las preguntas que desee plantear al profesor.
- ***El aprendizaje oportuno es aprendizaje eficaz.*** Es mejor estudiar una hora cada día de la semana que 20 el sábado y el domingo. Después de cada clase o exposición emplee su hora libre más próxima para reforzar lo que ha aprendido de los temas presentados. Repase algunos ejemplos. Cuanto más tiempo deje pasar más olvidará de la clase y perderá más tiempo. Si espera hasta el fin de semana necesitará al menos una hora simplemente para revisar y reconstruir la clase a partir de sus notas. *Estudiar todo poco antes del examen no funciona*; mejor repase los problemas que ya haya resuelto y trabaje en el libro otros semejantes.
- ***El aprendizaje cabal va más allá del salón de clases.*** A fin de retener y aplicar lo aprendido en el salón, es indispensable que resuelva problemas por su cuenta. Solicite la ayuda de otras personas, incluida la del profesor, después de haberse esforzado en contestar los problemas asignados. No hay sustituto para la participación activa en el pensamiento y en los procedimientos necesarios para resolver problemas.
- ***Repase las habilidades básicas.*** En el capítulo 2, que versa sobre matemáticas técnicas, destaca las habilidades que tal vez estén un tanto débiles o haya que pulir. Asegúrese de que entiende bien esos temas.
- ***Estudie el plan de actividades.*** Procure estar enterado de los temas que se incluirán en los exámenes, cuándo se llevarán a cabo éstos y cómo influirán en la calificación final.
- ***Busque un compañero y pídale su número telefónico.*** Establezca un *sistema de compañerismo* donde cada uno informe al otro sobre las actividades de clase o de laboratorio a las que no haya asistido. Pida a esa persona que recoja los materiales impresos y las instrucciones que se den cuando usted no esté presente.
- ***La organización es la clave del verdadero aprendizaje.*** Mantenga al día una carpeta de argollas, dividida por secciones con sus respectivos títulos: "Material impreso recibido", "Notas", "Problemas", "Exámenes calificados", "Prácticas de laboratorio calificadas".
- ***Si tiene dificultades, pida ayuda cuanto antes.*** Hoy día los estudiantes tienen a su alcance una gran cantidad de material de estudio que otrora sólo existía en sueños. Hay tutoriales asistidos por computadora, internet, guías de soluciones, manuales de resolución de problemas e incluso otros libros de textos que explican los mismos temas. Su profesor o bibliotecario le indicarán qué y cómo puede conseguirlos, pero usted es responsable de obtenerlos.

Tras muchos años de enseñar física en el bachillerato he notado que la razón más común por la que a muchos estudiantes de los primeros niveles se les dificulta la materia es la mala

[1] Como sinónimos de cantidad de movimiento, también se emplean *momento lineal* e *ímpetu*. (N. del E.)

planificación y organización. Hoy día un estudiante puede tomar dos o tres materias, incluso más, mientras cursa física. Por añadidura, puede trabajar en un empleo de medio tiempo; o estar casado y tener hijos; o contar con varias actividades extraclase; o asistir al curso de física aun antes de terminar los cursos de matemáticas necesarios para entender la materia. Pronto se torna evidente que no alcanza el tiempo para ahondar en una sola área de estudio. Por consiguiente, debe establecer un calendario riguroso, con objetivos y prioridades firmes. Para ayudarle en su elaboración, le recomiendo que considere también los aspectos siguientes:

- En cuanto a la preparación para el bachillerato y para su futuro en el mundo técnico de la actualidad, la física es el curso más importante de los primeros niveles. (*Debatiré con gusto sobre esta afirmación con cualquier persona, y a menudo lo hago.*)
- No espere entender a cabalidad los principios de la física del mismo modo que aprende los de otras materias no técnicas. La verdadera comprensión de la disciplina se logra con la *aplicación* y la *resolución de problemas*. Debe aplicar un concepto *poco después* de que se le haya explicado; de otro modo, sólo perderá el tiempo intentando reconstruir sus ideas. Trate de programar una hora libre inmediatamente después de su clase de física e intente trabajar con los ejemplos mientras la lección aún está fresca en su mente.
- Organice sus hábitos de estudio en torno a la naturaleza de las materias que cursa. Muchas disciplinas obligatorias precisan numerosas lecturas y elaboración de informes, y pueden encararse diferente de las matemáticas y la física. Todas son importantes, pero estas últimas no pueden aprenderse bien si estudia todo al final. Cuando los temas sucesivos *requieren* entender los temas anteriores crece la posibilidad de rezagarse pronto.
- Nunca he dado un curso de física sin que falte alguien que se queje porque la "ansiedad por los exámenes" es la principal razón de sus malas calificaciones. Cierto, se trata de un problema real, más grave en unos que en otros. Me parece que la mejor forma de lidiar con él es procurándose una preparación completa y apropiada. Debe trabajar con cuantos ejemplos sea posible antes del examen. En el basquetbol la victoria puede depender de un tiro libre al final. El triunfador es el jugador que ha encestado tantos tiros libres que sus reflejos se hallan condicionados para responder incluso bajo presión.



2 Matemáticas técnicas

Las matemáticas son una herramienta fundamental para todas las ciencias. En la gráfica que aparece en la pantalla de la computadora se muestra una aplicación de la trigonometría. (*Foto de Paul E. Tippens.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará su habilidad para sumar, restar, multiplicar y dividir unidades técnicas de medida.
2. Resolverá fórmulas sencillas para cualquier cantidad que aparezca en la fórmula y realizará evaluaciones por sustitución.

3. Resolverá problemas sencillos que impliquen operaciones con exponentes y radicales.
4. Realizará operaciones matemáticas comunes en notación científica.
5. Trazará una gráfica a partir de datos técnicos específicos e interpretará nueva información con base en aquélla.
6. Aplicará las reglas elementales de la geometría para calcular ángulos desconocidos en situaciones concretas.

Suele ser decepcionante abrir un libro de física y ver que empieza con matemáticas. Naturalmente, usted desea aprender sólo las cosas que considera necesarias. Quiere tomar medidas, operar máquinas o motores, trabajar con algo o al menos saber que no ha perdido el tiempo. Según su experiencia, podrá omitir gran parte o todo este capítulo, a juicio de su profesor. Tenga presente que los fundamentos son importantes y que ciertas habilidades matemáticas son indispensables. Tal vez comprenda perfectamente los conceptos de fuerza, masa, energía y electricidad, pero quizá no sea capaz de aplicarlos en su trabajo por falta de conocimientos matemáticos fundamentales. Las matemáticas son el lenguaje de la física. A lo largo de la obra nos hemos esforzado por lograr que ese lenguaje sea tan sencillo y relevante como sea necesario.

En cualquier ocupación industrial o técnica tenemos que efectuar mediciones de algún tipo. Puede tratarse de la longitud de una tabla, el área de una hoja de metal, el número de tornillos que hay que pedir, el esfuerzo al que está sometida el ala de un avión o la presión en un tanque de aceite. La única forma en que podemos dar sentido a esos datos es mediante números y símbolos. Las matemáticas brindan las herramientas necesarias para organizar los datos y predecir resultados. Por ejemplo, la fórmula $F = ma$ expresa la relación entre una fuerza aplicada (F) y la aceleración (a) que ésta produce. La cantidad m es un símbolo que representa la masa de un objeto (una medida de la cantidad de materia que contiene). A través de los pasos matemáticos apropiados podemos usar fórmulas como ésa para predecir acontecimientos futuros. Sin embargo, en muchos casos se precisan conocimientos generales de álgebra y geometría. Este capítulo le ofrece un repaso de algunos de los conceptos esenciales en matemáticas. El estudio de las diferentes secciones del capítulo podrá ser asignado u omitido a criterio de su profesor.

2.1 Números con signo

A menudo es necesario trabajar con números negativos y positivos. Por ejemplo, una temperatura de −10°C significa 10 grados "abajo" del punto de referencia cero, y 24°C una temperatura que está 24 grados "arriba" del cero (véase la figura 2.1). Los números se refieren a la *magnitud* de la temperatura, mientras que el signo más o menos indica el *sentido* respecto al cero. El signo menos en −10°C no indica falta de temperatura; significa que la temperatura es menor que cero. El número 10 en −10°C describe cuan lejos de cero se halla la temperatura; el signo menos es necesario para indicar el sentido respecto del cero.

El valor de un número sin signo se conoce como su *valor absoluto*. En otras palabras, si omitimos los signos de +7 y −7, el valor de ambos números es el mismo. Cada número está a siete unidades del cero. El valor absoluto de un número se indica por medio de un símbolo formado por barras verticales. El número +7 no es igual que el número −7; pero $|+7|$ sí es igual que $|-7|$. Cuando se realizan operaciones aritméticas que incluyen números con signo se usan sus valores absolutos.

Los signos más y menos también se emplean para indicar operaciones aritméticas; por ejemplo:

7 + 5 significa "sumar el número +5 al número +7"

7 − 5 significa "restar el número +5 del número +7"

Si queremos indicar la suma o la resta de números negativos, resulta útil emplear paréntesis:

(+7) + (−5) significa "sumar el número −5 al número +7"

(+7) − (−5) significa "restar el número −5 del número +7"

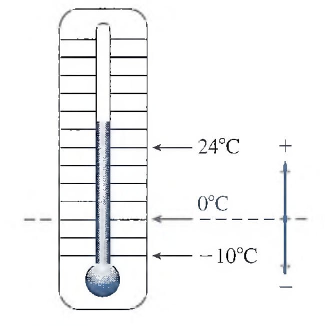


Figura 2.1

Cuando se suman números con signo es útil recordar la regla siguiente:

Regla de la suma: para sumar dos números del mismo signo, sumamos sus valores absolutos y ponemos el signo en común al resultado (suma). Para sumar dos números de diferente signo, encontramos la diferencia entre sus valores absolutos y asignamos al resultado el signo del número de mayor valor.

Considere los ejemplos que siguen:

$$(+6) + (+2) = +(6 + 2) = +8$$
$$(-6) + (-2) = -(6 + 2) = -8$$
$$(+6) + (-2) = +(6 - 2) = +4$$
$$(-6) + (+2) = -(6 - 2) = -4$$

Examinemos ahora el procedimiento de la resta. Siempre que a un número le restamos otro, cambiamos el signo del segundo número y después lo sumamos al primero, aplicando la regla de la suma. En la expresión $7 - 5$, el número $+5$ va a ser restado del número $+7$. La resta se realiza cambiando primero $+5$ por -5 y luego sumando los dos números que ahora tienen diferente signo: $(+7) + (-5) = +(7 - 5) = +2$.

Regla de la resta: para restar un número, *b*, con signo de otro número, *a*, con signo, cambiamos el signo de *b* y luego sumamos este número a *a* aplicando la regla de la suma.

Analice los ejemplos siguientes:

$$(+8) - (+5) = 8 - 5 = 3$$
$$(+8) - (-5) = 8 + 5 = 13$$
$$(-8) - (+5) = -8 - 5 = -13$$
$$(-8) - (-5) = -8 + 5 = -3$$

Ejemplo 2.1

La velocidad de un objeto se considera positiva cuando éste se mueve hacia arriba y negativa cuando se mueve hacia abajo. ¿Cuál es el cambio de velocidad de una pelota que golpea el piso a 12 metros por segundo (m/s) y rebota a 7 m/s? Consulte la figura 2.2.

Plan: Primero establecemos como positiva la dirección ascendente o hacia arriba, así que podemos usar los mismos signos para la velocidad. La velocidad inicial es -12 m/s porque la pelota se está moviendo *hacia abajo*. Después su velocidad es $+7$ m/s, pues se mueve *hacia arriba*. El *cambio* de velocidad será la velocidad final menos la inicial.

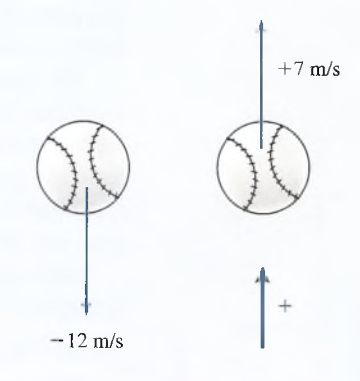


Figura 2.2

Solución:

$$\begin{aligned}\text{Cambio en la velocidad} &= \text{velocidad final} - \text{velocidad inicial}\\ &= (+7\ \text{m/s}) - (-12\ \text{m/s})\\ &= 7\ \text{m/s} + 12\ \text{m/s} = 19\ \text{m/s}\end{aligned}$$

Sin entender los números con signo podríamos haber supuesto que el cambio registrado en la rapidez era de sólo 5 m/s (12 − 7). Sin embargo, tras pensarlo un momento, nos damos cuenta de que la rapidez debe disminuir primero a cero (un cambio de 12 m/s) y que luego se alcanza una rapidez de 7 m/s en dirección opuesta (un cambio adicional de 7 m/s).

En una multiplicación cada número se llama ***factor*** y el resultado es el ***producto***. Ahora podemos establecer la regla de la multiplicación para números con signo:

Regla de la multiplicación: si dos factores tienen signos iguales, su producto es positivo; si tienen signos diferentes, su producto es negativo.

Veamos estos ejemplos:

$$(+2)(+3) = +6 \qquad (-3)(-4) = +12$$
$$(-2)(+3) = -6 \qquad (-3)(+4) = -12$$

Suele resultar útil una ampliación de la regla de la multiplicación para los productos que resultan de multiplicar varios factores. En vez de multiplicar una serie de factores, de dos en dos, podemos recordar que

El producto será positivo si todos los factores son positivos o si existe un número par de factores negativos. El producto será negativo si hay un número impar de factores negativos.

Considere los ejemplos que siguen:

$$(-2)(+2)(-3) = +12 \qquad \text{(dos factores negativos, —par)}$$
$$(-2)(+4)(-3)(-2) = -48 \qquad \text{(tres factores negativos, —impar)}$$
$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27 \qquad \text{(tres factores negativos, —impar)}$$

Observe que en el último ejemplo se usó un superíndice 3 para indicar el número de veces que el número −3 debía usarse como factor. El superíndice 3 escrito en esta forma se llama ***exponente***.

Cuando se desea dividir dos números, el que va a ser dividido se llama ***dividendo*** y entre el que se divide éste se llama ***divisor***. El resultado de la división se denomina ***cociente***. La regla para dividir números con signo es la siguiente:

Regla de la división: el cociente de dos números con signos iguales es positivo y el cociente de dos números con signos diferentes es negativo.

Por ejemplo

$$(+2) \div (+2) = +1 \qquad (-4) \div (-2) = +2$$
$$\frac{+4}{-2} = -2 \qquad \frac{-4}{+2} = -2$$

En caso de que el numerador o el denominador de una fracción contenga dos o más factores, la regla siguiente también es útil:

El cociente es negativo si el número total de factores negativos es impar; en caso contrario, el cociente es positivo.

Por ejemplo,

$$\frac{(-4)(3)}{2} = -6 \qquad \text{par}$$

$$\frac{(-2)(-2)(-3)}{(2)(-3)} = +2 \qquad \text{impar}$$

Es conveniente que practique la aplicación de todas las reglas expuestas en esta sección. Es un grave error suponer que ha entendido estos conceptos sin comprobarlo adecuadamente. Una fuente importante de errores en la resolución de problemas de física es el uso de los números con signo.

2.2 Repaso de álgebra

El álgebra es en realidad una generalización de la aritmética, en la que se usan letras para reemplazar números. Por ejemplo, aprenderemos que el espacio ocupado por algunos objetos (su volumen, V) puede calcularse multiplicando el largo (l) por el ancho (b) y por la altura (h). Si se asignan letras a cada uno de esos elementos, establecemos una ***fórmula*** general, como

$$\text{Volumen} = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V = l \cdot b \cdot h \qquad \textbf{(2.1)}$$

La ventaja de las fórmulas es que funcionan en cualquier situación. Dado el largo, el ancho y la altura de cualquier sólido rectangular podemos usar la ecuación (2.1) para calcular su volumen. Si deseamos averiguar el volumen de un bloque rectangular de metal, sólo debemos *sustituir* los números apropiados en la fórmula.

Ejemplo 2.2 Calcule el volumen de un sólido que tiene las medidas siguientes: largo, 6 centímetros (cm); ancho, 4 cm, y alto, 2 cm.

Plan: Recuerde o localice la fórmula para calcular el volumen y luego sustituya las letras (literales) con las cantidades proporcionadas.

Solución: La sustitución da por resultado

$$\begin{aligned} V &= lbh \\ &= (6\text{ cm})(4\text{ cm})(2\text{ cm}) \\ &= 48\ (\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm}) = 48\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

El tratamiento de las unidades que dan por resultado un volumen expresado en centímetros cúbicos se comentará más adelante. Por ahora, céntrese en la sustitución de números.

Cuando las letras se sustituyen por números en una fórmula es muy importante insertar el signo apropiado de cada número. Considere la fórmula siguiente:

$$P = c^2 - ab$$

Suponga que $c = +2$, $a = -3$ y $b = +4$. Recuerde que los signos más y menos incluidos en las fórmulas no se aplican a ninguno de los números que pueden ser sustituidos. En este ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} P &= (c)^2 - (a)(b) \\ &= (+2)^2 - (-3)(+4) \\ &= 4 + 12 = 16 \end{aligned}$$

Resulta sencillo advertir que si se confunde un signo de la fórmula con el signo de alguno de los números sustituidos podría cometerse un error.

Con frecuencia es necesario resolver (despejar) una fórmula o una ecuación para una letra que es sólo parte de la fórmula. Suponga que deseamos encontrar una fórmula para calcular el largo de un sólido rectangular a partir de su volumen, su altura y su ancho. Las letras que aparecen en la fórmula $V = lah$ tendrán que reorganizarse para que la l aparezca sola en el lado izquierdo. El reordenamiento de la fórmula no es difícil si recordamos algunas reglas para trabajar con ecuaciones.

Básicamente, una ecuación es un enunciado matemático que dice que dos expresiones son iguales. Por ejemplo,

$$2b + 4 = 3b - 1$$

es una ecuación. En este caso, es evidente que la letra b representa la cantidad *desconocida* o, mejor dicho, la incógnita. Si sustituimos $b = 5$ en ambos lados o miembros de esta ecuación, obtenemos $14 = 14$. Por tanto, $b = 5$ es la *solución* de la ecuación.

Podemos obtener soluciones para igualdades realizando las mismas operaciones en los dos lados de la ecuación. Considere la igualdad $4 = 4$. Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos el número 2 en ambos lados, no se altera la igualdad. Lo que hacemos es, *en efecto*, aumentar o disminuir la magnitud de cada lado, pero la igualdad se conserva. (Será conveniente que usted verifique el enunciado anterior para la igualdad $4 = 4$.) Observe también que si se eleva al cuadrado o se obtiene la raíz cuadrada en los dos lados no se altera la igualdad. Si se realiza la misma serie de operaciones en cada miembro de una ecuación es posible obtener finalmente una igualdad con una sola letra en el miembro izquierdo. En este caso, se dice que hemos *resuelto* (o despejado) la ecuación para esa letra.

Ejemplo 2.3 Resuelva para m la ecuación que sigue:

$$3m - 5 = m + 3$$

Plan: La clave es dejar sola la m en un lado del signo igual y del otro un número solo. Mientras sumemos o restemos la *misma* cantidad en cada lado, la ecuación seguirá siendo verdadera.

Solución: Primero sumamos $+5$ a ambos lados y luego restamos m de los dos lados:

$$3m - 5 + 5 = m + 3 + 5$$
$$3m = m + 8$$
$$3m - m = m + 8 - m$$
$$2m = 8$$

Por último, dividimos ambos lados entre 2:

$$\frac{2m}{2} = \frac{8}{2}$$
$$m = 4$$

Para comprobar esta respuesta, sustituimos $m = 4$ en la ecuación original y obtenemos $7 = 7$, lo cual demuestra que $m = 4$ es la solución.

En las fórmulas, la solución de una ecuación también puede expresarse por medio de letras. Por ejemplo, la ecuación literal

$$ax - 5b = c$$

puede resolverse para x en términos de a, b y c. En casos como éste, decidimos de antemano cuál de las letras será la "incógnita". En nuestro ejemplo, elegiremos x. Las demás letras se tratan como si fueran números conocidos. Sumando $5b$ a ambos lados se obtiene

$$ax - 5b + 5b = c + 5b$$
$$ax = c + 5b$$

Ahora dividimos ambos lados entre a para obtener

$$\frac{ax}{a} = \frac{c + 5b}{a}$$

$$x = \frac{c + 5b}{a}$$

que es la solución para x. Los valores para a, b y c en una situación concreta se sustituyen para hallar un valor específico de x.

Ejemplo 2.4 El volumen de un cono circular recto se expresa con la fórmula

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \tag{2.2}$$

¿Cuál es la altura del cono si su radio es $r = 3$ cm y $V = 81$ centímetros cúbicos (cm^3)? (Suponga que $\pi = 3.14$.)

Plan: Primero resolvemos la fórmula para h en términos de r y V; luego debemos sustituir los valores que tenemos para V, π y r.

Solución: Al multiplicar ambos lados por 3 se obtiene

$$3V = \pi r^2 h$$

Si dividimos ambos miembros entre πr^2 resulta

$$\frac{3V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} \quad \text{o} \quad \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{h}{1}$$

Por tanto, la altura h está dada por:

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

Sustituyendo los valores que tenemos de V, π y r nos queda

$$h = \frac{3(81 \text{ cm}^3)}{(3.14)(3 \text{ cm})^2} = \frac{243 \text{ cm}^3}{28.26 \text{ cm}^2} = 8.60 \text{ cm}$$

La altura del cono es 8.60 cm.

2.3 Exponentes y radicales (optativo)

Con frecuencia resulta necesario multiplicar una misma cantidad cierto número de veces. Un método abreviado para indicar el número de veces que una cantidad se toma como factor de sí misma consiste en usar un superíndice numérico conocido como ***exponente***. Esta notación sigue el esquema presentado a continuación:

Para cualquier número a:	Para el número 2:
$a = a^1$	$2 = 2^1$
$a \times a = a^2$	$2 \times 2 = 2^2$
$a \times a \times a = a^3$	$2 \times 2 \times 2 = 2^3$
$a \times a \times a \times a = a^4$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

Las potencias del número a se leen como sigue: a^2 se lee "a cuadrada"; a^3, "a cúbica"; y a^4, "a a la cuarta potencia". En general, se dice que a^n representa "a elevado a la n-ésima potencia". En tales ejemplos, la letra a es la ***base*** y los superíndices numéricos 1, 2, 3, 4 y n son los *exponentes*.

Repasaremos varias reglas que es necesario seguir al trabajar con exponentes.

Regla 1: Cuando se multiplican dos cantidades de la misma base su producto se obtiene sumando algebraicamente los exponentes:

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n} \qquad \textit{Regla de la multiplicación} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Ejemplos:

$$(2^4)(2^3) = 2^{4+3} = 2^7$$
$$y^8y^6 = y^{14}$$
$$x^2x^5y^3x^3 = x^{2+5+3}y^3 = x^{10}y^3$$

Regla 2: Cuando a no es cero, un exponente negativo se define con cualquiera de las expresiones siguientes:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{y} \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad \textit{Exponente negativo} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Ejemplos:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \qquad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$
$$a^{-5} = \frac{1}{a^5} \qquad \frac{x^{-3}y^2}{a^{-4}b^3} = \frac{a^4y^2}{x^3b^3}$$

Regla 3: Cualquier cantidad elevada a la potencia cero es igual a 1:

$$a^0 = 1 \qquad \textit{Exponente cero} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Ejemplos:

$$x^3y^0 = x^3 \qquad (x^3y^2)^0 = 1$$

Regla 4: El cociente de dos cantidades diferentes de cero y que tengan la misma base se halla efectuando la resta algebraica de sus exponentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \textit{División} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Ejemplos:

$$\frac{2^3}{2} = 2^{3-1} = 2^2 \qquad \frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3-(-5)} = a^{-3+5} = a^2$$

Regla 5: Cuando una cantidad a^m se eleva a la potencia n, los exponentes se multiplican:

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \textit{Potencia de una potencia} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Ejemplos:

$$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 \qquad (2^{-3})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$(a^2)^4 = a^8 \qquad (a^2)^{-4} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Regla 6: La potencia de un producto y la de un cociente se obtienen aplicando el exponente a cada uno de los factores.

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Ejemplos:

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$
$$(ab)^3 = a^3 b^3$$
$$(ab^2)^3 = a^3(b^2)^3 = a^3 b^6$$
$$\left(\frac{ax^3}{y^2}\right)^4 = \frac{a^4 x^{12}}{y^8}$$

Si $a^n = b$, entonces no sólo b es igual a la n-ésima potencia de a, sino también se dice que, por definición, a es la raíz n-ésima de b. En general, este hecho se expresa usando un ***radical*** ($\sqrt{\ }$):

$$\sqrt[n]{b} \quad \text{raíz } n\text{-ésima de } b$$

Considere los enunciados siguientes:

$2^2 = 4$ significa que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, o sea, $\sqrt{4} = 2$

$2^3 = 8$ significa que 2 es la *raíz cúbica* de 8, o sea, $\sqrt[3]{8} = 2$

$2^5 = 32$ significa que 2 es la *raíz quinta* de 32, o sea, $\sqrt[5]{32} = 2$

Un radical también puede expresarse mediante un exponente fraccionario. En general, podemos escribir

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$$

Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} \quad \text{o} \quad \sqrt{10} = 10^{1/2}$$

Hay otras dos reglas que es indispensable conocer para trabajar con radicales.

Regla 7: La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de cada factor:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad \textit{Raíces de un producto} \quad \textbf{(2.9)}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4}\,\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$
$$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a}\,\sqrt[5]{b}$$

Regla 8: Las raíces de una potencia se calculan aplicando la definición de exponentes fraccionarios.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad \textit{Raíz de potencias} \quad \textbf{(2.10)}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{2^9} = 2^{9/3} = 2^3 = 8$$

$$\sqrt{10^{-4}} = 10^{-4/2} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

$$\sqrt{4 \times 10^8} = \sqrt{4}\,\sqrt{10^8} = 2(10)^{8/2} = 2 \times 10^4$$

$$\sqrt[3]{8 \times 10^{-6}} = \sqrt[3]{8}(10)^{-6/3} = 2 \times 10^{-2}$$

Para resolver la mayor parte de los problemas de esta obra sólo se requiere un conocimiento limitado de las reglas anteriores. Lo que más se calcula son cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas. No obstante, es útil contar con un buen conocimiento de las reglas de los exponentes y radicales.

2.4 Solución a ecuaciones cuadráticas

Al resolver problemas de física, con frecuencia se necesita obtener una solución para una ecuación de segundo grado cuya incógnita está elevada a la segunda potencia. Por ejemplo, en cinemática la posición de una partícula en un campo gravitacional varía con el tiempo según la relación

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

donde x es el desplazamiento, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración y t el tiempo. Observe que la apariencia de t^2 significa que hay dos instantes en que el desplazamiento podría ser el mismo. Tales ecuaciones reciben el nombre de ***ecuaciones cuadráticas***. Hay varios métodos para resolver este tipo de ecuaciones, pero quizá para los problemas de física el más útil sea aplicar el de la fórmula cuadrática.

Dada una ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con a diferente de cero, las soluciones se hallan con la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 2.5 Resuelva la ecuación siguiente para x: $3x^2 = 12 + 5x$.

Plan: La mayor potencia de la incógnita x es 2 y se puede aplicar la fórmula cuadrática. Debemos escribir la ecuación en la forma cuadrática, determinar las constantes a, b y c, y después resolver x usando la fórmula.

Solución: La forma cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, así que podemos escribir

$$3x^2 - 5x - 12 = 0$$

Al analizar esa ecuación se observa que $a = 3$, $b = -5$ y $c = -12$. Ahora, resolvemos para x por sustitución en la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-12)}}{2(3)}$$

$$= \frac{+5 \pm \sqrt{(25) + (144)}}{2(3)} = \frac{+5 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}$$

Para hallar las dos soluciones para x usamos primero el signo más y luego el menos:

Primera solución: $x = \frac{5 + 13}{6} = \frac{18}{6}$ o $x = +3$

Segunda solución: $x = \frac{5 - 13}{6} = \frac{-8}{6}$ o $x = -1.33$

Las dos respuestas son $x = +3$ y $x = -1.33$. Con base en las condiciones del problema, una de las soluciones puede ser matemáticamente verdadera pero imposible desde el ángulo de la física, lo cual indica que siempre debe interpretar los resultados a la luz de las condiciones establecidas.

Ejemplo 2.6 Se lanza una pelota hacia arriba con una rapidez inicial de $v_0 = 20$ m/s. La aceleración debida a la gravedad es $g = -9.80$ m/s^2. Si se tiene un desplazamiento de $y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$, determine los dos instantes en que el desplazamiento es $y = 12$ m arriba del punto donde se suelta la pelota.

Plan: Debemos sustituir los valores dados para g, y y v_0 a fin de obtener la ecuación cuadrática, con el tiempo t como nuestra incógnita. Después escribiremos la ecuación en su forma cuadrática y la resolveremos para t mediante la fórmula cuadrática.

Solución: La sustitución da como resultado

$$y = v_0t + \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{o} \quad (12) = 20t + \tfrac{1}{2}(-9.8)t^2$$

Hemos dejado fuera las unidades para que la incógnita t quede indicada con claridad. Al escribir esta expresión en forma cuadrática queda

$$4.9t^2 - 20t + 12 = 0$$

Ahora aplicamos la fórmula cuadrática para hallar las dos soluciones para t.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(4.9)(12)}}{2(4.9)}$$

$$= \frac{+20 \pm \sqrt{400 - 235}}{9.8} = \frac{-20 \pm 12.8}{9.8}$$

De nuevo, encontramos las dos soluciones usando primero el signo más y luego el menos:

Primera solución: $t = \frac{20 + 12.8}{9.8} = \frac{32.8}{9.8}$ o $t = +3.35$ s

Segunda solución: $t = \frac{20 - 12.8}{9.8} = \frac{7.17}{9.8}$ o $t = +0.732$ s

La pelota alcanza la altura de 12 m en el instante $t = 0.732$ s después de que se le suelta. Luego alcanza el mismo desplazamiento en el instante $t = 3.35$ s.

2.5 Notación científica

En el trabajo científico es muy frecuente encontrarse con números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, cuando el operador de una máquina mide el grosor de una delgada hoja de metal puede obtener una lectura de 0.00021 in. De forma similar, un ingeniero puede hallar que el área de una pista de aeropuerto es de 130 000 m^2. Es conveniente que podamos expresar estos números como 2.1×10^{-4} in y 1.3×10^5 m^2, respectivamente. Se usan potencias de 10 para señalar la posición del punto decimal sin tener que manejar un gran número de ceros al

realizar cada uno de los cálculos. El sistema para expresar cualquier cantidad como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia entera de base 10 se llama ***notación científica***.

Las calculadoras electrónicas tienen una teclas que permiten incluso a los estudiantes principiantes usar la notación científica en muchos cálculos. Puede tener la seguridad de que se encontrará con la notación científica aunque su trabajo no requiera el uso frecuente de números expresados con ella. Revise el manual de su calculadora a fin de que aprenda a trabajar en ella con potencias de base 10.

Considere los múltiplos de 10 siguientes y algunos ejemplos de su utilización en la notación científica:

$$\begin{aligned}
0.0001 &= 10^{-4} & 2.34 \times 10^{-4} &= 0.000234\\
0.001 &= 10^{-3} & 2.34 \times 10^{-3} &= 0.00234\\
0.01 &= 10^{-2} & 2.34 \times 10^{-2} &= 0.0234\\
0.1 &= 10^{-1} & 2.34 \times 10^{-1} &= 0.234\\
1 &= 10^{0} & 2.34 \times 10^{0} &= 2.34\\
10 &= 10^{1} & 2.34 \times 10^{1} &= 23.4\\
100 &= 10^{2} & 2.34 \times 10^{2} &= 234.0\\
1\,000 &= 10^{3} & 2.34 \times 10^{3} &= 2340.0\\
10\,000 &= 10^{4} & 2.34 \times 10^{4} &= 23\,400.0
\end{aligned}$$

Para escribir en notación científica un número mayor que 1 debe determinar el número de veces que es preciso mover el punto decimal a la izquierda para obtener la notación abreviada. Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}
467 &= 4\,6\,7. = 4.67 \times 10^{2}\\
30 &= 3\,0. = 3.0 \times 10^{1}\\
35\,700 &= 3\,5\,7\,0\,0. = 3.57 \times 10^{4}
\end{aligned}$$

Cualquier número decimal menor que 1 puede escribirse como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia *negativa* de base 10. En este caso, el exponente negativo representa el número de veces que se mueve el punto decimal a la derecha. Este exponente siempre es igual al número de ceros que se encuentran entre el punto decimal y el primer dígito, más uno. Los siguientes son algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}
0.24 &= 0.2\,4 = 2.4 \times 10^{-1}\\
0.00327 &= 0.0\,0\,3\,2\,7 = 3.27 \times 10^{-3}\\
0.0000469 &= 0.0\,0\,0\,0\,4\,6\,9 = 4.69 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

Para convertir la notación científica en notación decimal simplemente se invierte el proceso.

Con ayuda de las leyes de los exponentes, la notación científica sirve en la multiplicación y la división de números muy pequeños o muy grandes. Cuando se multiplican dos números, sus respectivos exponentes de base 10 se suman. Por ejemplo, 200×4000 puede escribirse como $(2 \times 10^2)(4 \times 10^3) = (2)(4) \times (10^2)(10^3) = 8 \times 10^5$. Otros ejemplos son

$$\begin{aligned}
2\,200 \times 40 &= (2.2 \times 10^3)(4 \times 10^1) = 8.8 \times 10^4\\
0.0002 \times 900 &= (2.0 \times 10^{-4})(9.0 \times 10^2) = 1.8 \times 10^{-2}\\
1\,002 \times 3 &= (1.002 \times 10^3)(3 \times 10^0) = 3.006 \times 10^3
\end{aligned}$$

De forma similar, cuando un número se divide entre otro, el exponente de base 10 que aparece en el denominador se resta del exponente de base 10 del numerador. Éstos son algunos ejemplos:

$$\frac{7\,000}{35} = \frac{7 \times 10^3}{3.5 \times 10^1} = \frac{7.0}{3.5} \times 10^{3-1} = 2.0 \times 10^2$$

$$\frac{1\,200}{0.003} = \frac{1.2 \times 10^3}{3.0 \times 10^{-3}} = \frac{1.2}{3.0} \times 10^{3-(-3)} = 4.0 \times 10^5$$

$$\frac{0.008}{400} = \frac{8 \times 10^{-3}}{4 \times 10^2} = \frac{8}{4} \times 10^{-3-2} = 2.0 \times 10^{-5}$$

Cuando se suman dos números expresados en notación científica es necesario tener cuidado de ajustar todos los que se van a sumar, de modo que tengan potencias idénticas de base 10. Veamos algunos ejemplos:

$$2\,000 + 400 = 2 \times 10^3 + 0.4 \times 10^3 = 2.4 \times 10^3$$
$$0.006 - 0.0008 = 6 \times 10^{-3} - 0.8 \times 10^{-3} = 5.2 \times 10^{-3}$$
$$4 \times 10^{-21} - 6 \times 10^{-20} = 0.4 \times 10^{-20} - 6 \times 10^{-20} = -5.6 \times 10^{-20}$$

Las calculadoras científicas hacen automáticamente los ajustes necesarios al sumar y restar ese tipo de números.

La notación científica y las potencias de base 10 son muy importantes y significativas cuando se trabaja con unidades métricas. En el capítulo 3 veremos que los múltiplos de 10 se usan para definir muchas unidades en el sistema métrico. Por ejemplo, un kilómetro se define como mil (1×10^3) metros y un milímetro como una milésima (1×10^{-3}) de metro.

2.6 Gráficas

Con frecuencia se desea mostrar en forma gráfica la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, sabemos que cuando un automóvil viaja con rapidez constante avanza la misma distancia cada minuto (min). Podríamos registrar la distancia recorrida, en pies (ft), para determinados tiempos, de la forma siguiente:

Distancia, ft	200	400	600	800	1000
Tiempo, min	1	2	3	4	5

En la parte inferior de una hoja de papel cuadriculado podemos establecer una escala de tiempo, quizá con cada división igual a 1 min. En el lado izquierdo del papel podemos establecer una escala de distancias. Es necesario seleccionar una escala que llene el papel cuadriculado (así se facilita la ubicación de los puntos en la gráfica). Las divisiones de la escala sencillas son: 1 división = 1, 2 o 5 multiplicado por alguna potencia de base 10. Algunos ejemplos adecuados son: 1 división = $1 \times 10^3 = 1000$, o 1 división = $2 \times 10^0 = 2$, o bien, 1 división = $5 \times 10^{-2} = 0.05$. Es preciso evitar divisiones de escala incómodas, como 3 divisiones = 100 ft, porque dificultan la ubicación de puntos. En nuestro ejemplo, podemos hacer que cada división represente 200 ft. Así, los datos se representan en la gráfica como muestra la figura 2.3. Cada punto ubicado en el eje (línea) horizontal tiene un punto correspondiente en el eje (línea) vertical. Por ejemplo, la distancia recorrida al cabo de 3 min es 600 ft. Observe que cuando se unen esos puntos, el resultado es una línea recta.

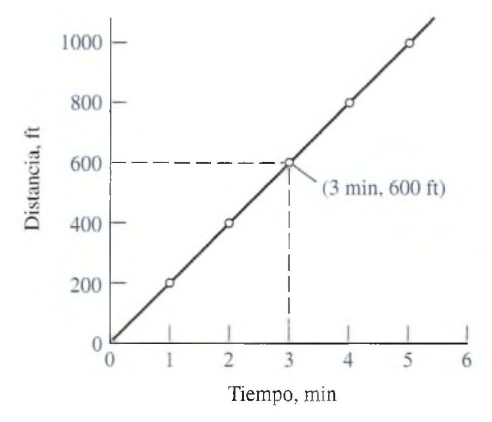


Figura 2.3 Gráfica de la distancia en función del tiempo (una relación *directa*).

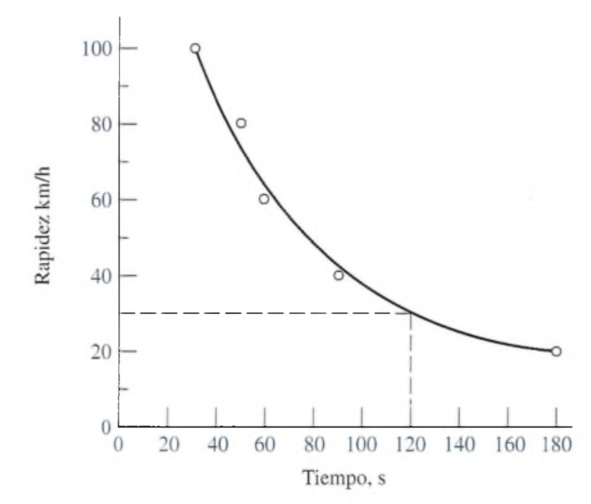


Figura 2.4 Gráfica del tiempo necesario para recorrer una distancia de 1 km como función de la rapidez (una relación *inversa*).

Cuando la gráfica de una cantidad frente a otra produce una línea recta que pasa por el origen hay entre ellas una *relación directa*. En este ejemplo, la distancia recorrida es directamente proporcional al tiempo. Cuando una de esas cantidades cambia, la otra también, y en la misma proporción. Si se duplica el tiempo transcurrido, se duplica la distancia recorrida.

También existen las *relaciones inversas* o indirectas, en las que el aumento de una cantidad produce como resultado la disminución *proporcional* de la otra cantidad. Si disminuyéramos la rapidez de un automóvil, veríamos que se requerirían intervalos de tiempo cada vez mayores para recorrer la misma distancia. Suponga que hemos medido, en segundos (s), el tiempo requerido para recorrer una distancia de 1 kilómetro (km) [0.621 millas (mi)] con rapidez de 20, 40, 60, 80 y 100 kilómetros por hora (km/h). De esta manera registramos los datos siguientes:

Rapidez, km/h	20	40	60	80	100
Tiempo, s	180	90	60	45	36

En la figura 2.4 se muestra una gráfica de estos datos. Nótese que la gráfica de una relación inversa no es una línea recta sino una curva.

Una gráfica sirve para obtener información con la que no se contaba antes de elaborarla. Por citar un caso, en la figura 2.4 advertimos que se requeriría un tiempo de 120 s para recorrer la distancia si nuestra rapidez fuera de 30 km/h.

2.7 Geometría

En este breve repaso presuponemos que usted conoce el concepto de punto y de recta. Veremos otros conceptos importantes sólo en la medida en que sean necesarios para resolver problemas de física. No es indispensable hacer un amplio repaso de los muchos teoremas posibles de esta disciplina. Comenzaremos con ángulos y rectas.

El ***ángulo*** comprendido entre dos líneas rectas se define trazando un círculo cuyo centro se ubica en el punto de intersección (véase la figura 2.5a). La magnitud del ángulo A es proporcional a la fracción de un círculo completo que se encuentra entre las dos rectas. Los ángulos se miden en ***grados***, como se define en la figura 2.5b. Un grado (°) es una parte de un círculo igual a 1/360 de una revolución completa (rev). Por tanto, en 1 rev hay 360°:

$$1^\circ = \frac{1}{360}\text{ rev} \qquad 1\text{ rev} = 360^\circ \tag{2.11}$$

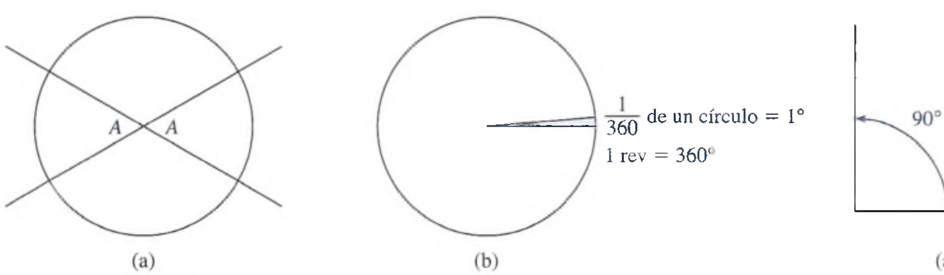


Figura 2.5 Un ángulo es una fracción de un círculo completo. Un grado es una parte del círculo que equivale a 1/360 de una revolución completa.

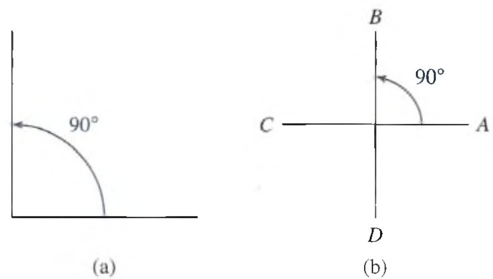


Figura 2.6 (a) Un ángulo recto es la cuarta parte de un círculo. (b) Las rectas que se cortan formando ángulos rectos reciben el nombre de perpendiculares.

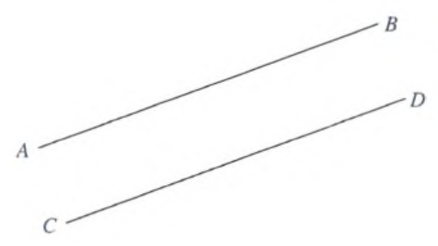


Figura 2.7 Las rectas paralelas que se extienden indefinidamente nunca se intersecan ($AB \parallel CD$).

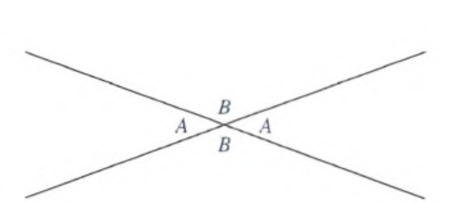


Figura 2.8 Cuando dos líneas rectas se intersecan, los ángulos opuestos son iguales.

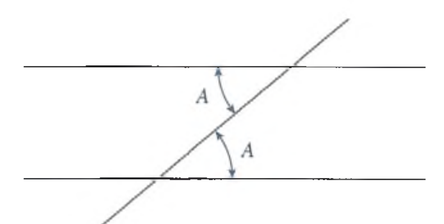


Figura 2.9 Cuando una línea recta se interseca con dos líneas paralelas, los dos ángulos internos resultan iguales.

El ángulo que corresponde a un cuarto de 1 rev, es decir, a 90°, recibe un nombre especial: se llama ***ángulo recto*** (véase la figura 2.6a). Cuando dos rectas se intersecan de manera que el ángulo formado entre ellas es recto, se dice que son ***perpendiculares***. La recta *CA* de la figura 2-6b es perpendicular a la recta *BD*. Esto puede escribirse como

$$CA \perp BD$$

donde $\perp$ significa "es perpendicular a".

Se dice que dos rectas son ***paralelas*** si nunca se intersecan, por más que se prolonguen sus extremos. En la figura 2.7 la recta *AB* es paralela a la línea *CD*, lo cual se escribe así:

$$AB \parallel CD$$

donde $\parallel$ significa "es paralela a".

La aplicación de la geometría requiere conocer sólo algunas reglas generales, de las cuales describiremos tres de las más importantes.

Regla 1: Cuando dos rectas se intersecan, los ángulos opuestos que forman son iguales (véase la figura 2.8).

Regla 2: Cuando una recta interseca (se corta con) dos rectas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales (figura 2.9).

Observe en la figura 2.9 que los ángulos *A* se hallan a ambos lados de la recta que corta a las dos paralelas y se ubican dentro del espacio comprendido entre éstas. De acuerdo con la regla 2, estos ángulos *alternos internos* son iguales. (Los otros dos ángulos internos también son iguales.)

Ejemplo 2.7 En un edificio en construcción, dos postes de tabique se han reforzado con un miembro cruzado, como se muestra en la figura 2.10. Calcule el ángulo C por medio de la geometría.

Plan: Supóngase que los dos postes son paralelos y que, por tanto, el miembro cruzado forma una recta que los corta. Empiece con el ángulo dado y luego aplique las reglas 1 y 2 para hallar cada uno de los ángulos.

Solución: El ángulo A mide 60° de acuerdo con la regla 1; el ángulo B mide 60° según la regla 2, porque según ésta, los ángulos internos son iguales. Finalmente, aplique la regla 1 de nuevo para encontrar que el ángulo C mide 60°. A partir de este ejemplo, se observa que los ángulos *alternos externos* también son iguales, pero no es necesario postular una nueva regla.

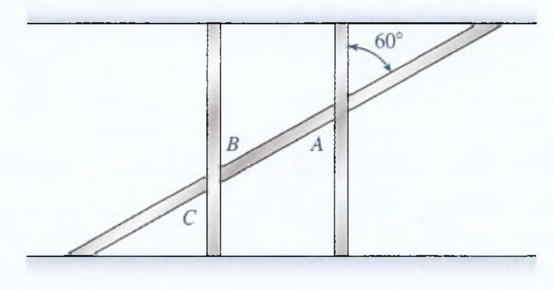


Figura 2.10

Un ***triángulo*** es una figura cerrada plana con tres lados. En la figura 2.11 se ejemplifica un triángulo con lados a, b y c y ángulos A, B y C. Un triángulo como éste, en el que no hay dos lados ni dos ángulos iguales, se llama ***triángulo escaleno***.

Un triángulo de especial interés para nosotros es el ***triángulo rectángulo***, que se ejemplifica en la figura 2.12. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo igual a 90° (dos de los lados son perpendiculares). El lado opuesto al ángulo de 90° se llama ***hipotenusa***.

Regla 3: En cualquier tipo de triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

$$A + B + C = 180°$$

Corolario: Para cualquier triángulo rectángulo ($C = 90°$), la suma de los dos ángulos más pequeños es igual a 90°.

$$A + B = 90°$$

En este caso, se dice que los ángulos A y B son *complementarios*.

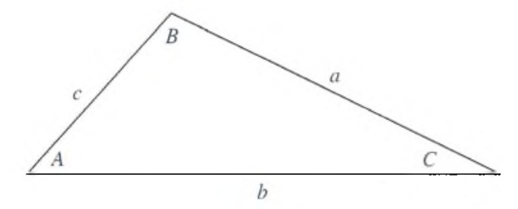


Figura 2.11 Un triángulo escaleno.

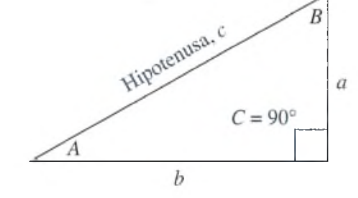


Figura 2.12 En un triángulo rectángulo uno de los ángulos internos debe ser recto.

Ejemplo 2.8 Aplique las reglas de la geometría para determinar los ángulos desconocidos en el caso ilustrado en la figura 2.13.

Plan: Observe toda la figura; busque las rectas perpendiculares (las que forman triángulos rectángulos). Con base en el ángulo de 30° que se proporciona, aplique las reglas de la geometría para hallar el valor de los otros ángulos.

Solución: Puesto que la recta *MC* es perpendicular a la recta *RQ*, tenemos un triángulo rectángulo en el que el ángulo menor es de 30°. La aplicación del corolario a la regla 3 produce:

$$30^\circ + B = 90^\circ \qquad \text{o} \qquad B = 60^\circ$$

En virtud de que los ángulos opuestos son iguales, *D* también es igual a 60°. La recta *NF* es perpendicular a la recta *RP*, por lo que $A + D = 90°$. Por consiguiente,

$$A + 60^\circ = 90^\circ \qquad \text{y} \qquad A = 30^\circ$$

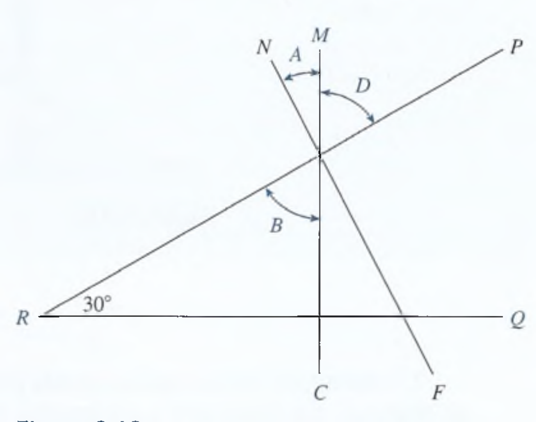


Figura 2.13

Otra regla importante para la geometría se basa en los lados de un triángulo rectángulo. Abordaremos el *teorema de Pitágoras* en la sección 2.8.

2.8 Trigonometría del triángulo rectángulo

A menudo es necesario determinar las longitudes y los ángulos a partir de figuras de tres lados conocidas como *triángulos*. Si aprende algunos principios que se aplican a todos los triángulos rectángulos, mejorará de manera significativa su habilidad para trabajar con vectores. Además, con las calculadoras portátiles los cálculos son relativamente sencillos.

Primero repasemos algunos de los temas que ya conocemos acerca de los triángulos rectángulos. Seguiremos la convención de usar letras griegas para identificar los ángulos y letras romanas para los lados. Los símbolos griegos que se usan comúnmente son:

α alfa	β beta	γ gama
θ theta	ϕ phi	δ delta

El teorema de Pitágoras:

$R^2 = x^2 + y^2$

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$

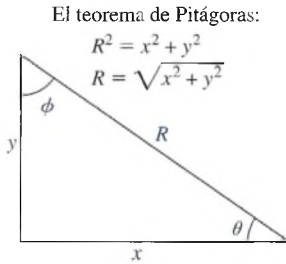


Figura 2.14

En el triángulo rectángulo de la figura 2.14, los símbolos *R*, *x* y *y* se refieren a las dimensiones de los lados, mientras que θ, ϕ y 90° corresponden a los ángulos. Recuerde que en un triángulo rectángulo la suma de los ángulos más pequeños es igual a 90°:

$$\phi + \theta = 90^\circ \qquad \textit{Triángulo rectángulo}$$

Se dice que el ángulo ϕ es complemento de θ y viceversa.

También existe una relación entre los lados, la cual se conoce como el ***teorema de Pitágoras***:

Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

$$R^2 = x^2 + y^2 \qquad \textit{Teorema de Pitágoras} \qquad (2.12)$$

La *hipotenusa* se define como el lado mayor. En la práctica, puede ubicarla recordando que es el lado directamente opuesto al ángulo recto; es la recta que une los dos lados perpendiculares.

Ejemplo 2.9

¿Qué longitud de cable de retén se necesita para formar un tirante desde lo alto de un poste telefónico de 12 m, hasta una estaca clavada en el suelo a 8 m de la base del poste?

Plan: Trace un esquema del problema como en la figura 2.15, donde se advierta que el cable de retén forma un triángulo rectángulo con el poste perpendicular al suelo. Etiquete la figura y aplique el *teorema de Pitágoras* para determinar la longitud del cable.

Solución: Identifique la longitud R del cable como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y después, con base en el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (12\text{ m})^2 + (8\text{ m})^2$$
$$= 144\text{ m}^2 + 64\text{ m}^2 = 208\text{ m}^2$$

Al obtener la raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación se obtiene

$$R = \sqrt{208\text{ m}^2} = 14.4\text{ m}$$

Recuerde dar su respuesta con tres cifras significativas. En este libro suponemos que todas las mediciones tienen tres dígitos significativos. En otras palabras, la altura del poste es 12.0 m y la base del triángulo es 8.00 m, a pesar de que, por comodidad, se han especificado como 12 m y 8 m.

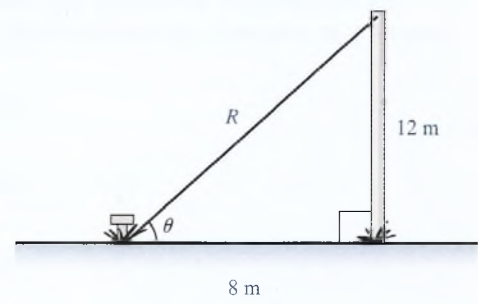


Figura 2.15

En general, para hallar la hipotenusa el teorema de Pitágoras puede expresarse como

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textit{Hipotenusa} \qquad (2.13)$$

En algunas calculadoras electrónicas, la secuencia de teclas para introducir la información podría ser

$$x \quad \boxed{x^2} \quad \boxed{+} \quad y \quad \boxed{x^2} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\sqrt{x}} \qquad (2.14)$$

En este caso, x y y son los valores de los lados más cortos, y los símbolos que aparecen encerrados en recuadros son las teclas de operación en la calculadora. Conviene comprobar la solución del problema anterior con $x = 8$ y $y = 12$. (El procedimiento de introducción de datos depende de la marca de la calculadora.)

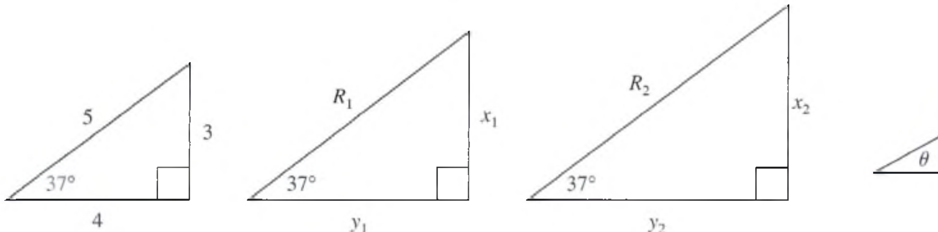


Figura 2.16 Todos los triángulos rectángulos que tienen los mismos ángulos internos son semejantes; es decir, sus lados son proporcionales.

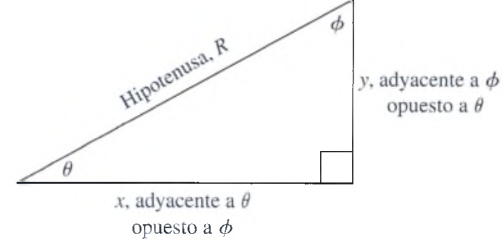


Figura 2.17

Por supuesto, el teorema de Pitágoras sirve también para hallar cualquiera de los lados más cortos si se conocen los otros lados. La solución para x o para y es

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{2.15}$$

La ***trigonometría*** es la rama de las matemáticas que se basa en el hecho de que los triángulos semejantes son proporcionales en sus dimensiones. En otras palabras, para un ángulo dado, la relación entre dos lados cualesquiera es la misma, independientemente de las dimensiones generales del triángulo. En los tres triángulos de la figura 2.16, las razones de los lados correspondientes son iguales siempre que el ángulo sea de 37°. A partir de la figura 2.16 se observa que

$$\frac{3}{4} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

y también

$$\frac{4}{5} = \frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2}$$

Una vez que se ha identificado un ángulo en un triángulo rectángulo, debe marcarse el lado *opuesto* y el *adyacente* al ángulo. En la figura 2.17 se muestra el significado de opuesto, adyacente e hipotenusa. Es conveniente que estudie la figura hasta que entienda plenamente el significado de tales términos. Compruebe que el lado opuesto a θ es γ y que el lado adyacente a θ es x. Observe también que los lados descritos como "opuesto" y "adyacente" cambian cuando nos referimos al ángulo ϕ.

En un triángulo rectángulo hay tres relaciones importantes entre los lados: el ***seno***, el ***coseno*** y la ***tangente***, que en el caso del ángulo θ se definen así:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{op\ \theta}{hip} \qquad \cos\theta = \frac{ady\,\theta}{hip} \qquad \tan\theta = \frac{op\ \theta}{ady} \tag{2.16}$$

Para cerciorarse de que ha comprendido estas definiciones, compruebe las expresiones siguientes para los triángulos de la figura 2.18:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{9}{15} \qquad \cos\gamma = \frac{m}{H} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{R} \qquad \cos\beta = \frac{n}{H} \qquad \tan\phi = \frac{12}{9}$$

Figura 2.18 (a) (b) (c)

Primero debe identificar el ángulo recto y luego marcar el lado más largo (el opuesto al ángulo de 90°) como hipotenusa. Después, para un ángulo en particular, es preciso que identifique los lados opuesto y adyacente.

En cualquier calculadora científica es fácil obtener los valores constantes de las funciones trigonométricas. Lea el manual de la calculadora para que aprenda a obtener el seno, el coseno o la tangente de un ángulo, así como para determinar el ángulo cuyo seno, coseno o tangente es una razón específica. El procedimiento exacto depende de la calculadora. Úsela para comprobar que

$$\cos 47° = 0.682$$

En casi todas las calculadoras debemos introducir el número 47 y luego oprimir la tecla [cos] para que aparezca en la pantalla el resultado. Compruebe los datos siguientes:

$$\tan 38° = 0.781 \qquad \cos 31° = 0.857$$

$$\text{sen } 22° = 0.375 \qquad \tan 65° = 2.145$$

Para hallar el ángulo cuya tangente es 1.34 o el ángulo cuyo seno es 0.45 hay que invertir el procedimiento anterior. Con una calculadora, por ejemplo, se introduce primero el número 1.34 y luego se teclea alguna de estas secuencias, según la calculadora: [INV] [tan], [ARC] [tan], o bien, [$\tan^{-1}$]. Cualquiera de estas secuencias da como resultado el ángulo cuya tangente es el valor introducido. En los ejemplos anteriores obtuvimos

$$\tan \theta = 1.34 \qquad \theta = 53.3°$$

$$\text{sen } \theta = 0.45 \qquad \theta = 26.7°$$

Ahora ya puede aplicar la trigonometría para hallar los ángulos o lados desconocidos de un triángulo rectángulo. El procedimiento siguiente para resolver problemas le será útil.

Estrategia para resolver problemas

Aplicación de trigonometría

1. Trace el triángulo rectángulo a partir de las condiciones planteadas en el problema. (Marque todos los lados y ángulos, ya sea con el valor conocido o con un símbolo del valor que se desconoce.)
2. Aísle un ángulo para su estudio; si se conoce uno de los ángulos, es el que debe seleccionar.
3. Marque cada lado de acuerdo con la relación que guarda con el ángulo elegido, ya sea op, ady o hip.
4. Decida cuál es el lado o ángulo que se va a calcular.
5. Recuerde las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{op}{hip} \qquad \cos \theta = \frac{ady}{hip} \qquad \tan \theta = \frac{op}{ady}$$

6. Elija la función trigonométrica que incluya (a) la cantidad desconocida y (b) ninguna otra cantidad desconocida.
7. Escriba la ecuación trigonométrica apropiada y resuelva para el valor desconocido.

Ejemplo 2.10

¿Cuál es la longitud del segmento de cuerda x en la figura 2.19?

Plan: El paso 1 de la estrategia de resolución de problemas ya está completo. Proseguiremos con los demás hasta determinar la longitud del segmento de cuerda x.

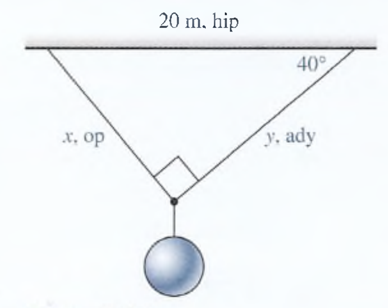


Figura 2.19

Solución: De acuerdo con los pasos 2 y 3, se elige el ángulo de 40° como referencia y luego se marcan en la figura los lados *op*, *ady* e *hip*. En el paso 4, se toma la decisión de resolver para x (el lado opuesto al ángulo de 40°). En seguida, puesto que la función seno incluye *op* e *hip*, elegimos la función y escribimos la ecuación

$$\text{sen } 40° = \frac{x}{20 \text{ m}}$$

Resolvemos para x multiplicando ambos lados por 20 m, y obtenemos

$$x = (20 \text{ m}) \text{ sen } 40° \qquad \text{o} \qquad x = 12.9 \text{ m}$$

En algunas calculadoras podemos hallar x de esta forma:

$$(20 \text{ m}) \text{ sen } 40° = 20 \boxed{\text{X}} \; 40 \boxed{\text{sin}} \; \boxed{=} = 12.9 \text{ m}$$

El procedimiento varía según la calculadora. Debe comprobar esta respuesta y usar su calculadora para mostrar que el lado $y = 15.3$ m.

Ejemplo 2.11

Un automóvil sube por la rampa mostrada en la figura 2.20, cuya base es de 20 m y tiene una altura de 4.3 m. ¿Cuál es el ángulo de su inclinación?

Plan: Trace un esquema y márquelo (véase la figura 2.20) sin perder de vista la información proporcionada y las relaciones del ángulo de inclinación. Luego siga la estrategia de resolución de problemas.

Solución: Identifique los lados *op*, *ady* e *hip* para el ángulo θ y observe que la función *tangente* es la única que implica los dos lados conocidos. Escribimos

$$\tan \theta = \frac{op}{ady} = \frac{4.3 \text{ m}}{20 \text{ m}} \qquad \text{o} \qquad \tan \theta = 0.215$$

El ángulo θ es aquel cuya *tangente es igual a* 0.215. En la calculadora obtenemos

$$\theta = 12.1°$$

En algunas calculadoras la secuencia de teclas sería

$$4.3 \boxed{\div} \; 20 \boxed{=} \; \boxed{\tan^{-1}}$$

En algunas calculadoras hay que usar INV TAN, ATAN, ARCTAN u otros símbolos en vez de $\tan^{-1}$. Lo reiteramos: es preciso que lea el manual incluido con su calculadora.

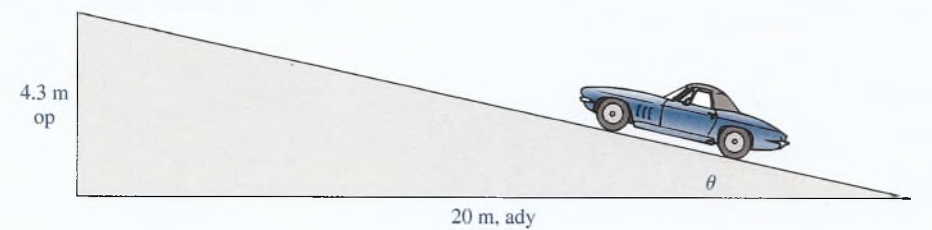


Figura 2.20

Resumen y repaso

Resumen

El propósito de este capítulo es repasar las matemáticas técnicas. Ahora que ha terminado de estudiarlo, regrese y repase los objetivos planteados al principio. Si no se siente seguro de haberlos alcanzado, sería conveniente que diera otro repaso. Asegúrese de haber entendido los temas importantes del capítulo antes de aplicar los conceptos de física que se presentan en capítulos posteriores. Recuerde lo siguiente:

- Para sumar números con signos iguales, sumamos sus valores absolutos y asignamos a la suma el signo común. Para sumar números con signos diferentes, hallamos la diferencia de sus valores absolutos y le asignamos al resultado el signo del número mayor.
- Para restar un número b de un número a, cambiamos el signo del número b y después lo sumamos al número a, aplicando la regla de la suma.
- Cuando multiplicamos o dividimos un grupo de números con signo, el resultado será negativo si la cantidad total de factores negativos es impar; de lo contrario, el resultado será positivo.
- Las fórmulas pueden reordenarse (despejar) para resolver una incógnita específica, realizando operaciones equivalentes (suma, resta, multiplicación, división, etcétera) en ambos miembros de la igualdad.
- Las reglas siguientes se aplican a los exponentes y radicales (optativa):

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad a^m = a^{m/n}$$

- En la notación científica se usan potencias positivas o negativas de base 10 para expresar números grandes o pequeños en notación abreviada.
- Las gráficas sirven para presentar una descripción continua de la relación entre dos variables, a partir de los datos observados.
- Cuando dos rectas se intersecan, forman ángulos opuestos que son iguales entre sí.
- Cuando una recta corta dos rectas paralelas, los ángulos internos alternos son iguales.
- En cualquier triángulo, la suma de los ángulos internos es 180°; en un triángulo rectángulo, la suma de los dos ángulos más pequeños es igual a 90°.
- La aplicación del teorema de Pitágoras y de las funciones trigonométricas básicas es fundamental para el estudio de la física.

$$R^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{op}{hip}$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} \qquad \tan\theta = \frac{op}{ady}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

2.1. La suma de dos números es siempre mayor que su resta o diferencia. ¿Es verdadera esta afirmación? Para justificar su respuesta, dé algunos ejemplos.

2.2. Si el número (−8) se resta del número (+4), ¿cuál es el resultado? ¿Cuál sería el resultado si el segundo número se hubiera restado del primero? ¿Cuál es la suma de estos dos números?

2.3. En un día frío de invierno, la temperatura cambia de −5°C a +10°C. ¿Cuál es el cambio de temperatura? ¿Cuál será el cambio si la temperatura vuelve a descender hasta −5°C? Explique la diferencia.

2.4. ¿Es cierto que un número negativo elevado a una potencia impar será siempre negativo?

2.5. Indique con claridad la diferencia entre -9^2 y $(-9)^2$. ¿Ambas expresiones son iguales? ¿Por qué sí o por qué no?

2.6. Comente dos formas en las que se usan números positivos y negativos cuando se trabaja con fórmulas.

Al sustituir números con signo en fórmulas que contienen operaciones de sumas y restas, ¿qué precauciones es necesario tomar?

2.7. Cuando se pasa un término de un lado de una ecuación al otro, su signo cambia. Explique cómo funciona este procedimiento y por qué.

2.8. La multiplicación cruzada se usa a veces en el reordenamiento de fórmulas en las que una fracción es igual a otra. Por ejemplo,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se convierte en} \quad ad = bc$$

Explique por qué funciona este procedimiento y comente los riesgos que implica.

2.9. Un error muy común en el reordenamiento de fórmulas consiste en cancelar términos en lugar de factores. Lo siguiente *no* está permitido:

$$\frac{x + y}{x} \neq y \qquad \frac{x^2 + y^2}{x + y} \neq \frac{x + y}{1}$$

2.10. Si la gráfica de dos variables (x, y) es una recta, ¿se puede decir que cuando x se incrementa en 10 unidades, la variable y debe aumentar también 10 unidades? ¿Se puede afirmar que si el valor de x se duplica, el valor de y también debe duplicarse?

2.11. Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una recta en forma transversal, los ángulos alternos internos así formados son iguales. ¿También los ángulos alternos externos lo son?

2.12. Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 33°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?

2.13. Una ventana tiene 6 ft de alto. Una diagonal de dos por cuatro, de 9 ft de largo, encaja con precisión desde una esquina superior hasta la esquina inferior opuesta. ¿Cuál es el ancho de la ventana?

2.14. El complemento ϕ de un ángulo θ es tal que $\phi + \theta = 90°$. Demuestre que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.

2.15. Si los ángulos ϕ y θ son complementarios, demuestre que tan θ es el recíproco de tan ϕ.

Problemas

Sección 2.1 Repaso de números con signos

En los problemas 2.1 a 2.26, resuelva la operación indicada.

2.1. $(+2) + (+5)$ — Resp. +7

2.2. $(-2) + (6)$

2.3. $(-4) - (-6)$ — Resp. +2

2.4. $(+6) - (+8)$

2.5. $(-3) - (+7)$ — Resp. −10

2.6. $(-15) - (+18)$

2.7. $(-4) - (+3) - (-2)$ — Resp. −5

2.8. $(-6) + (-7) - (+4)$

2.9. $(-2)(-3)$ — Resp. +6

2.10. $(-16)(+2)$

2.11. $(-6)(-3)(-2)$ — Resp. −36

2.12. $(-6)(+2)(-2)$

2.13. $(-3)(-4)(-2)(2)$ — Resp. −48

2.14. $(-6)(2)(3)(-4)$

2.15. $(-6) \div (-3)$ — Resp. +2

2.16. $(-14) \div (+7)$

2.17. $(+16) \div (-4)$ — Resp. −4

2.18. $(+18) \div (-6)$

2.19. $\dfrac{-4}{-2}$ — Resp. +2

2.20. $\dfrac{+16}{-4}$

2.21. $\dfrac{(-2)(-3)(-1)}{(-2)(-1)}$ — Resp. −3

2.22. $\dfrac{(-6)(+4)}{(-2)}$

2.23. $\dfrac{(-16)(4)}{2(-4)}$ — Resp. +8

2.24. $\dfrac{(-1)(-2)^2(12)}{(6)(2)}$

2.25. $(-2)(+4) - \dfrac{(-6)}{(+2)} - (-5)$ — Resp. 0

2.26. $(-2)(-2)^2 + \dfrac{(-3)(-2)(-8)}{(-4)(1)} - (-6)^3$

En los problemas 2.27 a 2.30, halle lo que se pide.

2.27. Las distancias por arriba del nivel del suelo son positivas y las distancias por debajo de dicho nivel son negativas. Si un objeto se deja caer desde 20 pies (ft) por encima del nivel del suelo a un hoyo de 12 ft de profundidad, ¿cuál será la diferencia entre la posición inicial y la final? — Resp. 32 ft

2.28. En física, el trabajo se mide en joules (J) y puede ser positivo o negativo, según la dirección de la fuerza que realiza dicho trabajo. ¿Cuál será el trabajo total realizado si los trabajos de las fuerzas son 20 J, −40 J y −12 J?

2.29. La temperatura de un perno es −12°C. (a) Si la temperatura se eleva en 6°C, ¿cuál será la temperatura nueva? (b) Si la temperatura original desciende 5°C, ¿cuál será la temperatura nueva? (c) Si la temperatura original se multiplica por un factor de −3, ¿cuál será la temperatura resultante?

Resp. (a) −6°C, (b) −17° C, (c) 36°C

2.30. Un metal se dilata cuando se calienta y se contrae cuando se enfría. Supongamos que la longitud de una varilla cambia 2 milímetros (mm) por cada 1°C de temperatura. ¿Cuál será el cambio total en su longitud cuando la temperatura cambia de −5 a −30°C?

Sección 2.2 Repaso de álgebra

En los problemas 2.31 a 2.46, determine el valor de x cuando $a = 2$, $b = -3$ y $c = -2$.

2.31. $x = a + b + c$ Resp. -3

2.32. $x = a - b - c$

2.33. $x = b + c - a$ Resp. -7

2.34. $x = b(a - c)$

2.35. $x = \dfrac{b - c}{a}$ Resp. $-\dfrac{1}{2}$

2.36. $x = \dfrac{a + b}{c}$

2.37. $x = b^2 - c^2$ Resp. $+5$

2.38. $x = \dfrac{-b}{ac}$

2.39. $x = \dfrac{a}{bc}(a - c)$ Resp. $+\dfrac{4}{3}$

2.40. $x = a^2 + b^2 + c^3$

2.41. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ Resp. $\sqrt{17}$

2.42. $x = ab(c - a)^2$

2.43. $2ax - b = c$ Resp. $-\dfrac{5}{4}$

2.44. $ax + bx = 4c$

2.45. $3ax = \dfrac{2ab}{c}$ Resp. $+1$

2.46. $\dfrac{4ac}{b} = \dfrac{2x}{b} - 16$

En los problemas 2.47 a 2.56, resuelva las ecuaciones para la incógnita (la letra desconocida).

2.47. $5m - 16 = 3m - 4$ Resp. $m = 6$

2.48. $3p = 7p - 16$

2.49. $4m = 2(m - 4)$ Resp. $m = -4$

2.50. $3(m - 6) = 6$

2.51. $\dfrac{x}{3} = (4)(3)$ Resp. $x = 36$

2.52. $\dfrac{p}{3} = \dfrac{2}{6}$

2.53. $\dfrac{96}{x} = 48$ Resp. $x = 2$

2.54. $14 = 2(b - 7)$

2.55. $R^2 = (4)^2 + (3)^2$ Resp. $R = +5$

2.56. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{6}$

En los problemas 2.57 a 2.70, resuelva las fórmulas para la letra indicada.

2.57. $V = IR, R$ Resp. $R = \dfrac{V}{I}$

2.58. $PV = nRT, T$

2.59. $F = ma, a$ Resp. $a = \dfrac{F}{m}$

2.60. $s = vt + d, d$

2.61. $F = \dfrac{mv^2}{R}, R$ Resp. $R = \dfrac{mv^2}{F}$

2.62. $s = \frac{1}{2}at^2, a$

2.63. $2as = v_f^2 - v_o^2, a$ Resp. $a = \dfrac{v_f^2 - v_o^2}{2s}$

2.64. $C = \dfrac{Q^2}{2V}, V$

2.65. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}, R$ Resp. $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

2.66. $MV = Ft, t$

2.67. $mv_2 - mv_1 = Ft, v_2$ Resp. $v_2 = \dfrac{Ft + mv_1}{m}$

2.68. $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}, T^2$

2.69. $v = v_o + at, a$ Resp. $a = \dfrac{v - v_o}{t}$

2.70. $c^2 = a^2 + b^2, b$

Sección 2.3 Exponentes y radicales

En los problemas 2.71 a 2.92, simplifique las expresiones mediante las leyes de los exponentes y de los radicales.

2.71. $2^5 \cdot 2^7$ Resp. 2^{12}

2.72. $3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3$

2.73. x^7x^3 Resp. x^{10}

2.74. $x^7x^{-5}x^3$

2.75. $a^{-3}a^2$ Resp. $\dfrac{1}{a}$

2.76. $a^3a^{-2}b^{-3}b$

2.77. $\dfrac{2^3}{2^5}$ Resp. $\dfrac{1}{2^2}$

2.78. $\dfrac{2a^3b}{2ab^3}$

2.79. $\dfrac{2x^{17}}{x^{12}}$ Resp. $2x^5$

2.80. $(ab)^{-2}$

2.81. $(m^{-3})^{-2}$ Resp. m^6

2.82. $(n^3c^{-2})^{-2}$

2.83. $(4 \times 10^2)^3$ Resp. 64×10^6

2.84. $(6 \times 10^{-2})^{-2}$

2.85. $\sqrt[3]{64}$ Resp. 4

2.86. $\sqrt[4]{81}$

2.87. $\sqrt[5]{x^{15}}$ Resp. x^3

2.88. $\sqrt{a^4b^6}$

2.89. $\sqrt{4 \times 10^4}$ Resp. 2×10^2

2.90. $\sqrt[3]{8 \times 10^{-27}}$

2.91. $\sqrt[5]{32a^{10}}$ Resp. $2a^2$

2.92. $\sqrt{(x + 2)^2}$

Sección 2.5 Notación científica

En los ejercicios 2.93 a 2.100, exprese los números decimales en notación científica.

2.93. 40 000 Resp. 4×10^4

2.94. 67

2.95. 480 Resp. 4.80×10^2

2.96. 497 000

2.97. 0.0021 Resp. 2.1×10^{-3}

2.98. 0.789

2.99. 0.087 Resp. 8.7×10^{-2}

2.100. 0.000967

En los ejercicios 2.101 a 2.108, exprese los números en notación decimal.

2.101. 4×10^6 Resp. 4,000,000

2.102. 4.67×10^3

2.103. 3.7×10^1 Resp. 37

2.104. 1.4×10^5

2.105. 3.67×10^{-2} Resp. 0.0367

2.106. 4×10^{-1}

2.107. 6×10^{-3} Resp. 0.006

2.108. 4.17×10^{-5}

En los ejercicios 2.109 a 2.132, simplifique y exprese como un solo número escrito en notación científica.

2.109. 400×20000 Resp. 8×10^6

2.110. 37×2000

2.111. $(4 \times 10^{-3})(2 \times 10^5)$ Resp. 8×10^2

2.112. $(3 \times 10^{-1})(6 \times 10^{-8})$

2.113. $(6.7 \times 10^3)(4.0 \times 10^5)$ Resp. 2.68×10^9

2.114. $(3.7 \times 10^{-5})(200)$

2.115. $(4 \times 10^{-3})^2$ Resp. 1.60×10^{-5}

2.116. $(3 \times 10^6)^3$

2.117. $(6000)(3 \times 10^{-7})$ Resp. 1.8×10^{-3}

2.118. $(4)(300)(2 \times 10^{-2})$

2.119. $7000 \div (3.5 \times 10^{-3})$ Resp. 2.00×10^6

2.120. $60 \div 30000$

2.121. $(6 \times 10^{-5}) \div (3 \times 10^4)$ Resp. 2×10^{-9}

2.122. $(4 \times 10^{-7}) \div (7 \times 10^{-7})$

2.123. $\dfrac{4600}{0.02}$ Resp. 2.3×10^5

2.124. $\dfrac{(1600)(4 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-2}}$

2.125. $4.0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$ Resp. 2.40×10^3

2.126. $6 \times 10^{-5} - 4 \times 10^{-6}$

2.127. $6 \times 10^{-3} - 0.075$ Resp. -6.90×10^{-2}

2.128. $0.0007 - 4 \times 10^{-3}$

2.129. $\dfrac{4 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-2}}$ Resp. 6×10^{-4}

2.130. $\dfrac{6 \times 10^3 + 4 \times 10^2}{1 \times 10^{-3}}$

2.131. $\dfrac{600 - 3000}{0.0003}$ Resp. -8×10^6

2.132. $(4 \times 10^{-3})^2 - 2 \times 10^{-5}$

Sección 2.6 Gráficas

2.133. Trace una gráfica para los siguientes datos registrados de un objeto que cae libremente a partir del reposo.

Rapidez, ft/s	32	63	97	129	159	192	225
Tiempo, s	1	2	3	4	5	6	7

¿Qué rapidez cabe esperar después de 4.5 s? ¿Qué tiempo se requiere para que el objeto alcance una rapidez de 100 ft/s? Resp. V=144 ft/s, t = 3.1 s

2.134. El avance de un tornillo con cuerda hacia la derecha es proporcional al número de vueltas completas. Se han registrado los datos siguientes para un tornillo en particular:

Avance, in	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Núm. de vueltas	16	32	48	64	80	96

Trace una gráfica que registre el número de vueltas en las divisiones horizontales y el avance del tornillo, en pulgadas, en las divisiones verticales. ¿Qué número de vueltas es necesario completar para que el tornillo avance 2.75 in?

2.135. Elabore una gráfica que muestre la relación entre la frecuencia y la longitud de onda de varias ondas electromagnéticas. Se cuenta con los datos siguientes:

Frecuencia, kilohertz (kHz)	150	200	300	500	600	900
Longitud de onda, metros (m)	2000	1500	1000	600	500	333

¿Qué longitudes de onda tienen las ondas electromagnéticas cuyas frecuencias son 350 kHz y 800 kHz? Resp. 857 m, 375 m

2.136. La pérdida de potencia eléctrica en una resistencia varía en proporción directa del cuadrado de la corriente. Los datos siguientes fueron obtenidos en un solo experimento:

Corriente, amperes (A)	1.0	2.5	4.0	5.0	7.0	8.5
Potencia, watts (W)	1.0	6.5	16.2	25.8	50.2	72.0

Trace una gráfica y, a partir de la curva obtenida, calcule la pérdida de potencia cuando la corriente tiene un valor de (a) 3.2 A y (b) 8.0 A.

Sección 2.7 Geometría

Nota: Si la recta parece paralela o perpendicular, suponga que lo es.

2.137. ¿Qué magnitud estima usted para cada uno de los ángulos de la figura 2.21?
Resp. 90°, 180°, 270° y 45°

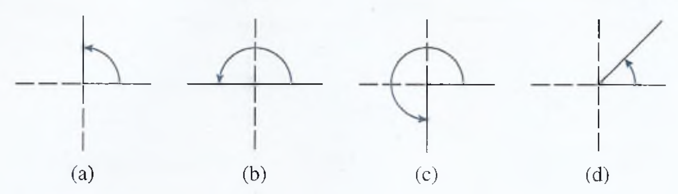
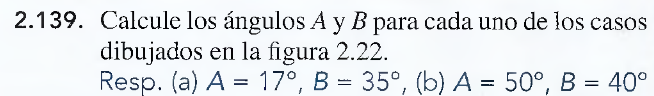


Figura 2.21

2.138. Use una regla y un transportador para medir rectas y ángulos. Trace dos rectas paralelas *AB* y *CD* con 2 cm de separación entre ellas. Dibuje ahora una tercera recta *EF* que corte a cada una de las otras rectas en cualquier ángulo que no sea 90°. Compruebe las reglas 1 y 2 midiendo los ángulos formados por la transversal *EF*. Trace ahora otra recta transversal *GH* inclinada en la dirección contraria, que corte la recta *AB* en el mismo punto que la recta *EF*. Compruebe la regla 3 para ver si se cumple el caso del triángulo que acaba de formar.



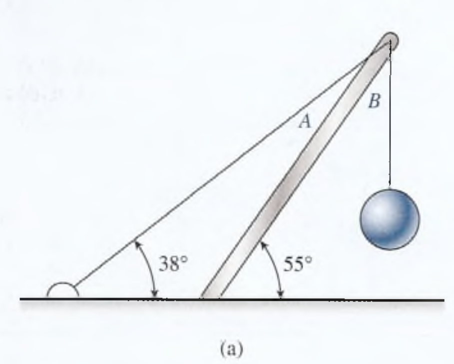
2.139. Calcule los ángulos *A* y *B* para cada uno de los casos dibujados en la figura 2.22.
Resp. (a) $A = 17°$, $B = 35°$, (b) $A = 50°$, $B = 40°$

2.140. Calcule los ángulos *A* y *B* en la figura 2.22.

Sección 2.8 Trigonometría del triángulo rectángulo

En los ejercicios 2.141 a 2.158, use la calculadora para evaluar cada ejemplo.

2.141. sen 67° — Resp. 0.921
2.142. cos 48°
2.143. tan 59° — Resp. 1.66
2.144. sen 34°
2.145. cos 29° — Resp. 0.875
2.146. tan 15°
2.147. 20 cos 15° — Resp. 19.3
2.148. 400 sen 21°
2.149. 600 tan 24° — Resp. 267
2.150. 170 cos 79°
2.151. 240 sen 78° — Resp. 235
2.152. 1400 tan 60°
2.153. $\dfrac{200}{\text{sen } 17°}$ — Resp. 684
2.154. $\dfrac{300}{\text{sen } 60°}$
2.155. $\dfrac{167}{\cos 78°}$ — Resp. 803



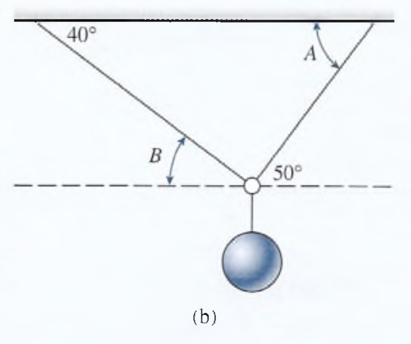
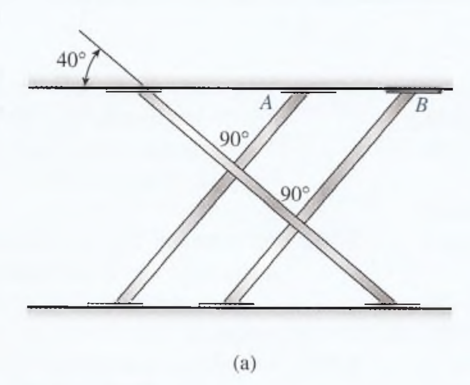


Figura 2.22



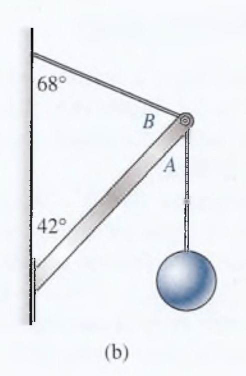
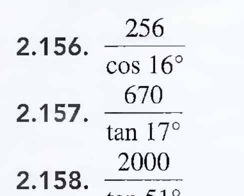


Figura 2.23



2.156. $\dfrac{256}{\cos 16°}$

2.157. $\dfrac{670}{\tan 17°}$ Resp. 2191

2.158. $\dfrac{2000}{\tan 51°}$

En los ejercicios 2.159 a 2.167, determine los ángulos desconocidos.

2.159. $\operatorname{sen}\theta = 0.811$ Resp. 54.2

2.160. $\operatorname{sen}\theta = 0.111$

2.161. $\tan\theta = 1.2$ Resp. 50.2

2.162. $\tan\theta = 0.511$

2.163. $\cos\beta = 0.228$ Resp. 76.8

2.164. $\cos\theta = 0.81$

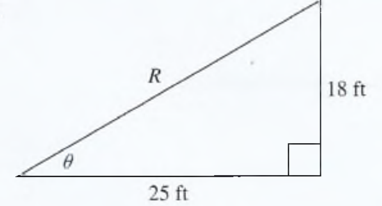
2.165. $\cos\theta = \dfrac{400}{500}$ Resp. 36.9

2.166. $\tan\theta = \dfrac{16}{4}$

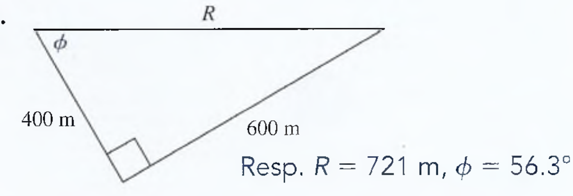
2.167. $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{140}{270}$ Resp. 31.2

En los ejercicios 2.168 a 2.175, resuelva los triángulos para los ángulos y los lados desconocidos.

2.168.

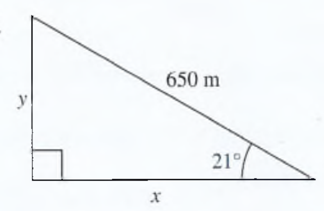


2.169.

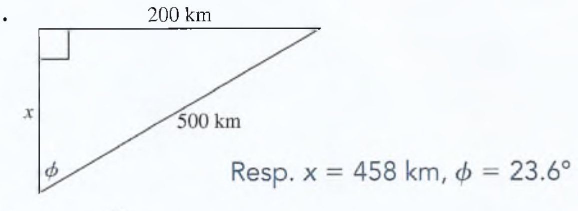


Resp. $R = 721$ m, $\phi = 56.3°$

2.170.

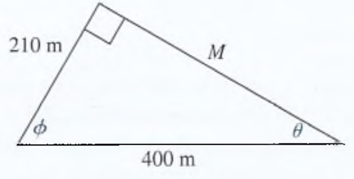


2.171.

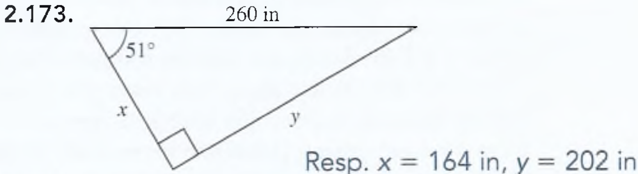


Resp. $x = 458$ km, $\phi = 23.6°$

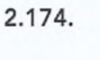
2.172.



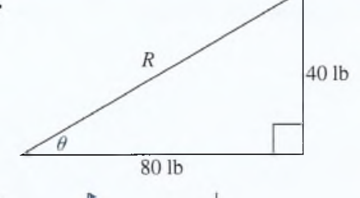
2.173.



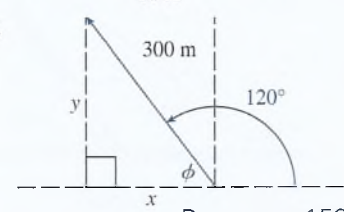
Resp. $x = 164$ in, $y = 202$ in



2.174.



2.175.



Resp. $x = 150$ m, izq. $y = 260$ m

Problemas adicionales

2.176. Una mañana temprano, la lectura del barómetro es 30.21. En la tarde del mismo día, cuando se desata una tormenta, la lectura disminuye en 0.59 in. ¿Cuál es esta segunda lectura?

2.177. Un termómetro marca 29.0°C. Después de estar guardado en el congelador algún tiempo, marca −15°C. ¿Cuál fue el cambio de temperatura? Resp. −44°C

2.178. El cambio de temperatura de un objeto es de −34°C. Si la temperatura original era de 20°C, ¿cuál será la temperatura final?

2.179. Una tabla de madera se corta en seis piezas de 28 cm de largo cada una. En cada corte se desperdicia 1 mm de madera. ¿Cuál era la longitud original de la tabla, en pulgadas? Resp. 66.3 in

2.180. El volumen V de un cilindro circular recto es el área de la base (πr^2) multiplicada por la altura, h. Si se conoce el radio, escriba una fórmula para hallar la altura, h.

2.181. La fuerza centrípeta F_C se halla multiplicando la masa, m, por el cuadrado de su velocidad, v, y di-

vidiendo el resultado entre el radio, r, del círculo. Escriba la fórmula y resuelva para hallar el radio, r.

Resp. $F_C = \frac{mv^2}{r}$, $r = \frac{mv^2}{F_C}$

2.182. Resuelva para x en la ecuación $xb + cd = a(x + 2)$ y encuentre el valor de x cuando $a = 2$, $b = -2$, $c = 3$ y $d = -1$.

2.183. Resuelva para c en la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$ y halle el valor de c cuando $a = 50$ y $b = 20$. Resp. 53.9

2.184. La ley de la gravitación de Newton se escribe $F = Gm_1m_2/R^2$. Se tienen los valores numéricos siguientes: $G = 6.67 \times 10^{-11}$, $m_1 = 4 \times 10^{-8}$, $m_2 = 3 \times 10^{-7}$ y $R = 4 \times 10^{-2}$. ¿Cuál es el valor de F?

2.185. La longitud de una varilla es inicialmente $L_0 = 21.41$ cm a $t_0 = 20$°C. Luego la calentamos hasta una temperatura final de $t = 100$°C. La nueva longitud se calcula mediante:

$$L = L_0 + \alpha L_0(t - t_0)$$

donde $\alpha = 2 \times 10^{-3}$/°C. ¿Cuál es el valor de L?

Resp. $L = 24.84$ cm

2.186. Trace una gráfica de la función $y = 2x$; con base en ella, compruebe que $x = 3.5$ cuando $y = 7$.

2.187. Encuentre los ángulos desconocidos en las figuras 2.24a y b.

Resp. (a) $A = 30°$, $B = 60°$, $C = 60°$;
(b) $A = 60°$, $B = 30°$, $C = 120°$, $D = 60°$

2.188. Reste −4 cm de −8 cm para obtener la longitud A. Sume −6 cm a +14 cm para obtener la longitud B. ¿Cuál es la longitud $C = A - B$? ¿Acaso $A - B$ tiene el mismo valor que $B - A$? Considere una recta numérica colocada a lo largo del eje x. Dibuje una línea recta a partir del punto original C. Trace después una recta desde el origen hasta el punto $B - A$. ¿Cuál es la distancia entre estos puntos?

Resp. −12 cm, no, 24 cm

2.189. El periodo T de un péndulo es el tiempo que tarda en realizar una oscilación completa (de ida y vuelta). El periodo se calcula con la ecuación siguiente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. (a) Resuelva para obtener la longitud L. (b) Si la longitud L del péndulo se cuadruplica, ¿cuánto mayor será ahora el periodo? (c) Si el periodo de un péndulo cuando oscila sobre la Tierra es de 2.0 s, ¿cuál sería su periodo en la Luna, donde el valor de g es sólo un sexto de su valor en la Tierra?

***2.190.** La longitud de un microcircuito diminuto es 3.45×10^{-4} m y su ancho es de 9.77×10^{-5} m. (a) Halle el área y el perímetro del chip. (b) Si el ancho se duplica y la longitud se reduce a la mitad, ¿cuál será el cambio en el área y cuál será el cambio en el perímetro del microcircuito?

Resp. (a) 3.37×10^{-8} m^2, 8.85×10^{-4} m;
(b) 0, -1.5×10^{-4} m

***2.191.** La presión en un depósito de almacenamiento depende de la temperatura. Se han registrado las mediciones siguientes:

Temperatura, K	300	350	400	450	500	550
Presión, lb/in^2	400	467	535	598	668	733

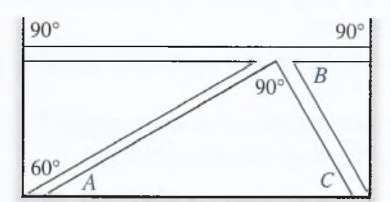
Trace una gráfica con estos datos. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Puede usted escribir una descripción de la relación entre la presión y la temperatura, tomando como base esa información? ¿Cuál esperaría que fuera la presión a temperaturas de 420 y 600 kelvin (K)?

***2.192.** Se tiene el voltaje (V), en volts, y la corriente eléctrica (I), en miliamperes (mA), de una resistencia. A continuación presentamos los datos registrados:

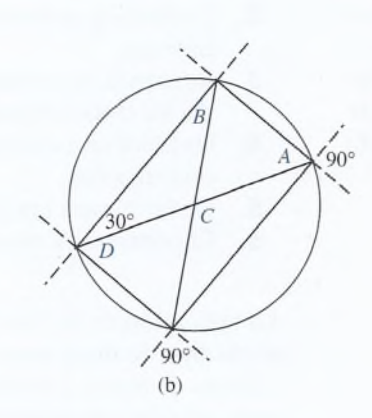
Voltaje, V	10	20	30	40	50	60
Corriente, mA	145	289	435	581	724	870

Elabore una gráfica con estos datos. ¿Qué valor espera usted que tenga la corriente en la resistencia cuando se le aplican voltajes de 26 y 48 V?

Resp. 377 mA, 696 mA



(a)



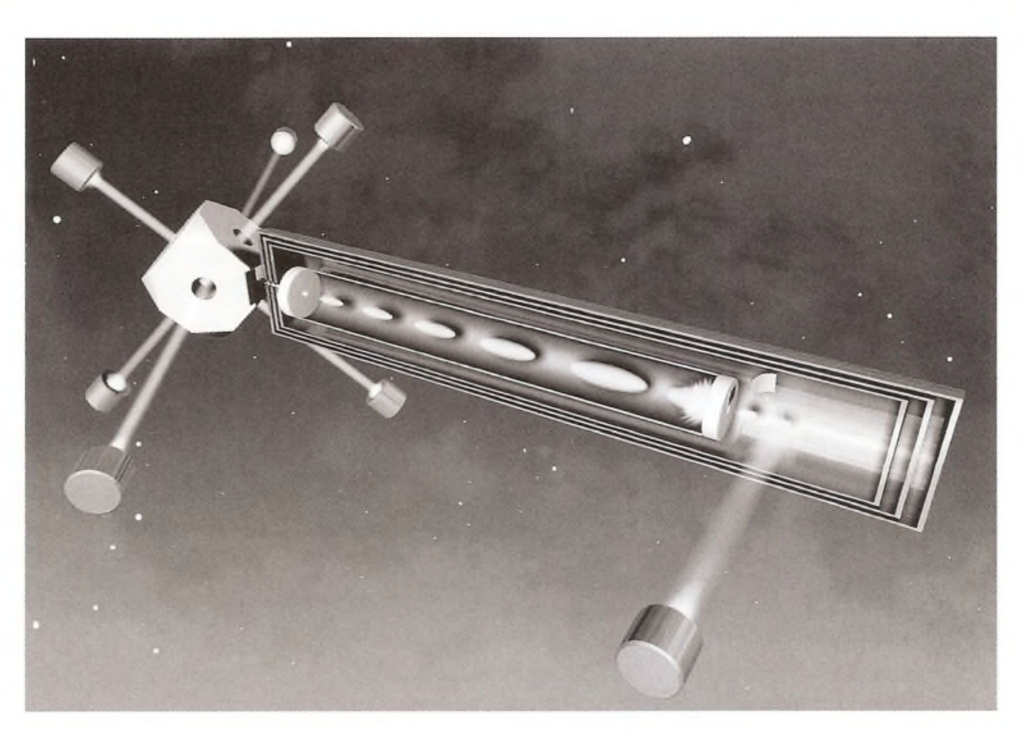
(b)

Figura 2.24



3 Mediciones técnicas y vectores

PARCS (siglas en inglés de Principal Reloj Atómico de Referencia en el Espacio) constituye una misión para instalar un reloj atómico en la Estación Espacial Internacional (EEI) programada para entrar en operación en 2008. La misión, financiada por la NASA, consiste en un reloj atómico de cesio enfriado por rayos láser y un sistema de transferencia del horario que utiliza satélites del sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés). PARCS volará simultáneamente con SUMO (siglas en inglés de oscilador de microondas de cavidad superconductora), un tipo distinto de reloj que se comparará contra el reloj de PARCS con el fin de probar ciertas teorías. Los objetivos de la misión son probar la teoría gravitacional, estudiar los átomos enfriados por rayos láser en microgravedad y mejorar la precisión de la medición del tiempo en la Tierra. (*Foto de la NASA.*)



Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Escribirá las unidades básicas de masa, longitud y tiempo en unidades del SI y del Sistema Usual en Estados Unidos (SUEU).
2. Definirá y aplicará los prefijos del SI que indican múltiplos de las unidades básicas.
3. Realizará la conversión de una unidad a otra para la misma cantidad, a partir de las definiciones necesarias.
4. Definirá una cantidad vectorial y una cantidad escalar, y dará ejemplos de cada una de ellas.
5. Determinará las componentes de un vector específico.
6. Encontrará la resultante de dos o más vectores.

La aplicación de la física, ya sea en el taller o en un laboratorio técnico, requiere siempre algún tipo de mediciones. Un mecánico automotriz puede medir el diámetro o *vaso* de un cilindro de motor. Los técnicos en refrigeración tal vez necesiten hacer mediciones de volumen, presión y temperatura. Los electricistas emplean instrumentos para medir la resistencia eléctrica y la corriente, y los ingenieros mecánicos se interesan en los efectos de fuerzas

cuyas magnitudes deben calcularse con precisión. En realidad, es difícil imaginar una ocupación donde no se requiera la medición de alguna cantidad física.

En el proceso de realizar mediciones físicas, con frecuencia hay interés tanto en la dirección como en la magnitud de una cantidad en particular. La longitud de un poste de madera se determina por el ángulo que forma con la horizontal. La eficacia de una fuerza para producir un desplazamiento depende de la dirección en que ésta se aplica. La dirección en la cual se mueve una banda transportadora es, con frecuencia, tan importante como la rapidez a la que se desplaza. Tales cantidades físicas, como *desplazamiento, fuerza* y *velocidad*, son comunes en el campo de la industria. En este capítulo se presenta el concepto de *vectores*, el cual permite estudiar tanto la magnitud como la dirección de cantidades físicas.

3.1 Cantidades físicas

El lenguaje de la física y la tecnología es universal. Los hechos y las leyes deben expresarse de una manera precisa y consistente, de manera que un término determinado signifique exactamente lo mismo para todos. Por ejemplo, supongamos que alguien nos dice que el desplazamiento del pistón de un motor es 3.28 litros (200 pulgadas cúbicas). Debemos responder dos preguntas para entender esa afirmación: (1) ¿Cómo se midió el *desplazamiento del pistón*? y (2) ¿qué es un *litro*?

El ***desplazamiento del pistón*** representa el volumen que el pistón desplaza o "expulsa" en su movimiento desde el fondo hasta la parte superior del cilindro. En realidad no se trata de un desplazamiento, en el sentido usual de la palabra, sino de un volumen. Un patrón de medida de volumen, que se reconoce fácilmente en todo el mundo, es el litro. Por tanto, cuando un motor tiene una etiqueta en la que se indica: "desplazamiento del pistón = 3.28 litros", todos los mecánicos entienden de igual manera dicha especificación.

En el ejemplo anterior, el desplazamiento del pistón (volumen) es un ejemplo de *cantidad física*. Cabe resaltar que esta cantidad fue definida mediante la descripción de su proceso de medición. En física, todas las cantidades se definen en esta forma. Otros ejemplos de cantidades físicas son: longitud, peso, tiempo, rapidez, fuerza y masa.

Una cantidad física se mide comparándola con un patrón previamente conocido. Por ejemplo, supongamos que se desea determinar la longitud de una barra metálica. Con los instrumentos adecuados se determina que la longitud de la barra es de cuatro metros. No es que la barra contenga cuatro cosas llamadas "metros", sino simplemente que se ha comparado con la longitud de un patrón conocido como "metro". La longitud también se podría representar como 13.1 pies o 4.37 yardas, si se usaran otras medidas conocidas.

La ***magnitud*** de una cantidad física se define con un *número* y una *unidad* de medida. Ambos son necesarios porque, por sí solos, el número o la unidad carecen de significado. Con excepción de los números y fracciones puros, se requiere indicar la unidad junto con el número cuando se expresa la magnitud de cualquier cantidad.

La *magnitud* de una cantidad física se especifica completamente con un número y una unidad; por ejemplo, 20 metros o 40 litros.

En vista de que hay muchas medidas diferentes para la misma cantidad, se requiere idear la forma de tener un registro de la magnitud exacta de las unidades empleadas. Para hacerlo, es necesario establecer medidas estándares para magnitudes específicas. Un ***patrón*** es un registro físico permanente, o fácil de determinar, de la cantidad que implica una unidad de medición determinada. Por ejemplo, el patrón para medir la resistencia eléctrica, el *ohm*, se define por medio de una comparación con un resistor patrón, cuya resistencia se conoce con precisión. Por tanto, una resistencia de 20 ohms debe ser 20 veces mayor que la de un resistor patrón de 1 ohm.

Hay que recordar que cada cantidad física se define indicando cómo se mide. Dependiendo del dispositivo de medición, cada cantidad puede expresarse en unidades diferentes. Por ejemplo, algunas unidades de distancia son *metros, kilómetros, millas* y *pies*, y algunas unidades de rapidez son *metros por segundo*, *kilómetros por hora, millas por hora* y *pies por segundo*. Sin embargo, no importa cuáles sean las unidades elegidas, la distancia debe ser una *longitud* y la rapidez tiene que ser una *longitud* dividida entre un *tiempo*. Por tanto, *longitud* y *longitud/tiempo* constituyen las dimensiones de las cantidades físicas *distancia* y *rapidez*.

Hay que observar que la rapidez se define en términos de dos cantidades más elementales (longitud y tiempo). Es conveniente establecer un número pequeño de cantidades fundamentales, como longitud y tiempo, a partir de las cuales se puedan derivar todas las demás cantidades físicas. De este modo, se afirma que la rapidez es una cantidad *derivada* y que la longitud o el tiempo son cantidades *fundamentales*. Si se reducen todas las medidas físicas a un número pequeño de cantidades con unidades básicas comunes, habrá menos confusión en su aplicación.

3.2 El Sistema Internacional

El sistema internacional de unidades se llama ***Système International d'Unités (SI)*** y, en esencia, es el mismo que se conoce como *sistema métrico*. El Comité Internacional de Pesas y Medidas ha establecido siete cantidades básicas, y ha asignado unidades básicas oficiales a cada cantidad. Un resumen de estas cantidades, con sus unidades básicas y los símbolos para representarlas, se presenta en la tabla 3.1.

Cada una de las unidades que aparecen en la tabla 3.1 tiene una definición medible específica, que puede duplicarse en cualquier lugar del mundo. De estas unidades básicas sólo una, el *kilogramo*, se define en general en términos de una muestra física individual. Esta muestra estándar se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia. Se han fabricado copias de la muestra original para su uso en otras naciones. El resto de las unidades se definen en términos de hechos físicos reproducibles y se determinan con precisión en todo el mundo.

Es posible medir muchas cantidades, tales como volumen, presión, rapidez y fuerza, que son combinaciones de dos o más *cantidades* o *magnitudes fundamentales*. Sin embargo, nadie ha encontrado jamás una medida que no pueda expresarse en términos de longitud, masa, tiempo, corriente, temperatura, intensidad luminosa o cantidad de sustancia. Las combinaciones de estas magnitudes se denominan magnitudes *derivadas*, y se miden en unidades derivadas. Algunas unidades derivadas comunes aparecen en la tabla 3.2.

Las unidades del SI no se han incorporado en forma total en muchas aplicaciones industriales. En Estados Unidos se está avanzando hacia la adopción de las unidades del SI. No obstante, las conversiones a gran escala son costosas, sobre todo en el caso de muchas aplicaciones mecánicas y térmicas; en vista de esto, la conversión total al sistema internacional tardará todavía algún tiempo. Por ello es necesario que nos familiaricemos con las viejas unidades de ese sistema para la medición de cantidades físicas. Las unidades del sistema usual en Estados Unidos (SUEU) para diversas cantidades importantes se indican en la tabla 3.3.

Tabla 3.1

Unidades básicas del SI para siete magnitudes fundamentales y dos unidades complementarias

Magnitud	Unidad	Símbolo
	Unidades básicas	
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol
	Unidades complementarias	
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

Tabla 3.2

Unidades derivadas para magnitudes físicas comunes

Magnitud	Unidad derivada	Símbolo	
Área	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
Densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2	
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Presión (tensión mecánica)	pascal	Pa	N/m^2
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
Viscosidad dinámica	newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	
Trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	J/s
Cantidad de electricidad	coulomb	C	
Diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	J/C
Intensidad del campo eléctrico	volt por metro	V/m	
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
Capacitancia	farad	F	C/V
Flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
Inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
Densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2
Intensidad de campo magnético	ampere por metro	A/m	
Fuerza magnetomotriz	ampere	A	
Flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Luminosidad	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
Iluminación	lux	lx	lm/m^2
Número de onda	metro a la menos uno	m^{-1}	
Entropía	joule por kelvin	J/K	
Calor específico	joule por kilogramo kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
Conductividad térmica	watt por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
Intensidad radiante	watt por estereorradián	W/sr	
Actividad (de una fuente radiactiva)	segundo a la menos uno	s^{-1}	

Tabla 3.3

Unidades del sistema usual en Estados Unidos

Magnitud	Unidades del SI	Unidades del SUEU
Longitud	metro (m)	pie (ft)
Masa	kilogramo (kg)	slug (slug)
Tiempo	segundo (s)	segundo (s)
Fuerza (peso)	newton (N)	libra (lb)
Temperatura absoluta	kelvin (K)	grado Rankine (R)

Hay que observar que, aun cuando el pie, la libra y otras unidades se usan con frecuencia en Estados Unidos, se han definido de nuevo en términos de los patrones de unidades del SI. Gracias a eso, actualmente todas las mediciones están basadas en los mismos patrones.

3.3 Medición de longitud y tiempo

El patrón de la unidad de longitud del SI, el ***metro (m)***, originalmente se definió como la diezmillonésima parte de la distancia del Polo Norte al Ecuador. Por razones prácticas, esta distancia fue registrada en una barra de platino iridiado estándar. En 1960, el patrón se cambió para facilitar el acceso a una medida más precisa del metro, basada en un patrón atómico. Se acordó que un metro era exactamente igual a 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz rojo-anaranjada del kriptón 86. Se eligió el número de modo que el nuevo patrón se aproximara al antiguo patrón. Sin embargo, la adopción de este patrón tampoco estuvo exenta de problemas. La longitud de onda de la luz emitida por el criptón era incierta debido a que el proceso tiene lugar dentro del átomo, durante la emisión. Además, el desarrollo del láser estabilizado permitió medir una longitud de onda con mucho mayor precisión, en términos de tiempo y velocidad de la luz. En 1983 se adoptó el patrón más reciente para el metro (y probablemente el definitivo):

> Un *metro* es la longitud de la trayectoria que recorre una onda luminosa en el vacío durante un espacio de tiempo de 1/299 792 458 segundos.

El nuevo patrón del metro es más preciso, y tiene además otras ventajas. Su definición depende del patrón de tiempo (s) y éste se basa en un valor común de la velocidad de la luz. En la actualidad se considera que la velocidad de la luz es exactamente:

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \text{(exacta por definición)}$$

Tiene sentido asignar un valor común a la velocidad de la luz porque, de acuerdo con la teoría de Einstein, la velocidad de la luz es una constante fundamental. Más aún, cualquier refinamiento futuro del patrón para medir el tiempo mejorará automáticamente el patrón para la longitud. Por supuesto, en general no es necesario saber la definición exacta de longitud para llevar a cabo mediciones prácticas y precisas. Gran número de herramientas, como los escalímetros sencillos en forma de regla o calibrador, se gradúan de acuerdo con el patrón de medida.

La definición original de tiempo se basó en la idea del día solar, definido como el espacio de tiempo transcurrido entre dos apariciones sucesivas del Sol sobre un determinado meridiano de la Tierra. Así pues, un ***segundo*** era 1/86 400 del día solar medio. No es difícil imaginar las dificultades e incongruencias a las que daba lugar dicho patrón. En 1967, el patrón de tiempo del SI quedó definido de la siguiente forma:

> Un *segundo* representa el tiempo necesario para que el átomo de cesio vibre 9 192 631 770 veces.

Por tanto, el patrón atómico de un segundo es el periodo de vibración de un átomo de cesio. Los mejores relojes de cesio son tan precisos que no se adelantan ni se atrasan más de 1 segundo en 300 000 años.

Debido a que esta medida de tiempo tiende a imponerse a la del día solar medio, la National Bureau of Standards suma periódicamente a la hora un *salto de un segundo*, por lo general una vez al año, el 31 de diciembre. Por tanto, el último minuto de cada año tiene a menudo 61 segundos, en vez de 60 segundos.

Otra ventaja del sistema métrico sobre otros sistemas de unidades es el uso de prefijos para indicar los múltiplos de la unidad básica. La tabla 3.4 define los prefijos aceptados y muestra su uso para indicar múltiplos y subdivisiones del metro. A partir de la tabla es posible determinar que:

$$1 \text{ metro (m)} = 1\,000 \text{ milímetros (mm)}$$
$$1 \text{ metro (m)} = 100 \text{ centímetros (cm)}$$
$$1 \text{ kilómetro (km)} = 1\,000 \text{ metros (m)}$$

Tabla 3.4

Múltiplos y submúltiplos de unidades del SI

Prefijo	Símbolo	Multiplicador	Ejemplo
tera	T	1 000 000 000 000 = 10^{12}	1 terametro (Tm)
giga	G	1 000 000 000 = 10^{9}	1 gigametro (Gm)
mega	M	1 000 000 = 10^{6}	1 megametro (Mm)
kilo	k	1 000 = 10^{3}	1 kilómetro (km)
centi	c	0.01 = 10^{-2}	1 centímetro (cm)*
mili	m	0.001 = 10^{-3}	1 milímetro (mm)
micro	μ	0.000001 = 10^{-6}	1 micrómetro (μm)
nano	n	0.000000001 = 10^{-9}	1 nanómetro (nm)
—	Å	0.0000000001 = 10^{-10}	1 ángstrom (Å)*
pico	p	0.000000000001 = 10^{-12}	1 picómetro (pm)

*Aun cuando no se recomienda el empleo del centímetro y del ángstrom, el uso de estas unidades sigue siendo común.

La relación entre el centímetro y la pulgada se observa en la figura 3.1. Por definición, una pulgada es exactamente igual a 25.4 milímetros. Esta definición y otras definiciones útiles se presentan a continuación (los símbolos de las unidades se indican entre paréntesis):

$$1 \text{ pulgada (in)} = 25.4 \text{ milímetros (mm)}$$
$$1 \text{ pie (ft)} = 0.3048 \text{ metros (m)}$$
$$1 \text{ yarda (yd)} = 0.914 \text{ metros (m)}$$
$$1 \text{ milla (mi)} = 1.61 \text{ kilómetros (km)}$$

Al registrar datos, es preferible usar el prefijo que permita expresar el número en el intervalo de 0.1 a 1 000. Por ejemplo, 7 430 000 metros debe expresarse como 7.43×10^6 m, y reportarse luego como 7.43 megametros, o en forma abreviada 7.43 Mm. Generalmente no es conveniente escribir esta medida como 7 430 kilómetros (7 430 km), a menos que la distancia se esté comparando con otras distancias medidas en kilómetros. En el caso de la cantidad 0.00064 amperes, es correcto escribir 0.64 miliamperes (0.64 mA) o 640 microamperes (640 μA). En general, los prefijos se eligen para múltiplos de mil.

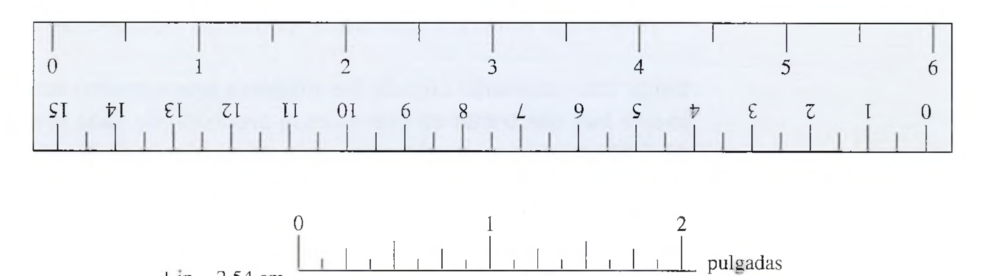


Figura 3.1 Comparación de la pulgada con el centímetro como medidas de longitud.

3.4 Cifras significativas

Algunos números son exactos y otros son aproximados. Si se sacan 20 tornillos de una caja y se usa sólo la cuarta parte de ellos, los números 20 y ¼ se consideran como cantidades exactas. Sin embargo, si se miden la longitud y el ancho de una lámina rectangular, la precisión de

la medida depende de la precisión del instrumento utilizado y de la habilidad del observador. Suponga que el ancho de la placa mencionada se mide con un calibrador vernier y el resultado es 3.42 cm. El último dígito es estimado y, por tanto, susceptible de error. El ancho real fluctúa entre 3.40 cm y 3.50 cm. Escribir el ancho como 3.420 cm implicaría una precisión mayor de la que se justifica. Se dice que el número 3.42 tiene tres *cifras significativas*, y hay que tener cuidado de no escribir más números o ceros de los que son significativos.

Se supone que todas las mediciones físicas son aproximadas, y que el último dígito significativo se ha calculado mediante una estimación de algún tipo. Al escribir tales números, con frecuencia se incluyen algunos ceros para indicar la posición correcta del punto decimal. Sin embargo, con excepción de estos ceros, todos los demás dígitos sí se consideran como cifras significativas. Por ejemplo, la distancia 76 000 m tiene solamente dos dígitos significativos. Se sobreentiende que los tres ceros que siguen al 6 sólo se han agregado para ubicar el punto decimal, a menos que se indique otra cosa. Otros ejemplos son:

4.003 cm	4 cifras significativas
0.34 cm	2 cifras significativas
60 400 cm	3 cifras significativas
0.0450 cm	3 cifras significativas

Los ceros que no se requieren específicamente para la debida localización del punto decimal son significativos (como en los dos últimos ejemplos).

Con la difusión del uso de las calculadoras, con frecuencia los estudiantes informan sus resultados con una precisión mayor de la que resulta justificable. Por ejemplo, suponga que al medir una lámina rectangular se obtiene una longitud de 9.54 cm y un ancho de 3.4 cm. El área de la lámina se calcula y el resultado es 32.436 cm^2 (cinco cifras significativas). Sin embargo, una cadena es tan fuerte como el más débil de sus eslabones. Puesto que el ancho tiene una precisión de sólo dos cifras significativas, el resultado no se puede expresar con *mayor* precisión. El área se debe indicar como 32 cm^2. El número que resulta al usar la calculadora proporciona una información falsa respecto a la precisión. Esto será confuso para las personas que no participaron en la medición. Una cifra significativa es *realmente* un digito *conocido*.

Regla 1: Cuando se multiplican o dividen números aproximados, el número de cifras significativas de la respuesta final contiene el mismo número de cifras significativas que el factor de *menor* precisión. Al decir "*menor* precisión" nos referimos al factor que tiene el menor número de cifras significativas.

Surge otro problema cuando los números aproximados se suman o se restan. En tales casos lo que hay que tomar en cuenta es la *precisión* de cada medición. Por ejemplo, una longitud de 7.46 m es *precisa* a la centésima más cercana de un metro y una longitud de 9.345 m es precisa a la milésima más cercana de un metro. La suma de un grupo de éstas puede tener más cifras significativas que alguna de las mediciones individuales, pero no puede ser más *precisa*. Por ejemplo, suponiendo que se determina el perímetro de la lámina rectangular antes descrita, podemos escribir:

$$9.54 \text{ cm} + 3.4 \text{ cm} + 9.54 \text{ cm} + 3.4 \text{ cm} = 25.9 \text{ cm}$$

La medición con menor precisión era a la décima más cercana de centímetro; por tanto, el perímetro debe redondearse a la décima de centímetro más próxima (aun cuando tenga tres cifras significativas).

Regla 2: Cuando se suman o restan números aproximados, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al menor número de cifras decimales de cualquier término que se suma.

El trabajo en el salón de clases y el trabajo en el laboratorio a menudo se tratan de manera muy diferente. En el laboratorio conocemos las incertidumbres en cada medición y debemos

redondear las respuestas a la precisión adecuada. Como en el salón de clases o en los problemas de tarea generalmente no se conocen las limitaciones de cada medida, supondremos que todos los datos dados tienen una precisión de tres cifras significativas. Por tanto, una barra de 8 cm se considerará que tiene una longitud de 8.00 cm. Y una rapidez de 51 km/h se tomaría como 51.0 km/h. Para evitar errores de redondeo, se debe acarrear *cuando menos* una cifra significativa más en los cálculos que se planea presentar. Por ejemplo, si va a reportar tres cifras significativas, debe acarrear cuando menos cuatro en todos sus cálculos.

3.5 Instrumentos de medición

FÍSICA HOY

Cuando se calibra un calibrador micrométrico, rectángulos delgados de grosor uniforme se unen para formar un ancho conocido. La suciedad, el polvo o incluso la falta de brillo podrían cambiar la medición. Las barras de calibración se frotan para limpiarlas y se guardan con cuidado para evitar el contacto con la humedad.

La elección de un instrumento de medición depende de la precisión requerida y de las condiciones físicas que rodean la medición. Para un mecánico o un maquinista, la opción básica es con frecuencia el escalímetro o regla de acero, como la que se muestra en la figura 3.2. Esta regla tiene a menudo la precisión suficiente cuando se desea medir longitudes fácilmente accesibles. Las reglas de acero pueden tener graduaciones tan pequeñas como de 32-ésimas o incluso 64-ésimas de pulgada. Las reglas métricas están graduadas generalmente en milímetros.

Para medir diámetros interiores y exteriores se utilizan calibradores como los que se presentan en la figura 3.3. El calibrador mismo no se puede leer en forma directa; por tanto, tiene que acoplarse a una regla de acero o a un medidor de tipo estándar.

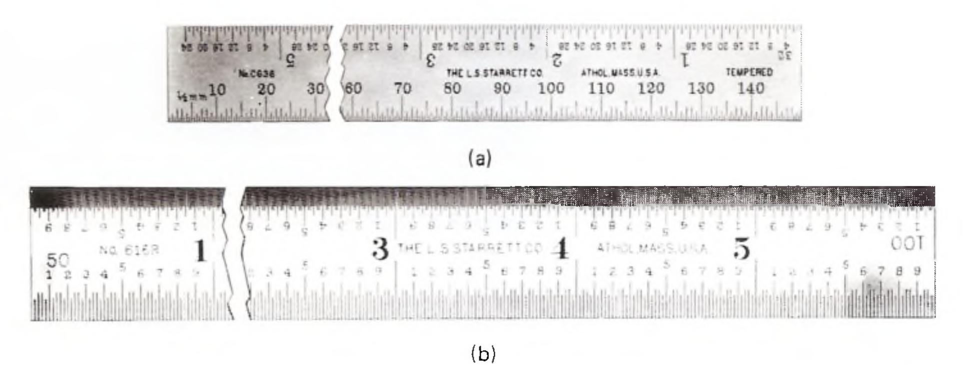


Figura 3.2 Escalímetros de acero de 6 in (15 cm). (a) Escalas 1/32 in y 0.5 mm. (b) Escalas 1/100 y 1/50 in. *(The L.S. Starrett Company.)*

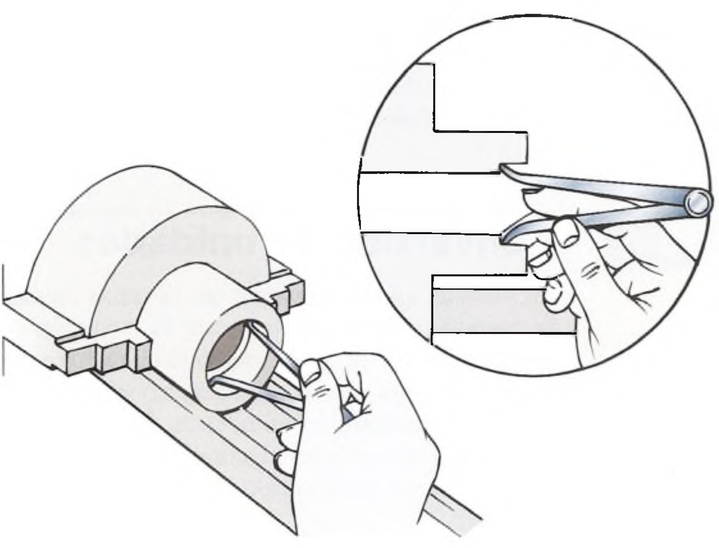


Figura 3.3 Uso de calibradores para medir un diámetro interior.

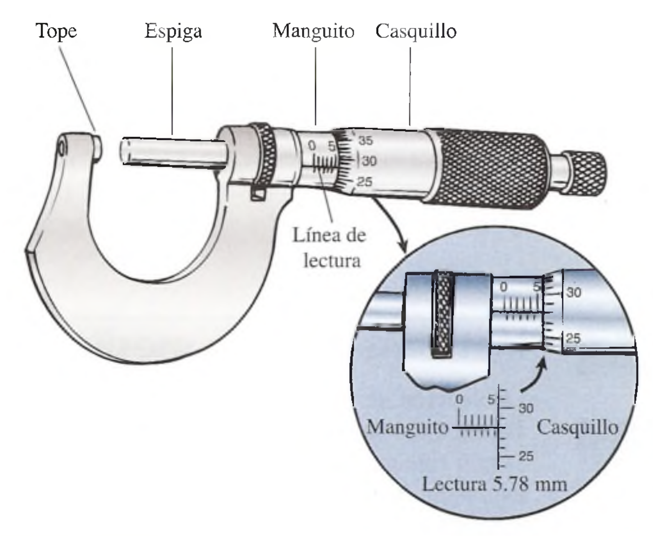


Figura 3.4 Calibrador micrométrico que muestra una lectura de 5.78 mm. *(The L.S. Starrett Company.)*

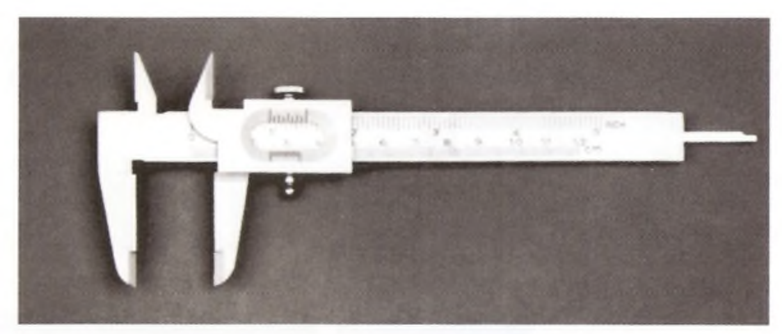


Figura 3.5 Calibrador vernier. *(The L.S. Starrett Company.)*



Figura 3.6 Cómo medir la profundidad de un reborde con un micrómetro de profundidad.

La máxima precisión posible con una regla de acero se determina por el tamaño de la graduación más pequeña, y es del orden de 0.01 in o de 0.1 mm. Si se desea mayor precisión, el mecánico se sirve muchas veces de un calibrador micrométrico estándar, como el que se ilustra en la figura 3.4, o de un calibrador estándar tipo vernier como el de la figura 3.5. Dichos instrumentos tienen escalas deslizantes que permiten efectuar mediciones muy precisas. Los calibradores micrométricos permiten medir hasta diezmilésimas de pulgada (0.002 mm), y los calibradores tipo vernier sirven para medir con una precisión de 0.001 in o 0.02 mm.

La profundidad de orificios ciegos, ranuras y huecos se mide generalmente con un micrómetro de profundidad. La figura 3.6 muestra un medidor de este tipo que se utiliza para medir la profundidad de un reborde.

3.6 Conversión de unidades

En vista de que se requieren tan diversas unidades para los diferentes tipos de trabajo, con frecuencia es necesario convertir la medición de una unidad a otra. Por ejemplo, vamos a suponer que un mecánico midió el diámetro exterior de un tubo y obtuvo una lectura de $1\frac{3}{16}$ in. Sin embargo, cuando el mecánico solicite un accesorio para el tubo tal vez deba informar cuál es el diámetro en milímetros. Ese tipo de conversiones se pueden hacer con facilidad manejando las unidades algebraicamente y aplicando después el principio de cancelación.

En el caso mencionado, el mecánico debe convertir primero la fracción en un número decimal.

$$1\tfrac{3}{16}\text{ in} = 1.19\text{ in}$$

A continuación debe escribir la cantidad que desea convertir, anotando tanto el número como las unidades correspondientes (1.19 in). Ahora tendrá que recordar la definición que establece la relación entre pulgadas y milímetros:

$$1 \text{ in} = 25.4 \text{ mm}$$

Puesto que se trata de una igualdad, es posible formar dos razones donde cada una sea igual a 1.

$$\frac{1 \text{ in}}{25.4 \text{ mm}} = 1 \qquad \frac{25.4 \text{ mm}}{1 \text{ in}} = 1$$

Observe que el número 1 no es igual a 25.4, pero la *longitud* de 1 in sí es igual a la *longitud* de 25.4 mm. Por tanto, si se multiplica cualquier otra longitud por una de estas razones, se obtiene un nuevo número, pero la longitud no cambia. Las razones de este tipo se llaman ***factores de conversión.*** Cualquiera de los factores de conversión mostrados se puede multiplicar por 1.19 in, sin que cambie la longitud representada. Si este factor se multiplica por la primera razón, no se obtiene un resultado que tenga significado. Observe que las unidades se tratan como cantidades algebraicas.

$$(1.19 \text{ in})\left(\frac{1 \text{ in}}{25.4 \text{ mm}}\right) = \left(\frac{1.19}{25.4}\right)\left(\frac{\text{in}^2}{\text{mm}}\right) \qquad \text{¡Erróneo!}$$

Sin embargo, al multiplicarlo por la segunda razón, se obtiene el siguiente resultado:

$$(1.19 \cancel{\text{in}})\left(\frac{25.4 \text{ mm}}{1 \cancel{\text{in}}}\right) = \frac{(1.19)(25.4)}{(1)} \text{ mm} = 30.2 \text{ mm}$$

Por tanto, el diámetro exterior del tubo es 30.2 mm.

A veces es necesario trabajar con cantidades que tienen varias unidades. Por ejemplo, la ***rapidez*** se define como *longitud* por unidad de *tiempo* y se puede expresar en *metros por segundo* (m/s), *pies por segundo* (ft/s) u otras unidades. El mismo procedimiento algebraico resulta útil para la conversión de unidades múltiples.

Estrategia para resolver problemas

Procedimiento para convertir unidades

1. Escriba la cantidad que desea convertir.
2. Defina cada una de las unidades incluidas en la cantidad que va a convertir, en términos de las unidades buscadas.
3. Escriba dos factores de conversión para cada definición, uno de ellos recíproco del otro.
4. Multiplique la cantidad que desea convertir por aquellos factores que cancelen todas las unidades, excepto las buscadas.

Ejemplo 3.1

Convierta la rapidez de 60 km/h a unidades de metros por segundo.

Plan: Es necesario recordar dos definiciones que pueden dar por resultado cuatro factores de conversión, los cuales cancelarán las unidades no buscadas.

Solución: Se deben cambiar los kilómetros a millas y las horas a segundos.

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \quad \nearrow \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \qquad \searrow \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$$

$$1\text{ h} = 3600\text{ s} \quad \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} \qquad \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}}$$

Se escribe la cantidad que se va a convertir y se escogen los factores de conversión que cancelan las unidades no buscadas.

$$60\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\left(\frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\right) = 16.7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A continuación se dan ejemplos adicionales del procedimiento:

$$30\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}}\left(\frac{5280\text{ ft}}{1\,\cancel{\text{mi}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{60\,\cancel{\text{min}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}}\right) = 44\text{ ft/s}$$

$$20\,\frac{\cancel{\text{lb}}}{\cancel{\text{in}^2}}\left(\frac{1550\,\cancel{\text{in}^2}}{1\text{ m}^2}\right)\left(\frac{4.448\text{ N}}{1\,\cancel{\text{lb}}}\right) = 1.38 \times 10^5\text{ N/m}^2$$

Las definiciones necesarias pueden buscarse en los forros del libro, si no se encuentran en este capítulo.

Cuando se trabaja con fórmulas técnicas, siempre es útil sustituir tanto las unidades como los números. Por ejemplo, la fórmula para la rapidez v es

$$v = \frac{x}{t}$$

donde x es la distancia recorrida en un tiempo t. Así, si un automóvil recorre 400 m en 10 s, su rapidez será

$$v = \frac{400\text{ m}}{10\text{ s}} = 40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observe que las unidades de velocidad son metros por segundo, y se escriben m/s.

Cuando aparezca la velocidad en una fórmula, siempre debe tener unidades de *longitud* divididas entre unidades de *tiempo*. Se dice que éstas son las ***dimensiones*** de la velocidad. Puede haber diferentes unidades para una cantidad física, pero las dimensiones son el resultado de una definición y no cambian.

Al trabajar con ecuaciones y fórmulas físicas, es muy útil recordar dos reglas relacionadas con las dimensiones:

Regla 1: Si se van a sumar o restar dos cantidades, ambas deben expresarse en las mismas dimensiones.

Regla 2: Las cantidades a ambos lados del signo de igualdad deben expresarse en las mismas dimensiones.

Ejemplo 3.2

Vamos a suponer que la distancia x medida en metros (m) es una función de la rapidez inicial v_0 en metros por segundo (m/s), de la aceleración a en metros por segundo al cuadrado (m/s^2) y del tiempo t en segundos (s). Demuestre que la fórmula es dimensionalmente correcta.

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Plan: Hay que recordar que cada término debe expresarse en las mismas dimensiones y que las dimensiones en cada lado de la igualdad deben ser las mismas. Puesto que las unidades de x están en metros, cada término de la ecuación debe reducirse a metros si ésta es dimensionalmente correcta.



Solución: Al sustituir las unidades por las cantidades en cada término, tenemos

$$m = \frac{\text{m}}{\cancel{s}}(\cancel{s}) + \frac{\text{m}}{\cancel{s^2}}\cancel{(s)^2} \quad \text{se obtiene} \quad m = \text{m} + \text{m}$$

Con esto se satisfacen tanto la regla 1 como la regla 2. Por tanto, la ecuación es dimensionalmente correcta.

El hecho de que una ecuación sea dimensionalmente correcta es una forma de comprobación. Una ecuación así, puede no ser una ecuación *verdadera*, pero al menos es consistente desde el punto de vista dimensional.

3.7 Cantidades vectoriales y escalares

Algunas cantidades pueden describirse totalmente por un número y una unidad. Sólo importan las *magnitudes* en los casos de un área de 12 m^2, un volumen de 40 ft^3 o una distancia de 50 km. Este tipo de cantidades se llaman ***cantidades escalares.***

Una *cantidad escalar* se especifica totalmente por su magnitud que consta de un número y una unidad. Por ejemplo, rapidez (15 mi/h), distancia (12 km) y volumen (200 cm^3).

Las cantidades escalares que se miden en las mismas unidades pueden sumarse o restarse en la forma acostumbrada. Por ejemplo,

$$14 \text{ mm} + 13 \text{ mm} = 27 \text{ mm}$$
$$20 \text{ ft}^2 - 4 \text{ ft}^2 = 16 \text{ ft}^2$$

Algunas cantidades físicas, como la fuerza y la velocidad, tienen dirección y además magnitud. Por eso se les llama ***cantidades vectoriales.*** La dirección debe formar parte de cualquier cálculo en el que intervengan dichas cantidades.

Una *cantidad vectorial* se especifica totalmente por una magnitud y una dirección.* Consiste en un número, una unidad y una dirección. Por ejemplo, desplazamiento (20 m, N) y velocidad (40 mi/h, 30° N del O).

*El autor, como es costumbre en los libros en inglés, especifica un vector por su magnitud y dirección, dando por supuesto un sentido sobre la recta que determina la dirección, en términos de un sistema de referencia, tal idea se encuentra implícita cuando habla de un ángulo con respecto al eje positivo de las x (orientación angular). No obstante, puede decirse que, estrictamente hablando, un vector queda especificado por estas tres características: magnitud, dirección y sentido (N. del E.).

La dirección de un vector puede indicarse tomando como referencia las direcciones convencionales norte (N), este (E), oeste (O) y sur (S). Considere, por ejemplo, los vectores 20 m, O y 40 m a 30° N del E, como se observa en la figura 3.7. La expresión "al Norte del Este" indica que el ángulo se forma haciendo girar una línea hacia el Norte, a partir de la dirección Este.

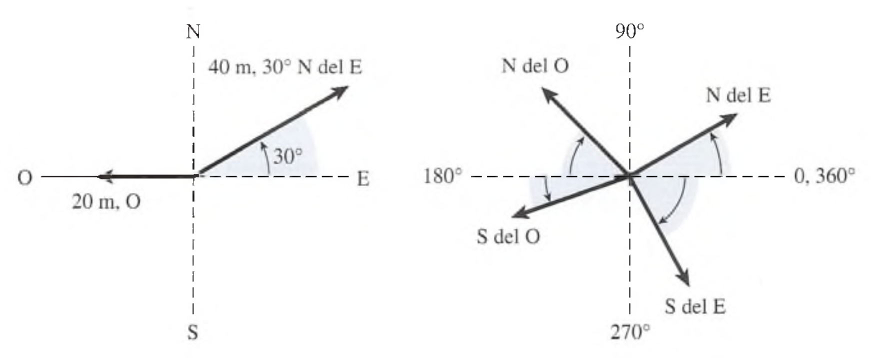


Figura 3.7 La dirección de un vector se indica con referencia al norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O).

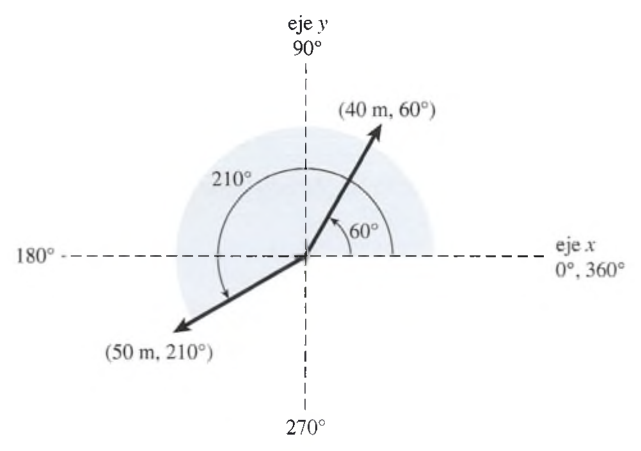


Figura 3.8 La dirección de un vector se indica como un ángulo medido a partir del eje positivo *x*.

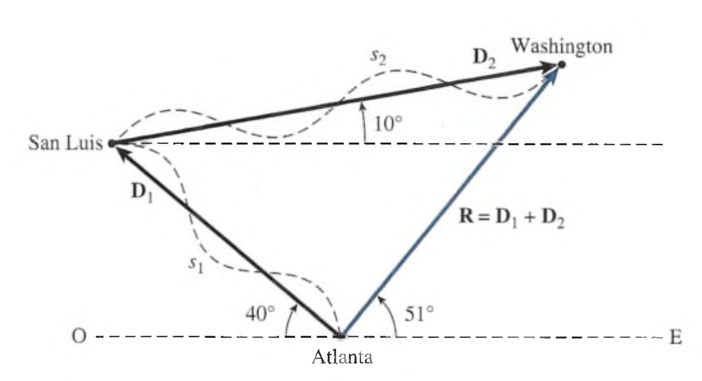


Figura 3.9 El desplazamiento es una cantidad vectorial; su dirección se indica mediante una flecha continua. La distancia es una cantidad escalar, representada con una línea discontinua.

Otro método para especificar la dirección, que más tarde será de gran utilidad, consiste en tomar como referencia líneas perpendiculares llamadas *ejes*. Estas líneas imaginarias suelen ser una horizontal y otra vertical, pero pueden estar orientadas en otras direcciones siempre que sean perpendiculares entre sí. En general, una línea horizontal imaginaria se llama eje *x*, y una línea vertical imaginaria se llama eje *y*. En la figura 3.8 las direcciones se indican mediante ángulos medidos en sentido directo, es decir, en contrasentido al avance de las manecillas del reloj, a partir de la posición del eje *x* positivo; los vectores 40 m a 60° y 50 m a 210° se indican en la figura.

Suponga que una persona viaja en automóvil de Atlanta a San Luis. El *desplazamiento* a partir de Atlanta se representa por un segmento de recta, dibujado a escala, que va de Atlanta a San Luis (véase la figura 3.9). Para indicar la dirección se dibuja una punta de flecha en el extremo correspondiente a San Luis. Es importante observar que el desplazamiento, representado por el vector $\mathbf{D}_1$, es completamente independiente de la trayectoria real o de la forma de transportarse. El odómetro muestra que el automóvil ha recorrido en realidad una distancia escalar s_1 de 541 mil, pero la magnitud del desplazamiento es de sólo 472 mi.

Otra diferencia importante entre un desplazamiento vectorial y un desplazamiento escalar es que la componente del vector tiene una dirección constante de 140° (o 40° N del O). Sin embargo, la dirección del automóvil en cada instante del recorrido no es importante cuando se mide la distancia escalar.

Suponga ahora que el viajero continúa su viaje hasta Washington. Esta vez, el vector desplazamiento $\mathbf{D}_2$ es 716 mi en una dirección constante de 10° N del E. La correspondiente distancia por tierra s_2 es 793 mi. La distancia total recorrida en todo el viaje, desde Atlanta, es la suma aritmética de las cantidades escalares s_1 y s_2.

$$s_1 + s_2 = 541 \text{ mi} + 793 \text{ mi} = 1334 \text{ mi}$$

En cambio, el *vector suma* de los dos desplazamientos $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ debe tomar en cuenta la dirección, además de las magnitudes. Ahora el problema no es la distancia recorrida, sino el desplazamiento resultante desde Atlanta. Este vector suma aparece en la figura 3.9, representado por el símbolo **R**, donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$$

Los métodos que se analizarán en la siguiente sección permiten determinar la magnitud y la dirección de **R**. Utilizando una regla y un transportador, es posible apreciar que

$$\mathbf{R} = 549 \text{ mi}, 51°$$

Conviene recordar que cuando se habló de sumas de vectores, se dijo que deben considerarse tanto la magnitud como la dirección de los desplazamientos. Las sumas son geométricas y no algebraicas.

Es posible que la magnitud del vector suma sea menor que la magnitud de cualquiera de los desplazamientos componentes.

Por lo común, en materiales impresos los vectores se indican mediante el tipo negritas. Por ejemplo, el símbolo $\mathbf{D}_1$ denota un vector desplazamiento en la figura 3.9. Un vector puede indicarse convenientemente en letra manuscrita subrayando la letra o dibujando una flecha encima de ella. En textos impresos, la magnitud de un vector se indica generalmente en cursivas (itálicas); por tanto, D indica la magnitud del vector **D**. Con frecuencia, un vector se especifica con un par de números (R, θ). El primer número y su unidad indican la magnitud, y el segundo número indica el ángulo, medido en contrasentido al avance de las manecillas del reloj, a partir de la parte positiva del eje x. Por ejemplo,

$$\mathbf{R} = (R, \theta) = (200 \text{ km}, 114°)$$

Observe que la magnitud R de un vector es siempre positiva. Un signo negativo colocado antes del símbolo de un vector sólo invierte su dirección; en otras palabras, invierte la dirección de la flecha, pero no afecta la longitud. Si $\mathbf{A} = (10 \text{ m, E})$, entonces $-\mathbf{A}$ sería (10 m, O).

3.8 Suma o adición de vectores por métodos gráficos

En esta sección se estudian dos métodos gráficos muy comunes para hallar la suma geométrica de vectores. El ***método del polígono*** es el más útil, ya que puede aplicarse fácilmente a más de dos vectores. El ***método del paralelogramo*** es conveniente para sumar sólo dos vectores a la vez. En ambos casos, la magnitud de un vector se indica a escala mediante la longitud de un segmento de recta. La dirección se marca colocando una punta de flecha en el extremo del segmento de dicha recta.

Ejemplo 3.3 Un barco recorre 100 km hacia el Norte durante el primer día de viaje, 60 km al noreste el segundo día y 120 km hacia el Este el tercer día. Encuentre el desplazamiento resultante con el método del polígono.

Plan: Tome como punto de inicio el origen del viaje y decida una escala apropiada. Use un transportador y una regla para dibujar la longitud de cada vector de manera que sea proporcional a su magnitud. El desplazamiento resultante será un vector dibujado desde el origen a la punta del último vector.

Solución: Una escala conveniente puede ser 20 km = 1 cm, como se observa en la figura 3.10. Utilizando esta escala, notamos que

$$100 \text{ km} = 100 \cancel{\text{km}} \times \frac{1 \text{ cm}}{20 \cancel{\text{km}}} = 5 \text{ cm}$$

$$60 \text{ km} = 60 \cancel{\text{km}} \times \frac{1 \text{ cm}}{20 \cancel{\text{km}}} = 3 \text{ cm}$$

$$120 \text{ km} = 120 \cancel{\text{km}} \times \frac{1 \text{ cm}}{20 \cancel{\text{km}}} = 6 \text{ cm}$$

Al realizar la medición con una regla, a partir del diagrama a escala se observa que la flecha resultante tiene 10.8 cm de longitud. Por tanto, la magnitud es

$$10.8 \text{ cm} = 10.8 \cancel{\text{cm}} \times \frac{20 \text{ km}}{1 \cancel{\text{cm}}} = 216 \text{ km}$$

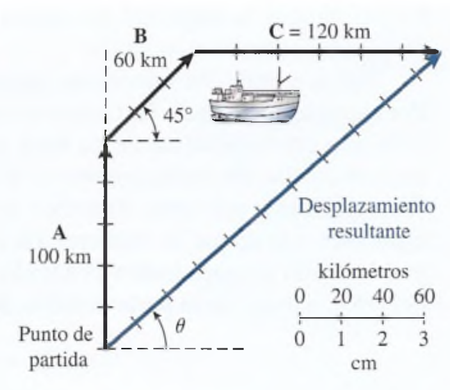


Figura 3.10 Método del polígono para sumar vectores.

Si se mide el ángulo θ con un transportador, resulta que la dirección es de 41°. Por tanto, el desplazamiento resultante es

$$\mathbf{R} = (216 \text{ km}, 41°)$$

Observe que el orden en que se suman los vectores no cambia en absoluto la resultante. Se puede empezar con cualquiera de las tres distancias recorridas por el barco del ejemplo anterior.

Los métodos gráficos sirven para hallar la resultante de todo tipo de vectores. No se limitan sólo a la medición de desplazamientos, pues son particularmente útiles para encontrar la resultante de numerosas *fuerzas*. Por ahora, consideremos como definición de fuerza un empujón o tirón que tiende a producir movimiento. El vector fuerza se especifica también por medio de un número, unidades correspondientes y ángulo, así como desplazamientos, y se suma de la misma manera que los vectores de desplazamiento.

Estrategia para resolver problemas

El método del polígono para sumar vectores

1. Elija una escala y determine la longitud de las flechas que corresponden a cada vector.
2. Dibuje a escala una flecha que represente la magnitud y dirección del primer vector.
3. Dibuje la flecha del segundo vector de modo que su cola coincida con la punta de la flecha del primer vector.
4. Continúe el proceso de unir el origen de cada vector con las puntas hasta que la magnitud y la dirección de todos los vectores queden bien representadas.
5. Dibuje el vector resultante con el origen (punto de partida) y la punta de flecha unida a la punta del último vector.
6. Mida con regla y transportador para determinar la magnitud y la dirección del vector resultante.

En el ejemplo 3.4 se determina la fuerza resultante sobre un burro que es jalado en dos direcciones diferentes por dos cuerdas (véase la figura 3.11). En esta ocasión se aplicará el *método del paralelogramo*, que sólo es útil para sumar dos vectores a la vez. Cada vector se dibuja a escala y sus colas tienen el mismo origen. Los dos forman entonces dos lados adyacentes de un paralelogramo. Los otros dos lados se construyen trazando líneas paralelas de igual longitud. La resultante se representa mediante la diagonal del paralelogramo, a partir del origen de las dos flechas vectores.

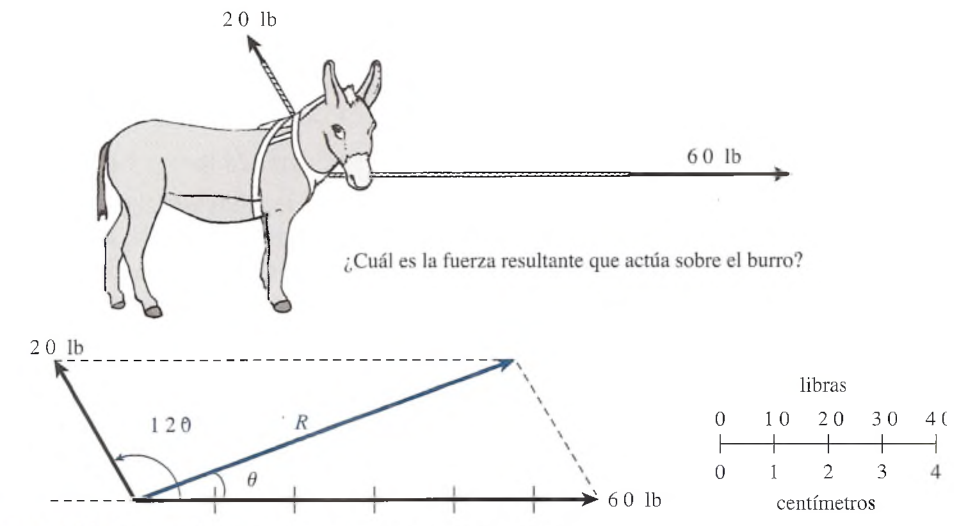


Figura 3.11 Método del paralelogramo para sumar vectores.

Ejemplo 3.4

Encuentre la fuerza resultante sobre el burro de la figura 3.11, si el ángulo entre las dos cuerdas es de 120°. En un extremo se jala con una fuerza de 60 lb y, en el otro, con una fuerza de 20 lb. Use el método del paralelogramo para sumar los vectores.

Plan: Construya un paralelogramo formando dos de los lados con vectores dibujados que sean proporcionales a las magnitudes de las fuerzas. Por tanto, la fuerza resultante puede encontrarse al medir la diagonal del paralelogramo.

Solución: Utilizando una escala de 1 cm = 10 lb, se tiene

$$60 \text{ lb} \times \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ lb}} = 6 \text{ cm} \qquad 20 \text{ lb} \times \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ lb}} = 2 \text{ cm}$$

En la figura 3.11 se construyó un paralelogramo, dibujando a escala las dos fuerzas a partir de un origen común. Utilice un transportador para asegurarse de que el ángulo entre ellas sea de 120°. Al completar el paralelogramo se puede dibujar la resultante como una diagonal desde el origen. Al medir R y θ con una regla y un transportador se obtienen 52.9 lb para la magnitud y 19.1° para la dirección. Por consiguiente,

$$\mathbf{R} = (52.9 \text{ lb}, 19.1°)$$

Un segundo vistazo al paralelogramo le mostrará que se obtendría la misma respuesta aplicando el método del polígono y agregando el vector de 20 lb en la punta del vector de 60 lb.

3.9 Fuerza y vectores

Como vimos en la sección anterior, los vectores *fuerza* pueden sumarse gráficamente de la misma manera que sumamos antes en el caso de desplazamientos. En virtud de la importancia de las fuerzas en el estudio de la mecánica, conviene adquirir destreza en las operaciones con vectores, estudiando aplicaciones de fuerza además de las aplicaciones de desplazamiento. Un resorte estirado ejerce fuerzas sobre los dos objetos que están unidos a sus extremos; el aire comprimido ejerce una fuerza sobre las paredes del recipiente que lo contiene, y un tractor ejerce una fuerza sobre el remolque que lleva arrastrando. Probablemente la fuerza más conocida es la atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre un cuerpo. A esta fuerza se le llama ***peso*** del cuerpo. Existe una fuerza bien definida aun cuando no estén en contacto la

Tierra y los cuerpos que atrae. El peso es una cantidad vectorial dirigida hacia el centro del planeta.

La unidad de fuerza en el sistema internacional es el newton (N), el cual se definirá de forma adecuada más adelante. Conviene señalar que su relación con la libra es:

$$1\ \text{N} = 0.225\ \text{lb} \qquad 1\ \text{lb} = 4.45\ \text{N}$$

Una mujer que pesa 120 lb tiene una equivalencia de 534 N. Si el peso de una llave inglesa es 20 N, pesará unas 4.5 lb en unidades del SUEU. Mientras no llegue el día en que todas las industrias hayan adoptado íntegramente las unidades del SI, la libra seguirá usándose, y con frecuencia será necesario realizar conversiones de unidades. Aquí se utilizarán ambas unidades de fuerza al trabajar con cantidades de vectores.

Dos de los efectos producidos por las fuerzas que pueden medirse son: (1) cambiar las dimensiones o la forma de un cuerpo y (2) cambiar el movimiento del cuerpo. Si en el primer caso no hay un desplazamiento resultante de dicho cuerpo, la fuerza que causa el cambio de forma se llama ***fuerza estática.*** Si una fuerza cambia el movimiento del cuerpo se llama ***fuerza dinámica.*** Ambos tipos de fuerzas se representan convenientemente por medio de vectores, como en el ejemplo 3.4.

La eficacia de cualquier fuerza depende de la dirección en la que actúa. Por ejemplo, es más fácil arrastrar un trineo por el suelo usando una cuerda inclinada, como se observa en la figura 3.12, que si se le empuja. En cada caso, la fuerza aplicada produce más de un solo esfuerzo. Dicho de otro modo, la fuerza ejercida sobre la cuerda levanta el trineo y lo mueve hacia adelante al mismo tiempo. En forma similar, al empujar el trineo se produce el efecto de añadirle peso. Esto nos lleva a la idea de las ***componentes*** de una fuerza: los valores reales de una fuerza en direcciones diferentes a la de la fuerza misma. En la figura 3.12, la fuerza **F** puede reemplazarse por sus componentes horizontal y vertical, $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$.

Si una fuerza se representa gráficamente por su magnitud y un ángulo (R, θ), se pueden determinar sus componentes a lo largo de las direcciones x y y. Una fuerza **F** actúa con un ángulo θ sobre la horizontal, como se indica en la figura 3.13. El significado de las componentes x y y, $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, se puede apreciar en este diagrama. El segmento que va desde O hasta el pie de la perpendicular que baja de A al eje x, se llama *componente x* de **F** y se indica como $\mathbf{F}_x$. El segmento que va desde O hasta el pie de la perpendicular al eje y que parte de A se llama *componente y* de **F** y se suele indicar como $\mathbf{F}_y$. Si se dibujan los vectores a escala, se puede determinar gráficamente la magnitud de las componentes. Estas dos componentes, actuando juntas, tienen el mismo efecto que la fuerza original **F**.

FÍSICA HOY

Los escaladores usan una combinación de fuerzas para escalar superficies empinadas. Al empujar contra rocas salidas los escaladores usan las fuerzas horizontal y vertical de las rocas para impulsarse hacia arriba.



(Foto © Vol. 20/Corbis.)

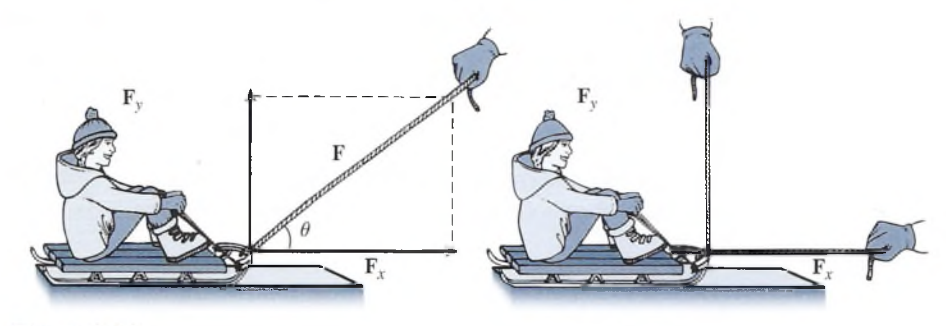


Figura 3.12

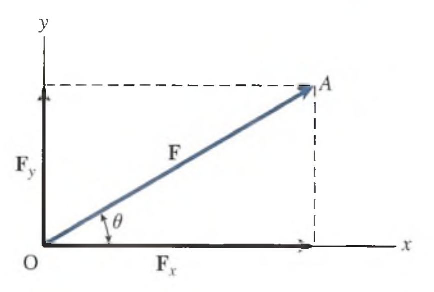


Figura 3.13 Representación gráfica de las componentes x y y de **F**.

Ejemplo 3.5 Una cortadora de césped se empuja hacia abajo por el asa con una fuerza de 160 N, en un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la magnitud de la componente horizontal de esta fuerza?

Plan: A partir de la figura 3.14a, se observa que la fuerza ejercida sobre el asa actúa en el cuerpo de la cortadora. Usaremos una regla y un transportador para dibujar las fuerzas y ángulos a escala, como se muestra en la figura 3.15b. Por último, mediremos las componentes y las convertiremos a newtons para obtener las dos componentes.

Solución: Una escala conveniente puede ser 1 cm = 40 N, lo cual significa que el vector **F** tendría una longitud de 4 cm con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. La componente x de la fuerza se dibuja y se le llama F_x. La medición de esta recta revela que

$$F_x \text{ corresponde a } 3.46 \text{ cm}$$

Puesto que 1 cm = 40 N, se obtiene

$$F_x = 3.46 \text{ cm}\left(\frac{40 \text{ N}}{1 \text{ cm}}\right) = 138 \text{ N}$$

Observe que la fuerza real es bastante menor que la fuerza aplicada. Como ejercicio adicional, demuestre que la magnitud de la componente descendente de la fuerza de 160 N es F_y = 80.0 N.

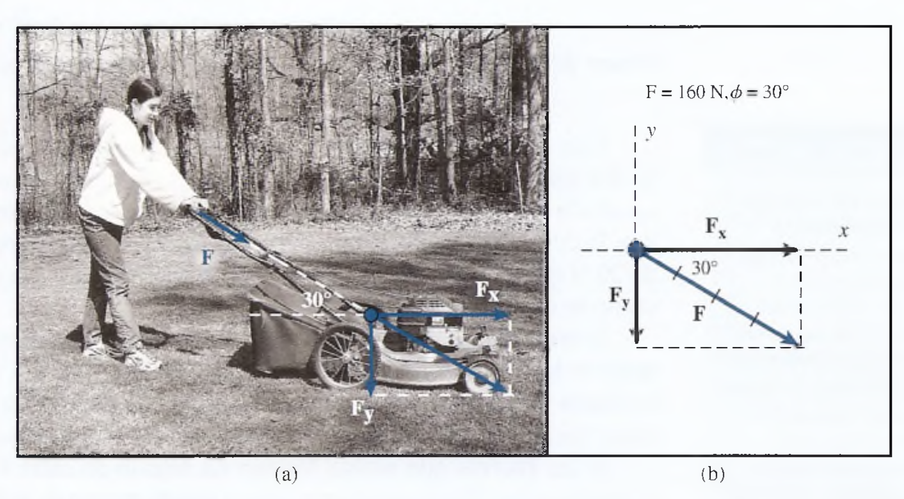


Figura 3.14 Obtención de las componentes de una fuerza por el método gráfico. (*Foto de Paul E. Tippens.*)

3.10 La fuerza resultante

Cuando dos o más fuerzas actúan sobre un mismo punto de un objeto, se dice que son ***fuerzas concurrentes.*** El efecto combinado de tales fuerzas se llama ***fuerza resultante.***

> La *fuerza resultante* es la fuerza individual que produce el mismo efecto tanto en la magnitud como en la dirección que dos o más fuerzas concurrentes.

Las fuerzas resultantes pueden calcularse gráficamente al representar cada fuerza concurrente como un vector. Con el método del polígono o del paralelogramo para sumar vectores se obtiene la fuerza resultante.

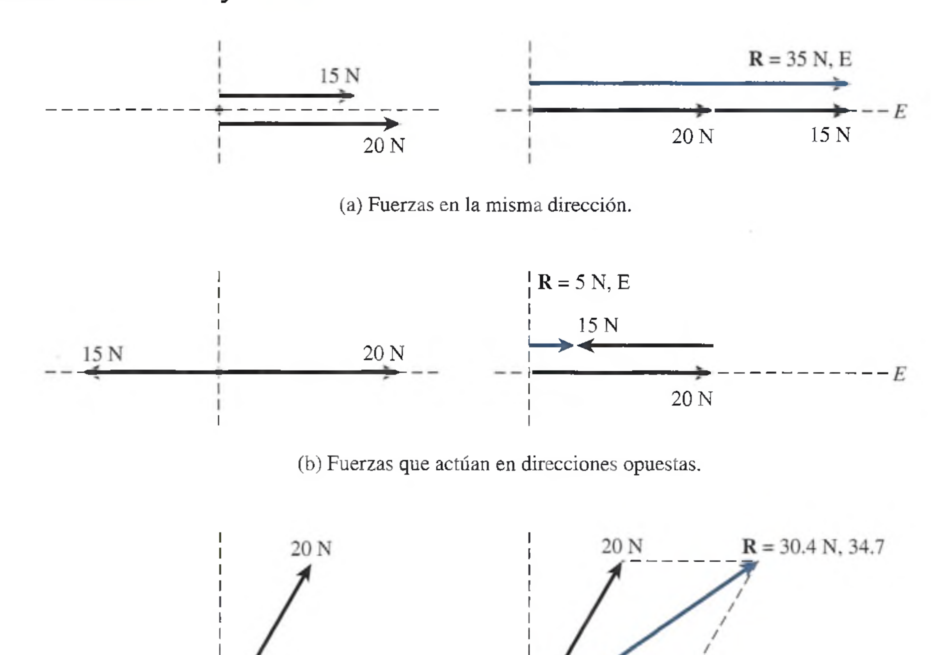


Figura 3.15 Efecto de la dirección sobre la resultante de dos fuerzas.



Una escalera mecánica y una montaña rusa mueven a las personas que se suben en ellas. En una escalera mecánica, las personas sienten su peso normal porque se mueven a una velocidad constante. Una montaña rusa acelera y desacelera, por lo que las personas se sienten más pesadas y más ligeras a medida que cambia la velocidad.

Con frecuencia las fuerzas actúan sobre una misma recta, ya sea juntas o en oposición. Si dos fuerzas actúan sobre un mismo objeto en una misma dirección, la fuerza resultante es igual a la suma de las magnitudes de dichas fuerzas. La dirección de la resultante es la misma que la de cualquiera de las fuerzas. Por ejemplo, considere una fuerza de 15 N y una fuerza de 20 N que actúan en la misma dirección hacia el Este. Su resultante es de 35 N hacia el Este, como se observa en la figura 3.15a.

Si las mismas dos fuerzas actúan en direcciones opuestas, la magnitud de la fuerza resultante es igual a la *diferencia* de las magnitudes de las dos fuerzas y actúa en la dirección de la fuerza más grande. Suponga que la fuerza de 15 N del ejemplo se cambiara, de modo que tirara hacia el Oeste. La resultante sería de 5 N, E, como se indica en la figura 3.15b.

Si las fuerzas que actúan forman un ángulo de entre 0° y 180° entre sí, su resultante es el vector suma. Para encontrar la fuerza resultante puede utilizarse el método del polígono o el método del paralelogramo. En la figura 3.15c, las dos fuerzas mencionadas, de 15 y 20 N, actúan formando un ángulo de 60° entre sí. La fuerza resultante, calculada por el método del paralelogramo, es de 30.4 N a 34.7°.

3.11 Trigonometría y vectores

El tratamiento gráfico de los vectores es conveniente para visualizar las fuerzas, pero con frecuencia no es muy preciso. Un método mucho más útil consiste en aprovechar la trigonometría del triángulo rectángulo simple, procedimiento que en gran medida se ha simplificado, gracias a las calculadoras actuales. El conocimiento del *teorema de Pitágoras* y cierta experiencia en el manejo de las funciones *seno, coseno* y *tangente* es todo lo que se requiere para el estudio de esta unidad.

Los métodos trigonométricos pueden mejorar la precisión y la rapidez al determinar el vector resultante o para encontrar las componentes de un vector. En la mayoría de los casos, es útil utilizar ejes x y y imaginarios cuando se trabaja con vectores en forma analítica. Cual-

quier vector puede dibujarse haciendo coincidir su origen con el cruce de esas rectas imaginarias. Las componentes del vector pueden verse como efectos a lo largo de los ejes x y y.

Ejemplo 3.6 ¿Cuáles son las componentes x y y de una fuerza de 200 N, con un ángulo de 60°?

Plan: Dibuje el diagrama de vectores usando la trigonometría para encontrar las componentes.

Solución: Se dibuja un diagrama ubicando el origen del vector de 200 N en el centro de los ejes x y y como se muestra en la figura 3.16.

En primer lugar se calcula la componente x, o sea F_x, tomando en cuenta que se trata del lado adyacente. El vector de 200 N es la hipotenusa. Si se usa la función coseno, se obtiene

$$\cos 60° = \frac{F_x}{200 \text{ N}}$$

por lo cual

$$F_x = (200 \text{ N}) \cos 60° = 100 \text{ N}$$

Para estos cálculos notamos que el lado opuesto a 60° es igual en longitud a F_y. Por consiguiente escribimos

$$\text{sen } 60° = \frac{F_y}{200 \text{ N}}$$

o bien

$$F_y = (200 \text{ N}) \text{ sen } 60° = 173 \text{ N}$$

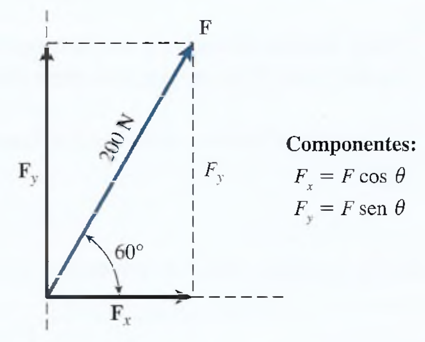


Figura 3.16 Uso de la trigonometría para encontrar las componentes x y y de un vector.

En general, podemos escribir las componentes x y y de un vector en términos de su magnitud F y su dirección θ:

$$F_x = F \cos \theta$$
$$F_y = F \text{ sen } \theta$$

Componentes de un vector **(3.1)**

donde θ es el ángulo entre el vector y el lado positivo del eje x, medido en contrasentido a las manecillas del reloj.

El signo de una componente dada se determina a partir de un diagrama de vectores. Las cuatro posibilidades se presentan en la figura 3.17. Además del *ángulo polar* θ, se muestra el *ángulo de referencia* ϕ para cada cuadrante. Cuando el ángulo polar es mayor de 90°, es más fácil ver las direcciones de las componentes si se trabaja con el ángulo de referencia ϕ. Las aplicaciones de la trigonometría que utilizan el ángulo polar θ también darán los signos correctos, pero siempre es útil verificar visualmente la dirección de las componentes.

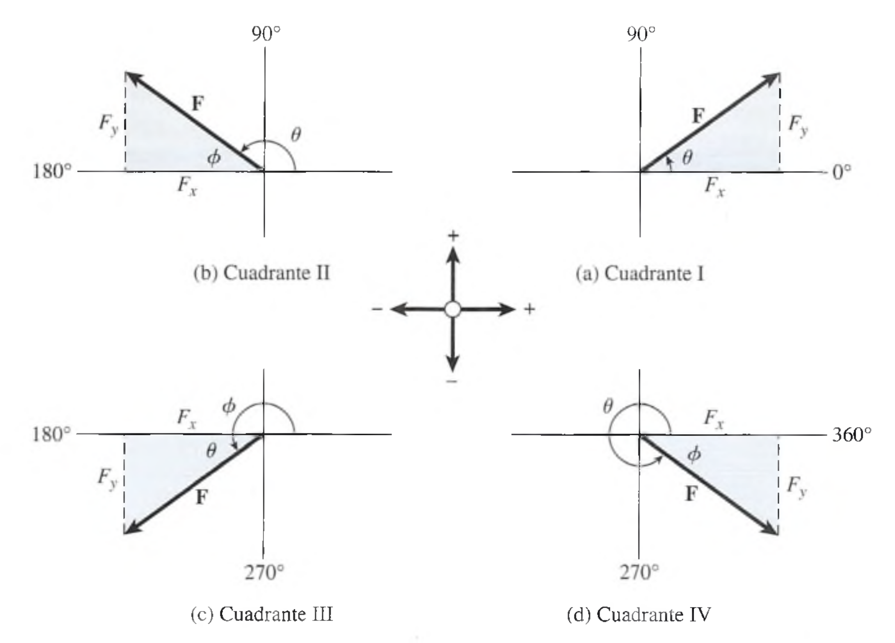


Figura 3.17 (a) En el primer cuadrante, el ángulo θ está entre 0° y 90°; tanto F_x como F_y son positivas. (b) En el segundo cuadrante el ángulo θ está entre 90° y 180°; F_x es negativa y F_y es positiva. (c) En el tercer cuadrante, el ángulo θ está entre 180° y 270°; tanto F_x como F_y son negativas. (d) En el cuarto cuadrante, el ángulo θ está entre 270° y 360°; F_x es positiva y F_y es negativa.

Ejemplo 3.7

Encuentre las componentes x y y de una fuerza de 400 N a un ángulo polar θ de 220° a partir del eje x positivo.

Plan: Dibuje el vector y sus componentes indicando tanto el ángulo de referencia como el ángulo polar. Use la trigonometría para encontrar las componentes.

Solución: Consulte la figura 3.17 donde podemos obtener el ángulo de referencia ϕ como sigue:

$$\phi = 220° - 180° = 40°$$

En la figura se observa que ambas componentes F_x y F_y son negativas.

$$\begin{aligned} F_x &= -|F \cos \phi| = -(400 \text{ N}) \cos 40° \\ &= -306 \text{ N} \\ F_y &= -|F \text{ sen } \phi| = -(400 \text{ N}) \text{ sen } 40° \\ &= -257 \text{ N} \end{aligned}$$

Note que los signos se determinaron a partir de la figura 3.17. Con las calculadoras electrónicas tanto la magnitud como el signo de F_x y F_y se obtienen en forma directa a partir de la ecuación (3.1), utilizando el ángulo polar $\theta = 220°$. Compruebe este hecho.

La trigonometría también es útil para calcular la fuerza resultante. En el caso especial en que dos fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son perpendiculares entre sí, como se observa en la figura 3.18, la resultante (R, θ) se puede hallar a partir de

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{3.2}$$

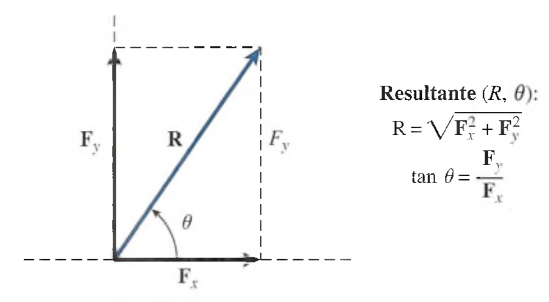


Figura 3.18 La resultante de dos vectores perpendiculares.

Si F_x o F_y es negativa, generalmente es más fácil determinar el ángulo agudo ϕ como se indica en la figura 3.17. El signo (o dirección) de las fuerzas F_x y F_y determina cuál de los cuatro cuadrantes se va a usar. Entonces, la ecuación (3.2) se convierte en

$$\tan \phi = \left|\frac{F_y}{F_x}\right|$$

Sólo se necesitan los valores absolutos de F_x y F_y. Si se desea, se puede determinar el ángulo θ del eje x positivo. En cualquiera de los casos se debe identificar claramente la dirección.

Ejemplo 3.8 ¿Cuál es la resultante de una fuerza de 5 N dirigida horizontalmente a la derecha y una fuerza de 12 N dirigida verticalmente hacia abajo?

Plan: Como las fuerzas son hacia la derecha y hacia abajo, dibujamos un diagrama de vectores de cuatro cuadrantes como aquel de la figura 3.17d. Aplique la ecuación (3.2) para hallar la resultante.

Solución: Trate los dos vectores fuerza como componentes $F_x = 5$ N y $F_y = -12$ N de la fuerza resultante **R**. Por tanto la magnitud de **R** se vuelve

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5\text{ N})^2 + (-12\text{ N})^2}$$
$$= \sqrt{169\text{ N}^2} = 13.0\text{ N}$$

Para encontrar la dirección de R, primero se determina el ángulo de referencia ϕ:

$$\tan \phi = \left|\frac{-12\text{ N}}{5\text{ N}}\right| = 2.40$$
$$\phi = 67.4° \text{ S del E}$$

El ángulo polar θ medido en contrasentido a las manecillas del reloj a partir del eje x positivo es

$$\theta = 360° - 67.4° = 292.6°$$

La fuerza resultante es 13.0 N a 292.6°. Los ángulos deben expresarse redondeados a la décima de grado más cercana incluso si requieren cuatro cifras significativas para mostrar la precisión requerida. Otras respuestas pueden reportarse con sólo tres cifras significativas.

3.12 El método de las componentes para la suma o adición de vectores

Con frecuencia es necesario sumar una serie de desplazamientos o encontrar la resultante de varias fuerzas usando métodos matemáticos. En tales casos, uno debe comenzar con un bosquejo gráfico usando el método del polígono para la suma de vectores. Sin embargo, como la

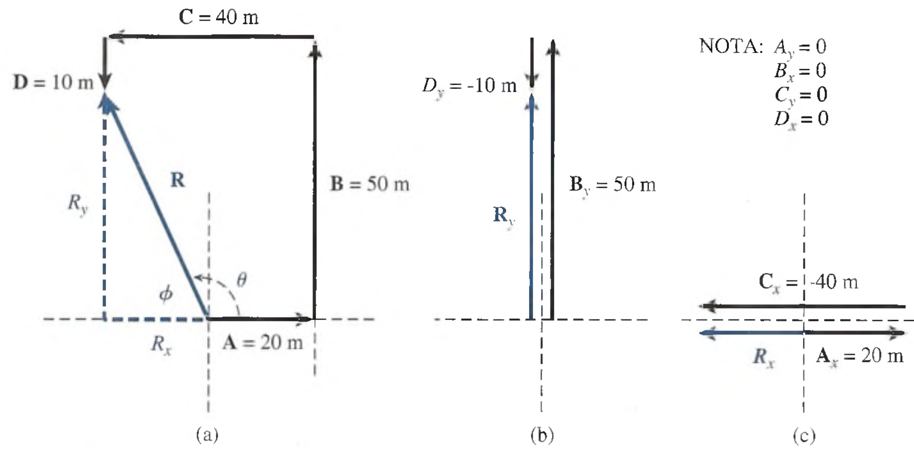


Figura 3.19 La componente x del vector resultante es igual a la suma de las componentes x de cada vector. La componente y de la resultante es igual a la suma de las componentes y.

trigonometría se usará para asegurar que los resultados finales sean precisos, sólo se necesita estimar las longitudes de cada vector. Por ejemplo, un desplazamiento de 60 m o una fuerza de 60 N deben dibujarse como un vector con una longitud aproximadamente tres veces mayor que el vector para un desplazamiento de 20 m o una fuerza de 20 N. Los ángulos dados también deben estimarse. Los vectores de 30°, 160°, 240° o 324° deben dibujarse en los cuadrantes adecuados y con una dirección lo más cercana posible a la dirección real. Estos diagramas aproximados le dan una idea de la dirección de la resultante antes de hacer los cálculos, así que es conveniente que aprenda a dibujarlos rápido.

Resulta útil reconocer que la componente x de la resultante o la suma de una serie de vectores está dada por la suma de las componentes x de cada vector. Asimismo, la componente y de la resultante es la suma de las componentes y. Suponga que quiere sumar los vectores **A, B, C,...** para encontrar su resultante **R**. Se podría escribir

$$R_x = A_x + B_x + C_x + \cdots \quad \textbf{(3.3)}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y + \cdots \quad \textbf{(3.4)}$$

La magnitud de la resultante R y su dirección θ pueden obtenerse a partir de la ecuación (3.2).

El ejemplo siguiente ilustra el método de las componentes de la suma de vectores. Suponga que un topógrafo camina 20 m, E; 50 m, N; 40 m, O, y 10 m, S. Nuestro objetivo es hallar el desplazamiento resultante.

Primero, se dibuja cada vector a una escala aproximada utilizando el método del polígono. De esa manera, a partir de la figura 3.19 se observa que la resultante **R** debe estar en el segundo cuadrante.

En este problema la obtención de las componentes de cada vector es simple, ya que cada vector yace completamente sobre un eje dado así que dicha componente es cero en cada caso. Note que las componentes son positivas o negativas, mientras que las magnitudes de los vectores siempre son positivas. A veces es recomendable elaborar una tabla de componentes, como la tabla 3.5, donde se incluya para cada vector su magnitud, el ángulo de referencia y las componentes x y y.

Tabla 3.5

Tabla de componentes

Vector	Ángulo θ	Componente x	Componente y
$A = 20$ m	0°	$A_x = +20$ m	$A_y = 0$
$B = 50$ m	90°	$B_x = 0$	$B_y = +50$ m
$C = 40$ m	180°	$C_x = -40$ m	$C_y = 0$
$D = 10$ m	270°	$D_x = 0$	$D_y = -10$ m
R	θ	$R_x = \Sigma F_x = -20$ m	$R_y = \Sigma F_y = +40$ m

Observe detenidamente en la figura 3.19 la representación de cada una de estas componentes. Es fácil ver el significado de la componente x neta y de la componente y neta.

La resultante ahora puede obtenerse a partir de las componentes R_x y R_y del vector resultante.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-20\text{ m})^2 + (40\text{ m})^2}$$

$$R = \sqrt{400\text{ m}^2 + 1600\text{ m}^2} = \sqrt{2000\text{ m}^2};\ R = 44.7\text{ m}$$

Por tanto, la dirección puede obtenerse a partir de la función tangente.

$$\tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{40\text{ m}}{-20\text{ m}}\right| = 2.00$$

$$\phi = 63.4°\text{ N del O (o } 116.6°)$$

El procedimiento que se siguió en el ejemplo anterior también puede utilizarse para resolver problemas más generales que involucran vectores que no están sobre ejes perpendiculares. Recuerde que las componentes se obtienen usando las funciones seno y coseno, y que a estas componentes se deben asignar signos algebraicos adecuados antes de hacer la suma. Recuerde también que en este texto suponemos que *cada magnitud dada tiene una precisión de tres cifras significativas y que cada ángulo tiene una precisión de la décima de grado más cercana.*

Estrategia para resolver problemas

Método de las componentes para sumar vectores

(Los pasos se ilustran en el ejemplo 3.9.)

1. Trace un polígono aproximado con los vectores, dibujando cada vector con longitudes y ángulos proporcionales. Indique la resultante como una recta dibujada desde el origen del primer vector a la punta del último vector.
2. Encuentre las componentes x y y de cada vector usando la trigonometría si es necesario. Verifique que los signos algebraicos sean correctos antes de proseguir.

$$A_x = A\cos\theta; \qquad A_y = A\,\text{sen}\,\theta$$

3. Elabore una tabla de componentes x y y, y sume algebraicamente para hallar la magnitud y el signo de las componentes resultantes:

$$R_x = A_x + B_x + C_x + \cdots$$
$$R_y = A_y + B_y + C_y + \cdots$$

4. Encuentre la magnitud y la dirección de la resultante a partir de sus componentes perpendiculares R_x y R_y.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \qquad \tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right|$$

Ejemplo 3.9

Tres sogas están atadas a una estaca, y sobre ella actúan tres fuerzas: $A = 20$ N, E; $B = 30$ N, 30° N del O; y $C = 40$ N, 52° S del O. Determine la fuerza resultante usando el método de las componentes.

Plan: Dibujaremos un bosquejo aproximado del problema como se muestra en la figura 3.20. Las fuerzas se representan como vectores proporcionales y sus direcciones se indican por medio de ángulos con respecto al eje x. Por tanto, obtendremos la fuerza resultante por medio de la estrategia para resolver problemas.

Solución: Los detalles del procedimiento se resumen en los pasos siguientes:

1. Dibuje un polígono proporcional con los vectores, sumando las fuerzas como en la figura 3.20b. Se estima que la resultante debe estar en el tercer cuadrante.
2. Elabore una tabla de las componentes x y y para cada vector. Note en la figura 3.21 que los ángulos de referencia ϕ se determinan a partir de los ejes x para efectos de trigonometría. Se debe tener cuidado al incluir el signo correcto de cada componente. Por ejemplo, B_x, C_x y C_y todas son negativas. Los resultados se muestran en la tabla 3.6.

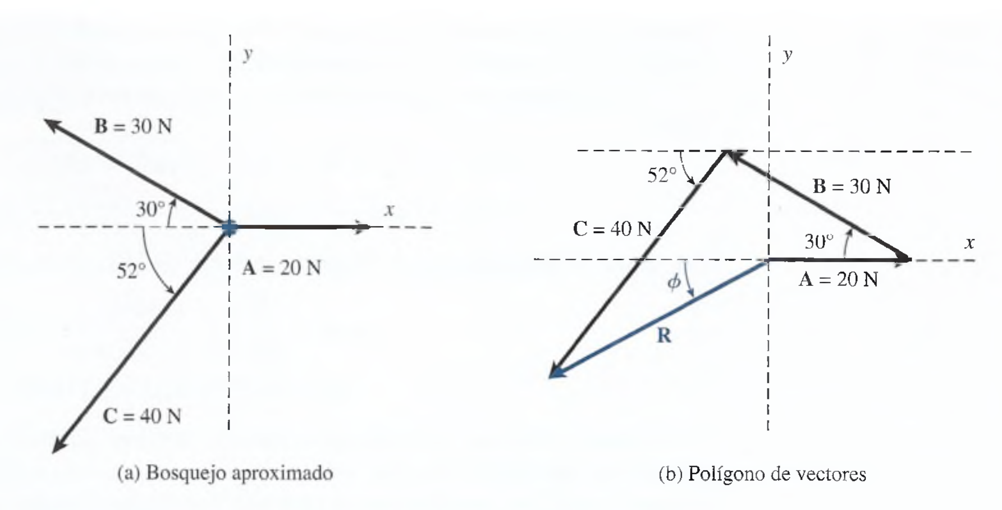


Figura 3.20

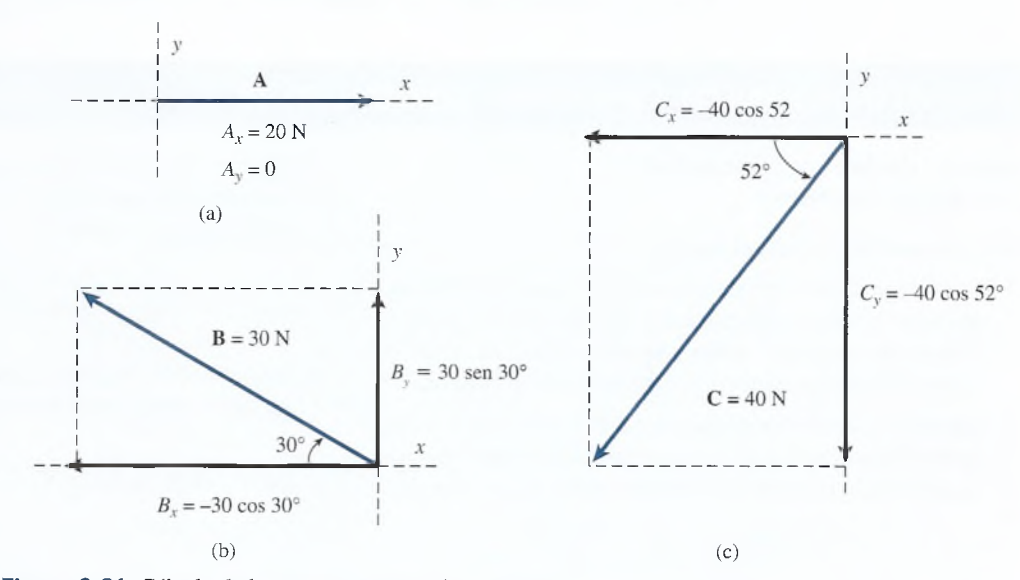


Figura 3.21 Cálculo de las componentes de los vectores.

Tabla 3.6

Tabla de componentes

Vector	Ángulo ϕ_x	Componente x	Componente y
$A = 20$ N	0°	$A_x = +20$ N	$A_y = 0$
$B = 30$ N	30°	$B_x = -(30\text{ N})(\cos 30°)$ $= -26.0$ N	$B_y = (30\text{ N})(\text{sen } 30°)$ $= 15.0$ N
$C = 40$ N	52°	$C_x = -(40\text{ N})(\cos 52°)$ $= -24.6$ N	$C_y = -(40\text{ N})(\text{sen } 52°)$ $= -31.5$ N
R	θ	$R_x = \Sigma F_x = -30.6$ N	$R_y = \Sigma F_y = -16.5$ N

3. Sume las componentes x para obtener R_x: $R_x = A_x + B_x + C_x$

$$R_x = 20.0\text{ N} - 26.0\text{ N} - 24.6\text{ N}; \qquad R_x = -30.6\text{ N}$$

4. Sume las componentes y para obtener R_y: $R_y = A_y + B_y + C_y$

$$R_y = 0\text{ N} + 15.0\text{ N} - 31.5\text{ N}; \qquad R_y = -16.5\text{ N}$$

5. Ahora encuentre R y θ a partir de R_x y R_y

Una figura independiente (véase la figura 3.22) a menudo es útil en el cálculo de la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-30.6\text{ N})^2 + (-16.5\text{ N})^2}; \qquad R = 34.8\text{ N}$$

A continuación, la dirección se puede encontrar a partir de la dirección tangente.

$$\tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{-16.5\text{ N}}{-30.6\text{ N}}\right| = 0.539$$

$$\phi = 28.3^\circ \text{ S del O} \qquad \text{o} \qquad 180^\circ + 28.3^\circ = 208.3^\circ$$

Por consiguiente, la fuerza resultante es 34.8 N a 208.3°.

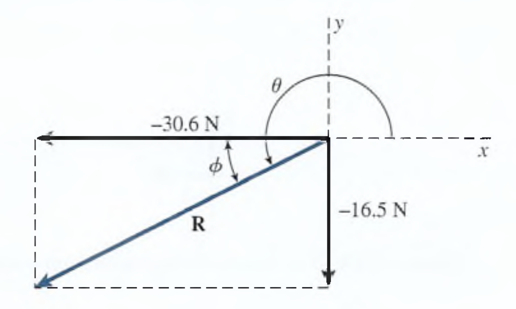


Figura 3.22

3.13 Notación de vectores unitarios (opcional)

Una herramienta útil para muchas aplicaciones de vectores es la especificación de la dirección por medio de un ***vector unitario***. Este método separa claramente la magnitud de un vector de su dirección.

Vector unitario: Un vector sin dimensiones cuya magnitud es exactamente 1 y cuya dirección está dada por definición.

Los símbolos **i**, **j**, **k** se usan para describir vectores unitarios en las direcciones x, y y z positivas, como se indica en la figura 3.23. Por ejemplo, un desplazamiento de 40 m, E podría expresarse simplemente como +40 **i**, y un desplazamiento de 40 m, O podría darse como −40 **i**. Por conveniencia, las unidades generalmente se omiten cuando se usa la notación **i**, **j**. Estudie cada ejemplo de la figura 3.23 hasta que comprenda el significado y uso de los vectores unitarios.

Considere el vector **A** de la figura 3.24 que se ubica sobre el plano xy y tiene componentes A_x y A_y. Podemos representar las componentes x y y del vector **A** usando los productos de sus magnitudes y el vector unitario adecuado. Por tanto, el vector **A** se puede expresar en lo que llamamos notación de vectores unitarios:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$$

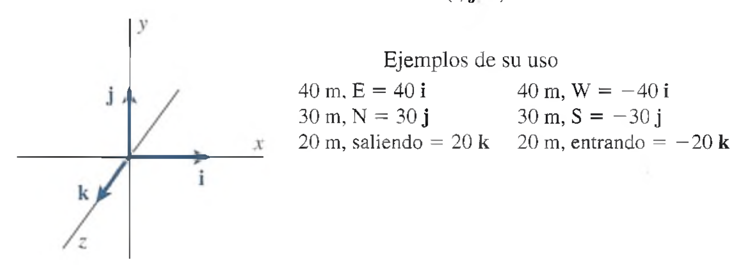


Figura 3.23 Los vectores unitarios son útiles cuando se trabaja con componentes de vectores.

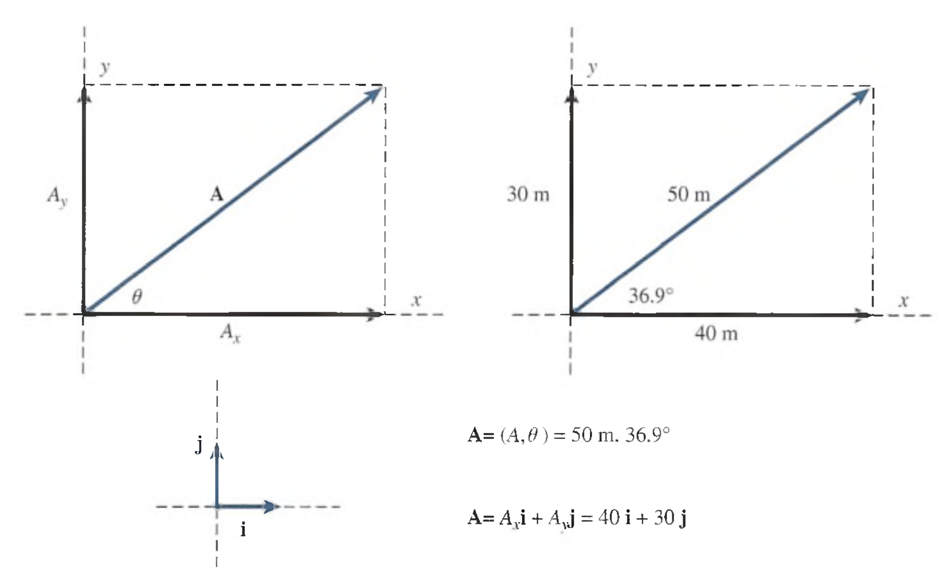


Figura 3.24 Dos formas de representar un vector.

Por tanto, ahora un vector (**A**, θ) puede describirse completamente usando los productos de sus componentes y vectores unitarios adecuados.

En la figura 3.24, si la magnitud de un vector **A** es igual a 50 m y el ángulo es 36.9°, las componentes son $A_x = +40$ m y $A_y = +30$ m. El vector ahora puede escribirse de dos maneras aceptables:

$$\mathbf{A} = (50 \text{ m}, 36.9^\circ) \qquad \text{o} \qquad \mathbf{A} = 40\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j}$$

El método del vector unitario es conveniente cuando se aplica el método de las componentes de la suma de vectores debido a que las componentes de la resultante pueden obtenerse al sumar polinomios.

Considere la tabla 3.6, la cual se compiló para el ejemplo 3.9. La resultante podría obtenerse al sumar los polinomios de vector unitario como sigue:

$$\begin{array}{ll}
A = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} & A = +20.0\,\mathbf{i} + 0 \\
B = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} & B = -26.0\,\mathbf{i} + 15.0\,\mathbf{j} \\
C = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} & C = -24.6\,\mathbf{i} - 31.5\,\mathbf{j} \\
\hline
R = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} & R = -30.6\,\mathbf{i} - 16.5\,\mathbf{j}
\end{array}$$

La magnitud y la dirección en las coordenadas polares entonces se calcula como antes, a partir de la ecuación (3.2). Los vectores unitarios ayudan a organizar los datos sin necesidad de hacer una tabla.



3.14 Resta o sustracción de vectores

Cuando estudiemos la velocidad relativa, la aceleración y algunas otras cantidades, será necesario encontrar la diferencia entre dos cantidades vectoriales. La resta de dos vectores se logra sumando un vector al negativo del otro. El negativo de un vector se determina construyendo un vector igual en magnitud, pero de dirección opuesta. Por ejemplo, si **A** es un vector cuya magnitud es 40 m y cuya dirección es hacia el Este, entonces el vector **−A** es un desplazamiento de 40 m dirigido al Oeste. Igual que en álgebra, se puede decir que

$$a - b = a + (-b)$$

y en la resta de vectores tenemos que

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

El proceso de restar vectores se ilustra en la figura 3.25. Los vectores dados se muestran en la figura 3.25a; la figura 3.25b muestra los vectores **A** y **−B**. El vector suma por el método del polígono se ilustra en la figura 3.25c.

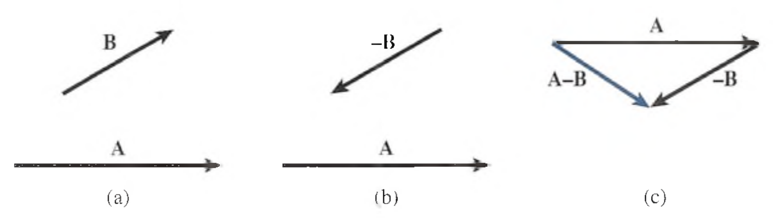


Figura 3.25 Cálculo de la resta de dos vectores.

FÍSICA HOY

"¿Son historia los maniquíes a prueba de choques?"
En las instalaciones de diseño de BMW en Munich, Alemania, las supercomputadoras avanzadas y las estaciones de trabajo de gran potencia están realizando simulaciones a prueba de choques con el fin de diseñar vehículos más seguros. Los cálculos que los ingenieros programan en las computadoras se basan en los métodos de suma vectorial de fuerzas. Aun cuando es poco probable que las simulaciones de computadora dejen sin trabajo a los maniquíes a prueba de choques, las pruebas de computadora reducen las probabilidades de que haya sorpresas que lleven a los diseñadores de regreso a la mesa de dibujo.

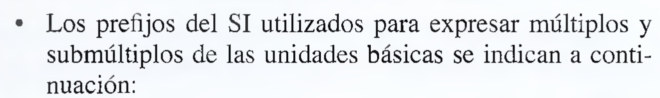


(*Foto © R-F/Corbis.*)

Resumen y repaso

Resumen

La medición técnica es esencial para el campo de aplicaciones de la física. Hemos aprendido que hay siete unidades fundamentales y que cada una de ellas tiene una sola unidad aprobada en el SI. En mecánica, las tres cantidades fundamentales para la mayor parte de las aplicaciones son la longitud, la masa y el tiempo. Algunas de las aplicaciones incluyen *vectores* y otras sólo *escalares*. Debido a que las cantidades vectoriales tienen dirección, se deben sumar o restar mediante métodos especiales. Los siguientes puntos resumen esta unidad de estudio:



- Los prefijos del SI utilizados para expresar múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas se indican a continuación:

giga (G) $= 10^9$	mili (m) $= 10^{-3}$
mega (M) $= 10^6$	micro (μ) $= 10^{-6}$
kilo (k) $= 10^3$	nano (n) $= 10^{-9}$
centi (c) $= 10^{-2}$	pico (p) $= 10^{-12}$

- Para convertir una unidad en otra:
  a. Escriba la cantidad que se desea convertir (número y unidad).
  b. Recuerde las definiciones necesarias.
  c. Forme dos factores de conversión para cada definición.
  d. Multiplique la cantidad que se va a convertir por aquellos factores de conversión que cancelen todas las unidades, menos las deseadas.
- *Método del polígono* para sumar vectores: El *vector resultante* se obtiene dibujando cada vector a escala, colocando el origen de un vector en la punta de la flecha del otro hasta que todos los vectores queden representados. La resultante es la línea recta que se dibuja a partir del origen del primer vector hasta la punta del último (figura 3.26).
- *Método del paralelogramo* para sumar vectores: La resultante de sumar dos vectores es la diagonal de un paralelogramo que se forma tomando los dos vectores como lados adyacentes. La dirección se indica en el punto más lejano del origen común de los dos vectores (figura 3.27).

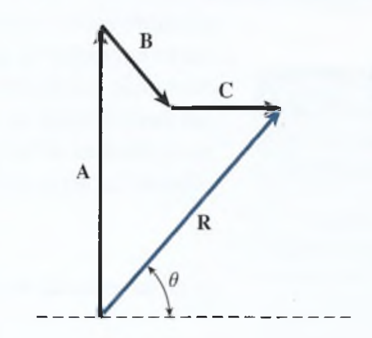


Figura 3.26

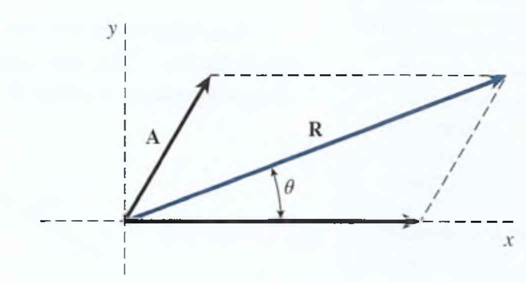


Figura 3.27

- Las *componentes* x y y de un vector (R, θ):

$$R_x = R\cos\theta \qquad R_y = R \operatorname{sen}\theta$$

- La *resultante* de dos vectores perpendiculares (R_x, R_y):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right|$$

- El ***método de las componentes*** para sumar vectores:

$$R_x = A_x + B_x + C_x + \cdots$$
$$R_y = A_y + B_y + C_y + \cdots$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$\tan\phi = \left|\frac{R_y}{R_x}\right|$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

3.1. Exprese las siguientes mediciones en la forma del SI apropiada, empleando los prefijos adecuados. El símbolo de la unidad básica se presenta entre paréntesis:

a. 298 000 metros (m)
b. 7 600 volts (V)
c. 0.000067 amperes (A)
d. 0.0645 newtons (N)
e. 43 000 000 gramos (g)
f. 0.00000065 farads (F)

3.2. ¿Cuáles son las tres cantidades fundamentales que aparecen en la definición de la mayor parte de las leyes de la mecánica? Mencione las tres unidades fundamentales que están asociadas a cada una de las cantidades en los sistemas de unidades del SI y del SUEU.

3.3. Una unidad de calor específico es cal/(g · °C). ¿Cuántas definiciones se necesitan para convertir estas unidades en sus unidades correspondientes en el SUEU, sistema en el cual las unidades son Btu/(lb · °F)? Muestre por medio de una serie de productos de qué manera llevaría usted a cabo esta conversión.

3.4. En virtud de que las unidades para *s*, *v*, *a* y *t* son, respectivamente metros (m), metros por segundo (m/s), metros por segundo cuadrado (m/s^2) y segundos (s), ¿cuáles son las dimensiones de cada cantidad? Acepte o rechace las siguientes ecuaciones después de haber realizado un análisis dimensional:

a. $s = vt + \frac{1}{2}at^2$
b. $2as = v_f^2 - v_0^2$
c. $v_f = v_0 + at^2$
d. $s = vt + 4at^2$

3.5. Señale la diferencia entre cantidades vectoriales y escalares, y cite ejemplos de cada una. Explique la diferencia entre sumar vectores y sumar escalares. ¿Es posible que la suma de dos vectores tenga una magnitud menor que cualquiera de los vectores originales?

3.6. ¿Cuáles son las resultantes mínima y máxima de dos fuerzas de 10 N y 7 N si ambas actúan sobre el mismo objeto?

3.7. Busque la sección dedicada a las coordenadas rectangulares y polares en un libro de matemáticas. ¿Qué semejanzas observa entre las componentes de un vector y las coordenadas rectangulares y polares de un punto?

3.8. Si un vector tiene una dirección de 230° a partir del eje *x* positivo, ¿qué signos tendrán sus componentes *x* y *y*? Si la razón R_y/R_x es negativa, ¿cuáles son los ángulos posibles de *R*, medidos a partir del eje *x* positivo?

Problemas

Nota: En éste y otros capítulos se supone que todos los números son precisos hasta tres cifras significativas, a menos que se indique otra cosa. Se proporcionan las respuestas a los problemas con números impares y a algunas de las preguntas para la reflexión crítica.

Sección 3.6 Conversiones de unidades

3.1. ¿Cuál es la altura en centímetros de una mujer que mide 5 pies y 6 pulgadas? Resp. 168 cm

3.2. Una sola loseta de piso mide 8 in de cada lado. Si las losetas se ponen lado a lado, ¿qué distancia en metros puede cubrir una fila de 20 losetas?

3.3. Un campo de futbol soccer mide 100 m de largo y 60 m de ancho. ¿Cuáles son la longitud y el ancho del campo en pies? Resp. 328 ft, 197 ft

3.4. El mango de una llave inglesa mide 8 in. ¿Cuál es la longitud de dicho mango en centímetros?

3.5. Un monitor de computadora de 19 in tiene una sección efectiva de imagen que mide 18 in en diagonal. Exprese esta distancia en metros. Resp. 0.457 m

3.6. La longitud de una libreta es 234.5 mm y su anchura es 158.4 mm. Exprese al área superficial de la libreta en metros cuadrados.

3.7. Un cubo mide 5 in por lado. ¿Cuál es el volumen del cubo en unidades del SI y en unidades del SUEU? Resp. 0.00205 m^3, 0.0723 ft^3

3.8. En una carretera interestatal se ha impuesto un límite de rapidez de 75 mi/h. (a) ¿A cuánto equivale esta rapidez en kilómetros por hora? (b) ¿Y en pies por segundo?

3.9. Un motor Nissan tiene 1600 cm^3 de cilindrada (volumen) y un diámetro interior de 84 mm. Exprese estas medidas en pulgadas cúbicas y en pulgadas. Resp. 97.6 in^3, 3.31 in

3.10. Un electricista va a instalar un cable subterráneo desde la carretera hasta una vivienda que se localiza a una distancia de 1.20 mi en el bosque. ¿Cuántos pies de cable va a necesitar?

3.11. Un galón estadounidense tiene un volumen equivalente a 231 in^3. ¿Cuántos galones se necesitan para rellenar un depósito que mide 18 in de largo, 16 in de ancho y 12 in de alto? Resp. 15.0 gal

3.12. La densidad del bronce es de 8.89 g/cm^3. ¿Cuál es su densidad en kilogramos por metro cúbico?

Sección 3.8 Suma de vectores por métodos gráficos

3.13. Una mujer camina 4 km hacia el Este y después camina 8 km hacia el Norte. (a) Aplique el método del

polígono para hallar su desplazamiento resultante. (b) Compruebe el resultado con el método del paralelogramo. Resp. 8.94 km, 63.4° N del E

3.14. En la superficie de Marte, un vehículo se desplaza una distancia de 38 m a un ángulo de 180°. Después vira y recorre una distancia de 66 m a un ángulo de 270°. ¿Cuál fue su desplazamiento desde el punto de partida?

3.15. Un topógrafo inicia su tarea en la esquina sudeste de una parcela y registra los siguientes desplazamientos: A = 600 m, N; B = 400 m, O; C = 200 m, S, y D = 100 m, E. ¿Cuál es el desplazamiento neto desde el punto de partida? Resp. 500 m, 126.9°

3.16. Una fuerza descendente de 200 N actúa en forma simultánea con una fuerza de 500 N dirigida hacia la izquierda. Aplique el método del polígono para encontrar la fuerza resultante.

3.17. Las tres fuerzas siguientes actúan simultáneamente sobre el mismo objeto: A = 300 N, 30° N del E; B = 600 N, 270°; y C = 100 N hacia el Este. Halle la fuerza resultante mediante el método del polígono. Resp. 576 N, 51.4° S del E

3.18. Una embarcación navega una distancia de 200 m hacia el Oeste, después avanza hacia el Norte 400 m y finalmente 100 m a 30° S del E. ¿Cuál es su desplazamiento neto?

3.19. Dos cuerdas A y B están atadas a un gancho de amarre, de manera que se ha formado un ángulo de 60° entre las dos cuerdas. La tensión sobre la cuerda A es de 80 N y la tensión sobre la cuerda B es de 120 N. Utilice el método del paralelogramo para hallar la fuerza resultante sobre el gancho. Resp. 174 N

3.20. Dos fuerzas A y B actúan sobre el mismo objeto y producen una fuerza resultante de 50 N a 36.9° N del O. La fuerza A = 40 N se dirige hacia el Oeste. Halle la magnitud y la dirección de la fuerza B.

Sección 3.11 Trigonometría y vectores

3.21. Halle las componentes x y y de (a) un desplazamiento de 200 km a 34°, (b) una velocidad de 40 km/h a 120° y (c) una fuerza de 50 N a 330°.
Resp. 166 km, 112 km; −20 km/h, 34.6 km/h; 43.3 N, −25 N

3.22. Un trineo es arrastrado con una fuerza de 540 N y su dirección forma un ángulo de 40° con respecto a la horizontal. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza descrita?

3.23. El martillo de la figura 3.28 aplica una fuerza de 260 N en un ángulo de 15° con respecto a la vertical. ¿Cuál es el componente ascendente de la fuerza ejercida sobre el clavo? Resp. 251 N

3.24. Un niño intenta levantar a su hermana del pavimento (figura 3.29). Si la componente vertical de la fuerza que la jala **F** tiene una magnitud de 110 N y la componente horizontal tiene una magnitud de 214 N, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza **F**?

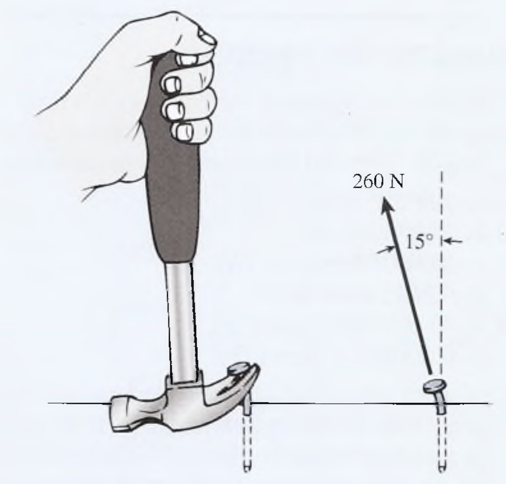


Figura 3.28

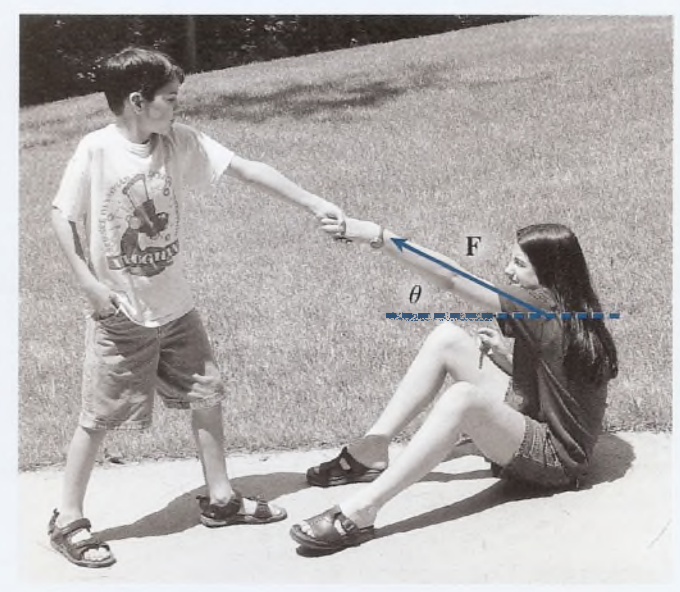


Figura 3.29
(Foto de Paul E. Tippens.)

3.25. Un río fluye hacia el Sur a una velocidad de 20 km/h. Una embarcación desarrolla una rapidez máxima de 50 km/h en aguas tranquilas. En el río descrito, la embarcación avanza a su máxima velocidad hacia el Oeste. ¿Cuáles son la rapidez y la dirección resultantes de la embarcación?
Resp. 53.9 km/h, 21.8° S del O

3.26. Una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal arrastra una caja sobre el piso. ¿Cuál será la tensión de la cuerda si se requiere una fuerza horizontal de 40 N para arrastrar la caja?

3.27. Se necesita un empuje vertical de 80 N para levantar la parte móvil de una ventana. Se usa un mástil largo para realizar dicha operación. ¿Qué fuerza será necesaria ejercer a lo largo del mástil si éste forma un ángulo de 34° con la pared? Resp. 96.5 N

3.28. La resultante de dos fuerzas **A** y **B** es de 40 N a 210°. Si la fuerza **A** es de 200 N a 270°, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza **B**?

Sección 3.12 El método de las componentes para la suma de vectores

3.29. Halle la resultante de las siguientes fuerzas perpendiculares: (a) 400 N, 0°, (b) 820 N, 270° y (c) 500 N, 90°. Resp. 512 N, 321.3°

3.30. Cuatro cuerdas, las cuales forman ángulos rectos entre sí, tiran de una argolla. Las fuerzas son de 40 N, E; 80 N, N; 70 N, O, y 20 N, S. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza resultante que se ejerce sobre la argolla.

3.31. Dos fuerzas actúan sobre el automóvil ilustrado en la figura 3.30. La fuerza **A** es igual a 120 N, hacia el Oeste, y la fuerza **B** es igual a 200 N a 60° N del O. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el automóvil?
Resp. 280 N, 38.2° N del O

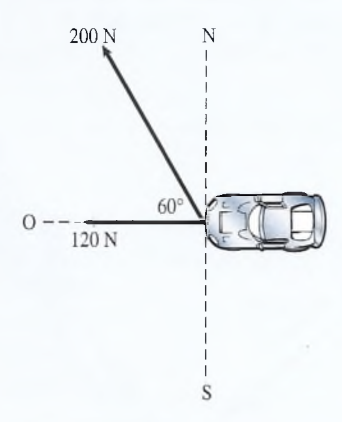


Figura 3.30

3.32. Suponga que la dirección de la fuerza **B** del problema 3.31 se invirtiera (+180°) y que los demás parámetros permanecieran sin cambio alguno. ¿Cuál sería la nueva resultante? (Este resultado es la resta vectorial **A** − **B**.)

3.33. Calcule la fuerza resultante que actúa sobre el perno de la figura 3.31 Resp. 691.6 N, 154.1°

3.34. Calcule la resultante de las siguientes fuerzas aplicando el método de las componentes para efectuar la suma de vectores: **A** = (200 N, 30°), **B** = (300 N, 330°) y **C** = (400 N, 250°).

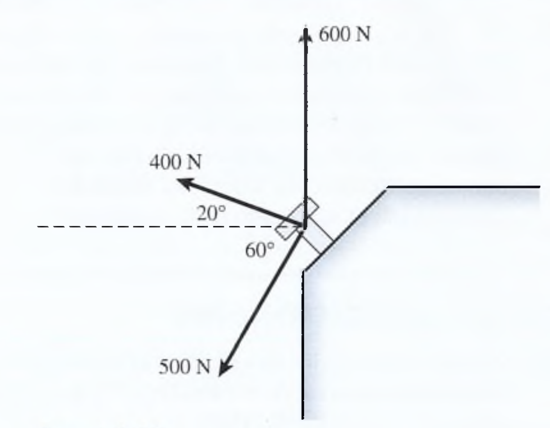


Figura 3.31

3.35. Tres embarcaciones ejercen fuerzas sobre un gancho de amarre como muestra la figura 3.32. Halle la resultante de esas tres fuerzas.
Resp. 853 N, 101.7°

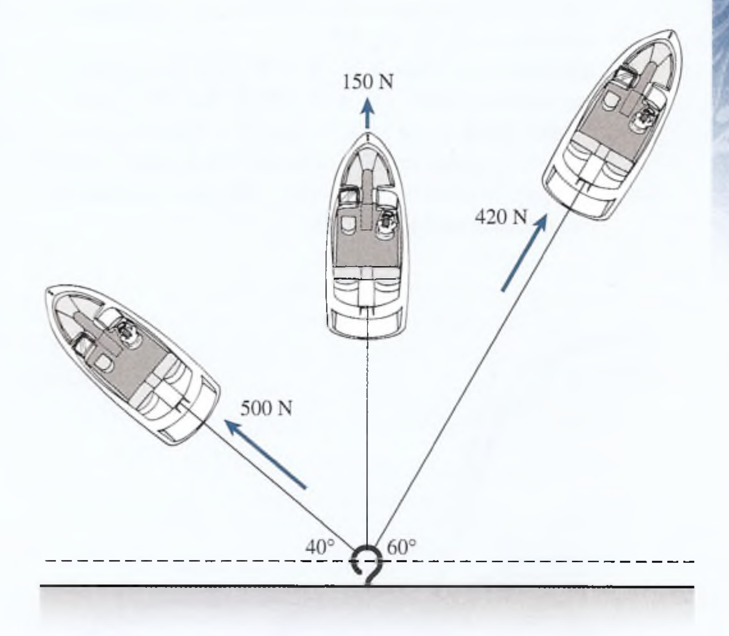


Figura 3.32

Sección 3.14 Resta o sustracción de vectores

3.36. Dos desplazamientos son **A** = 9 m, N y **B** = 12 m, S. Encuentre la magnitud y la dirección de (**A** + **B**) y (**A** − **B**).

3.37. Dados **A** = 24 m, E, y **B** = 50 m, S, halle la magnitud y la dirección de (a) **A** + **B** y (b) **B** − **A**.
Resp. (a) 55.5 m, 64.4° S del E, (b) 55.5 m, 64.4° S del O

3.38. La velocidad tiene una magnitud y una dirección que pueden representarse por medio de un vector. Considere una embarcación que se mueve inicialmente con una velocidad de 30 m/s directamente hacia el Oeste. En algún momento más tarde, la embarcación alcanza una velocidad de 12 m/s a 30° S del O. ¿Cuál es el cambio en la velocidad?

3.39. Considere cuatro vectores: **A** = 450 N, O; **B** = 160 N, 44° N del O; **C** = 800 N, E, y **D** = 100 m, 34° N del E. Determine la magnitud y la dirección de **A** − **B** + **C** − **D**. Dibuje el polígono de vectores.
Resp. 417 N, 23.6° S del E

Problemas adicionales

3.40. Calcule las componentes horizontal y vertical de los siguientes vectores: **A** = (400 N, 37°), **B** = (90 m, 320°) y **C** = (70 km/h, 150°).

3.41. Un cable está unido al extremo de una viga. ¿Qué tirón se requiere, a un ángulo de 40° con respecto al horizontal, para producir una fuerza horizontal efectiva de 200 N? Resp. 261 N

3.42. Un muelle para pescadores se extiende hacia el Norte y el Sur. ¿Cuál deberá ser la rapidez de una embarcación que avanza a un ángulo de 40° E del N para que su componente de velocidad a lo largo del muelle sea de 30 km/h?

3.43. Halle la resultante **R** = **A** + **B** para los siguientes pares de vectores: (a) **A** = 520 N, Sur, **B** = 269 N, Oeste, (b) **A** = 18 m/s, Norte, **B** = 15 m/s, Oeste.
Resp. 585 N, 242.6°; 23.4 m/s, 129.8°

3.44. Efectúe la resta vectorial (**A** − **B**) para los pares de fuerzas del problema 3.43.

3.45. Un semáforo está colgado a la mitad de una cuerda, de manera que cada segmento forma un ángulo de 10° con la horizontal. La tensión sobre cada segmento de cuerda es de 200 N. Si la fuerza resultante en el punto medio es cero, ¿cuál es el peso del semáforo? Resp. 69.5 N

3.46. Calcule la resultante de las fuerzas ilustradas en la figura 3.33.

3.47. Calcule la fuerza resultante que actúa sobre la argolla de la figura 3.34. Resp. 311.5°, 25.6° N O

3.48. Un bloque de 200 N descansa sobre un plano inclinado a 30°. Si el peso del bloque actúa verticalmente hacia abajo, ¿cuáles son las componentes del peso hacia abajo del plano y en dirección perpendicular al plano?

3.49. Halle la resultante de los tres desplazamientos siguientes: **A** = 220 m, 60°; **B** = 125 m, 210°, y **C** = 175 m, 340°. Resp. 180 m, 22.3°

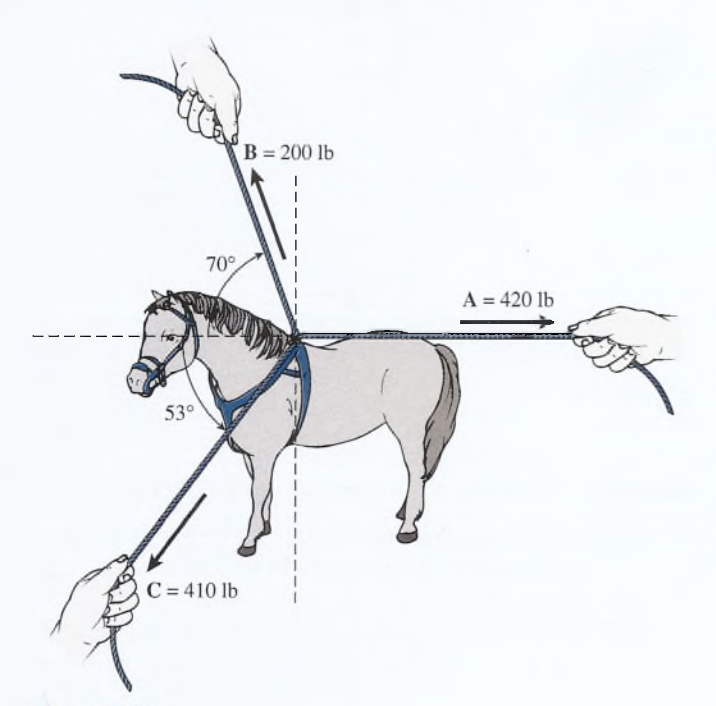


Figura 3.33

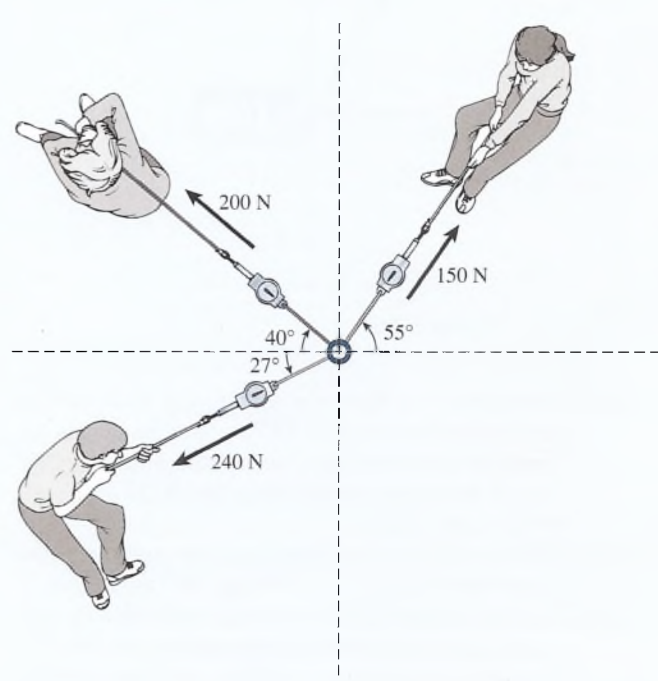


Figura 3.34

Preguntas para la reflexión crítica

*3.50. Considere estos tres vectores: **A** = 100 m, 0°; **B** = 400 m, 270°; y C = 200 m, 30°. Elija una escala apropiada y muestre gráficamente que el resultado es el mismo, sin importar en qué orden sean sumados estos vectores; es decir, **A** + **B** + **C** = **C** + **B** + **A**. ¿La afirmación anterior también es válida para la resta de vectores? Demuestre gráficamente que **A** − **C** produce un resultado diferente que **C** − **A**.

3.51. Dos fuerzas A = 30 N y B = 90 N pueden actuar sobre un objeto en cualquier dirección que se desee. ¿Cuál es la máxima fuerza resultante? ¿Cuál es la mínima fuerza resultante? ¿Es posible que la fuerza resultante sea cero? Resp. 120 N, 60 N, no

3.52. Considere dos fuerzas A = 40 N y B = 80 N. ¿Cuál tiene que ser el ángulo entre esas dos fuerzas para que la magnitud de la fuerza resultante sea 60 N?

*3.53. ¿Qué tercera fuerza **F** es necesario agregar a las dos fuerzas siguientes para que la fuerza resultante sea igual a cero? **A** = 120 N, 110° y **B** = 60 N, 200°. Resp. 134 N, 316.6°

*3.54. Un avión requiere una dirección resultante con curso hacia el Oeste. La rapidez del avión es 600 km/h cuando el aire está inmóvil. Si el viento adquiere una rapidez de 40 km/h y sopla en dirección de 30° S del O, ¿en qué dirección se deberá orientar el avión y cuál será su rapidez relativa con respecto al suelo?

*3.55. ¿Cuáles tendrán que ser la magnitud F y la dirección θ de la fuerza necesaria para que el automóvil de la figura 3.31 avance directamente hacia el Este, con una fuerza resultante de 400 lb? Resp. 223 lb, 17.9°

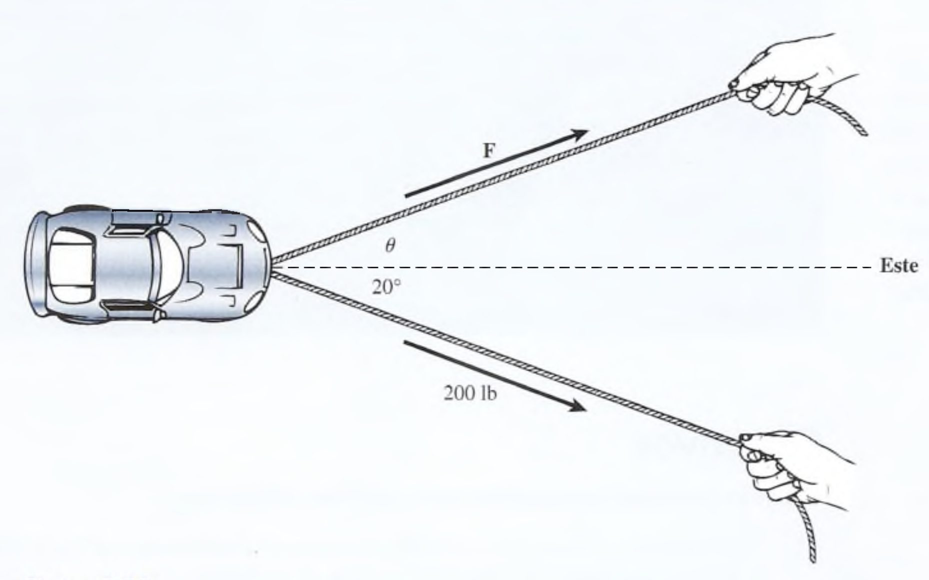
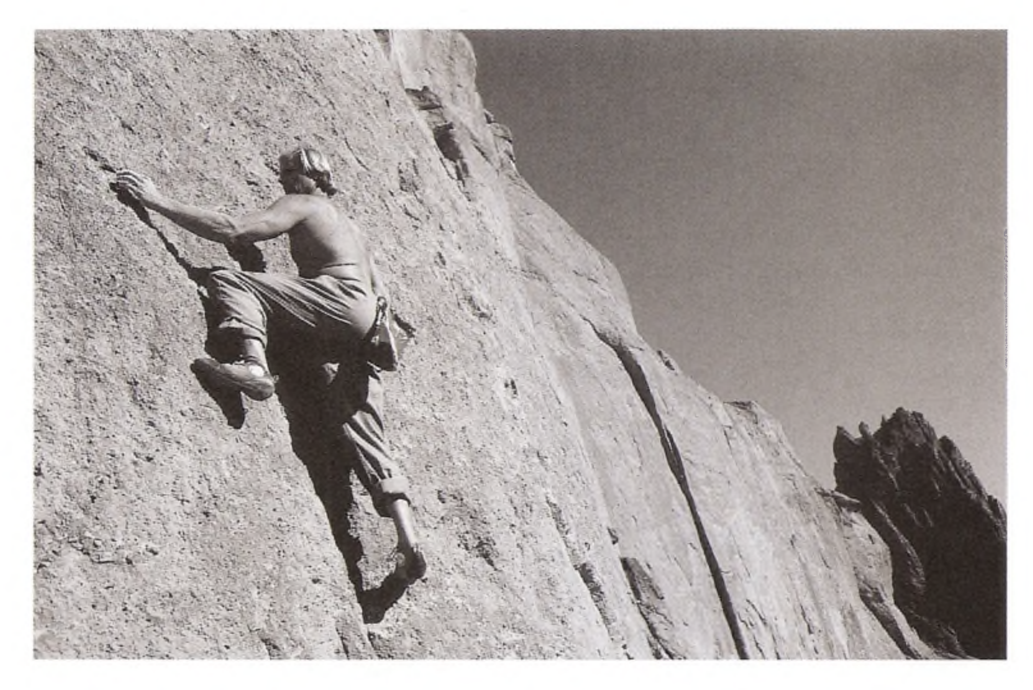


Figura 3.35



4 Equilibrio traslacional y fricción



Un escalador de montaña ejerce fuerzas de acción en las grietas y salientes; esas fuerzas producen fuerzas de reacción en el escalador, lo que permite ascender por los muros de la montaña. (*Foto © vol. 1 Photo Disc/ Getty*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará mediante ejemplos o experimentos su comprensión de la primera y la tercera leyes de Newton sobre el movimiento.
2. Establecerá la primera condición de equilibrio, dará un ejemplo físico y demostrará gráficamente que éste satisface la primera condición.
3. Construirá un diagrama de cuerpo libre que represente todas las fuerzas que actúan sobre un objeto que se halla en equilibrio traslacional.
4. Encontrará las fuerzas desconocidas aplicando la primera condición de equilibrio.
5. Aplicará su conocimiento acerca de la fricción cinética y estática para resolver problemas de equilibrio.

Las fuerzas pueden actuar de tal forma que causen el movimiento o que lo eviten. Los grandes puentes deben diseñarse de modo que el esfuerzo global de las fuerzas evite el movimiento. Las armaduras, vigas, trabes y cables de que están formados deben estar en ***equilibrio.*** Dicho de otro modo, las fuerzas resultantes que actúan en cualquier punto de la estructura deben estar equilibradas. Las plataformas, montacargas, ganchos, cables elevadores e incluso los grandes edificios han de construirse de manera que se conozcan y se controlen y comparen

los efectos de las fuerzas. En este capítulo continuaremos el estudio de las fuerzas en relación con los cuerpos en reposo. Estudiaremos también la fuerza de fricción, de suma importancia para el equilibrio en numerosas aplicaciones, como una extensión natural de nuestro trabajo con fuerzas de todo tipo.

4.1 Primera ley de Newton

Por experiencia sabemos que un objeto estacionario permanece en reposo a menos que una fuerza externa actúe sobre él. Una lata de aceite permanece en la mesa de trabajo hasta que alguien la derriba. Un objeto suspendido estará colgando hasta que se suelte. Sabemos que son necesarias las fuerzas para hacer que algo se mueva si originalmente estaba en reposo.

Resulta menos obvio que un objeto en movimiento continuará en ese estado hasta que una fuerza exterior cambie el movimiento. Por ejemplo, una barra de acero que se desliza por el piso de la tienda pronto quedará en reposo debido a su interacción con el piso. La misma barra se deslizaría una distancia mucho mayor, antes de detenerse, si estuviera sobre hielo, lo cual se debe a que la interacción horizontal, llamada ***fricción,*** entre el piso y la barra es mucho mayor que la fricción entre el hielo y la barra. Esto nos sugiere la idea de que una barra que se deslizara sobre una superficie horizontal, totalmente carente de fricción, permanecería moviéndose para siempre. Tales ideas forman una parte de la ***primera ley de Newton*** del movimiento.

Primera ley de Newton. Un cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza externa no equilibrada actúe sobre él.

Debido a la existencia de la fricción, no existe ningún cuerpo real que esté totalmente libre de la acción de fuerzas externas. Sin embargo, hay situaciones en las que es posible hacer que la fuerza resultante sea igual o aproximadamente igual a cero. En tales casos, el cuerpo debe comportarse de acuerdo con la primera ley del movimiento. Puesto que reconocemos que la fricción nunca puede ser eliminada por completo, también debemos aceptar que la primera ley de Newton es una expresión de una situación *ideal.* Un volante que gira sobre cojinetes lubricados tiende a mantenerse girando; pero aun la más leve fricción hará que tarde o temprano se detenga.

Newton llamó inercia a la propiedad de una partícula que le permite mantenerse en un constante estado de movimiento o de ***reposo.*** Su primera ley a veces se conoce como *ley de inercia.* Cuando un automóvil se acelera, los pasajeros obedecen esta ley tendiendo a permanecer en reposo hasta que la fuerza externa de los asientos los obliga a moverse. De manera similar, cuando el automóvil se detiene los pasajeros continúan en movimiento a rapidez constante hasta que son detenidos por los cinturones de seguridad o por su propio esfuerzo. Toda la materia posee inercia. El concepto de masa será presentado más adelante como una medida de la inercia de un cuerpo.

4.2 Segunda ley de Newton

En virtud de que el estado de un objeto en reposo o en movimiento no será modificado sin la acción de una fuerza de desequilibrio ahora debemos considerar qué sucede si hay una fuerza resultante. La experiencia nos indica que cuanto más y más grandes fuerzas resultantes se ejerzan en un objeto, más y más grande será el cambio en la velocidad de éste (véase la figura 4.1). Además, si se mantiene constante la fuerza resultante y se aplica a masas cada vez más grandes, el cambio en la velocidad disminuye. El cambio de velocidad por unidad de tiempo se define como *aceleración* a.

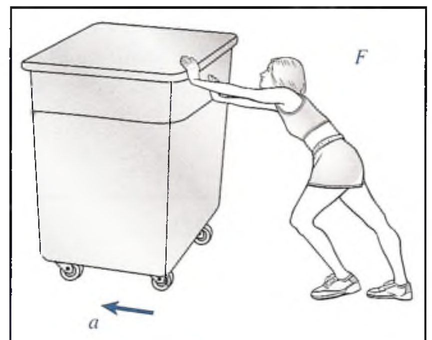
Newton demostró que hay una relación directa entre la fuerza aplicada y la aceleración resultante. Por añadidura, probó que la aceleración disminuye proporcionalmente con la inercia o masa (m) del objeto. En la ***segunda ley de Newton*** se postula este principio.

FÍSICA HOY

Una persona con entrenamiento en karate puede romper un bloque de concreto de 3.8 cm de espesor con la mano, que se mueve a 11 m/s, lo cual crea una fuerza de 3 069 N. Los huesos de la mano pueden resistir fuerzas de hasta 40 veces esa cantidad.



(*Foto © SS34 PhotoDisc/ Getty.*)



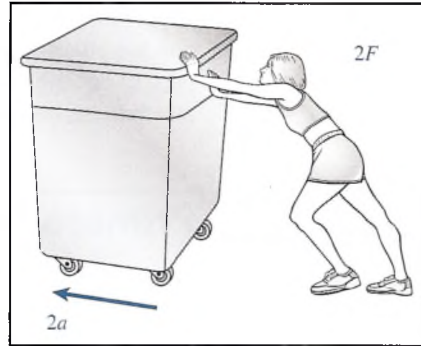


Figura 4.1 Si despreciamos las fuerzas de fricción, al empujar el carro con el doble de fuerza se produce el doble de aceleración. Si se triplica la fuerza se triplica la aceleración.

Segunda ley de Newton. La aceleración *a* de un objeto en la dirección de una fuerza resultante (**F**) es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa (*m*).

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Cabe señalar que cuando la velocidad no cambia, $a = 0$ y la primera ley de Newton resulta entonces en un caso especial de la segunda. Sin la fuerza de desequilibrio el movimiento del objeto no cambiará. La palabra importante aquí es *cambio*; nos ayuda a recordar que no hay fuerza resultante sobre los objetos en reposo o en movimiento a rapidez constante.

Más adelante veremos matemáticamente la segunda ley del movimiento de Newton, junto con definiciones más rigurosas de *fuerza* y *masa*. Antes hemos de considerar los pormenores de los objetos en reposo o, más concretamente, de los objetos sin aceleración. Una vez que usted sea capaz de entender cabalmente una explicación vectorial de las fuerzas, estudiaremos las implicaciones del cambio de movimiento.

4.3 Tercera ley de Newton

No puede haber una fuerza si no están implicados dos cuerpos. Cuando un martillo golpea un clavo ejerce una fuerza de "acción" sobre él. Pero el clavo también "reacciona" empujando hacia atrás al martillo. En todos los casos debe haber una fuerza de *acción* y una de *reacción*. Siempre que dos cuerpos interactúan, la fuerza ejercida por el segundo sobre el primero (la ***fuerza de reacción***) es igual en magnitud pero de sentido contrario a la dirección de la fuerza ejercida por el primer cuerpo sobre el segundo (la fuerza de acción). Este principio se enuncia en la ***tercera ley de Newton.***

Tercera ley de Newton. Para cada fuerza de acción debe haber una fuerza de reacción igual y opuesta.

Por tanto, no puede existir una sola fuerza aislada. Considere los ejemplos de fuerzas de acción y de reacción de la figura 4.2.

Observe que las fuerzas de acción y de reacción no se anulan. Son iguales en magnitud y opuestas en dirección, pero actúan sobre objetos *diferentes*. Para que dos fuerzas se anulen deben actuar sobre el mismo objeto. Se puede decir que las fuerzas de acción crean las fuerzas de reacción.

Por ejemplo, cuando alguien empieza a subir una escalera lo primero que hace es colocar un pie sobre el escalón y empujarlo. El peldaño debe ejercer una fuerza igual y opuesta sobre el pie para evitar quebrarse. Cuanto mayor es la fuerza que ejerce el pie sobre el escalón,

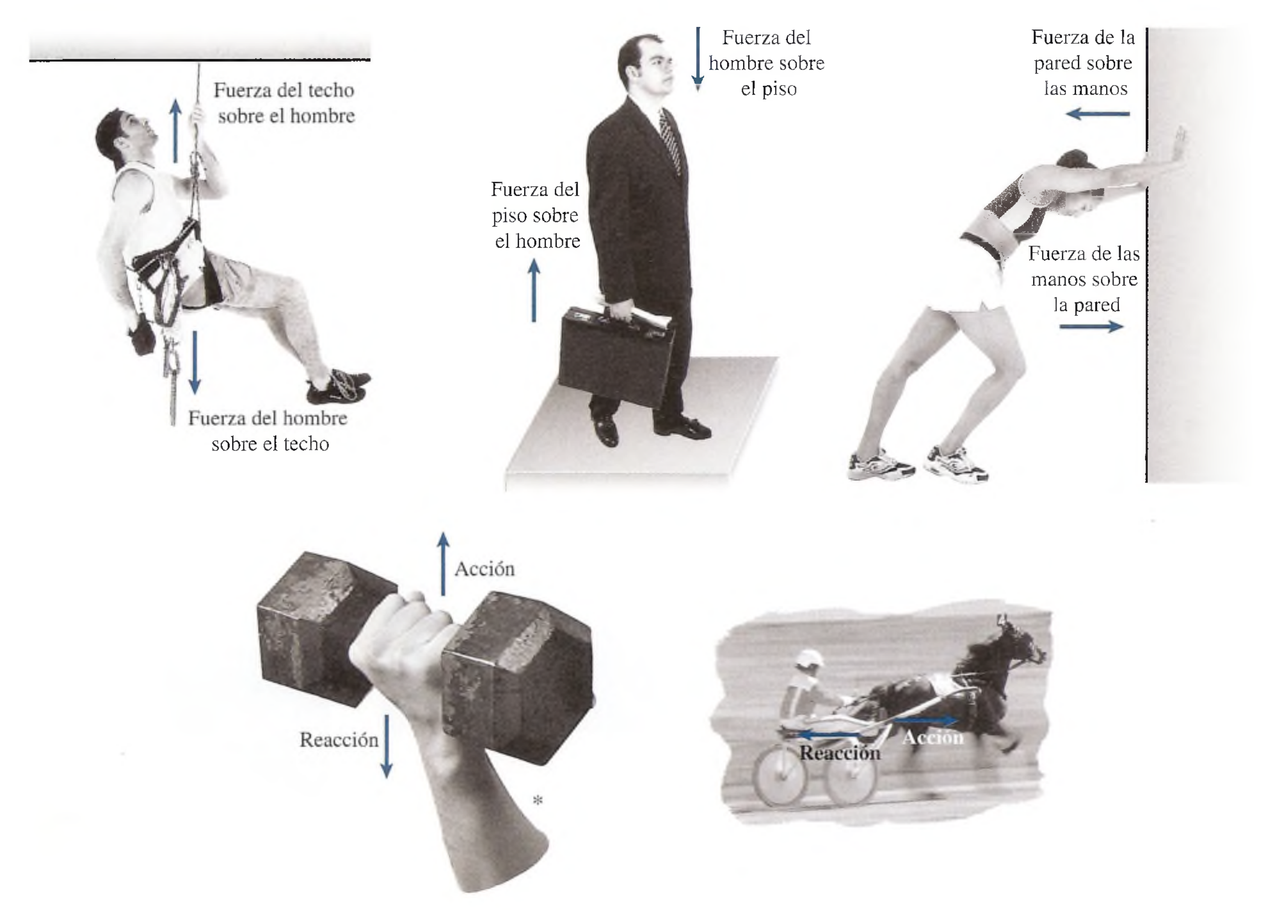


Figura 4.2 Ejemplos de fuerzas de acción y de reacción. *(Al sostener la pesa con la mano, la mano ejerece una fuerza en sentido opuesto a la fuerza gravitacional, es decir, en sentido vertical hacia arriba; de lo contrario la pesa seguirá su trayectoria de caída libre.)

mayor será la reacción contra el pie. Desde luego, el escalón no puede crear una fuerza de reacción hasta que la fuerza del pie se aplica. La fuerza de acción actúa sobre el objeto y la de reacción sobre el agente que aplica la fuerza.

4.4 Equilibrio

Definimos la *fuerza resultante* como una sola fuerza cuyo efecto es igual al de un sistema de fuerzas en particular. Si la tendencia de un conjunto de fuerzas es producir un movimiento, la resultante también lo produce. Existe una condición de equilibrio cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto es igual a cero. Esto equivale a decir que cada fuerza externa se equilibra con la suma de todas las demás fuerzas externas cuando existe equilibrio. En consecuencia, de acuerdo con la primera ley de Newton, un cuerpo en equilibrio debe estar en reposo o en movimiento con velocidad constante, ya que no existe ninguna fuerza externa que no esté equilibrada.

Consideremos el sistema de fuerzas que se presenta en la figura 4.3a. Al resolverlo por el método del polígono de vectores se demuestra que, independientemente del orden en que se sumen éstos, su resultante siempre es cero. El extremo del último vector siempre termina en el origen del primero (véase la sección 3.7).

Un sistema de fuerzas que no esté en equilibrio puede equilibrarse si se sustituye la fuerza resultante por una fuerza igual pero opuesta denominada ***equilibrante***. Por ejemplo, observe que las dos fuerzas **A** y **B** de la figura 4.4a tienen una resultante **R** en una dirección de 30° sobre la horizontal. Si le sumamos **E**, que es igual a **R** en magnitud pero cuyo ángulo es 180° mayor, el sistema estará en equilibrio, como se observa en la figura 4.4b.

FÍSICA HOY

El transbordador espacial aplica la tercera ley de Newton cada vez que despega. La fuerza que la propulsa proviene del encendido de combustible sólido para cohetes. Cuando la fuerza del propulsor en encendido es mayor que la acción ejercida por la gravedad sobre la masa de la nave, ésta despega.

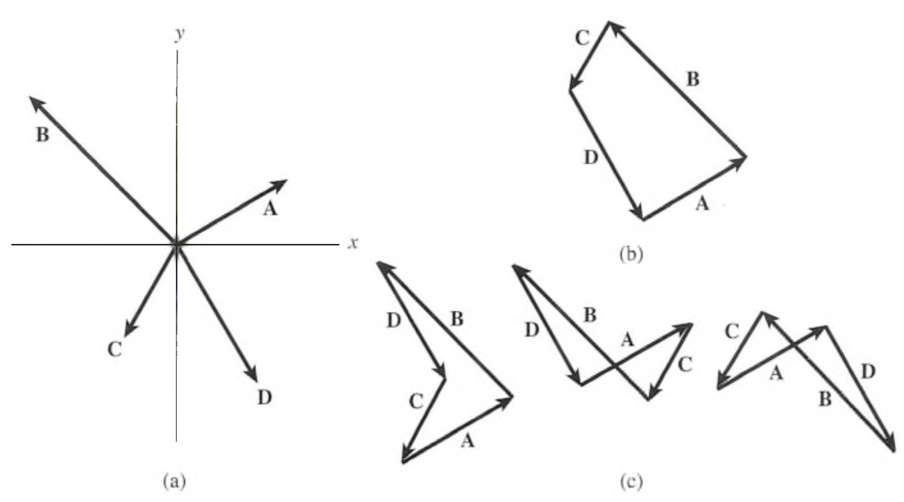


Figura 4.3 Fuerzas en equilibrio.

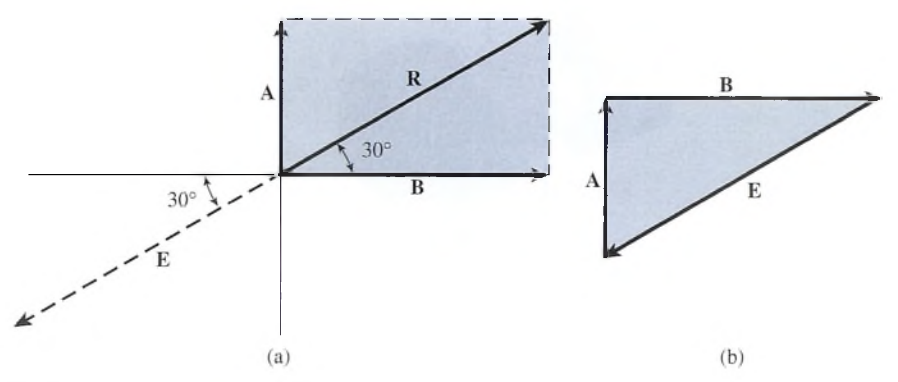


Figura 4.4 La fuerza equilibrante.

FÍSICA HOY

La NASA está desarrollando otros propulsores para el despegue del transbordador espacial. La propulsión eléctrica solar usa celdas solares para generar electricidad, la cual ioniza átomos de criptón o xenón. Cuando esos iones se cargan eléctricamente, generan una fuerza de empuje al ser acelerados a través de un campo electromagnético y finalmente expulsados.

En el capítulo anterior vimos que las magnitudes de las componentes de x y y de cualquier resultante **R** están dadas por

$$R_x = \sum F_x = A_x + B_x + C_x + \dots$$
$$R_y = \sum F_y = A_y + B_y + C_y + \dots$$

Cuando un cuerpo está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero. En este caso, tanto R_x como R_y deben ser cero; por tanto, para un cuerpo en equilibrio se tiene que

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \tag{4.1}$$

Estas dos ecuaciones representan un enunciado matemático de la primera condición de equilibrio, que puede expresarse como se indica a continuación:

Un cuerpo se halla en estado de equilibrio traslacional si y sólo si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

El término ***equilibrio traslacional*** se emplea para distinguir la primera de la segunda condición de equilibrio, la cual se refiere al movimiento rotacional, que se estudiará en el capítulo 5.

4.5 Diagramas de cuerpo libre

Antes de aplicar la primera condición de equilibrio para resolver problemas físicos es necesario aprender a construir diagramas vectoriales. Considere, por ejemplo, la pesa de 400 N suspendida mediante cuerdas, como se muestra en la figura 4.5a. Hay tres fuerzas que actúan

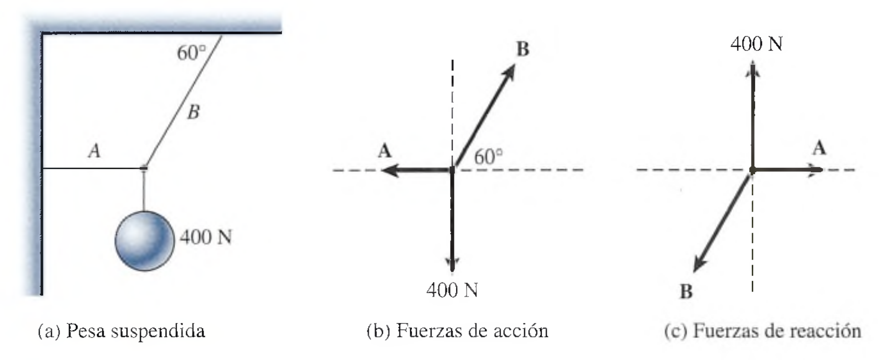


Figura 4.5 Diagramas de cuerpo libre que muestran las fuerzas de acción y de reacción.

sobre el nudo: las ejercidas por el techo, el muro y la Tierra (peso). Si cada una de estas fuerzas se marca y se representa con un vector, es posible trazar un diagrama de vectores como el de la figura 4.5b. Un diagrama de ese tipo se llama ***diagrama de cuerpo libre.***

Un diagrama de cuerpo libre es un diagrama vectorial que describe todas las fuerzas que actúan sobre un objeto o cuerpo. Note que en el caso de las fuerzas concurrentes, todos los vectores apuntan hacia fuera del centro de los ejes x y y, los cuales se intersecan en un origen común.

Al dibujar diagramas de cuerpo libre es importante distinguir entre las fuerzas de acción y las de reacción. En nuestro ejemplo hay fuerzas que actúan *sobre* el nudo, pero también hay tres fuerzas de reacción iguales y opuestas ejercidas *por* el nudo. Con base en la tercera ley de Newton, las fuerzas de reacción ejercidas *por* el nudo sobre el techo, la pared y el suelo se presentan en la figura 4.5c. Para evitar confusiones, es importante seleccionar un punto en el que actúen todas las fuerzas y dibujar aquellas fuerzas que actúan sobre el cuerpo en ese punto.

Estrategia para resolver problemas

Cómo construir un diagrama de cuerpo libre

1. Trace un bosquejo e indique las condiciones del problema. Asegúrese de representar todas las fuerzas conocidas y desconocidas y sus ángulos correspondientes.
2. Aísle cada cuerpo del sistema en estudio. Realice esto mentalmente o dibujando un círculo alrededor del punto donde se aplican todas las fuerzas.
3. Construya un diagrama de fuerzas para cada cuerpo que va a estudiar. Las fuerzas se representan como vectores con su origen situado al centro de un sistema coordenado rectangular. (Véase los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.8.)
4. Represente los ejes x y y con líneas punteadas. No es indispensable trazar estos ejes horizontal y verticalmente, como se verá más adelante.
5. Con líneas punteadas trace los rectángulos correspondientes a las componentes x y y de cada vector, y determine los ángulos conocidos a partir de las condiciones dadas en el problema.
6. Marque todas las componentes conocidas y desconocidas, opuestas y adyacentes a los ángulos conocidos.

Aun cuando este proceso parezca laborioso, es muy útil y a veces necesario para comprender claramente un problema. Cuando tenga práctica en trazar diagramas de cuerpo libre, su uso se convertirá en mera rutina.

Los dos tipos de fuerzas que actúan sobre un cuerpo son las *fuerzas de contacto* y las *fuerzas de campo*. Ambas deben considerarse en la construcción de un diagrama de fuerzas. Por ejemplo, la atracción gravitacional de un cuerpo por parte de la Tierra, conocida como ***peso,*** no tiene un punto de contacto con el cuerpo; no obstante, ejerce una fuerza real y debe considerarse un factor importante en cualquier problema de fuerzas. La dirección del vector peso debe considerarse siempre hacia abajo.

Ejemplo 4.1

Un bloque de peso W cuelga de una cuerda atada a otras dos cuerdas, A y B, las cuales, a su vez, están sujetas del techo. Si la cuerda B forma un ángulo de 60° con el techo y la cuerda A uno de 30°, trace el diagrama de cuerpo libre del nudo.

Plan: Seguiremos paso por paso el procedimiento para trazar diagramas de cuerpo libre.

Solución: Se traza y marca un diagrama como el de la figura 4.6; luego se dibuja un círculo alrededor del nudo donde se ejerce cada fuerza. En la figura 4.6b se presenta el diagrama de cuerpo libre completo. Observe que todas las componentes están identificadas claramente como opuestas y adyacentes a los ángulos proporcionados.

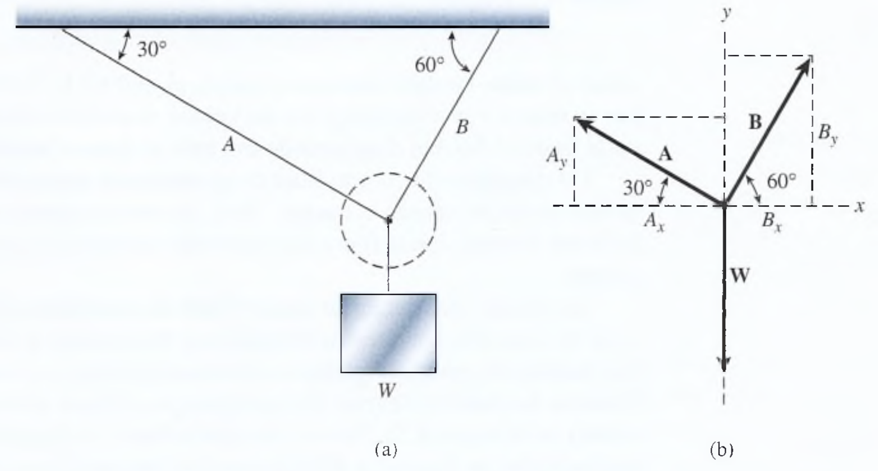


Figura 4.6 (a) Se traza un bosquejo para aclarar el problema. (b) Se construye un diagrama de cuerpo libre.

El diagrama de cuerpo libre trazado en el ejemplo 4.1 es válido y funcional, pero la solución se halla con mayor facilidad si se colocan los ejes x y y a lo largo de los vectores **A** y **B**, en lugar de utilizarlos horizontal y verticalmente. Al girar los ejes en forma perpendicular como se muestra en la figura 4.7 se observa que sólo hay que descomponer el vector peso (**W**) en sus componentes. Los vectores **A** y **B** se hallan ahora a lo largo o, mejor dicho, sobre cada uno de los ejes. Como regla, deben elegirse los ejes x y y de forma que se maximice el número de fuerzas desconocidas que yacen a lo largo de un eje.

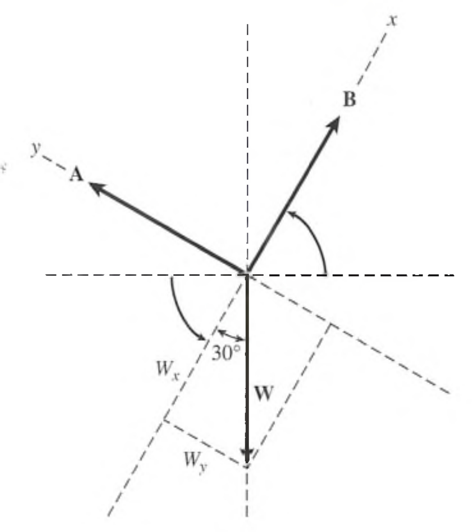


Figura 4.7 Al girar los ejes x y y se hacen coincidir con los vectores perpendiculares **A** y **B**.

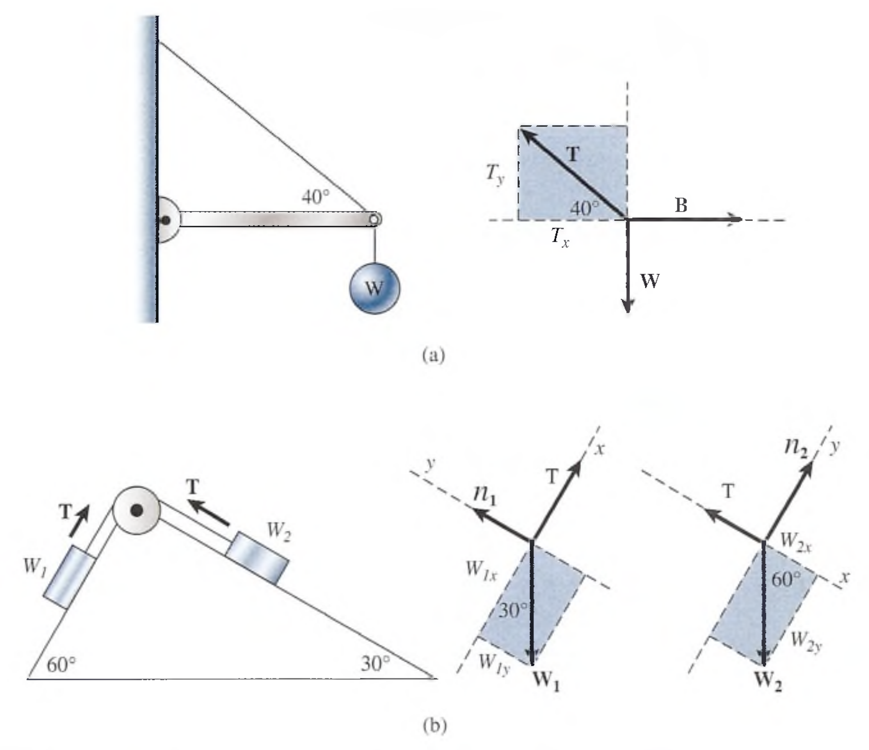


Figura 4.8 Ejemplos de diagramas de cuerpo libre. Note que las componentes de los vectores están rotuladas opuestas y adyacentes a los ángulos que se conocen.

Tal vez la parte más difícil en la construcción de diagramas de vectores es la visualización de fuerzas. Al trazar tales diagramas es útil imaginar que las fuerzas actúan sobre usted. Suponga que usted es el nudo de una cuerda, o el bloque situado sobre una mesa, y trate de determinar las fuerzas que actuarían sobre usted. En la figura 4.8 se presentan dos ejemplos más. Note que la fuerza ejercida por el soporte de la figura 4.8a se dirige hacia afuera y no hacia la pared. Esto se debe a que estamos interesados en las fuerzas que se ejercen *sobre* el extremo del soporte y no en las ejercidas *por* el extremo del soporte. Seleccionamos un punto en el extremo del soporte, donde están atadas las dos cuerdas. El peso de 60 N y la tensión, **T**, son fuerzas de acción ejercidas por las cuerdas en ese punto. Si el extremo del soporte no se mueve, estas fuerzas deben equilibrarse con una tercera fuerza, la que ejerce la pared (a través del soporte). Esta tercera fuerza **B**, que actúa en el extremo del soporte, no debe confundirse con la *fuerza de reacción* hacia adentro que actúa *sobre* la pared.

El segundo ejemplo (figura 4.8b) muestra también fuerzas de acción que actúan sobre dos bloques conectados por una cuerda ligera. Las fuerzas de fricción, que estudiaremos posteriormente, no se incluyen en estos diagramas. La tensión en la cuerda en cualquiera de sus lados se representa por **T**, y las fuerzas normales n_1 y n_2 son fuerzas perpendiculares ejercidas por el plano sobre los bloques. Si no existieran tales fuerzas, los bloques oscilarían juntos. (Observe la ubicación de los ejes en cada diagrama.)

4.6 Solución de problemas de equilibrio

En el capítulo 3 estudiamos un procedimiento para encontrar la resultante de varias fuerzas por un método rectangular. Un procedimiento similar se puede utilizar para sumar fuerzas que se hallan en equilibrio. En este caso, la primera condición para el equilibrio nos indica que la resultante es igual a cero, es decir

$$R_x = \sum F_x = 0 \qquad R_y = \sum F_y = 0 \tag{4.2}$$

Por tanto, tenemos dos ecuaciones que sirven para hallar fuerzas desconocidas.

Estrategia para resolver problemas

Equilibrio traslacional

1. Trace un bosquejo y anote las condiciones del problema.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre (véase la sección 4.5).
3. Encuentre todas las componentes x y y de las fuerzas, aunque incluyan factores desconocidos, tales como A cos 60° o B sen 60°. (Tal vez desee elaborar una tabla de fuerzas como se muestra en la tabla 4.1.)
4. Use la primera condición de equilibrio [ecuación (4.1)] para formar dos ecuaciones en términos de las fuerzas desconocidas.
5. Determine algebraicamente los factores desconocidos.

Tabla 4.1

Fuerza	θ_x	Componente x	Componente y
A	60°	$A_x = -A \cos 60°$	$A_y = A \text{ sen } 60°$
B	0°	$B_x = B$	$B_y = 0$
W	−90°	$W_x = 0$	$W_y = -100 \text{ N}$
		$\Sigma F_x = B - A \cos 60°$	$\Sigma F_y = A \text{ sen } 60° - 100 \text{ N}$

Ejemplo 4.2

Una pelota de 100 N suspendida por una cuerda A es jalada hacia un lado en forma horizontal mediante otra cuerda B y sostenida de tal manera que la cuerda A forma un ángulo de 30° con el muro vertical (véase la figura 4.9). Encuentre las tensiones en las cuerdas A y B.

Plan: Se sigue la estrategia para resolver problemas.

Solución:

1. Trace un bosquejo (figura 4.9a).
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre (figura 4.9b).
3. Determine las componentes de todas las fuerzas (tabla 4.1). Observe que en la figura A_x y W_y son negativas.
4. Ahora aplique la primera condición de equilibrio. La suma de fuerzas a lo largo del eje x es:

$$\sum F_x = B - A \cos 60° = 0$$

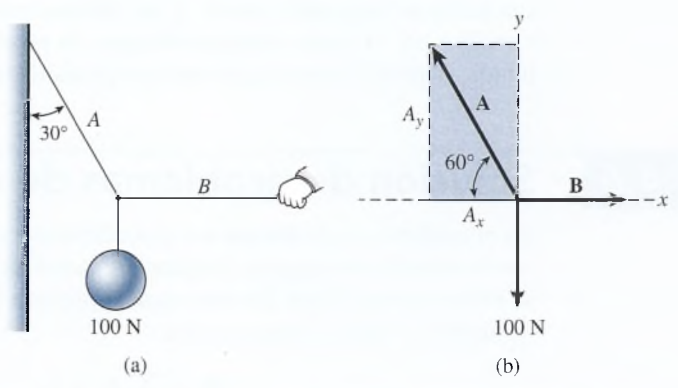


Figura 4.9 Las fuerzas que actúan en el nudo se representan en un diagrama de cuerpo libre.

de la cual se obtiene

$$B = A \cos 60° = 0.5A \qquad \textbf{(4.3)}$$

puesto que $\cos 60° = 0.5$. Resulta una segunda ecuación al sumar las componentes del eje y:

$$\sum F_y = A \text{ sen } 60° - 100 \text{ N} = 0$$

de donde

$$A \text{ sen } 60° = 100 \text{ N} \qquad \textbf{(4.4)}$$

5. Finalmente, se resuelve para las fuerzas desconocidas. A partir de la ecuación (4.4) y como sen 60° = 0.866, entonces

$$0.866A = 100 \text{ N}$$

o bien,

$$A = \frac{100 \text{ N}}{0.866} = 115 \text{ N}$$

Ahora que se conoce el valor de A, se despeja B de la ecuación (4.3) como sigue:

$$B = 0.5A = (0.5)(115 \text{ N})$$
$$= 57.5 \text{ N}$$

Ejemplo 4.3

Una pelota de 200 N cuelga de una cuerda unida a otras dos cuerdas, como se observa en la figura 4.10. Encuentre las tensiones en las cuerdas A, B y C.

Plan: Primero trazaremos un diagrama de cuerpo libre y luego aplicaremos la primera condición de equilibrio a fin de hallar las tensiones desconocidas de las cuerdas.

Solución: Con base en el bosquejo proporcionado se construye el diagrama de cuerpo libre (figura 4.10b). Las componentes x y y, calculadas a partir de la figura, se presentan en la tabla 4.2.

Al sumar las fuerzas a lo largo del eje x se obtiene:

$$\sum F_x = -A \cos 60° + B \cos 45° = 0$$

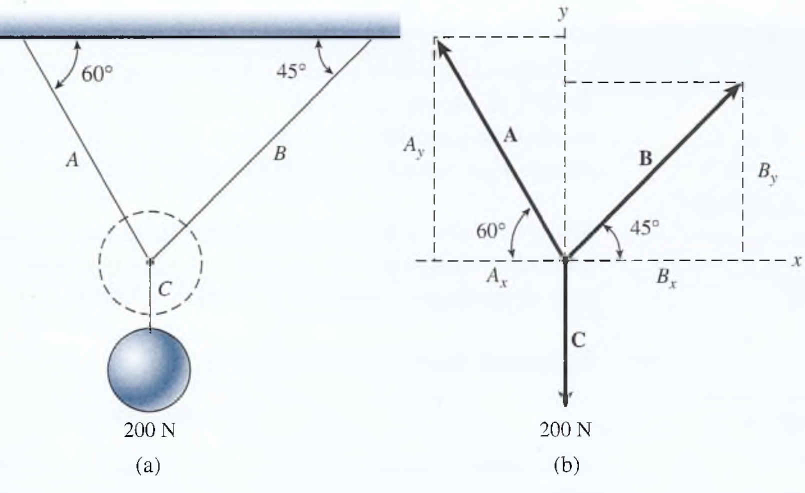


Figura 4.10

Tabla 4.2

Fuerza	ϕ_x	Componente x	Componente y
A	60°	$A_x = -A \cos 60°$	$A_y = A \text{ sen } 60°$
B	45°	$B_x = B \cos 45°$	$B_y = B \text{ sen } 45°$
C	90°	$C_x = 0$	$C_y = -200 \text{ N}$

que puede simplificarse por sustitución de funciones trigonométricas conocidas; o sea:

$$-0.5A + 0.707B = 0 \qquad \textbf{(4.5)}$$

Se necesita más información para resolver esta ecuación. Obtenemos una segunda ecuación sumando las fuerzas a lo largo del eje y, lo que resulta

$$0.866A + 0.707B = 200 \text{ N} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Ahora se resuelven simultáneamente las ecuaciones (4.5) y (4.6) para A y B mediante el proceso de sustitución. Si se despeja A de la ecuación (4.5) se obtiene

$$A = \frac{0.707B}{0.5} \quad \text{o} \quad A = 1.414B \qquad \textbf{(4.7)}$$

Ahora se sustituye esta igualdad en la ecuación (4.6) y se obtiene

$$0.866\,(1.414B) + 0.707B = 200 \text{ N}$$

que se utiliza para despejar B como sigue:

$$1.225B + 0.707B = 200 \text{ N}$$
$$1.93B = 200 \text{ N}$$
$$B = \frac{200 \text{ N}}{1.93} = 104 \text{ N}$$

Se puede calcular la tensión A sustituyendo $B = 104$ N en la ecuación (4.7):

$$A = 1.414B = 1.414(104 \text{ N}) \quad \text{o} \quad A = 147 \text{ N}$$

Desde luego, la tensión en la cuerda C es 200 N, ya que debe ser igual al peso.

Ejemplo 4.4 Un bloque de 200 N descansa sobre un plano inclinado sin fricción, que tiene una pendiente de 30°. El bloque está atado a una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción colocada en el extremo superior del plano y va atada a un segundo bloque. ¿Cuál es el peso del segundo bloque si el sistema se encuentra en equilibrio?

Plan: Se elabora el bosquejo del problema y se traza el diagrama de cuerpo libre de cada bloque (véase la figura 4.11). Luego se aplica la primera condición de equilibrio a cada diagrama para determinar el valor del peso suspendido W_2.

Solución: Para el peso suspendido, $\Sigma F_y = 0$ da por resultado

$$T - W_2 = 0 \quad \text{o} \quad T = W_2$$

Puesto que la cuerda es continua y el sistema no está afectado por la fricción, la tensión aplicada para el bloque de 200 N (véase la figura 4.11b) también debe ser igual a W_2.

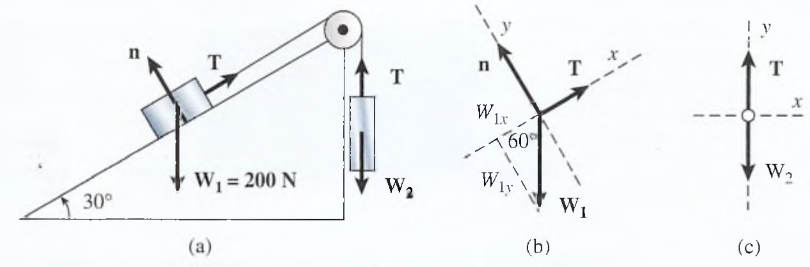


Figura 4.11 Se traza un diagrama de cuerpo libre para cada bloque del problema.

Tabla 4.3

Fuerza	θ_x	Componente x	Componente y
T	0°	$T_x = T = W_2$	$T_y = 0$
n	90°	$n_x = 0$	$n_y = n$
$\mathbf{W}_1$	60°	$W_{1x} = -(200 \text{ N}) \cos 60°$	$W_{1y} = -(200 \text{ N}) \text{ sen } 60°$

Considerando el diagrama para el bloque que se halla sobre el plano inclinado, determinamos las componentes de cada fuerza ejercida en él como se muestra en la tabla 4.3.

Al aplicar la primera condición de equilibrio se obtiene

$$\sum F_x = 0: \qquad T - (200 \text{ N}) \cos 60° = 0 \tag{4.8}$$

$$\sum F_y = 0: \qquad n - (200 \text{ N}) \text{ sen } 60° = 0 \tag{4.9}$$

De la ecuación (4.8) obtenemos

$$T = (200 \text{ N}) \cos 60° = 100 \text{ N}$$

y puesto que la tensión T en la cuerda es igual al peso W_2 se dice que se necesita un peso de 100 N para mantener el equilibrio.

La fuerza normal que ejerce el plano sobre el bloque de 200 N se determina a partir de la ecuación (4.9), aunque este cálculo no fue necesario para determinar el peso W_2.

$$n = (200 \text{ N}) \text{ sen } 60°$$
$$= 173 \text{ lb}$$

4.7 Fricción

Siempre que un cuerpo se mueve estando en contacto con otro objeto, existen ***fuerzas de fricción*** que se oponen al movimiento relativo. Estas fuerzas se deben a que una superficie se adhiere contra la otra y a que encajan entre sí las irregularidades de las superficies de rozamiento. Es precisamente esta fricción la que mantiene a un clavo dentro de una tabla, la que nos permite caminar y la que hace que los frenos de un automóvil cumplan su función. En todos estos casos la fricción produce un efecto deseable.

Sin embargo, en muchas otras circunstancias es indispensable minimizar la fricción. Por ejemplo, provoca que se requiera mayor trabajo para operar maquinaria, causa desgaste y genera calor, lo que a menudo ocasiona otros perjuicios. Los automóviles y los aviones se diseñan con formas aerodinámicas para reducir la fricción con el aire, ya que ésta es muy grande a gran rapidez.

Siempre que se desliza una superficie sobre otra, la fuerza de fricción que ejercen los cuerpos entre sí es paralela o tangente a ambas superficies y actúa de tal modo que se opone al movimiento relativo de las superficies. Es importante observar que estas fuerzas existen no sólo cuando hay un movimiento relativo, sino también cuando uno de los cuerpos tan sólo *tiende* a deslizarse sobre el otro.

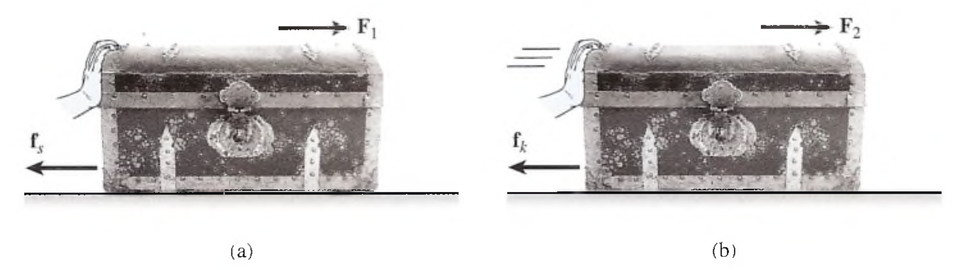


Figura 4.12 (a) En fricción estática el movimiento es inminente. (b) En ficción cinética las dos superficies están en movimiento relativo. (*Foto de Hemera, Inc.*)

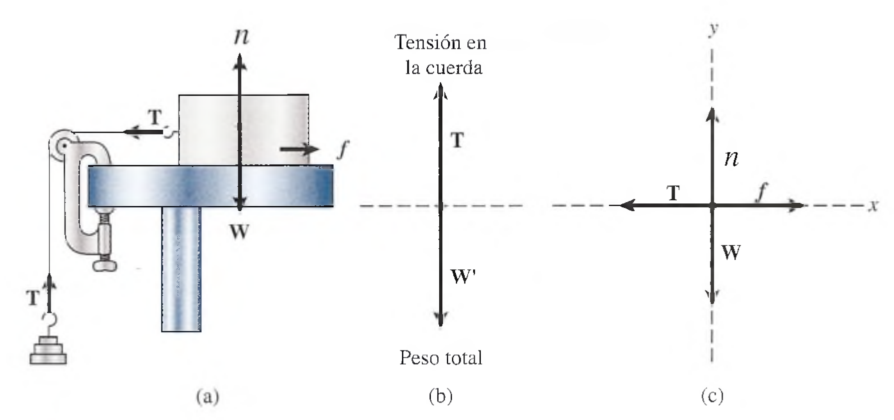


Figura 4.13 Experimento para determinar la fuerza de fricción.

Suponga que se ejerce una fuerza sobre un baúl, como se muestra en la figura 4.12. Al principio el bloque no se mueve debido a la acción de una fuerza llamada *fuerza de* ***fricción estática*** *(f_s)*, pero a medida que aumenta la fuerza aplicada llega el momento en que el bloque se mueve. La fuerza de fricción ejercida por la superficie horizontal mientras se mueve el bloque se denomina *fuerza de* ***fricción cinética*** *(f_k)*.

Las leyes que rigen a las fuerzas de fricción se determinan experimentalmente en el laboratorio utilizando un aparato similar al que se ilustra en la figura 4.13a. Considere una caja de peso *W* colocada sobre una mesa horizontal y atada con una cuerda que pasa por una polea, ligera y sin fricción; además, en el otro extremo de la cuerda se cuelgan varias pesas. Todas las fuerzas que actúan sobre la caja y las pesas se presentan en sus diagramas de cuerpo libre correspondientes (figura 4.13b y c).

Consideremos que el sistema está en equilibrio, lo que implica que la caja esté en reposo o se mueva con velocidad constante; en cualquier caso se puede aplicar la primera condición de equilibrio. Analice el diagrama de fuerzas como se muestra en la figura 4.13c.

$$\sum F_x = 0: \quad f - T = 0 \quad \text{o} \quad f = T$$

$$\sum F_y = 0: \quad n - W = 0 \quad \text{o} \quad n = W$$

Por tanto, la fuerza de fricción es de igual magnitud que la tensión en la cuerda y la fuerza normal ejercida por la mesa sobre la caja es igual al peso de esta última. Observe que la tensión en la cuerda se determina por el peso de las pesas sumado al peso de su soporte.

Suponga que empezamos colocando poco a poco pesas en el soporte para aumentar gradualmente la tensión de la cuerda. Al incrementar la tensión, la fuerza de fricción estática, que es de igual magnitud pero de dirección opuesta, también aumenta. Si **T** aumenta lo suficiente, la caja empieza a moverse, lo que significa que **T** ha sobrepasado la *máxima* fuerza de fricción estática $f_{s,\text{máx}}$. Por ello, aunque la fuerza de fricción estática f_s cambiará de acuerdo con los valores de la tensión de la cuerda, existe un valor máximo único $f_{s,\text{máx}}$.

Para continuar el experimento, suponga que agregamos pesas a la caja, con lo que aumentaría la fuerza normal (n) entre la caja y la mesa. La fuerza normal ahora será

$$n = W + \text{pesas añadidas}$$

Si se repite el experimento anterior, veremos que será necesario un nuevo valor de **T**, proporcionalmente mayor, para superar la máxima fuerza de fricción estática. Es decir, al duplicar la fuerza normal entre las dos superficies, la máxima fuerza de fricción estática que debe contrarrestarse se duplica también. Si n se triplica, f_s se triplica también, y lo mismo ocurre para los demás factores. Por tanto, puede decirse que la máxima fuerza de fricción estática es directamente proporcional a la fuerza normal entre las dos superficies. Podemos escribir esta proporcionalidad como

$$f_{s,\text{máx}} \propto n$$

La fuerza de fricción estática siempre es menor o igual que la fuerza máxima:

$$f_s \leq \mu_s n \tag{4.10}$$

A menos que se indique de otra forma, la ecuación (4.10) se escribe como una igualdad y se supone que se refiere al máximo valor de fricción estática. El símbolo μ_s es una constante de proporcionalidad llamada ***coeficiente de fricción estática.*** Puesto que μ_s es una razón constante entre dos fuerzas, se trata de una cantidad sin dimensiones.

En el experimento anterior se debe observar que una vez que se sobrepasa el máximo valor de fricción estática, la caja aumenta su rapidez, es decir, se acelera, hasta topar con la polea. Esto significa que bastaría un valor menor de **T** para mantener la caja en movimiento con rapidez constante. Por tanto, la fuerza de fricción cinética es menor que el máximo valor de f_s para las dos superficies. En otras palabras, se requiere de más fuerza para que el bloque empiece a moverse que para mantenerlo en movimiento a rapidez constante. En este último caso también se satisface la primera condición de equilibrio; así, el mismo razonamiento que nos permitió derivar la ecuación (4.10) para la fricción estática, nos lleva a la siguiente proporcionalidad para la fricción cinética:

$$f_k = \mu_k n \tag{4.11}$$

donde μ_k es una constante de proporcionalidad llamada ***coeficiente de fricción cinética.***

Se puede demostrar que los coeficientes de proporcionalidad μ_s y μ_k dependen de la rugosidad de las superficies pero no del área de contacto entre ellas. Al analizar las ecuaciones anteriores se observa que μ depende únicamente de la fuerza de fricción f y de la fuerza normal n entre las superficies. Se debe aceptar, desde luego, que las ecuaciones (4.10) y (4.11) no son fundamentalmente rigurosas, como otras ecuaciones físicas. Gran número de variables interfieren con la aplicación general de estas fórmulas. Por ejemplo, nadie que tenga experiencia en carreras de automóviles puede creer que la fuerza de fricción sea *completamente* independiente del área de contacto. Sin embargo, las ecuaciones son herramientas útiles para determinar las fuerzas de resistencia en casos específicos.

En la tabla 4.4 se muestran algunos valores representativos de los coeficientes de fricción estática y cinética entre diferentes tipos de superficies. Estos valores son aproximados y dependen de las condiciones de las superficies. No obstante, para nuestros propósitos, supondremos que todos ellos tienen coeficientes de hasta tres cifras significativas.

Tabla 4.4

Coeficientes aproximados de fricción

Material	μ_s	μ_k
Madera sobre madera	0.7	0.4
Acero sobre acero	0.15	0.09
Metal sobre cuero	0.6	0.5
Madera sobre cuero	0.5	0.4
Caucho sobre concreto seco	0.9	0.7
Caucho sobre concreto mojado	0.7	0.57

Estrategia para resolver problemas

Consideraciones para problemas en los que interviene la fricción

1. Las fuerzas de fricción son paralelas a las superficies y se oponen directamente al movimiento o al movimiento inminente.
2. La máxima fuerza de fricción estática es mayor que la fuerza de fricción cinética para los mismos materiales.
3. Al dibujar diagramas de cuerpo libre, en general es preferible elegir el eje x siguiendo la dirección del movimiento y el eje y normal a la dirección del movimiento o del movimiento inminente.
4. La primera condición de equilibrio puede aplicarse para formar dos ecuaciones que representen las fuerzas a lo largo del plano del movimiento y las que son perpendiculares a él.
5. Las relaciones $f_s = \mu_s n$ y $f_k = \mu_k n$ se aplican para determinar la cantidad deseada.
6. Jamás debe darse por hecho que la ***fuerza normal*** es igual al peso. Se debe determinar su magnitud sumando las fuerzas a lo largo del eje normal.

Ejemplo 4.5

Un trineo de 50 N descansa sobre una superficie horizontal y se requiere un tirón horizontal de 10 N para lograr que empiece a moverse. Después de que comienza el movimiento basta una fuerza de 5 N para que el trineo siga moviéndose con una velocidad constante. Encuentre los coeficientes de fricción estática y cinética.

Plan: Las palabras clave que deben captarse son *empiece a moverse* y *siga moviéndose con una velocidad constante*. Las primeras implican *fricción estática*, en tanto que las últimas se refieren a la *fricción cinética*. En cada caso existe una condición de equilibrio y es posible hallar los valores para los valores de la fuerza normal y de la de fricción, que son necesarios para determinar los coeficientes.

Solución: Para cada caso hemos impuesto los diagramas de cuerpo libre sobre los bosquejos, como aparece en las figuras 4.14a y b. Al aplicar la primera condición de equilibrio a la figura 4.14a se obtiene

$$\sum F_x = 0: \qquad 10\text{ N} - f_s = 0 \qquad \text{o} \qquad f_s = 10\text{ N}$$

$$\sum F_y = 0: \qquad n - 50\text{ N} = 0 \qquad \text{o} \qquad n = 50\text{ N}$$

Podemos hallar el coeficiente de fricción estática a partir de la ecuación (4.10)

$$\mu_s = \frac{f_s}{n} = \frac{10\text{ N}}{50\text{ N}}; \qquad \mu_s = 0.20$$

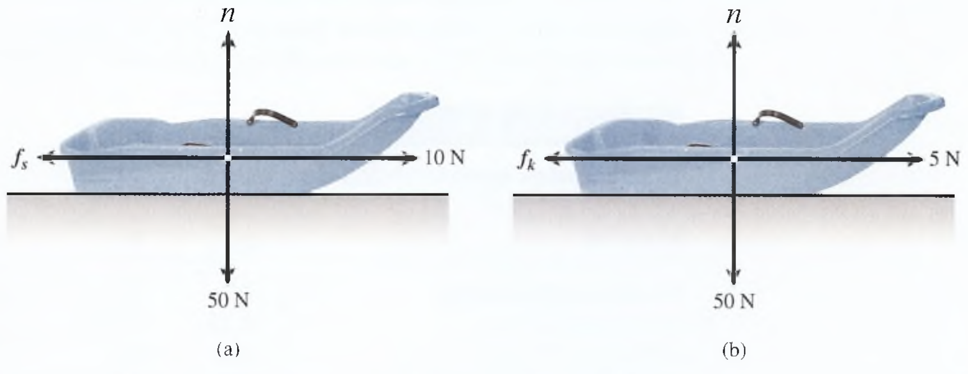


Figura 4.14 (a) Se precisa una fuerza de 10 N para contrarrestar la máxima fuerza de fricción estática. (b) Se necesita una fuerza de sólo 5 N para mover el trineo con rapidez constante. (*Fotografía de Hemera Inc.*)

La fuerza que contrarresta la fricción cinética es de sólo 5 N. Por tanto, la suma de las fuerzas a lo largo del eje x es

$$5\text{ N} - f_k = 0 \qquad \text{o} \qquad f_k = 5\text{ N}$$

La fuerza normal sigue siendo de 50 N y, por ende,

$$\mu_k = \frac{f_k}{n} = \frac{5\text{ N}}{50\text{ N}}; \qquad \mu_k = 0.10$$

Ejemplo 4.6 ¿Qué fuerza **T**, en un ángulo de 30° por encima de la horizontal, se requiere para arrastrar un arcón de 40 lb hacia la derecha a rapidez constante, si $\mu_k = 0.2$?

Plan: Lo primero es hacer un bosquejo del problema y luego construir el diagrama de cuerpo libre, como el de la figura 4.15. Después hay que aplicar la primera condición de equilibrio para hallar la fuerza **T**.

Solución: El movimiento es a rapidez constante, de modo que $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$

$$\sum F_x = 0 \qquad T_x - f_k = 0 \tag{4.12}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad n + T_y - 40\text{ lb} = 0$$

La última ecuación muestra que la fuerza normal es

$$n = 40\text{ lb} - T_y \tag{4.13}$$

Note que la fuerza normal disminuye por la componente y de **T**. Sustituyendo $f_k = \mu_k n$ en la ecuación (4.12) se obtiene

$$T_x - \mu_k n = 0$$

Pero $n = 40\text{ lb} - T_y$ con base en la ecuación (4.13); entonces

$$T_x - \mu_k(40\text{ lb} - T_y) = 0 \tag{4.14}$$

A partir del diagrama de cuerpo libre se observa que

$$T_x = T\cos 30° = 0.866T$$

y que

$$T_y = T\text{ sen }30° = 0.5T$$

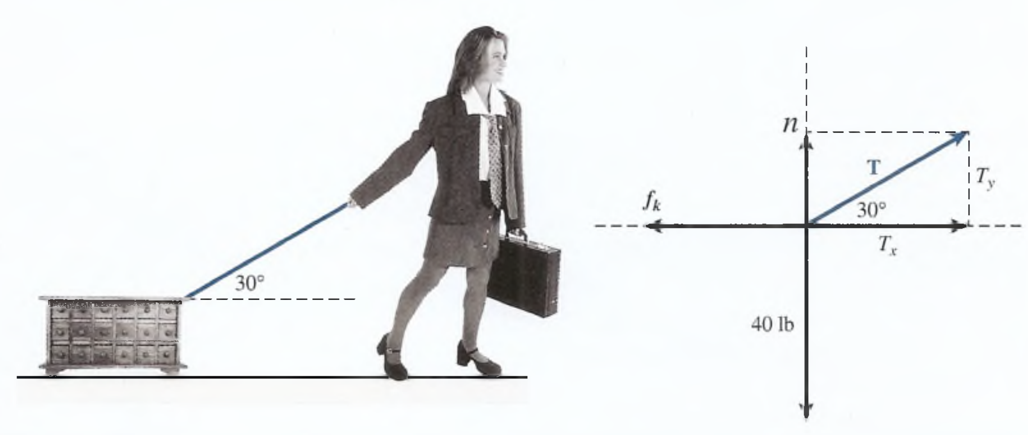


Figura 4.15 La fuerza **T** en un ángulo *sobre* la horizontal reduce la fuerza normal necesaria para el equilibrio, lo que ocasiona que la fuerza de fricción sea menor. (*Fotografías de Hemera Inc.*)

Por tanto, si recordamos que $\mu_k = 0.2$, escribimos la ecuación (4.14) como

$$0.866T - (0.2)(40 \text{ lb} - 0.5T) = 0$$

de donde se puede obtener el valor de T como sigue:

$$0.866T - 8 \text{ lb} + 0.1T = 0$$
$$0.966T - 8 \text{ lb} = 0$$
$$0.966T = 8 \text{ lb}$$
$$T = \frac{8 \text{ lb}}{0.966} = 8.3 \text{ lb}$$

Por consiguiente, se requiere una fuerza de 8.3 lb para arrastrar el arcón con rapidez constante cuando la cuerda forma un ángulo de 30° sobre la horizontal.

Ejemplo 4.7

Un bloque de concreto de 120 N está en reposo en un plano inclinado a 30°. Si $\mu_k = 0.5$, ¿qué fuerza **P** paralela al plano y dirigida hacia arriba de éste hará que el bloque se mueva (a) hacia arriba del plano con rapidez constante y (b) hacia abajo del plano con rapidez constante?

Plan: Primero se hace el bosquejo del problema (figura 4.16a) y luego se traza un diagrama de cuerpo libre para ambos casos. Para el movimiento hacia arriba se dibuja la figura 4.16b y para el movimiento hacia abajo se elabora la figura 4.16c. Advierta que la fuerza de fricción se opone al movimiento en los dos casos y que hemos elegido el eje x a lo largo del plano. Para ser congruente con el uso de los signos, consideramos positivas las fuerzas que se dirigen *hacia arriba* del plano.

Solución (a): Aplicando la primera condición de equilibrio se obtiene

$$\sum F_x = 0 \qquad P - f_k - W_x = 0 \qquad \textbf{(4.15)}$$
$$\sum F_y = 0 \qquad n - W_y = 0 \qquad \textbf{(4.16)}$$

A partir de la figura, las componentes x y y del peso son

$$W_x = (120 \text{ N}) \cos 60° = 60.0 \text{ N}$$
$$W_y = (120 \text{ N}) \text{ sen } 60° = 104 \text{ N}$$

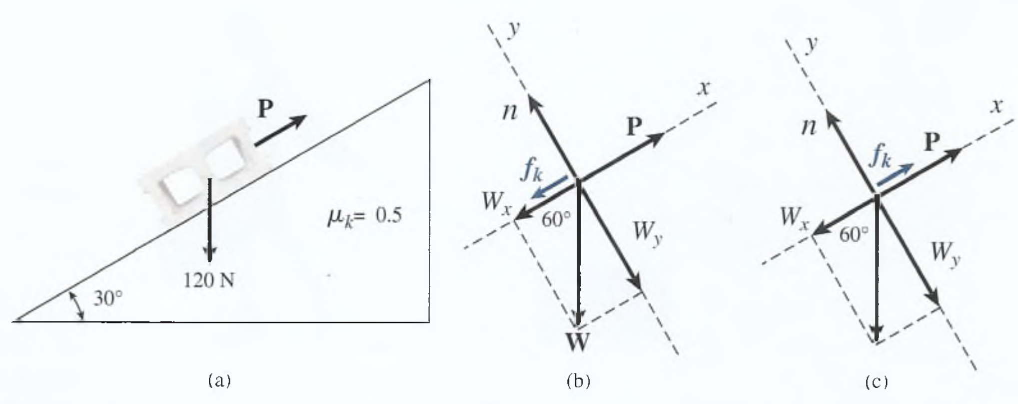


Figura 4.16 (a) Fricción en un plano inclinado. (b) Movimiento *hacia arriba* del plano. (c) Movimiento *hacia abajo* del plano. (*Fotografías de Hemera Inc.*)

La sustitución de W_y en la ecuación (4.16) nos permite obtener el valor de la fuerza normal, n.

$$n - W_y = n - 104 \text{ N} = 0 \qquad \text{o} \qquad n = 104 \text{ N}$$

Con base en la ecuación (4.15), ahora resolvemos para obtener el empujón P, lo que resulta

$$P = f_k + W_x$$

Pero $f_k = \mu_k n$, de modo que

$$P = \mu_k n + W_x$$

Ahora podemos determinar P sustituyendo $\mu_k = 0.5$, $n = 104$ N y $W_x = 60.0$ N:

$$P = (0.5)(104 \text{ N}) + 60 \text{ N}$$

$$P = 52.0 \text{ N} + 60.0 \text{ N} \qquad \text{o} \qquad P = 112 \text{ N}$$

Observe que el empuje P hacia arriba del plano debe en este caso contrarrestar tanto la fuerza de fricción de 52 N como la componente de 60 N del peso del bloque hacia abajo del plano.

Solución (b): En el segundo caso, el empuje P es necesario para retrasar el natural movimiento hacia abajo del bloque hasta que su rapidez permanezca constante. La fuerza de fricción se dirige ahora *hacia arriba* del plano inclinado, en la misma dirección que el empuje P. La fuerza normal y las componentes del peso no cambiarán. Por ende, al sumar las fuerzas a lo largo del eje x se obtiene

$$\sum F_x = 0; \qquad P + f_k - W_x = 0$$

Ahora podemos encontrar el valor de P y sustituir los valores de f_k y W_x

$$P = W_x - f_k = 60 \text{ N} - 52 \text{ N}$$

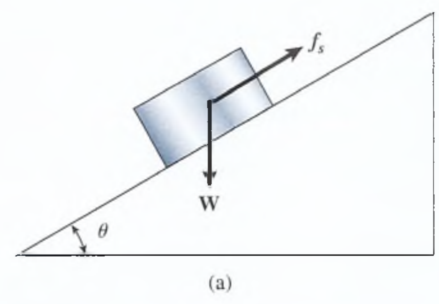
$$P = 8.00 \text{ N}$$

La fuerza de 8.00 N y la fuerza de fricción de 52.0 N, ambas dirigidas hacia arriba del plano equilibran exactamente la componente de 60 N del peso dirigido hacia abajo del plano.

Ejemplo 4.8

¿Cuál es el ángulo máximo θ de la pendiente de un plano inclinado que permite que un bloque de peso W no se deslice hacia abajo a lo largo del plano?

Plan: El ángulo máximo de la pendiente será aquel para el que la componente del peso dirigido hacia abajo del plano sea suficiente para contrarrestar la máxima fuerza de fricción estática. Como siempre, nuestro enfoque comienza por trazar un bosquejo y luego un diagrama de cuerpo libre (figura 4.17). Luego al aplicar las condiciones del equilibrio, podemos aplicar la trigonometría para hallar el ángulo de inclinación.



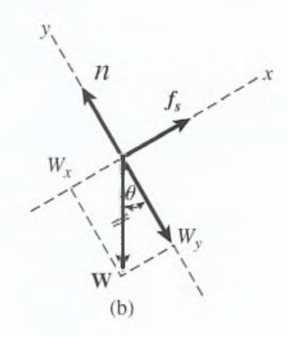


Figura 4.17 El ángulo de reposo o limitante.

Solución: Si se aplica la primera condición de equilibrio a la figura 4.17b se obtiene

$$\sum F_x = 0: \quad f_s - W_x = 0 \quad \text{o} \quad f_s = W_x$$
$$\sum F_y = 0: \quad n - W_y = 0 \quad \text{o} \quad n_s = W_y$$

A partir de la figura 4.17b notamos que el ángulo θ de la pendiente es el ángulo adyacente al eje y negativo, lo que hace que W_x sea el lado opuesto y W_x el otro lado adyacente. En este caso

$$\tan\theta = \frac{W_x}{W_y}$$

Pero ya hemos visto que $W_x = f_k$ y que $W_y = n$, de modo que

$$\tan\theta = \frac{W_x}{W_y} = \frac{f_s}{n}$$

Por último, recordamos que la razón de f_s a n define el coeficiente de fricción estática; por tanto

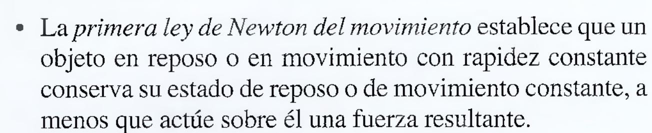
$$\tan\theta = \mu_s$$

Así pues, un bloque, independientemente de su peso, permanecerá en reposo sobre un plano inclinado a menos que la tan θ sea igual o exceda a μ_s. En este caso, el ángulo θ se llama el *ángulo limitante* o ***ángulo de reposo.***

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo hemos definido objetos que se encuentran en reposo o en movimiento con rapidez constante para estar en equilibrio. Mediante diagramas de vectores y las leyes de Newton, hemos visto que es posible determinar fuerzas desconocidas para sistemas que están en equilibrio. En los párrafos siguientes se resumen los conceptos más importantes que es necesario recordar:



- La *primera ley de Newton del movimiento* establece que un objeto en reposo o en movimiento con rapidez constante conserva su estado de reposo o de movimiento constante, a menos que actúe sobre él una fuerza resultante.
- La *segunda ley de Newton del movimiento* postula que la aceleración **a** de un objeto en la dirección de la fuerza resultante **F** es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa, *m*.
- La *tercera ley de Newton del movimiento* establece que toda acción debe producir una reacción igual y opuesta. Las fuerzas de acción y reacción no actúan sobre el mismo cuerpo.
- Diagramas de cuerpo libre: a partir de las condiciones del problema, se traza un bosquejo ordenado y en él se indican todas las cantidades conocidas. Luego se construye un diagrama de fuerzas, donde se escriben todas las fuerzas participantes y sus componentes. Toda la información proporcionada, como la de la figura 4.18, debe formar parte del diagrama.
- Equilibrio traslacional: un cuerpo en equilibrio traslacional se caracteriza porque ninguna fuerza resultante actúa sobre él. En este tipo de casos, la suma de todas las componentes de x es cero, y también la suma de todas las componentes de y es cero. Esto se conoce como la primera condición de equilibrio y se escribe

$$R_x = \sum F_x = 0 \qquad R_y = \sum F_y = 0$$

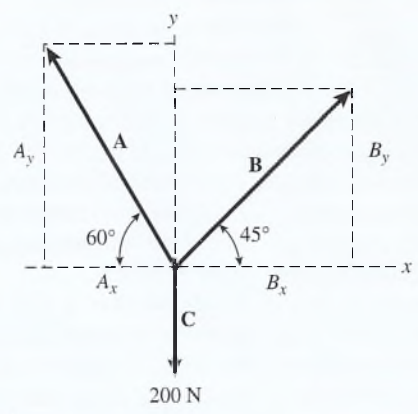


Figura 4.18

- Al aplicar estas condiciones a la figura 4.18, por ejemplo, obtenemos dos ecuaciones con dos variables desconocidas:

$$B \cos 45° - A \cos 60° = 0$$
$$B \text{ sen } 45° + A \text{ sen } 60° - 200 \text{ N} = 0$$

Estas ecuaciones se resuelven para hallar los valores de A y de B.

- Hay *fricción estática* entre dos superficies cuando el movimiento es inminente. La *fricción cinética* se presenta cuando las dos superficies se encuentran en movimiento relativo. La fuerza de fricción estática es menor o igual que la *máxima* fuerza de fricción estática, que es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de fricción cinética también es proporcional a la fuerza normal.

$$f_s \leq \mu_s n \qquad f_k = \mu_s n$$

- Las fuerzas de fricción suelen considerarse en problemas de equilibrio, pero es arduo cuantificarlas y, en la práctica, hay numerosos factores externos que pueden interferir con su aplicación estricta.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

4.1. Un truco consiste en colocar una moneda sobre una tarjeta y la tarjeta encima de un vaso. El borde de la tarjeta se golpea enérgicamente con el dedo índice, haciendo que la tarjeta salga despedida del borde del vaso y que la moneda caiga dentro de éste. Explique qué ley se ilustra con este truco.

4.2. Cuando a un martillo se le afloja la cabeza, la dificultad puede resolverse sosteniendo verticalmente el martillo y golpeando la base del mango contra el piso. Explique qué ley se ilustra en esta situación.

4.3. Explique cómo interviene la tercera ley de Newton en las actividades siguientes: (a) caminata, (b) remo, (c) lanzamiento de cohetes y (d) paracaidismo.

4.4. ¿Es posible que un cuerpo en movimiento esté en equilibrio? Cite varios ejemplos.

4.5. Según la tercera ley de Newton, a toda fuerza corresponde una fuerza de reacción igual, pero en sentido opuesto. Por tanto, el concepto de una fuerza resultante no equilibrada tiene que ser sólo una ilusión que no tolera un análisis riguroso. ¿Está de acuerdo con esta afirmación? Comente las razones en las que fundamenta su respuesta.

4.6. Un ladrillo está suspendido del techo por medio de una cuerda ligera. Una segunda cuerda, idéntica a la anterior, se ata a la parte inferior del ladrillo y cuelga a una altura que resulte accesible para un estudiante. Cuando el estudiante tira lentamente de la cuerda inferior, la superior se rompe; en cambio, si le propina un tirón brusco a la cuerda inferior, esta última es la que se rompe. Explique la situación en cada caso.

4.7. Un largo cable de acero está tendido entre dos edificios. Muestre usted, por medio de diagramas y explicaciones, por qué no es posible dejar el cable tan tenso que quede tan perfectamente horizontal que no haya pandeo alguno en su punto medio.

4.8. Hemos visto que siempre es conveniente elegir los ejes x y y de manera que el mayor número posible de fuerzas queden especificadas en forma total a lo largo de alguno de ellos. Supongamos que no existieran dos fuerzas perpendiculares entre sí. ¿Aun en ese caso seguirá siendo conveniente hacer una rotación de los ejes para alinear una de las fuerzas desconocidas con uno de dichos ejes, en lugar de alinear con él alguna de las fuerzas conocidas? Ensaye este método aplicándolo a cualquiera de los ejemplos que aparecen en el libro.

4.9. Comente algunas aplicaciones benéficas de la fuerza de fricción.

4.10. ¿Por qué hablamos de una *máxima* fuerza de fricción estática? ¿Por qué no se habla de una máxima fuerza de fricción cinética?

4.11. ¿Por qué resulta más fácil tirar de un trineo en un ángulo determinado, que empujarlo en ese mismo ángulo? Trace diagramas de cuerpo libre para demostrar cuál sería la fuerza normal en cada caso.

4.12. ¿La fuerza normal que actúa sobre un cuerpo es siempre igual al peso de éste?

4.13. Al caminar sobre un estanque congelado, ¿es más conveniente dar pasos cortos o largos? ¿Por qué? Si el hielo careciera por completo de fricción, ¿sería posible que la persona saliera del estanque caminando erguida? Explique su respuesta.

Problemas

Nota: En todos los problemas que presentamos al final de este capítulo se considera que el peso de las viguetas o vigas rígidas es despreciable. Se supone también que todas las fuerzas son de tipo concurrente.

Sección 4.5 Diagramas de cuerpo libre

4.1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre correspondiente a las situaciones ilustradas en la figura 4.19a y b. Descubra un punto donde actúen las fuerzas importantes y represente cada fuerza como un vector.

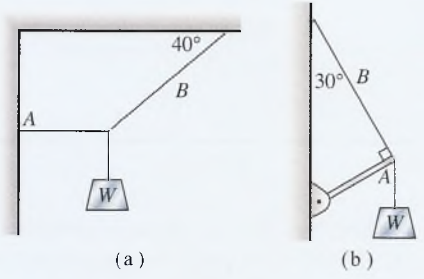


Figura 4.19

Calcule el ángulo de referencia y marque las componentes.

4.2. Estudie cada una de las fuerzas que actúan en el extremo de la viga ligera de la figura 4.20. Dibuje el diagrama de cuerpo libre apropiado.

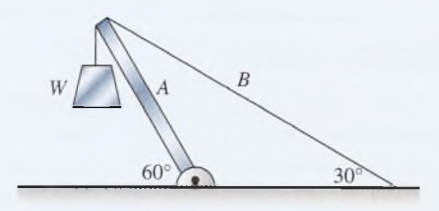


Figura 4.20

Sección 4.6 Resolución de problemas de equilibrio

4.3. Tres ladrillos idénticos están atados entre sí por medio de cuerdas y penden de una balanza que marca en total 24 N. ¿Cuál es la tensión de la cuerda que soporta al ladrillo inferior? ¿Cuál es la tensión en la cuerda que se encuentra entre el ladrillo de en medio y el superior? Resp. 8 N, 16 N

4.4. Una sola cadena sostiene una polea que pesa 40 N. Entonces se conectan dos pesas idénticas de 80 N con una cuerda que pasa por la polea. ¿Cuál es la tensión en la cadena que sostiene todo el conjunto? ¿Cuál es la tensión en cada una de las cuerdas?

4.5. Si el peso del bloque de la figura 4.19a es de 80 N, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas A y B? Resp. $A = 95.3$ N, $B = 124$ N

4.6. Si la cuerda B de la figura 4.19a se rompe con tensiones mayores de 200 lb, ¿cuál es el máximo peso W que puede soportar?

4.7. Si $W = 600$ N en la figura 4.19b, ¿cuál es la fuerza que ejerce la cuerda sobre el extremo de la vigueta A? ¿Cuál es la tensión en la cuerda B? Resp. $A = 300$ N, $B = 520$ N

4.8. Si la cuerda B de la figura 4.19a se rompe cuando su tensión es mayor de 400 N, ¿cuál es el peso máximo W?

4.9. ¿Cuál es el peso máximo W en el caso de la figura 4.19b si la cuerda sólo puede soportar una tensión máxima de 800 N? Resp. 924 N

4.10. Un bloque de 70 N reposa sobre un plano inclinado a 35°. Calcule la fuerza normal y halle la fuerza de fricción por la que el bloque no resbala.

4.11. Un cable está tendido sobre dos postes colocados con una separación de 10 m. A la mitad del cable se cuelga un letrero que provoca un pandeo, por lo cual el cable desciende verticalmente una distancia de 50 cm. Si la tensión en cada segmento del cable es de 2000 N, ¿cuál es el peso del letrero? Resp. 398 N

4.12. Un semáforo de 80 N cuelga del punto medio de un cable de 30 m tendido entre dos postes. Halle la tensión en cada segmento del cable si éste tiene un pandeo que lo hace descender una distancia vertical de 1 m.

***4.13.** Los extremos de tres vigas de 8 ft están clavados unos con otros, formando así un trípode cuyo vértice se encuentra a una altura de 6 ft sobre el suelo. ¿Cuál es la compresión que se produce en cada una de esas vigas cuando un peso de 100 lb se suspende de dicho vértice? Resp. 44.4 lb

4.14. Un cuadro de 20 N se cuelga de un clavo, como indica la figura 4.21, de manera que las cuerdas que lo sostienen forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda?

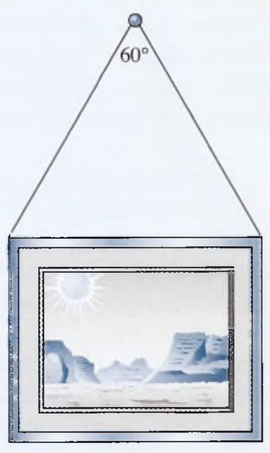


Figura 4.21

Sección 4.7 Fricción

4.15. Una fuerza horizontal de 40 N es apenas suficiente para poner en marcha un trineo vacío de 600 N sobre nieve compacta. Después de empezar el movimiento se requieren tan sólo 10 N para mantener el trineo a rapidez constante. Halle los coeficientes de fricción estática y cinética. Resp. 0.0667, 0.0167

4.16. Supongamos que en el trineo descrito en el problema anterior se colocaran 200 N de provisiones. ¿Cuál sería la nueva fuerza necesaria para arrastrarlo a rapidez constante?

4.17. Supongamos ciertas superficies en las que $\mu_s = 0.7$ y $\mu_k = 0.4$. ¿Qué fuerza horizontal se requiere para que un bloque de 50 N empiece a deslizarse sobre un piso de madera? ¿Qué fuerza se necesita para moverlo a rapidez constante? Resp. 35 N, 20 N

4.18. Un estibador se ha dado cuenta de que se requiere una fuerza horizontal de 60 lb para arrastrar una caja de 150 lb con rapidez constante sobre una plataforma de carga. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?

4.19. El estibador del problema 4.18 se percata de que una caja más pequeña del mismo material puede ser arrastrada con rapidez constante con una fuerza horizontal de sólo 40 lb. ¿Cuál es el peso de esta caja? Resp. 100 lb

4.20. Un bloque de acero que pesa 240 N descansa sobre una viga de acero bien nivelada. ¿Qué fuerza horizontal logrará mover el bloque a rapidez constante si el coeficiente de fricción cinética es 0.12?

4.21. Una caja de herramientas de 60 N es arrastrada horizontalmente con una rapidez constante por medio de una cuerda que forma un ángulo de 35° con el piso. La tensión registrada en la cuerda es de 40 N. Calcule las magnitudes de las fuerzas de fricción y normal. Resp. 32.8 N, 37.1 N

4.22. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética en el ejemplo del problema 4.21?

***4.23.** El coeficiente de fricción estática que corresponde a la madera sobre madera es de 0.7. ¿Cuál es el ángulo máximo que puede adoptar un plano inclinado de madera para que un bloque, también de madera, permanezca en reposo sobre el plano? Resp. 35°

***4.24.** Un techo tiene una pendiente con un ángulo de 40°. ¿Cuál debe ser el coeficiente máximo de fricción estática entre la suela de un zapato y ese techo para evitar que una persona resbale?

*4.25. Se empuja un trineo de 200 N sobre una superficie horizontal a rapidez constante, por una fuerza de 50 N cuya dirección forma un ángulo de 28° por debajo de la horizontal. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética? Resp. 0.198

*4.26. ¿Cuál es la fuerza normal que actúa sobre el bloque en la figura 4.22? ¿Cuál es la componente del peso que actúa hacia abajo del plano?

*4.27. ¿Qué empuje **P**, dirigido hacia arriba del plano, hará que el bloque de la figura 4.22 suba por dicho plano con rapidez constante? Resp. 54.1 N

*4.28. Si el bloque de la figura 4.22 se suelta, logrará superar la fricción estática y se deslizará rápidamente descendiendo por el plano. ¿Qué empuje **P**, dirigido hacia la parte superior del plano inclinado, permitirá retardar el movimiento descendente hasta que el bloque se mueva con rapidez constante?

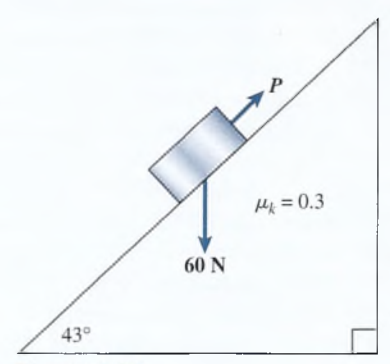


Figura 4.22

Problemas adicionales

4.29. Calcule la tensión en la cuerda A y la fuerza B ejercida en la cuerda por la viga de la figura 4.23. Resp. A = 231 N, B = 462 N

4.30. Si el cable A de la figura 4.24 tiene una resistencia a la rotura de 200 N, ¿cuál es el máximo peso que este aparato puede soportar?

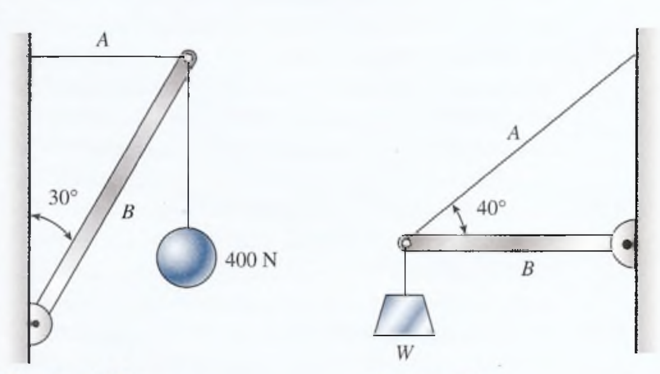
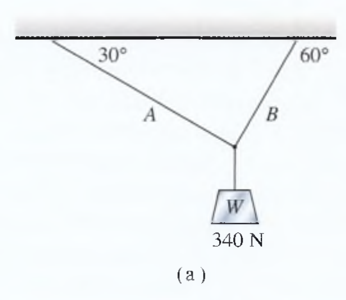


Figura 4.23

Figura 4.24



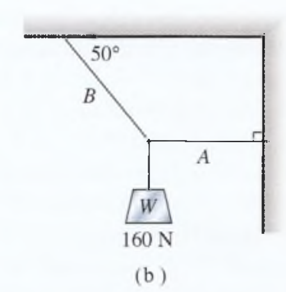


Figura 4.25

4.31. ¿Cuál es el empuje mínimo **P**, paralelo a un plano inclinado de 37°, si un carrito de 90 N va a ascender por dicho plano con rapidez constante? Desprecie la fricción.

Resp. 54.2 N

4.32. Una fuerza horizontal de sólo 8 lb mueve un trozo de hielo con rapidez constante sobre un piso ($\mu_k = 0.1$). ¿Cuál es el peso del hielo?

4.33. Encuentre la tensión en las cuerdas A y B en el dispositivo que muestra la figura 4.25a.

Resp. 170 N, 294 N

4.34. Calcule la tensión en las cuerdas A y B de la figura 4.25b.

4.35. Se ha tendido horizontalmente un cable en la punta de dos postes verticales colocados a 20 m de distancia uno del otro. Un letrero de 250 N está suspendido del punto medio del cable y hace que éste se pandee en una distancia vertical de 1.2 m. ¿Cuál es la tensión en cada uno de los segmentos del cable? Resp. 1049 N

4.36. Suponga que el cable del problema 4.35 tiene una resistencia a la rotura de 1200 N. ¿Cuál es el máximo peso que puede soportar en su punto medio?

4.37. Calcule la tensión en el cable y la compresión en la vigueta de la figura 4.26a.

Resp. $A = 43.2$ lb, $B = 34.5$ lb

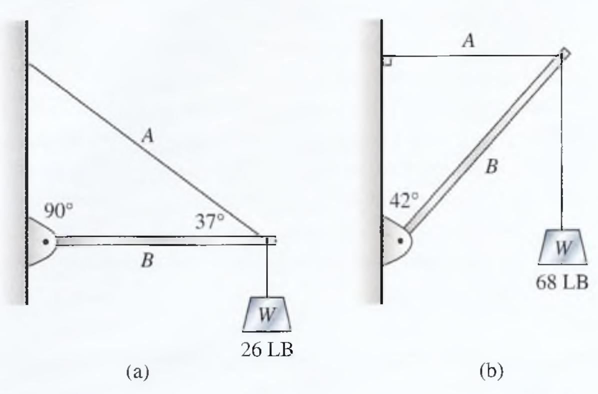


Figura 4.26

4.38. Halle la tensión en el cable y la compresión en vigueta de la figura 4.26b.

4.39. Calcule la tensión en las cuerdas A y B de la figura 4.27a. Resp. $A = 1405$ N, $B = 1146$ N

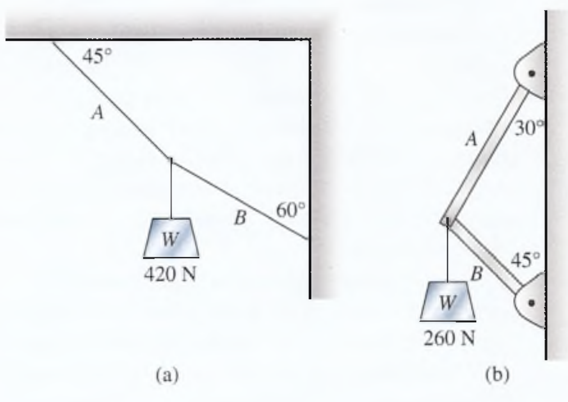


Figura 4.27

***4.40.** Halle las fuerzas en las tablas ligeras de la figura 4.27b e indique si éstas se encuentran bajo tensión o bajo compresión.

Preguntas para la reflexión crítica

4.41. Estudie la estructura ilustrada en la figura 4.28 y analice las fuerzas que actúan en el punto donde la cuerda está atada a los postes ligeros. ¿Cuál es la dirección de las fuerzas que actúan *en* los extremos de los postes? ¿Cuál es la dirección de las fuerzas ejercidas *por* los postes en ese punto? Dibuje el diagrama de cuerpo libre apropiado.

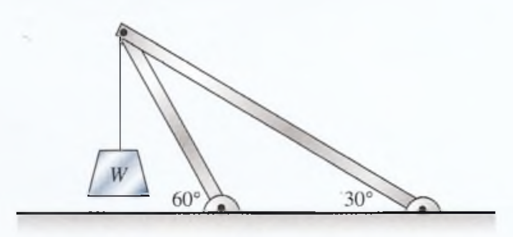


Figura 4.28

***4.42.** Calcule las fuerzas que actúan *sobre* los extremos de los postes de la figura 4.28 si $W = 500$ N.

***4.43.** Un borrador de 2 N es presionado con un empuje horizontal de 12 N contra un pizarrón vertical. Si $\mu_s = 0.25$, calcule qué fuerza horizontal se requiere para iniciar un movimiento paralelo al piso. ¿Y si se desea empezar ese movimiento hacia arriba o abajo? Halle las fuerzas verticales necesarias para iniciar apenas el movimiento hacia arriba del pizarrón y después hacia debajo de éste.

Resp. 3.00 N, hacia arriba = 5 N, hacia abajo = 1 N

***4.44.** Se ha determinado experimentalmente que una fuerza horizontal de 20 lb puede mover una podadora de césped de 60 lb con rapidez constante. El asa de la podadora forma un ángulo de 40° con el suelo. ¿Qué empuje es necesario aplicar en el asa para mover la podadora con rapidez constante? ¿La fuerza normal es igual al peso de la podadora? ¿Cuál es el valor de la fuerza normal?

***4.45.** Supongamos que la podadora de la pregunta 4.44 tuviera que moverse hacia atrás. ¿Qué tirón habrá que ejercer sobre el asa para moverla con rapidez constante? ¿Cuál sería la fuerza normal en este caso? Comente las diferencias entre este ejemplo y el del problema anterior. Resp. 20.4 N, 46.9 N

***4.46.** Una camioneta es rescatada de un lodazal con un cable atado al vehículo y a un árbol. Cuando los ángulos son los que se muestran en la figura 4.29, se ejerce una fuerza de 40 lb en el punto central del cable. ¿Qué fuerza se ejerce entonces sobre la camioneta?

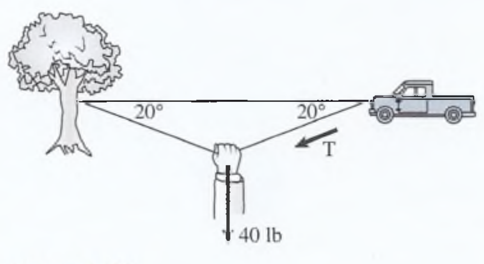


Figura 4.29

***4.47.** Suponga que se requiriera una fuerza de 900 N para mover la camioneta de la figura 4.29. ¿Qué fuerza sería necesario aplicar en el punto medio del cable con los ángulos que allí se muestran?

Resp. 616 N

4.48. Un bloque de acero de 70 N está en reposo sobre una pendiente de 40°. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción estática que se dirige hacia arriba del plano? ¿Es ésta necesariamente la máxima fuerza de fricción estática? ¿Cuál es la fuerza normal con este ángulo?

***4.49.** Calcule la compresión en la viga central B y la tensión en la cuerda A en la situación descrita en la figura 4.30. Señale con claridad la diferencia entre la fuerza de compresión en la viga y la fuerza indicada en su diagrama de cuerpo libre.

Resp. A = 643 N, B = 938 N

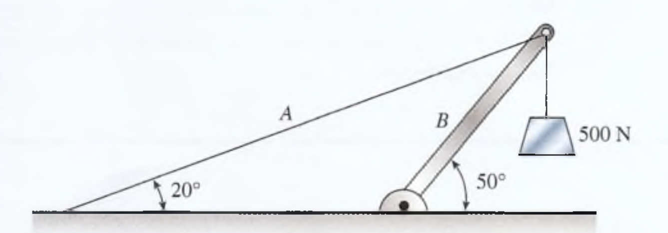


Figura 4.30

***4.50.** ¿Qué empuje *horizontal* **P** se requiere para impedir que un bloque de 200 N resbale hacia abajo en un plano inclinado a 60°, en el cual μ_s = 0.4? ¿Por qué se necesita una fuerza menor cuando **P** actúa en una dirección *paralela* al plano? ¿La fuerza de fricción es mayor, menor o igual en estos dos casos?

***4.51.** Halle la tensión en cada una de las cuerdas de la figura 4.31 si el peso suspendido es de 476 N.

Resp. A = 476 N, B = 275 N, C = 275 N

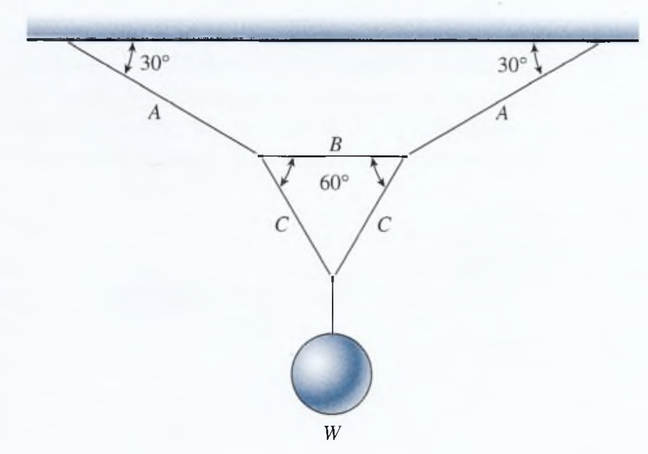


Figura 4.31

***4.52.** Encuentre la fuerza requerida para tirar horizontalmente de un trineo de 40 N con rapidez constante, ejerciendo tracción a lo largo de un mástil que forma un ángulo de 30° con el suelo (μ_k = 0.4). Encuentre la fuerza requerida si se desea empujar el mástil en ese mismo ángulo. ¿Cuál es el factor más importante que cambia en estos casos?

***4.53.** Dos pesas cuelgan de dos poleas sin fricción como se observa en la figura 4.32. ¿Qué peso W hará que el bloque de 300 lb apenas empiece a moverse hacia la derecha? Supongamos que μ_s = 0.3. *Nota:* Las poleas únicamente cambian la dirección de las fuerzas aplicadas.

Resp. 108 lb

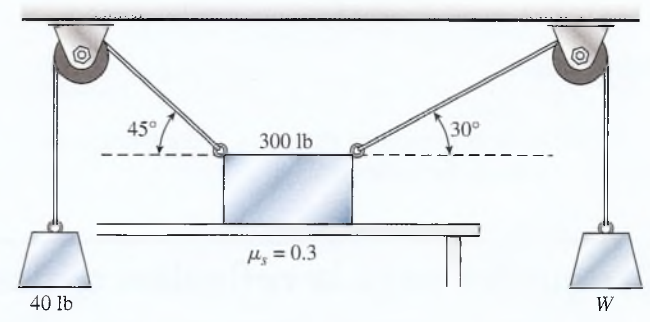


Figura 4.32

***4.54.** Encuentre el peso máximo que es posible colgar del punto O, tal como aparece en la figura 4.33, sin alterar el equilibrio. Suponga que μ_s = 0.3 entre el bloque y la mesa.

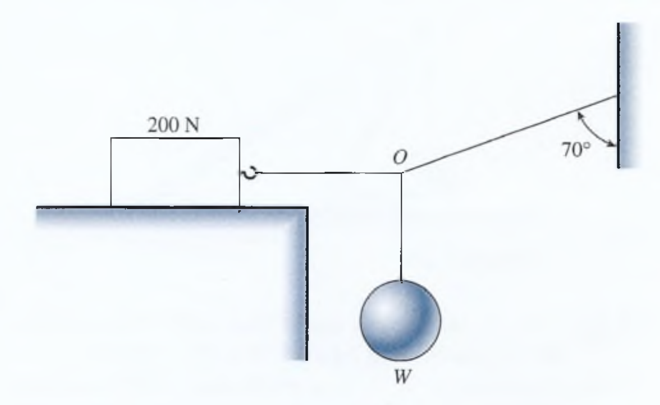


Figura 4.33



Momento de torsión y equilibrio rotacional

Puente Golden Gate: Los ingenieros mecánicos deben asegurarse de que todas las fuerzas y momentos de torsión estén equilibrados en el diseño y la construcción de los puentes. (*Foto © vol. 44 PhotoDisc/ Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Ilustrará mediante ejemplos y definiciones su comprensión de los términos *brazo de palanca* y *momento de torsión.*
2. Calculará el momento de torsión resultante respecto a cualquier eje, dadas las magnitudes y posiciones de las fuerzas que actúan sobre un objeto alargado.
3. Determinará las fuerzas o distancias desconocidas aplicando la primera y segunda condiciones de equilibrio.
4. Definirá centro de gravedad y dará ejemplos de dicho concepto.

En los capítulos anteriores nos hemos referido a las fuerzas que actúan en un solo punto. Existe un equilibrio traslacional cuando la suma vectorial es cero. Sin embargo, en muchos casos las fuerzas que actúan sobre un objeto no tienen un punto de aplicación común. Este tipo de fuerzas se llaman *no concurrentes*. Por ejemplo, un mecánico ejerce una fuerza en el maneral de una llave para apretar un perno. Un carpintero utiliza una palanca larga para extraer la tapa de una caja de madera. Un ingeniero considera las fuerzas de torsión que tienden a arrancar una viga de la pared. El volante de un automóvil gira por el efecto de fuerzas que no tienen un punto de aplicación común. En casos como éstos, puede haber una *tendencia a girar* que se define como *momento de torsión*. Si aprendemos a medir y a prever los momentos de torsión producidos por ciertas fuerzas, será posible obtener los efectos rotacionales deseados. Si no se desea la rotación, es preciso que no haya ningún momento de torsión resultante. Esto conduce en forma natural a la condición de ***equilibrio rotacional***, que es muy importante en aplicaciones industriales y en ingeniería.

5.1 Condiciones de equilibrio

Cuando un cuerpo está en equilibrio, debe encontrase en reposo o en estado de movimiento rectilíneo uniforme. De acuerdo con la primera ley de Newton, lo único que puede cambiar dicha situación es la aplicación de una fuerza resultante. Hemos visto que si todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo tienen un solo punto de intersección y si su suma vectorial es igual a cero, el sistema debe estar en equilibrio. Cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas que no tienen una ***línea de acción*** común, tal vez exista equilibrio traslacional pero no equilibrio rotacional. En otras palabras, quizá no se mueva ni a la derecha ni a la izquierda, tampoco hacia arriba ni hacia abajo, pero puede seguir girando. Al estudiar el equilibrio debemos tomar en cuenta el punto de aplicación de cada fuerza además de su magnitud.

Considere las fuerzas que se ejercen sobre la llave de tuercas de la figura 5.1a. Dos fuerzas **F** iguales y opuestas se aplican a la derecha y a la izquierda. La primera condición de equilibrio nos dice que las fuerzas horizontales y verticales están equilibradas; por lo tanto, se dice que el sistema está en equilibrio. No obstante, si las mismas dos fuerzas se aplican como indica la figura 5.1b, la llave de tuercas definitivamente tiende a girar. Esto es cierto incluso si el vector que resulta de la suma de las fuerzas sigue siendo cero. Es obvio que se requiere una segunda condición de equilibrio que explique el movimiento rotacional. Un enunciado formal de esta condición se presentará posteriormente, aunque antes es necesario definir algunos términos.

En la figura 5.1b, las fuerzas **F** no tienen la misma *línea de acción*.

La línea de acción de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende indefinidamente a lo largo del vector en ambas direcciones.

Cuando las líneas de acción de las fuerzas no se intersecan en un mismo punto, puede haber rotación respecto a un punto llamado ***eje de rotación.*** En nuestro ejemplo, el eje de rotación es una línea imaginaria que pasa a través del perno en dirección perpendicular a la página.

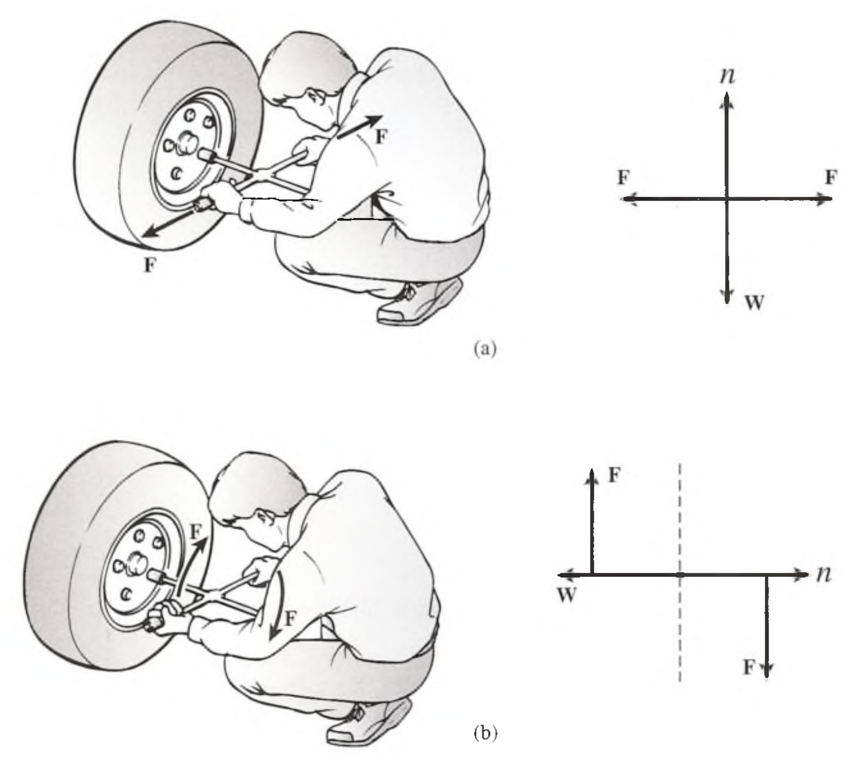


Figura 5.1 (a) Hay equilibrio puesto que las fuerzas tienen la misma línea de acción. (b) No hay equilibrio porque las fuerzas opuestas no tienen la misma línea de acción.

5.2 El brazo de palanca

La distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de acción de la fuerza se llama ***brazo de palanca*** de la fuerza, el cual determina la eficacia de una fuerza dada para provocar el movimiento rotacional. Por ejemplo, si se ejerce una fuerza **F** a distancias cada vez mayores del centro de una gran rueda, gradualmente será más fácil hacer girar la rueda en relación con su centro. (Véase la figura 5.2.)

El brazo de palanca de una fuerza es la distancia perpendicular que hay de la línea de acción de la fuerza al eje de rotación.

Si la línea de acción de la fuerza pasa por el eje de rotación (punto A de la figura 5.2), el brazo de palanca es cero. Se observa que no hay efecto rotacional, independientemente de la

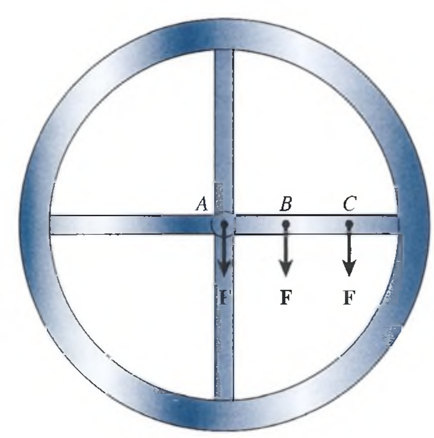


Figura 5.2 La fuerza no equilibrada **F** no produce ningún efecto rotacional sobre el punto *A*, pero cada vez es más eficaz a medida que aumenta su brazo de palanca.

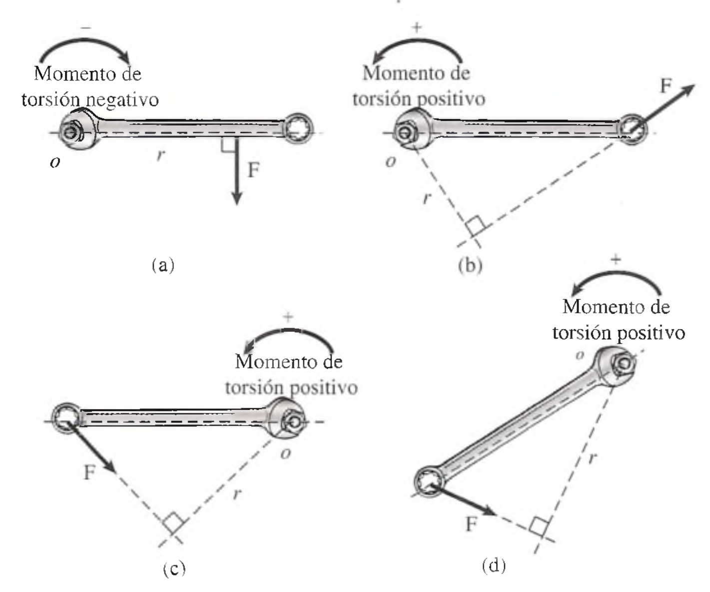


Figura 5.3 Ejemplos de brazos de palanca *r*.

magnitud de la fuerza. En este sencillo ejemplo, los brazos de palanca en los puntos *B* y *C* son simplemente la distancia de los ejes de rotación al punto de aplicación de la fuerza. Sin embargo, hay que notar que la línea de acción de la fuerza no es más que una sencilla construcción geométrica. El brazo de palanca se traza perpendicular a esta línea. Puede ser igual a la distancia del eje al punto de aplicación de la fuerza, pero esto es cierto sólo cuando la fuerza aplicada es perpendicular a esta distancia. En los ejemplos de la figura 5.3, *r* representa el brazo de palanca y *O*, el eje de rotación. Estudie cada ejemplo, observando cómo se trazan los brazos de palanca y razonando si la rotación es en el mismo sentido o contraria al avance de las manecillas del reloj con respecto a *O*.

5.3 Momento de torsión

FÍSICA HOY

La Estación Espacial Internacional se montó usando una versión de alta tecnología de un taladro inalámbrico. La herramienta con empuñadura de pistola, o PGT, que funciona con baterías, puede contar el número de vueltas y limitar la cantidad de momento de torsión aplicado a un perno. La NASA exige a los diseñadores usar sólo un tipo de perno, uno que puedan agarrar fácilmente los astro-nautas en sus trajes de EVA (extravehicular activity).

Se ha definido la ***fuerza*** como un tirón o un empujón que tiende a causar un movimiento. El momento de ***torsión*** $\boldsymbol{\tau}$ se define como la tendencia a producir un cambio en el movimiento rotacional. En algunos textos se le llama también *momento de fuerza*.* Como ya hemos visto, el movimiento rotacional se ve afectado tanto por la magnitud de una fuerza *F* como por su brazo de palanca *r*. Por tanto, definiremos el momento de torsión como el producto de una fuerza por su brazo de palanca.

Momento de torsión = fuerza × brazo de palanca

$$\tau = Fr \tag{5.1}$$

Es preciso entender que en la ecuación (5.1) *r* se mide en forma perpendicular a la línea de acción de la fuerza **F**. Las unidades del momento de torsión son las unidades de fuerza por distancia, por ejemplo, *newton-metro* (N · m) y *libra-pie* (lb · ft).

Ya antes se estableció una convención de signos para indicar la dirección de las fuerzas. La dirección del momento de torsión depende de si éste tiende a producir la rotación en el sentido de avance de las manecillas del reloj, o sentido retrógrado (sr), o en dirección contraria a ellas o sentido directo (sd). Seguiremos la misma convención que para medir ángulos. Si la fuerza **F** tiende a producir una rotación contraria a la de las manecillas con respecto a un eje, el momento de torsión se considerará positivo. Los momentos de torsión en el sentido de avance de las manecillas del reloj se considerarán negativos. En la figura 5.3, todos los momentos de torsión son positivos (sd), excepto el correspondiente a la figura 5.3a.

* En algunos textos, al momento de torsión también se le llama torque o torca. (N. del R. T.)

Ejemplo 5.1 Se ejerce una fuerza de 250 N sobre un cable enrollado alrededor de un tambor de 120 mm de diámetro. ¿Cuál es el momento de torsión producido aproximadamente al centro del tambor?

Plan: Trace un esquema, como el de la figura 5.4, y extienda la línea de acción de la fuerza. Determine el brazo de palanca r y luego encuentre el momento de torsión de la ecuación (5.1).

Solución: Observe que la línea de acción de la fuerza de 250 N es perpendicular al diámetro del tambor; por lo tanto, el brazo de palanca es igual al radio del tambor.

$$r = \frac{D}{2} = \frac{120 \text{ mm}}{2} \quad \text{o} \quad r = 60 \text{ mm} = 0.06 \text{ m}$$

La magnitud del momento de torsión se obtiene a partir de la ecuación (5.1).

$$\tau = Fr = (250 \text{ N})(0.06 \text{ m}) = 15.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Finalmente, determinamos que el *signo* del momento de torsión es negativo porque tiende a causar una *rotación* aproximadamente al centro del tambor. Por tanto, la respuesta debe escribirse como

$$\tau = -15.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

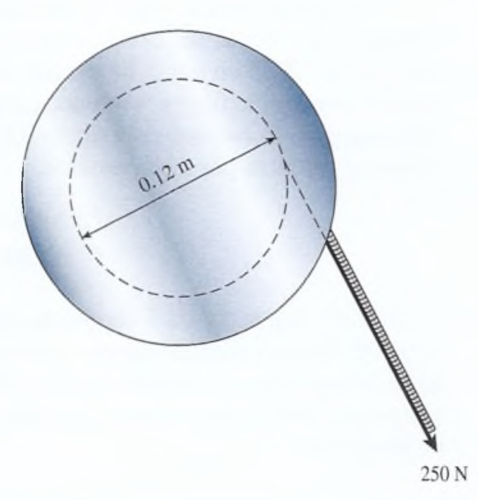


Figura 5.4 Fuerza tangencial ejercida por un cable enrollado alrededor de un tambor.

Ejemplo 5.2 Un mecánico ejerce una fuerza de 20 lb en el extremo de una llave inglesa de 10 in, como se observa en la figura 5.5. Si este tirón forma un ángulo de 60° con el mango de la llave, ¿cuál es el momento de torsión producido en la tuerca?

Plan: A partir del esquema ordenado, determinaremos el brazo de palanca, multiplíquelo por la magnitud de la fuerza y luego asigne el signo adecuado según la convención.

Solución: Primero trace un esquema ordenado, extienda la línea de acción de la fuerza de 20 lb, y dibuje el brazo de palanca como se mostró. Observe que el brazo de palanca r es perpendicular tanto a la línea de acción de la fuerza como al eje de rotación. Debe recordar que el brazo de palanca es una construcción geométrica y puede estar o no sobre alguna

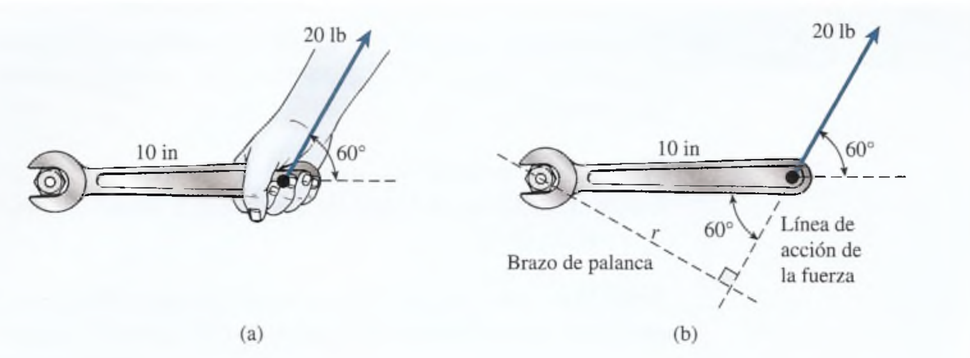


Figura 5.5 Cálculo del momento de torsión.

estructura física, como el mango de la llave de tuercas. A partir de la figura se obtiene

$$r = (10 \text{ in}) \operatorname{sen} 60° = 8.66 \text{ in}$$
$$\tau = Fr = (20 \text{ lb})(8.66 \text{ in}) = 173 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Si se desea, este momento de torsión se puede transformar en 14.4 lb · ft.

En algunas aplicaciones, es más útil trabajar con las *componentes* de una fuerza para obtener el momento de torsión resultante. En el ejemplo anterior se podría haber separado el vector de 20 lb en sus componentes horizontal y vertical. En vez de hallar el momento de torsión de una sola fuerza, sería necesario encontrar el momento de torsión de las dos fuerzas componentes. Como indica la figura 5.6, el vector de 20 lb tiene sus componentes F_x y F_y, las cuales se calculan por trigonometría:

$$F_x = (20 \text{ lb})(\cos 60°) = 10 \text{ lb}$$
$$F_y = (20 \text{ lb})(\operatorname{sen} 60°) = 17.3 \text{ lb}$$

Observe en la figura 5.6b que la línea de acción de la fuerza de 10 lb pasa por el eje de rotación. Esto no produce ningún momento de torsión porque su brazo de palanca es cero. Por tanto, el momento de torsión total se debe a la componente de 17.3 lb, que es perpendicular al mango. El brazo de palanca de esta fuerza es la longitud de la llave inglesa, y el momento de torsión es

$$\tau = Fr = (17.3 \text{ lb})(10 \text{ in}) = 173 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Observe que utilizando este método se obtiene el mismo resultado. No hacen falta más cálculos, porque la componente horizontal tiene un brazo de palanca de cero. Si elegimos las componentes de una fuerza a lo largo y perpendicularmente a la distancia conocida, tan sólo nos interesa el momento de torsión de la componente perpendicular.

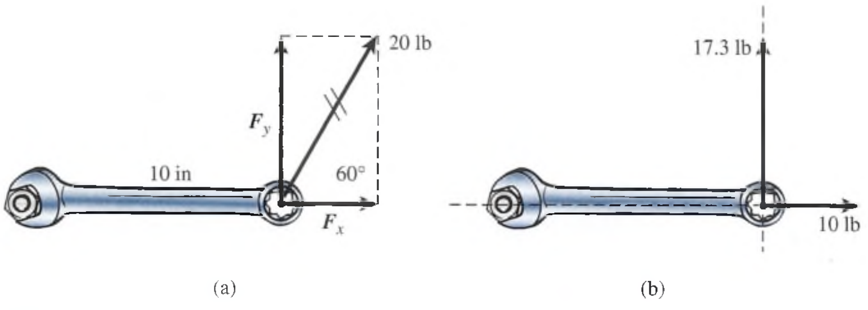


Figura 5.6 Método de las componentes para el cálculo del momento de torsión.

5.4 Momento de torsión resultante

En el capítulo 3 se demostró que la resultante de varias fuerzas se puede determinar sumando las componentes x y y de cada fuerza, y así obtener las componentes de la resultante.

$$R_x = A_x + B_x + C_x + \cdots \qquad R_y = A_y + B_y + C_y + \cdots$$

Este procedimiento se aplica a fuerzas que tienen un punto de intersección común. Las fuerzas que carecen de una línea de acción común producen una resultante del momento de torsión, además de una resultante de la fuerza traslacional. Cuando las fuerzas aplicadas actúan en el mismo plano, el momento de torsión resultante es la suma algebraica de los momentos de torsión positivos y negativos debidos a cada fuerza.

$$\tau_R = \sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots \tag{5.2}$$

Hay que recordar que los momentos de torsión en contrasentido al avance de las manecillas del reloj son positivos, y los que tienen el mismo sentido de avance de las manecillas son negativos.

Un elemento esencial en las técnicas eficaces para resolver problemas es la organización. El siguiente procedimiento resulta útil para calcular el momento de torsión resultante.

Estrategia para resolver problemas

Cálculo del momento de torsión resultante

1. Lea el problema y luego dibuje una figura y marque los datos.
2. Construya un diagrama de cuerpo libre que indique todas las fuerzas, distancias y el eje de rotación.
3. Extienda las líneas de acción de cada fuerza utilizando líneas punteadas.
4. Dibuje y marque los brazos de palanca de cada fuerza.
5. Calcule los brazos de palanca si es necesario.
6. Calcule los momentos de torsión debidos a cada fuerza independientemente de otras fuerzas; asegúrese de asignar el signo apropiado (sd = + y sr = −).
7. El momento de torsión resultante es la suma algebraica de los momentos de torsión de cada fuerza. Véase la ecuación (5.2).

Ejemplo 5.3

Una pieza angular de hierro gira sobre un punto A, como se observa en la figura 5.7. Determine el momento de torsión resultante en A debido a las fuerzas de 60 N y 80 N que actúan al mismo tiempo.

Plan: Extienda las líneas de acción de las dos fuerzas y determine sus brazos de palanca usando la trigonometría y los ángulos dados. Para cada fuerza, hay que notar si la tenden-

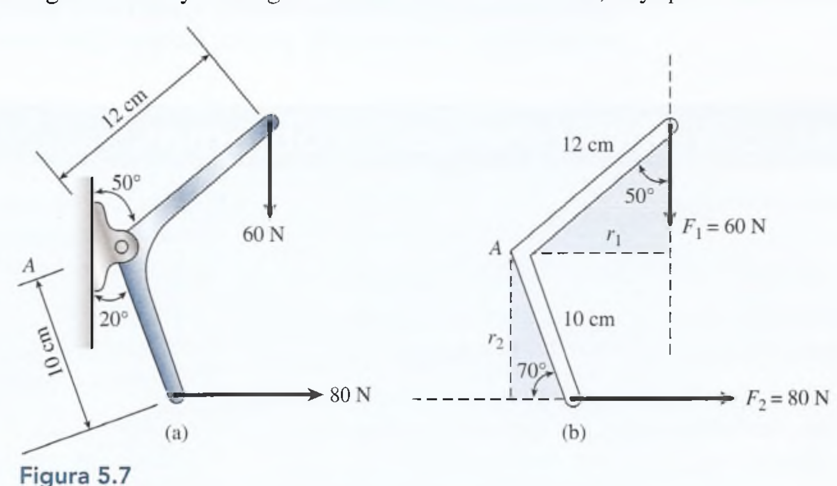


Figura 5.7

cia a rotar sobre el punto A será positiva o negativa por convención. El momento de torsión resultante es la suma algebraica de los momentos de torsión individuales.

Solución: Los brazos de palanca r_1 y r_2 se marcan, como en la figura 5.7b. Las longitudes de los brazos de palanca son:

$$r_1 = (12 \text{ cm}) \text{ sen } 50° = 9.19 \text{ cm}$$
$$r_2 = (10 \text{ cm}) \text{ sen } 70° = 9.40 \text{ cm}$$

Si se considera A como eje de rotación, el momento de torsión debido a $\mathbf{F}_1$ es negativo (sr) y el causado por $\mathbf{F}_2$ es positivo (sd). El momento de torsión resultante se encuentra así:

$$\begin{aligned} \tau_R &= \tau_1 + \tau_2 = F_1 r_1 + F_2 r_2 \\ &= -(60 \text{ N})(9.19 \text{ cm}) + (80 \text{ N})(9.40 \text{ cm}) \\ &= -552 \text{ N} \cdot \text{cm} + 752 \text{ N} \cdot \text{cm} \\ &= 200 \text{ N} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

El momento de torsión resultante es 200 N · cm, en contrasentido al avance de las manecillas del reloj. Esta respuesta se expresa mejor como 2.00 N · m en unidades del SI.

5.5 Equilibrio

Ahora estamos listos para analizar la condición necesaria para el equilibrio rotacional. La condición para el equilibrio traslacional quedó establecida en forma de ecuación como

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \tag{5.3}$$

Si se desea asegurar que los efectos rotacionales también estén equilibrados, es preciso estipular que no hay momento de torsión resultante. Por tanto, la segunda condición de equilibrio es:

La suma algebraica de todos los momentos de torsión respecto de cualquier eje debe ser cero.

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots = 0 \tag{5.4}$$

La segunda condición de equilibrio simplemente nos indica que los momentos de torsión en el sentido de avance de las manecillas del reloj están equilibrados con precisión por los momentos de torsión en contrasentido al avance de las manecillas. Más aún, puesto que la rotación no ocurre respecto a ningún punto, podemos elegir cualquier punto como eje de rotación. Mientras los brazos de palanca se midan respecto al mismo punto para cada fuerza, el momento de torsión resultante será de cero. Los problemas se simplifican si se elige el eje de rotación en el punto de aplicación de una fuerza desconocida. Si una fuerza particular tiene un brazo de palanca de cero, no contribuye al momento de torsión, independientemente de su magnitud.

Estrategia para resolver problemas

Equilibrio rotacional

1. Trace y marque un esquema con todos los datos.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre (si es necesario), indicando las distancias entre las fuerzas.
3. Elija un eje de rotación en el punto donde se proporcione menos información, por ejemplo, en el punto de aplicación de una fuerza desconocida.
4. Sume los momentos de torsión correspondientes a cada fuerza con respecto al eje de rotación elegido y establezca el resultado igual a cero.
$$\tau_R = \tau_1 = \tau_2 + \tau_3 + \cdots = 0$$
5. Aplique la primera condición de equilibrio para obtener dos ecuaciones adicionales.
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$
6. Calcule las cantidades que no se conocen.

Ejemplo 5.4

Considere la situación que se presenta en la figura 5.8: Una niña que pesa 300 N y un niño que pesa 400 N están parados sobre una plataforma de 200 N de peso y sostenida por dos soportes A y B. ¿Qué fuerzas ejercen los soportes sobre la plataforma?

Plan: Trace un diagrama de cuerpo libre (véase la figura 5.8b) que muestre claramente todas las fuerzas y las distancias entre ellas. Si el peso de la tabla se distribuye de manera uniforme, se puede considerar que todo el peso de la tabla actúa sobre su centro geométrico. Estudie el *centro de gravedad* en la sección 5.6. Las fuerzas desconocidas se determinan al aplicar las dos condiciones de equilibrio.

Solución: Al aplicar la primera condición de equilibrio a las fuerzas verticales, obtenemos

$$\sum F_y = 0; \qquad A + B - 300\text{ N} - 200\text{ N} - 400\text{ N} = 0$$

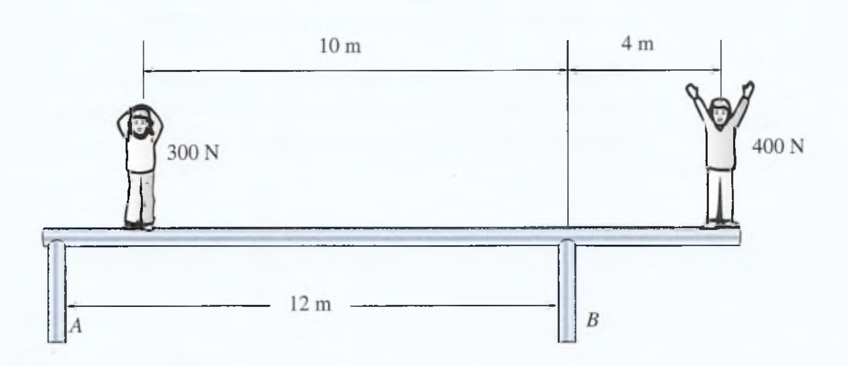
Simplificando esta ecuación se obtiene

$$A + B = 900\text{ N}$$

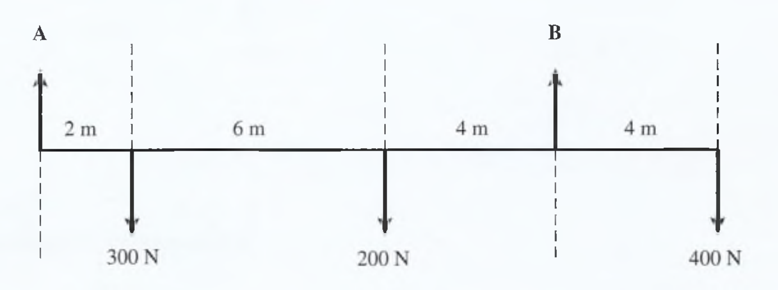
Puesto que esta ecuación presenta dos incógnitas, es preciso tener más información. Por tanto, aplicamos la segunda condición de equilibrio.

Como la rotación no ocurre respecto a ningún punto, podemos elegir un eje de rotación en cualquier parte que deseemos. Una opción lógica sería elegir un punto donde actúe una de las fuerzas desconocidas porque así se tendría un brazo de palanca de cero. Tomemos la suma de los momentos de torsión respecto al soporte B. Por la segunda condición de equilibrio se obtiene

$$\sum \tau_B = 0; \qquad -A(12\text{ m}) + (300\text{ N})(10\text{ m}) + (200\text{ N})(4\text{ m}) - (400\text{ N})(4\text{ m}) = 0$$



(a) Esquema del sistema



(b) Diagrama de cuerpo libre

Figura 5.8 Diagrama de cuerpo libre que indica todas las fuerzas y las distancias entre ellas. Suponga que todo el peso de la tabla actúa en su centro geométrico para el cálculo del momento de torsión.

Note que la fuerza de 400 N y la fuerza **A** tienden a producir una rotación en el sentido de avance de las manecillas del reloj con respecto a B. (Sus momentos de torsión fueron negativos.) Simplificando se obtiene

$$-(12 \text{ m})A + 3000 \text{ N} \cdot \text{m} - 1600 \text{ N} \cdot \text{m} + 800 \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

Al añadir (12 m)A a ambos lados y simplificar queda

$$2200 \text{ N} \cdot \text{m} = (12 \text{ m})A$$

Al dividir ambos lados entre 12 m, resulta

$$A = 183 \text{ N}$$

Ahora, para determinar la fuerza ejercida por el soporte B, tomemos en cuenta de nuevo la ecuación obtenida a partir de la primera condición de equilibrio.

$$A + B = 900 \text{ N}$$

Al despejar B se obtiene

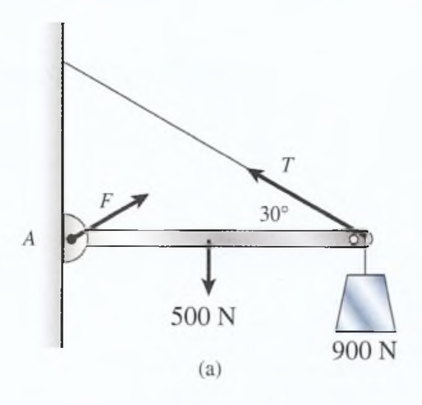
$$B = 900 \text{ N} - A = 900 \text{ N} - 183 \text{ N}$$
$$= 717 \text{ N}$$

Como comprobación de este resultado, podemos elegir el eje de rotación en A y luego aplicar la segunda condición de equilibrio para determinar B.

Ejemplo 5.5

Una viga uniforme de 500 N de peso y 3 m de longitud está sostenida por un cable, como se observa en la figura 5.9. La viga se apoya en la pared y el cable forma un ángulo de 30° con respecto a la viga, que está en posición horizontal. Si una carga de 900 N se cuelga del extremo derecho, ¿cuál es la tensión T del cable? ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pivote?

Plan: Una vez más suponemos que todo el peso de la viga actúa en su punto medio. Trazaremos un diagrama de cuerpo libre y aplicaremos las dos condiciones de equilibrio para obtener las fuerzas desconocidas.



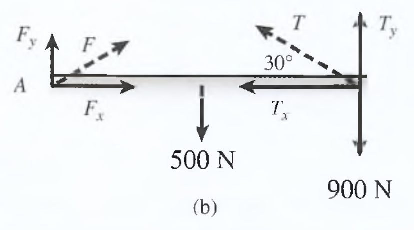


Figura 5.9 Fuerzas que actúan sobre una viga horizontal.

Solución: Cuando se trabaja con fuerzas que forman un ángulo con respecto a la viga, a veces resulta útil trazar un diagrama de cuerpo libre donde se representen las componentes de dichas fuerzas a lo largo de la viga o perpendiculares a la misma (véase la figura 5.9b). Observe que no conocemos ni la magnitud ni la dirección de la fuerza **F** ejercida por la pared en el extremo izquierdo de la viga. (No cometa el error de suponer que la fuerza se ejerce totalmente sobre el pivote como en el capítulo 4 cuando no consideramos el peso de la viga.) Resulta lógico elegir el extremo izquierdo como eje de rotación debido a que, sin importar cuál sea el ángulo, esa fuerza aún tiene un brazo de palanca de cero y su momento de torsión con respecto al punto A también será cero.

Primero calcularemos la tensión del cable al sumar los momentos de torsión respecto al extremo izquierdo e igualar el resultado igual a cero.

$$F(0) - (500\text{ N})(1.5\text{ m}) - (900\text{ N})(3\text{ m}) + T_x(0) + T_y(3\text{ m}) = 0$$
$$0 - 750\text{ N}\cdot\text{m} - 2700\text{ N}\cdot\text{m} + 0 + T_y(3\text{ m}) = 0$$

Al simplificar, obtenemos una expresión para T_y:

$$3T_y = 3450\text{ N} \qquad \text{o} \qquad T_y = \frac{3450\text{ N}}{3} = 1150\text{ N}$$

Ahora, a partir de la figura 5.9b, vemos que

$$T_y = T\text{ sen }30° \qquad \text{o} \qquad T_y = 0.5T$$

Y como $T_y = 1150$ N, escribimos

$$(0.5)T = 1150\text{ N} \qquad \text{o} \qquad T = \frac{3450\text{ N}\cdot\text{m}}{0.5(3\text{ m})} = 2300\text{ N}$$

Enseguida aplicamos la primera condición de equilibrio, usando las componentes horizontal y vertical de F y T junto con las fuerzas dadas. La componente F_x de la fuerza ejercida por la pared en la viga se obtiene al sumar las fuerzas a lo largo del eje x.

$$\sum F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_x - T_x = 0$$

de donde

$$F_x = T_x = T\cos 30°$$
$$= (2300\text{ N})\cos 30° = 1992\text{ N}$$

La componente vertical de la fuerza F_y se determina al sumar las fuerzas a lo largo del eje y.

$$\sum F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_y + T_y - 500\text{ N} - 900\text{ N} = 0$$

Despejando F_y, obtenemos

$$F_y = 1400\text{ N} - T_y$$

Usando la trigonometría, hallamos T_y a partir de la figura 5.9b:

$$T_y = (2300\text{ N})\text{ sen }30° = 1150\text{ N}$$

lo cual puede sustituirse para hallar F_y.

$$F_y = 1400\text{ N} - 1150\text{ N} = 250\text{ N}$$

Como ejercicio, demuestre que la magnitud y la dirección de la fuerza **F**, a partir de sus componentes, es 2010 N a un ángulo de 7.2° por arriba de la horizontal.

Antes de concluir esta sección, es aconsejable recordar las convenciones tomadas en este texto respecto a las cifras significativas. En todos los cálculos consideramos tres cifras significativas, así que usted debe mantener cuando menos cuatro cifras significativas en todos sus cálculos antes de redondear la respuesta final. Todos los ángulos deben reportarse a la décima de grado más cercana. Por tanto, la fuerza ejercida por la pared sobre el puntal se escribe como 2010 N a 7.2°.

5.6 Centro de gravedad

Cada partícula que existe en la Tierra tiene al *menos* una fuerza en común con cualquier otra partícula: su peso. En el caso de un cuerpo formado por múltiples partículas, estas fuerzas son esencialmente paralelas y están dirigidas hacia el centro de la Tierra. Independientemente de la forma y tamaño del cuerpo, existe un punto en el que se puede considerar que está concentrado todo el peso del cuerpo. Este punto se llama ***centro de gravedad*** del cuerpo. Por supuesto, el peso no actúa de hecho en este punto, pero podemos calcular el mismo tipo de momento de torsión respecto a un eje dado si consideramos que todo el peso actúa en este punto.

El centro de gravedad de un cuerpo regular, como una esfera uniforme, un cubo, una varilla o una viga, se localiza en su centro geométrico. Este hecho se utilizó en los ejemplos de la sección anterior, donde considerábamos el peso de la viga completa actuando en su centro. Aun cuando el centro de gravedad es un punto fijo, no necesariamente tiene que estar dentro del cuerpo. Por ejemplo, una esfera hueca, un aro circular y un neumático tienen su centro de gravedad fuera del material del cuerpo.

A partir de la definición de centro de gravedad, se acepta que cualquier cuerpo suspendido desde este punto está en equilibrio. Esto es verdad, ya que el vector peso, que representa la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada parte del cuerpo, tiene un brazo de palanca igual a cero. Por tanto, es posible calcular el centro de gravedad de un cuerpo, determinando el punto en el cual una fuerza ascendente producirá un equilibrio rotacional.

Ejemplo 5.6

Calcule el centro de gravedad del sistema de barra con pesas que se presenta en la figura 5.10. Suponga que el peso de la barra de 36 in es insignificante.

Plan: El centro de gravedad es el punto donde una sola fuerza ascendente **F** equilibraría el sistema. Superponiendo un diagrama de cuerpo libre en las pesas, trazamos la fuerza ascendente **F** en un punto localizado a una distancia desconocida x desde un punto de referencia. En este caso, el punto de referencia se elige en el centro de la masa izquierda. Por último, aplicamos las condiciones de equilibrio para encontrar esa distancia.

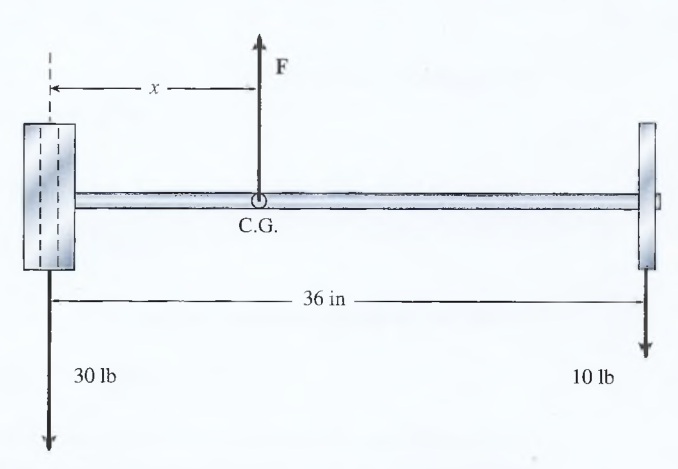
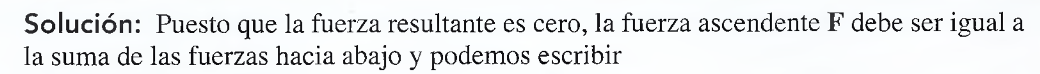


Figura 5.10 Cálculo del centro de gravedad.



Solución: Puesto que la fuerza resultante es cero, la fuerza ascendente **F** debe ser igual a la suma de las fuerzas hacia abajo y podemos escribir

$$F = 30 \text{ lb} + 10 \text{ lb} = 40 \text{ lb}$$

La suma de los momentos de torsión respecto al centro geométrico de la masa izquierda también debe ser igual a cero, así que

$$\sum \tau = (40 \text{ lb})x + (30 \text{ lb})(0) - (10 \text{ lb})(36 \text{ in}) = 0$$
$$(40 \text{ lb})x = 360 \text{ lb} \cdot \text{in}$$
$$x = 9.00 \text{ in}$$

Si las pesas estuvieran suspendidas desde el techo a un punto a 9 in del centro de la masa izquierda, el sistema estaría en equilibrio. Este punto es el centro de gravedad. Usted puede demostrar que se llega a la misma conclusión si se elige el eje en el extremo derecho o en cualquier otro lugar.

Resumen y repaso

Resumen

Cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas que no tienen la misma línea de acción o no se intersecan en un punto común, puede haber rotación. En este capítulo se presentó el concepto de momento de torsión como una medida de la tendencia a girar. Los principales conceptos se resumen a continuación:

- El *brazo de palanca* de una fuerza es la distancia perpendicular que hay entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación.
- El *momento de torsión* con respecto a un eje determinado se define como el producto de la magnitud de una fuerza por su brazo de palanca:

  Momento de torsión = fuerza × brazo de palanca

  Es positivo si tiende a producir movimiento en contrasentido al avance de las manecillas del reloj y negativo si el movimiento se produce en el mismo sentido de las manecillas.

  $$\tau = Fr$$

- El *momento de torsión resultante* τ_R con respecto a un eje particular A es la suma algebraica de los momentos de torsión producidos por cada fuerza. Los signos se determinan por la convención ya mencionada.

  $$\tau_R = \sum \tau_A = F_1r_1 + F_2r_2 + F_3r_3 + \cdots$$

- *Equilibrio rotacional:* Un cuerpo en equilibrio rotacional no tiene un momento de torsión resultante que actúe sobre él. En tales casos, la suma de todos los momentos de torsión respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Los ejes pueden elegirse en cualquier parte puesto que el sistema no tiene la tendencia a girar respecto a cualquier punto. Ésta se llama la segunda condición de equilibrio y se escribe como

  La suma de todos los momentos de torsión respecto a cualquier punto es cero.

  $$\sum \tau = 0$$

- El *equilibrio total* existe cuando se satisfacen la primera y la segunda condiciones de equilibrio. En tales casos, se pueden escribir tres ecuaciones independientes:

  $$\text{(a)} \sum F_x = 0 \quad \text{(b)} \sum F_y = 0 \quad \text{(c)} \sum \tau = 0$$

  Al escribir estas tres ecuaciones para una situación específica se pueden determinar fuerzas, distancias y momentos de torsión desconocidos.

- El *centro de gravedad* de un cuerpo es el punto a través del cual actúa el peso resultante, independientemente de cómo esté orientado el cuerpo. Para las aplicaciones que incluyen momentos de torsión, se puede considerar que el peso total del objeto actúa en este punto.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

5.1. Usted levanta con la mano derecha una maleta pesada. Describa y explique la posición de su cuerpo.

5.2. Un truco de salón consiste en pedir a una persona que se coloque de pie contra una pared con los pies juntos, de manera que la parte lateral de su pie derecho se apoye contra la pared. A continuación se le pide que levante su pie izquierdo del suelo. ¿Por qué no le es posible hacerlo sin caer?

5.3. ¿Por qué una minivan tiene más probabilidades de volcarse que un Corvette u otros autos deportivos?

5.4. Si se sabe que el peso de un ladrillo es de 25 N, explique cómo podría usar una regla graduada y un punto de apoyo o pivote para determinar el peso de una pelota de beisbol.

5.5. Describa y explique los movimientos de brazos y piernas que hace una persona que camina sobre una cuerda floja para no perder el equilibrio.

5.6. Comente acerca de los siguientes artefactos y la aplicación que en ellos se hace del principio del momento de torsión: (a) destornillador, (b) llave de tuercas, (c) pinzas, (d) carretilla de mano, (e) cascanueces y (f) palanca (alzaprima).

Problemas

Sección 5.2 El brazo de palanca

5.1. Dibuje e identifique con un letrero el brazo de palanca de la fuerza F sobre un eje en el punto A de la figura 5.11a. ¿Cuál es la magnitud del brazo de palanca? Resp. 0.845 ft

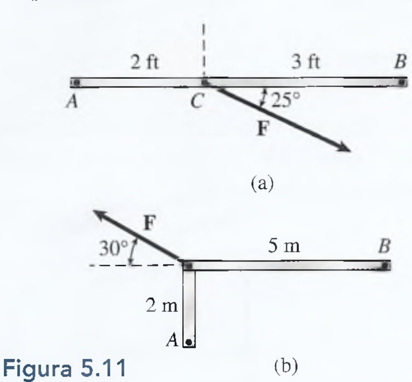


Figura 5.11

5.2. Calcule el brazo de palanca sobre el eje B de la figura 5.11a.

5.3. Dibuje y marque el brazo de palanca si el eje de rotación está en el punto A de la figura 5.11b. ¿Cuál es la magnitud del brazo de palanca? Resp. 1.73 m

5.4. Halle el brazo de palanca en el eje B de la figura 5.11b.

Sección 5.3 Momento de torsión

5.5. Si la fuerza F de la figura 5.11a es igual a 80 lb, ¿cuál es el momento de torsión resultante respecto al eje A (considerando insignificante el peso de la varilla)? ¿Cuál es el momento de torsión resultante respecto al eje B? Resp. -67.6 lb · ft, 101 lb · ft

5.6. La fuerza F ilustrada en la figura 5.11b es de 400 N y el peso del hierro del ángulo es insignificante, ¿cuál es el momento de torsión resultante respecto al eje A y al eje B?

5.7. Una correa de cuero está enrollada en una polea de 20 cm de diámetro. Se aplica a la correa una fuerza de 60 N. ¿Cuál es el momento de torsión en el centro del eje? Resp. 6 N · m

5.8. La varilla liviana de la figura 5.12 tiene 60 cm de longitud y gira libremente alrededor del punto A. Halle la magnitud y el signo del momento de torsión provocado por la fuerza de 200 N, si el ángulo θ es de (a) 90°, (b) 60°, (c) 30° y (d) 0°.

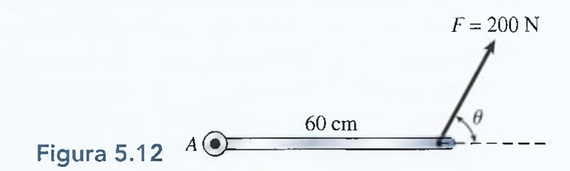


Figura 5.12

5.9. Una persona que pesa 650 N decide dar un paseo en bicicleta. Los pedales se mueven en un círculo que tiene 40 cm de radio. Si todo el peso actúa sobre cada movimiento descendente del pedal, ¿cuál es el momento de torsión máximo? Resp. 260 N · m

5.10. Una sola correa está enrollada en dos poleas. La polea de tracción tiene un diámetro de 10 cm y la polea exterior de salida tiene 20 cm de diámetro. Si la tensión en la parte superior de la correa es esencialmente de 50 N en el borde de cada polea, ¿cuáles son los momentos de torsión de entrada y de salida?

Sección 5.4 Momento de torsión resultante

5.11. ¿Cuál es el momento de torsión resultante respecto al punto A de la figura 5.13? No tome en cuenta el peso de la barra. Resp. 90 N · m

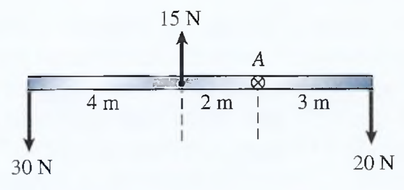


Figura 5.13

5.12. Calcule el momento de torsión resultante en el caso de la figura 5.13 si el eje se mueve hasta el extremo izquierdo de la barra.

5.13. ¿Qué fuerza horizontal se debe aplicar en el punto A de la figura 5.11b para que el momento de torsión resultante respecto al punto B sea igual a cero cuando la fuerza F = 80 N? Resp. 100 N

5.14. Dos ruedas de 60 cm y 20 cm de diámetro están unidas y giran sobre el mismo eje como muestra la figura 5.14. ¿Cuál es el momento de torsión resultante respecto a un eje central para los pesos indicados?

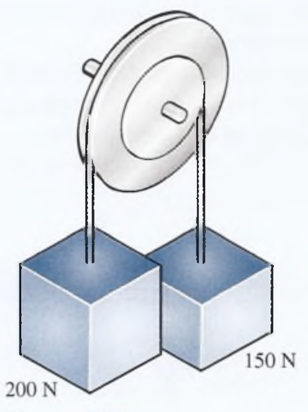


Figura 5.14

5.15. Suponga que retira el peso de 150 N de la rueda más pequeña en la figura 5.14. ¿Qué nuevo peso puede usted colgar de ella para obtener un momento de torsión resultante de cero? Resp. 600 N

5.16. Encuentre el momento de torsión resultante respecto a la esquina *A* para la figura 5.15.

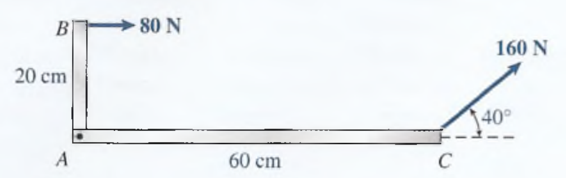


Figura 5.15

5.17. Halle el momento de torsión resultante respecto al punto *C* en la figura 5.15. Resp. −16.0 N · m

***5.18.** Halle el momento de torsión resultante respecto al eje *B* en la figura 5.15.

Sección 5.5 Equilibrio

5.19. Una regla graduada de material uniforme se ha equilibrado en su punto medio sobre un solo punto de apoyo. Una pesa de 60 N se cuelga en la marca de 30 cm. ¿En qué punto será necesario colgar una pesa de 40 N para equilibrar el sistema?
Resp. En la marca de 80 cm

5.20. En una regla graduada se colocan pesas de 10 N, 20 N y 30 N en las marcas de 20 cm, 40 cm y 60 cm, respectivamente. La regla se equilibra sobre un solo apoyo en su punto medio. ¿En qué punto habrá que agregar una pesa de 5 N para obtener el equilibrio?

5.21. Una tabla de 8 m con peso insignificante está sostenida en un punto localizado a 2 m del extremo derecho, donde se le aplica un peso de 50 N. ¿Qué fuerza descendente se debe ejercer en el extremo izquierdo para alcanzar el equilibrio? Resp. 16.7 N

5.22. Un poste de 4 m es sostenido en sus extremos por dos cazadores que transportan en él un venado de 800 N que cuelga en un punto localizado a 1.5 m del extremo izquierdo. ¿Qué fuerza ascendente necesita ejercer cada cazador?

5.23. Suponga que la barra de la figura 5.16 tiene un peso insignificante. Halle las fuerzas *F* y *A* considerando que el sistema está en equilibrio.
Resp. *A* = 26.7 N, *F* = 107 N

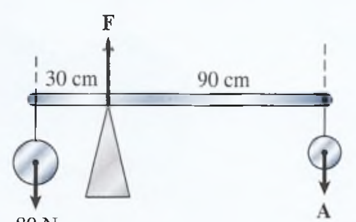


Figura 5.16

5.24. ¿Cuáles deben ser las fuerzas F_1 y F_2 para que se alcance el equilibrio en la figura 5.17? No tome en cuenta el peso de la barra.

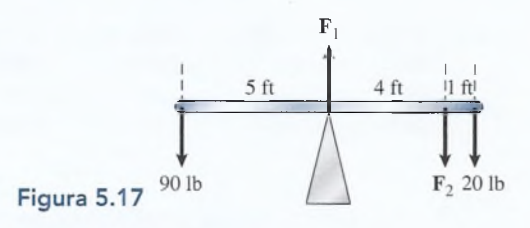


Figura 5.17

5.25. Considere la barra ligera sostenida como se indica en la figura 5.18. ¿Cuáles son las fuerzas que ejercen los soportes *A* y *B*?
Resp. *A* = 50.9 N, *B* = 49.1 N

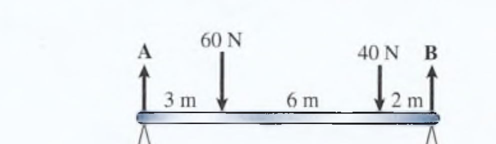


Figura 5.18

5.26. Una correa en V está enrollada en una polea de 16 pulgadas de diámetro. Si se requiere un momento de torsión resultante de 4 lb ft, ¿qué fuerza es necesario aplicar a lo largo de la correa?

5.27. Un puente cuyo peso total es de 4500 N tiene 20 metros de longitud y tiene soportes en ambos extremos. Halle las fuerzas que se ejercen en cada extremo cuando se coloca un tractor de 1600 N a 8 m del extremo izquierdo. Resp. 2890 N, 3210 N

5.28. Una plataforma de 10 ft que pesa 40 lb está apoyada en los extremos sobre escaleras de tijera. Un pintor que pesa 180 lb se ha colocado a 4 ft del extremo derecho. Encuentre las fuerzas que ejercen los soportes.

***5.29.** Una viga horizontal de 6 m, cuyo peso es 400 N, gira sobre un pivote fijo en la pared como se observa en la figura 5.19. La viga está sostenida por un cable en un punto localizado a 4.5 m de la pared y sostiene un peso de 1200 N en el extremo derecho. ¿Cuál es la tensión en el cable? Resp. 2337 N

***5.30.** ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce la pared sobre la viga? ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de esta fuerza?

Sección 5.6 Centro de gravedad

5.31. Una barra de material uniforme tiene una longitud de 6 m y pesa 30 N. De su extremo izquierdo pende una pesa de 50 N y se aplica una fuerza de 20 N en su extremo derecho. ¿A qué distancia del extremo izquierdo se deberá aplicar una sola fuerza ascendente para establecer el equilibrio? Resp. 2.10 m

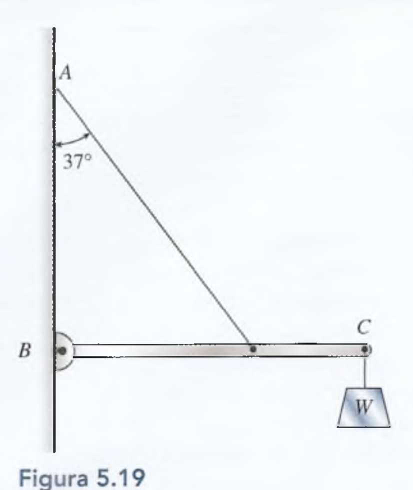


Figura 5.19

5.32. Una esfera de 40 N y una esfera de 12 N están conectadas por una varilla ligera de 200 mm de longitud. ¿A qué distancia del punto medio de la esfera de 40 N está el centro de gravedad?

5.33. Pesas de 2, 5, 8 y 10 N penden de una varilla ligera de 10 m a distancias de 2, 4, 6 y 8 m del extremo izquierdo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo está el centro de gravedad? Resp. 6.08 m

5.34. Calcule el centro de gravedad de un martillo si la cabeza de metal pesa 12 lb y el mango de 32 in que la sostiene pesa 2 lb. Suponga que la construcción y el peso del mango son uniformes.

Problemas adicionales

5.35. ¿Cuál es el momento de torsión resultante respecto al pivote de la figura 5.20? Considere que el peso de la barra curva es insignificante. Resp. −3.42 N · m

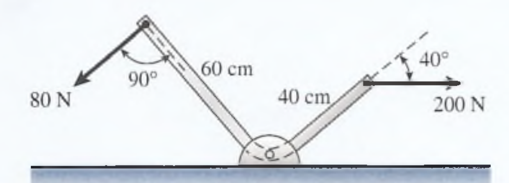


Figura 5.20

5.36. ¿Con qué fuerza horizontal, aplicada al extremo izquierdo de la varilla curva que aparece en la figura 5.20, se alcanzará el equilibrio rotacional? La barra forma un ángulo recto.

5.37. Pesas de 100, 200 y 500 N se colocan sobre una tabla ligera que descansa en dos soportes, como se aprecia en la figura 5.21. ¿Cuáles son las fuerzas que ejercen los soportes? Resp. 375 N, 425 N

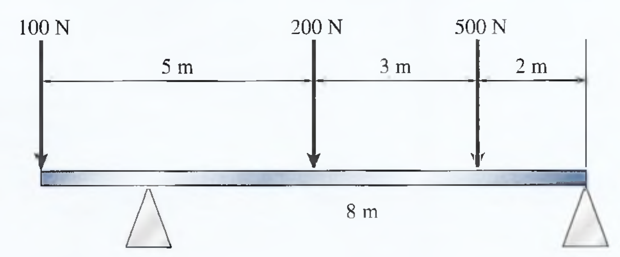


Figura 5.21

5.38. Una viga de acero de 8 m pesa 2400 N y está sostenida a 3 m del extremo derecho. Si se coloca un peso de 9000 N en el extremo derecho, ¿qué fuerza se debe aplicar en el extremo izquierdo para equilibrar el sistema?

***5.39.** Halle el momento de torsión resultante respecto al punto *A* en la figura 5.22.

Resp. −3.87 N · m

***5.40.** Encuentre el momento de torsión resultante respecto al punto *B* en la figura 5.22.

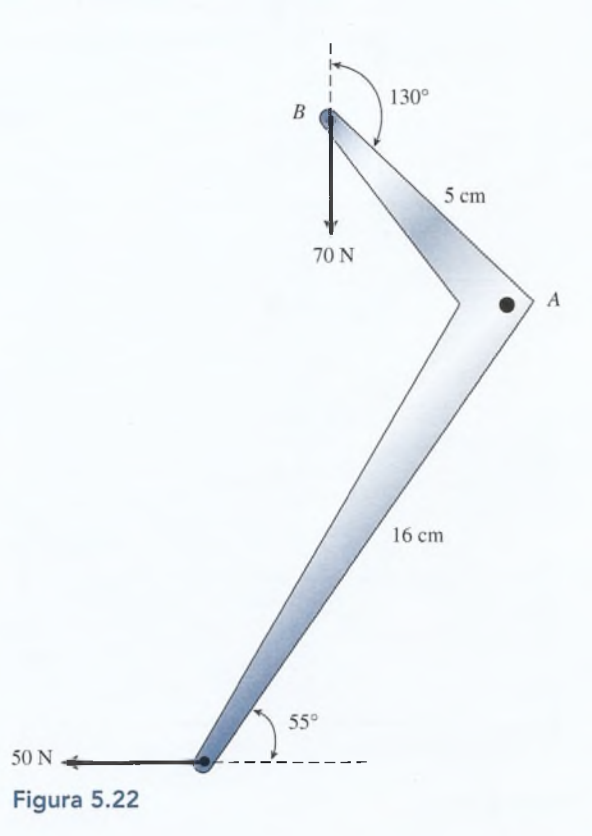


Figura 5.22

Preguntas para la reflexión crítica

***5.41.** Una caja de 30 lb y una caja de 50 lb se colocan en los extremos opuestos de una tabla de 16 ft sostenida únicamente en su punto medio. ¿A qué distancia del extremo izquierdo se tendrá que colocar una caja de 40 lb para establecer el equilibrio? ¿Sería diferente el resultado si la tabla pesara 90 lb? ¿Por qué sí o por qué no? Resp. 4.00 ft, no

5.42. En un banco de laboratorio tenemos una piedra pequeña, una regla graduada de 4 N y un solo soporte con borde de navaja. Explique cómo puede usar esos tres elementos para hallar el peso de la piedra pequeña.

5.43. Calcule las fuerzas F_1, F_2 y F_3 necesarias para que el sistema dibujado en la figura 5.23 quede en equilibrio.

Resp. $F_1 = 213$ lb, $F_2 = 254$ lb, $F_3 = 83.9$ lb

5.44. (a) ¿Qué peso W producirá una tensión de 400 N en la cuerda atada a la viga de la figura 5.24? (b) ¿Cuál sería la tensión de la cuerda si $W = 400$ N? Considere que el peso de la viga es insignificante en ambos casos.

5.45. Suponga que la viga de la figura 5.24 pesa 100 N y que el peso suspendido W es igual a 40 N. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

Resp. $T = 234$ N

5.46. Para las condiciones que hemos descrito en la pregunta 5.45, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el pivote colocado en el piso sobre la base de la viga?

***5.47.** ¿Cuál es la tensión del cable de la figura 5.25? El peso de la viga es 300 N, pero se desconoce su longitud. Resp. 360 N

***5.48.** ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza que ejerce la pared sobre la viga de la figura 5.25? También en esta ocasión, supongamos que el peso de la tabla es de 300 N.

***5.49.** Entre los ejes de acero delantero y trasero de un automóvil hay una distancia de 3.4 m. El 60 por ciento del peso del vehículo descansa sobre las ruedas delanteras, ¿a qué distancia del eje frontal se localiza el centro de gravedad?

Resp. 1.36 m

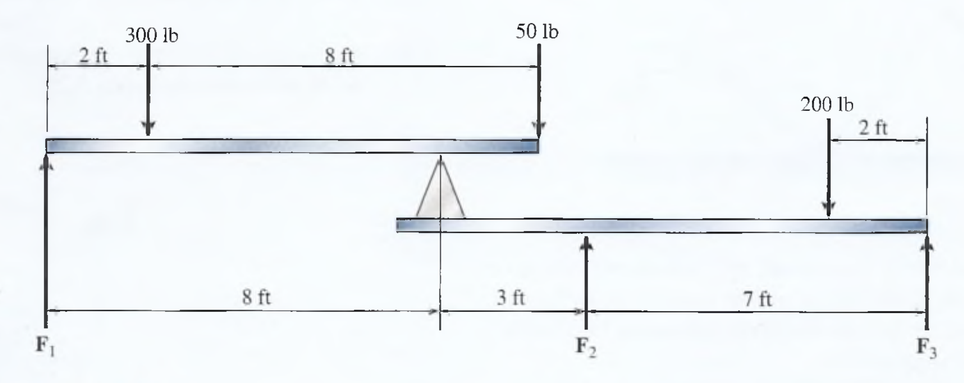


Figura 5.23

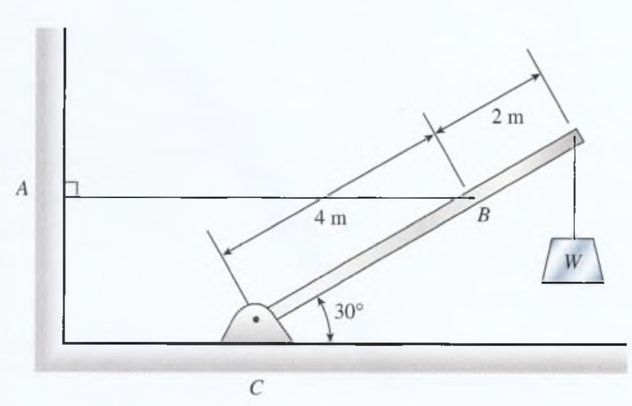


Figura 5.24

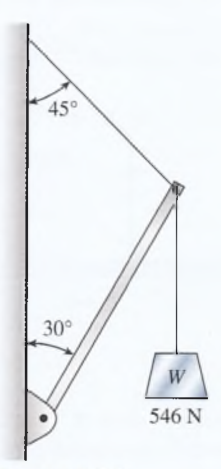
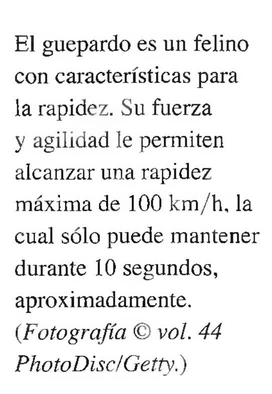


Figura 5.25

6 Aceleración uniforme





El guepardo es un felino con características para la rapidez. Su fuerza y agilidad le permiten alcanzar una rapidez máxima de 100 km/h, la cual sólo puede mantener durante 10 segundos, aproximadamente. (*Fotografía © vol. 44 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá y aplicará las definiciones de velocidad media y aceleración media.
2. Resolverá problemas que incluyan tiempo, desplazamiento, velocidad media y aceleración media.
3. Aplicará una de las cinco ecuaciones generales del movimiento uniformemente acelerado para determinar alguno de los cinco parámetros: velocidad inicial, velocidad final, aceleración, tiempo y desplazamiento.
4. Resolverá problemas generales relacionados con cuerpos en caída libre en un campo gravitacional.
5. Explicará por medio de ecuaciones y diagramas el movimiento horizontal y vertical de un proyectil lanzado con diferentes ángulos.
6. Determinará la posición y la velocidad de un proyectil cuando se conocen su velocidad inicial y su posición.
7. Calculará el alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo de proyectiles cuando se conocen la velocidad inicial y el ángulo de proyección.

6.1 Rapidez y velocidad

El tipo más sencillo de movimiento que puede experimentar un objeto es el movimiento rectilíneo uniforme. Si el objeto recorre las mismas distancias en cada unidad sucesiva de tiempo, se dice que se mueve con rapidez constante. Por ejemplo, si un tren recorre 8 m de vía por cada segundo que se mueve, se dice que tiene una ***rapidez constante*** de 8 m/s. Ya sea que la rapidez sea constante o no, la rapidez media de un objeto en movimiento se define como

$$\textit{rapidez media} = \frac{\textit{distancia recorrida}}{\textit{tiempo transcurrido}}$$

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \tag{6.1}$$

La línea sobre el símbolo v significa que la rapidez representa un valor promedio para el espacio de tiempo t.

Recuerde que la dimensión de la rapidez es la razón de una longitud a un intervalo de tiempo. Por tanto, las unidades de millas por hora, pies por segundo, metros por segundo y centímetros por segundo son unidades comunes de la rapidez.

Ejemplo 6.1 Un golfista logra un hoyo 3 segundos después de que golpea la pelota. Si ésta viajó con una rapidez media de 0.8 m/s, ¿a qué distancia estaba el hoyo?

Solución: Si se despeja x en la ecuación (6.1) queda

$$x = \bar{v}t = (0.8 \text{ m/s})(3 \text{ s})$$

Por tanto, la distancia que hay hasta el hoyo es de

$$x = 2.4 \text{ m}$$

Es importante observar que la rapidez es una cantidad escalar totalmente independiente de la dirección. En el ejemplo 6.1 no fue necesario conocer la rapidez de la pelota de golf a cada instante ni la naturaleza de su trayectoria. De forma similar, la ***rapidez media*** de un automóvil que viaja de Atlanta a Chicago es función únicamente de la distancia registrada en su odómetro y del tiempo requerido para realizar el viaje. En lo que se refiere a los cálculos, no hay ninguna diferencia, ya sea que el conductor del automóvil haya tomado la ruta directa o la panorámica, o incluso si tuvo que detenerse a comer.

Debemos distinguir claramente entre la cantidad escalar *rapidez* y su contraparte direccional, la *velocidad*. Esto es fácil si recordamos la diferencia entre *distancia* y *desplazamiento* expuesta en el capítulo 3. Supongamos, como se indica en la figura 6.1, que un objeto se mue-

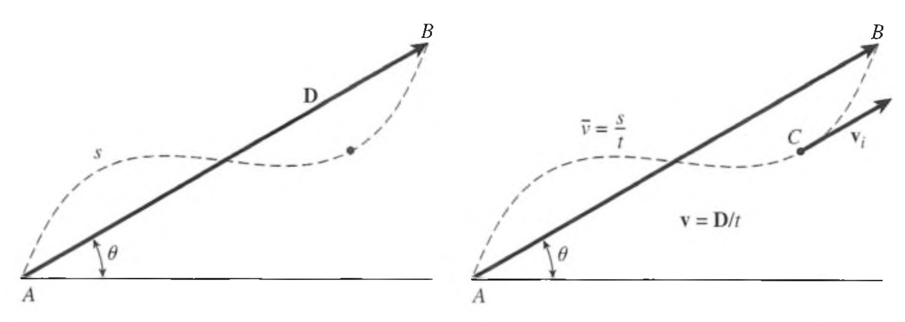


Figura 6.1 El desplazamiento y la velocidad son cantidades vectoriales, mientras que la distancia y la rapidez son independientes de la dirección; s, distancia; **D**, desplazamiento; **v**, velocidad; t, tiempo.

ve a lo largo de la trayectoria de la línea punteada, de A a B. La distancia recorrida en realidad se denota con s, mientras que el desplazamiento se representa con las coordenadas polares

$$\mathbf{D} = (D, \theta)$$

Como ejemplo, considere que la distancia s de la figura 6.1 es de 500 km y que el desplazamiento es de 350 km a 45°. Si el tiempo real de travesía es de 8 h, la rapidez media es

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{500\text{ km}}{8\text{ h}} = 62.5\text{ km/h}$$

En esta obra seguiremos la convención de usar el símbolo s para denotar las trayectorias curvas y los símbolos x y y para representar las distancias en línea recta.

La *velocidad* media, sin embargo, debe tomar en cuenta la magnitud y la dirección del desplazamiento. La velocidad media está dada por

$$\bar{v} = \frac{\mathbf{D}}{t} = \frac{350\text{ km, }45°}{8\text{ h}}$$

$$\bar{v} = 43.8\text{ km/h, }45°$$

Por lo tanto, si la trayectoria del objeto en movimiento es curva, la diferencia entre rapidez y velocidad es tanto en magnitud como en dirección.

Los automóviles no siempre pueden viajar a rapidez constante por largos espacios de tiempo. Al ir del punto A al B, quizá sea necesario ir más despacio o más rápido debido a las condiciones del camino. Por ello, a veces es útil hablar de ***rapidez instantánea*** o ***velocidad instantánea.***

La rapidez instantánea es una cantidad escalar que representa la rapidez en el instante en que el automóvil está en un punto arbitrario C. Por consiguiente, es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo.

La velocidad instantánea es una cantidad vectorial que representa la velocidad v_i en cualquier punto C. Es, en consecuencia, la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo.

FÍSICA HOY

En choques de frente, las bolsas de aire han demostrado su utilidad para prevenir lesiones en la cabeza y el pecho. En impactos con una disminución súbita en velocidades de 10 a 15 mi/h, un dispositivo detector instalado al frente del vehículo activa un sistema de encendido que causa la descomposición de gránulos de azida de sodio. Esto produce gas nitrógeno que infla las bolsas de nailon y las fuerza a salir de sus compartimientos donde están guardadas. El tiempo que transcurre entre el choque y el llenado de la bolsa es menor de 40 ms. Cuando el pasajero y la bolsa inflada hacen contacto, el gas es forzado a salir y la bolsa se desinfla en 2 s.

En este capítulo nos ocuparemos del movimiento en trayectoria recta, de modo que las magnitudes de la rapidez y la velocidad serán las mismas en cada instante. Si la dirección no cambia, la rapidez instantánea es la parte escalar de la velocidad instantánea. Sin embargo, es un buen hábito reservar el término *velocidad* para la descripción más completa del movimiento. Como veremos en secciones ulteriores, un cambio de velocidad puede originar también un cambio de dirección. En tales casos, los términos *velocidad* y *desplazamiento* son más apropiados que *rapidez* y *distancia*.

6.2 Aceleración

En la mayor parte de los casos, la velocidad de un objeto cambia mientras éste se mueve. El movimiento en el que la magnitud o la dirección cambia respecto al tiempo se llama *aceleración*. Supongamos que observa el movimiento de un corredor durante un tiempo t. La velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ del cuerpo se define como su velocidad al inicio del intervalo de tiempo (en general, $t = 0$). La velocidad final (v_f) se define como la velocidad al terminar el intervalo de tiempo (cuando $t = t$). Por tanto, si somos capaces de medir las velocidades inicial y final de un objeto en movimiento, entonces afirmaremos que su aceleración está dada por

$$\textit{Aceleración} = \frac{\textit{cambio de velocidad}}{\textit{intervalo de tiempo}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0}{t} \qquad \textbf{(6.2)}$$

Si la aceleración se escribe como en la ecuación (6.2), se trata de una cantidad vectorial y, por consiguiente, depende del cambio tanto de dirección como de magnitud. Si la dirección no se modifica y el movimiento es en línea recta, sólo la *rapidez* del objeto cambia. No obstante, si se sigue una trayectoria curva, habría aceleración aun cuando la rapidez no cambie. Para el movimiento en un círculo perfecto y con rapidez constante, la aceleración siempre formará ángulos rectos respecto a la velocidad. Más adelante abordaremos este movimiento circular uniforme.

6.3 Movimiento uniformemente acelerado

El tipo de aceleración más sencillo es el movimiento rectilíneo, en el que la rapidez cambia a razón constante. Este tipo especial de movimiento se conoce como movimiento ***uniformemente acelerado*** o de ***aceleración uniforme***. Puesto que no hay cambio en la dirección, la diferencia de vectores en la ecuación (6.2) se transforma simplemente en la diferencia entre los valores con signo de las velocidades final e inicial. Sin embargo, conviene recordar que la velocidad sigue siendo una cantidad vectorial y que el signo asignado a ella indica la *dirección* y no la *magnitud*. Para una aceleración constante escribimos

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \tag{6.3}$$

Por ejemplo, considere un automóvil que se mueve con aceleración uniforme de una rapidez inicial de 12 m/s a una final de 22 m/s, como se indica en la figura 6.2. Si consideramos la dirección a la derecha como positiva, la velocidad del auto en A es de $+12$ m/s y su velocidad final en B es de $+22$ m/s. Si el incremento en la velocidad requiere 5 s, la aceleración puede determinarse a partir de la ecuación (6.2).

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{22\text{ m/s} - 12\text{ m/s}}{5\text{ s}}$$

$$= \frac{10\text{ m/s}}{5\text{ s}} = 2\text{ m/s}^2$$

La respuesta se lee como *dos metros por segundo por segundo* o *dos metros por segundo al cuadrado*. Esto significa que cada segundo el automóvil incrementa su rapidez en 2 m/s. Puesto que el auto ya iba a 12 m/s cuando empezamos a contar el tiempo, después de 1, 2 y 3 s tendría valores para la rapidez de 14, 16 y 18 m/s, respectivamente.

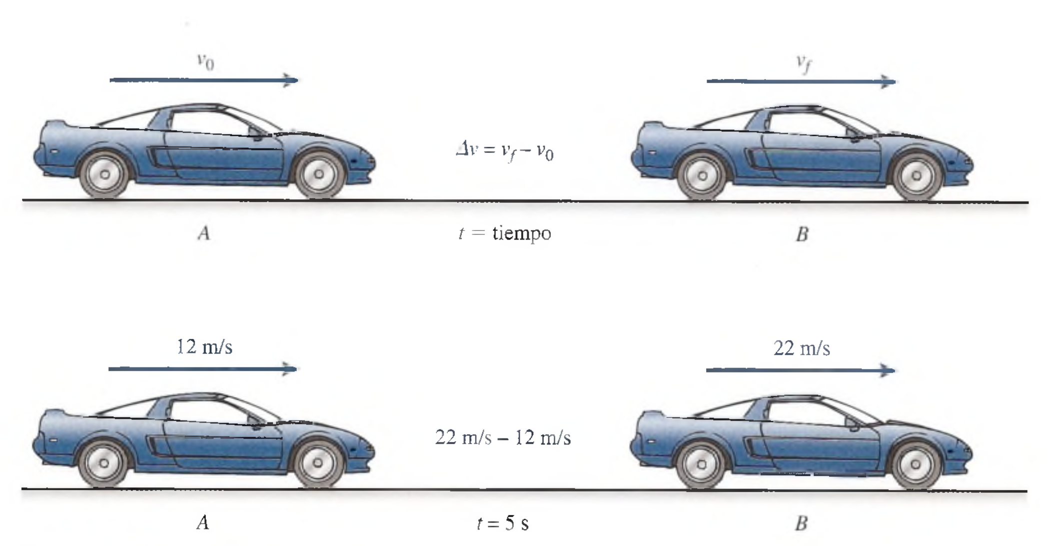


Figura 6.2 Movimiento uniformemente acelerado.

Ejemplo 6.2

Un tren reduce su velocidad de 60 a 20 km/h en un tiempo de 8 s. Encuentre la aceleración en unidades del SI.

Plan: Primero debe realizarse la conversión a unidades del SI (m/s). Luego hay que recordar que la aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo.

Solución: La velocidad inicial es

$$60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 16.7\text{ m/s}$$

De igual forma, se determina que 20 km/h es igual a 5.56 m/s. Como las velocidades siguen la misma dirección y muestran la misma aceleración se suponen constantes, entonces la ecuación (6.3) resulta en

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{5.56\text{ m/s} - 16.7\text{ m/s}}{8\text{ s}}$$

$$a = -1.39\text{ m/s}^2$$

Como la dirección original del tren del ejemplo 6.2 se consideró positiva, el signo negativo de la aceleración significa que el tren redujo su rapidez en 1.39 m/s cada segundo. Tal movimiento se conoce a veces como *desaceleración*, pero este término resulta problemático porque $a = -1.39\text{ m/s}^2$ significa en realidad que la velocidad se *vuelve más negativa* en esa cantidad cada segundo. Si la rapidez se incrementa en dirección negativa, la aceleración también es negativa. La aceleración se refiere al *cambio* de velocidad, lo cual significa que puede tratarse de un incremento o una disminución de la rapidez.

A menudo se usa la misma ecuación para calcular diferentes cantidades; por tanto, debe resolverla literalmente para cada símbolo que aparece en ella. Una forma práctica de escribir la ecuación (6.3) se presenta cuando se despeja la velocidad final, como sigue

Velocidad final = velocidad inicial + cambio de velocidad

$$v_f = v_0 + at \tag{6.4}$$

Ejemplo 6.3

Un automóvil mantiene una aceleración constante de 8 m/s². Si su velocidad inicial era de 20 m/s al norte, ¿cuál será su velocidad después de 6 s?

Plan: La velocidad inicial aumentará en 8 m/s cada segundo que el auto se desplace. Para obtener la velocidad final sólo se requiere sumar este cambio a la velocidad inicial.

Solución: La velocidad final se obtiene a partir de la ecuación (6.4).

$$v_f = v_0 + at = 20\text{ m/s} + (8\text{ m/s}^2)(6\text{ s})$$
$$= 20\text{ m/s} + 48\text{ m/s} = 68\text{ m/s}$$

Así, la velocidad final es de 68 m/s, también al norte.

Ahora que se han comprendido los conceptos de velocidad inicial y final, analicemos la ecuación de la velocidad *media* y expresémosla en términos de valores inicial y final. Mientras la aceleración sea constante, la velocidad media de un objeto se determina igual que el promedio aritmético de dos números. Dadas una velocidad inicial y una final, la velocidad media es simplemente

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_0}{2} \tag{6.5}$$

Recordará que la distancia x es el producto de la velocidad media por el tiempo. Por ende, es posible sustituir esto en la ecuación (6.1) para obtener una expresión más útil para calcular la distancia cuando la aceleración es uniforme:

$$x = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t \qquad \textbf{(6.6)}$$

Ejemplo 6.4

Un objeto en movimiento incrementa uniformemente su velocidad de 20 a 40 m/s en 2 min. ¿Cuál es la velocidad media y cuán lejos llegará en esos 2 min?

Plan: Primero convertimos los 2 min de tiempo en 120 s con el fin de obtener congruencia de unidades. Luego reconocemos que la velocidad media es el promedio entre los valores inicial y final para la aceleración constante. Por último, la distancia recorrida es el producto de la velocidad media por el tiempo.

Solución: La velocidad media se calcula con base en la ecuación (6.5).

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_0}{2} = \frac{40\text{ m/s} + 20\text{ m/s}}{2}$$

$$\bar{v} = 30\text{ m/s}$$

Se usa entonces la ecuación (6.6) para obtener la distancia recorrida en los 120 s.

$$x = (30\text{ m/s})(120\text{ s}) = 3600\text{ m}$$

6.4 Otras relaciones útiles

Hasta ahora hemos presentado dos relaciones fundamentales. Una surgió de la definición de velocidad y la otra de la definición de aceleración. Se trata de las siguientes:

$$x = \bar{v}t = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t \qquad \textbf{(6.6)}$$

y

$$v_f = v_0 + at \qquad \textbf{(6.4)}$$

Aunque éstas son las únicas fórmulas necesarias para abordar los múltiples problemas que se presentan en este capítulo, hay otras tres relaciones útiles que pueden obtenerse a partir de ellas. La primera se deduce eliminando la velocidad final de las ecuaciones (6.6) y (6.4). Sustituyendo ésta en aquélla se obtiene

$$x = \left[\frac{(v_0 + at) + v_0}{2}\right]t$$

Al simplificar se obtiene

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \textbf{(6.7)}$$

Una ecuación similar se obtiene eliminando v_0 en las mismas dos ecuaciones:

$$x = v_ft - \frac{1}{2}at^2 \qquad \textbf{(6.8)}$$

La tercera ecuación se obtiene mediante la eliminación del tiempo t en las ecuaciones básicas. Con un poco de álgebra se obtiene

$$2ax = v_f^2 - v_0^2 \tag{6.9}$$

A pesar de que estas ecuaciones no nos proporcionan información nueva, son útiles para resolver problemas donde se conocen tres de los parámetros y es necesario hallar uno de los otros dos.

6.5 Resolución de problemas de aceleración

Aunque la resolución de problemas en los que interviene una aceleración constante se basa fundamentalmente en elegir la fórmula correcta y sustituir los valores conocidos, hay varias sugerencias para ayudar al alumno principiante. Los problemas con frecuencia se refieren al movimiento que parte de un estado de reposo o, bien, se detiene a partir de cierta velocidad inicial. En cualquier caso, las fórmulas presentadas pueden simplificarse por la sustitución ya sea de $v_0 = 0$ o $v_f = 0$, según el caso. En la tabla 6.1 se resumen las fórmulas generales.

Tabla 6.1

Resumen de fórmulas de la aceleración

(1) $x = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$	(4) $x = v_f t - \frac{1}{2}at^2$
(2) $v_f = v_0 + at$	(5) $2ax = v_f^2 - v_0^2$
(3) $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	

Un análisis más detallado de las cinco ecuaciones generales revela un total de cinco parámetros: x, v_0, v_f, a y t. Si se conocen tres de estas cantidades, las dos restantes pueden calcularse a partir de las ecuaciones generales. Por tanto, el punto de partida para resolver cualquier problema consiste en leerlo cuidadosamente a fin de detectar las tres cantidades necesarias para resolverlo. También es importante elegir una dirección como la positiva y aplicar congruentemente este criterio a la velocidad, al desplazamiento y a la aceleración cuando se sustituyan sus valores en las ecuaciones.

Si se le dificulta decidir qué ecuación debe usar, puede ser útil recordar las condiciones que requiere satisfacer cada ecuación. Primero, debe incluir el parámetro desconocido. Segundo, es necesario conocer todos los demás parámetros que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, si en un problema se conocen los valores de v_f, v_0 y t, es posible determinar a en la ecuación (2) de la tabla 6.1.

Estrategia para resolver problemas

Problemas de aceleración constante

1. Lea el problema; luego trace un bosquejo y escriba en él los datos.
2. Indique la dirección positiva de forma congruente.
3. Establezca los tres parámetros conocidos y los dos desconocidos. Asegúrese de que los signos y las unidades son congruentes.

   Dados: __________ Encontrar: __________

   __________ __________

   __________ __________

4. Seleccione la ecuación que incluya uno de los parámetros desconocidos, pero no al otro.

$$x = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t \qquad 2ax = v_f^2 - v_0^2$$

$$v_f = v_0 + at \qquad x = v_f t - \frac{1}{2}at^2$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

5. Sustituya las cantidades conocidas y resuelva la ecuación.

Los ejemplos siguientes se han abreviado y no incluyen los bosquejos, pero sí ejemplifican el proceso anteriormente expuesto.

Ejemplo 6.5

Una lancha de motor parte del reposo y alcanza una velocidad de 15 m/s en un tiempo de 6 s. ¿Cuál era su aceleración y cuán lejos viajó?

Plan: Se traza un bosquejo y se escriben en él los datos conocidos, además de que se indica la dirección positiva de forma congruente con la velocidad inicial. Se organizan los datos conocidos, se eligen las ecuaciones apropiadas y se resuelve para la aceleración y la distancia recorrida.

Solución: En este caso, todos los parámetros proporcionados son positivos:

Dados: $v_0 = 0$ Encontrar: $a = ?$
$v_f = 15$ m/s $x = ?$
$t = 6$ s

Para encontrar la aceleración debemos elegir una ecuación que incluya a pero no x. Puede usarse la ecuación (2) de la tabla 6.1, y en ella $v_0 = 0$. Así,

$$v_f = 0 + at \quad \text{o} \quad v_f = at$$

Al resolver para la aceleración a, se obtiene

$$a = \frac{v_f}{t} = \frac{15 \text{ m/s}}{6 \text{ s}}$$
$$= 2.50 \text{ m/s}^2$$

El desplazamiento puede hallarse con base en una ecuación que incluya x pero no a. La ecuación (1) de la tabla 6.1 produce

$$x = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t = \frac{(15 \text{ m/s} + 0)(6 \text{ s})}{2}$$
$$x = 45.0 \text{ m}$$

Note que como se conoce la aceleración a, pudimos haber despejado x en las ecuaciones (3), (4) o (5); sin embargo, eso hubiera supuesto emplear el valor *calculado* de a, que podría ser incorrecto. Es mejor usar la información original.

Ejemplo 6.6

Un avión aterriza en la cubierta de un portaaviones con una velocidad inicial de 90 m/s y se detiene por completo en una distancia de 100 m. Encuentre la aceleración y el tiempo necesario para detenerlo.

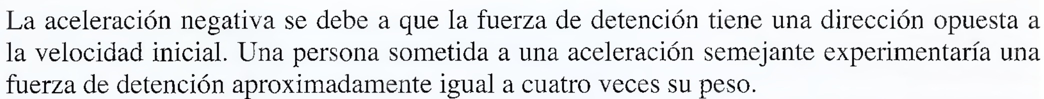
Plan: Se sigue el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores. Se elegirá con cuidado la ecuación que incluya sólo la información original.

Solución:

Dados: $v_0 = 90$ m/s Encontrar: $a = ?$
$v_f = 0$ m/s $t = ?$
$x = 100$ m

Tras examinar la tabla 6.1, seleccionamos la ecuación (5) como la que contiene a y no t:

$$2ax = v_f^2 - v_0^2$$
$$a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(0)^2 - (90 \text{ m/s})^2}{2(100 \text{ m})}$$
$$a = -40.5 \text{ m/s}^2$$



La aceleración negativa se debe a que la fuerza de detención tiene una dirección opuesta a la velocidad inicial. Una persona sometida a una aceleración semejante experimentaría una fuerza de detención aproximadamente igual a cuatro veces su peso.

A continuación hallamos el tiempo de detención eligiendo la ecuación donde aparece t y no a. De nuevo, la ecuación (1) es la correcta

$$x = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t \qquad \text{o} \qquad t = \frac{2x}{v_f + v_0}$$

$$t = \frac{2(100 \text{ m})}{0 + 90 \text{ m/s}} = 2.22 \text{ s}$$

El avión experimenta una aceleración de -40.5 m/s^2 y se detiene en un tiempo de 2.22 s.

Ejemplo 6.7

Un tren que viaja inicialmente a 16 m/s se acelera constantemente a razón de 2 m/s² en la misma dirección. ¿Cuán lejos viajará en 20 s? ¿Cuál será su velocidad final?

Plan: Se ordenan los datos y se despejan las incógnitas de las ecuaciones.

Solución:

Dados: $v_0 = 16 \text{ m/s}$ Encontrar: $x = ?$

$a = 2 \text{ m/s}^2$ $v_f = ?$

$t = 20 \text{ s}$

Al elegir la ecuación (3) de la tabla 6.1, ya que contiene x y no v_f, se obtiene

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= (16 \text{ m/s})(20 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s})^2$$

$$= 320 \text{ m} + 400 \text{ m} = 720 \text{ m}$$

La velocidad final se halla a partir de la ecuación (2):

$$v_f = v_0 + at$$

$$= 16 \text{ m/s} + (2 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s}) = 56.0 \text{ m/s}$$

El tren recorre una distancia de 720 m y alcanza una velocidad de 56 m/s.

6.6 Convención de signos en problemas de aceleración

Los signos de aceleración (a), desplazamiento (x) y velocidad (v) son interdependientes, y cada uno se determina por criterios distintos. Tal vez éste sea el aspecto que más confunde a los alumnos principiantes. Siempre que cambia la dirección del movimiento, como cuando un objeto es arrojado al aire o cuando se sujeta un objeto a un resorte que oscila, el signo correspondiente al desplazamiento y a la aceleración resulta particularmente difícil de visualizar. Es útil recordar que *sólo* el signo de la velocidad se determina por la dirección del movimiento. El del desplazamiento depende de la ubicación o la posición del objeto, en tanto que el de la aceleración queda determinado por la fuerza que hace que la velocidad cambie.

Imagine una pelota de beisbol lanzada hacia arriba, como se indica en la figura 6.3. La pelota se mueve hacia arriba en línea recta hasta que se detiene y regresa siguiendo una trayectoria descendente en la misma línea. Consideraremos el punto de lanzamiento como el de desplazamiento cero ($y = 0$). Ahora, el signo del desplazamiento será *positivo* en cualquier punto ubicado *arriba* del lanzamiento y *negativo* en cualquier punto por *debajo* de él. Observe que no importa si la pelota se está moviendo *hacia arriba* o *hacia abajo*; sólo su *ubicación* (la coordenada y de su posición) es la que determina el signo del desplazamiento. El valor de y podría ser $+1$ m en su movimiento hacia arriba y $+1$ m en su movimiento hacia abajo. Su desplazamiento se vuelve negativo sólo cuando la pelota se encuentra por *debajo* del punto de lanzamiento.

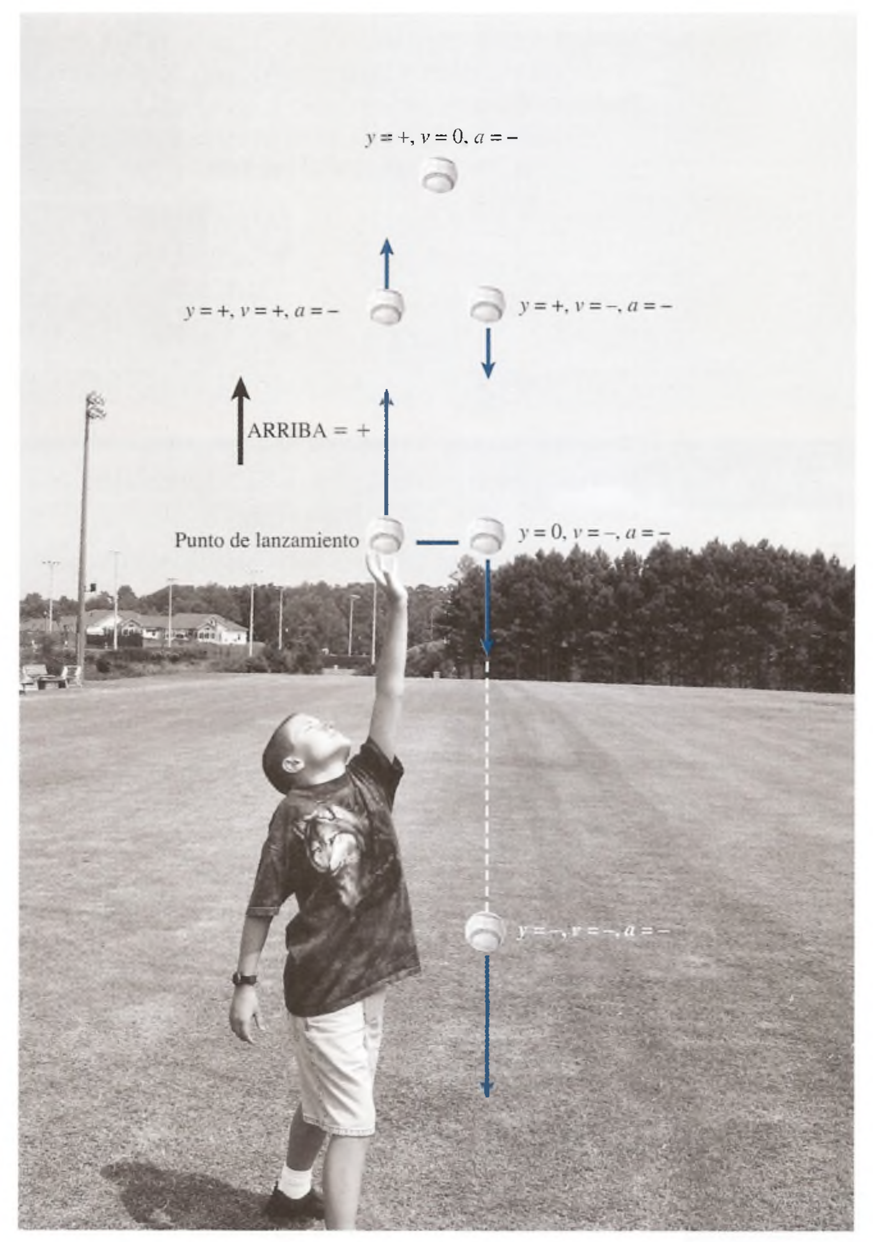


Figura 6.3
(Fotografía de Paul E. Tippens.)

Observe ahora los signos de la velocidad durante el vuelo de la pelota. Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva, la velocidad de la pelota es positiva siempre que su movimiento se dirige hacia arriba y negativa cada vez que su movimiento va hacia abajo. No importa que la velocidad cambie con el tiempo, ni tampoco su ubicación en el espacio.

Por último, considere la aceleración de la pelota durante su vuelo. La única fuerza que actúa sobre ella durante su recorrido es su peso, el cual siempre está dirigido hacia abajo. Por tanto, el signo de la aceleración es negativo (hacia abajo) durante todo el movimiento. Observe que la aceleración es negativa cuando la pelota se mueve hacia arriba y también cuando se mueve hacia abajo. En esencia, la velocidad se vuelve en todo momento más negativa. Incluso cuando la velocidad pasa por cero en la parte más alta, la aceleración permanece constante en dirección hacia abajo. Para determinar si la aceleración de un objeto es positiva o negativa, no debemos considerar su ubicación ni la dirección de su movimiento; más bien debemos tener en cuenta la dirección de la fuerza que causa el cambio de velocidad. En este ejemplo, esa fuerza es el peso del objeto.

Una vez que se ha elegido la dirección positiva, con las convenciones siguientes se determinarán los signos de la ***velocidad,*** el ***desplazamiento*** y la ***aceleración:***

El desplazamiento es positivo o negativo de acuerdo con la ubicación o posición del objeto en relación con su posición cero.

La velocidad es positiva o negativa según la dirección del movimiento: si está en favor o en contra de la dirección elegida como positiva.

La aceleración es positiva o negativa según esté la fuerza resultante a favor o en contra de la dirección elegida como positiva.

6.7 Gravedad y cuerpos en caída libre

Gran parte de nuestros conocimientos sobre la física de los cuerpos en caída libre se deben al científico italiano Galileo Galilei (1564-1642). Él fue el primero en deducir que en ausencia de fricción, todos los cuerpos, grandes o pequeños, pesados o ligeros, caen a la Tierra con la misma aceleración. Ésa es una idea revolucionaria porque contradice lo que una persona pudiera suponer. Antes de la época de Galileo, la gente seguía las enseñanzas de Aristóteles, según las cuales los objetos pesados caían proporcionalmente más rápido que los ligeros. La explicación clásica de la paradoja radica en el hecho de que los cuerpos pesados son proporcionadamente más difíciles de ser acelerados. Esta resistencia al cambio de movimiento es una propiedad de los cuerpos llamada ***inercia.*** Por tanto, en el vacío, una pluma y una bola de acero caerán al mismo tiempo porque el efecto inercial mayor de la bola de acero se compensa exactamente con su mayor peso (véase la figura 6.4.)

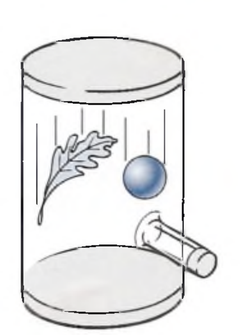


Figura 6.4 En el vacío todos los cuerpos caen con igual aceleración.

En la explicación de los cuerpos en caída libre de este capítulo se despreciarán totalmente los efectos de la fricción debida al aire. En estas circunstancias, la ***aceleración gravitacional*** corresponde a un movimiento uniformemente acelerado. Dicha aceleración se ha medido en el nivel del mar y a una latitud de 45°, y su valor es de 32.17 ft/s², o 9.806 m/s², y se representa con g. Para nuestros propósitos, los valores siguientes son suficientemente precisos:

$$g = \pm 9.80 \text{ m/s}^2 \qquad g = \pm 32.0 \text{ ft/s}^2 \qquad \textbf{(6.10)}$$

Puesto que la aceleración gravitacional es una aceleración constante, se aplican las mismas ecuaciones generales del movimiento. Sin embargo, uno de los parámetros se conoce de antemano y no necesita darse como dato en el problema. Si la constante g se incluye en las ecuaciones generales (tabla 6.1), resultan las formas siguientes:

$$\text{(1a)} \quad y = \frac{v_f + v_0}{2}t \qquad y = \bar{v}t$$

$$\text{(2a)} \quad v_f = v_0 + gt$$

$$\text{(3a)} \quad y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{(4a)} \quad y = v_f t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{(5a)} \quad 2gy = v_f^2 - v_0^2$$

Antes de utilizar estas ecuaciones conviene hacer algunos comentarios generales. En problemas referidos a cuerpos en caída libre es de suma importancia elegir una dirección como la positiva y seguir ese criterio en forma sistemática al sustituir los valores conocidos. El signo de la respuesta es necesario para determinar la ubicación de un punto o la dirección de la velocidad en instantes específicos. Por ejemplo, la distancia y en las ecuaciones anteriores representa el desplazamiento arriba o abajo del origen. Si la dirección ascendente se elige como positiva, un valor positivo de y indica un desplazamiento por arriba del punto de partida; si y es negativa, representa un desplazamiento por debajo de ese punto. De igual forma, los signos de v_0, v_f y g indican sus direcciones.

Ejemplo 6.8 Una pelota de hule se deja caer del reposo, como se muestra en la figura 6.5. Encuentre su velocidad y su posición después de 1, 2, 3 y 4 s.

Plan: Como todos los parámetros se medirán *hacia abajo*, es más práctico elegir la dirección descendente como *positiva*, de forma que aquéllos resulten positivos.

Solución: Organizando los datos tenemos:

Dados: $v_0 = 0$ Encontrar: $v_f = ?$

$g = +9.80 \text{ m/s}^2$ $y = ?$

$t = 1, 2, 3, 4 \text{ s}$

La velocidad hacia abajo en función del tiempo aparece en la ecuación (2a), donde $v_0 = 0$.

$$v_f = v_0 + gt = 0 + gt$$
$$= (9.80 \text{ m/s}^2)t$$

Después de 1 s tenemos

$$v_f = (9.80 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s}) = 9.80 \text{ m/s} \qquad \text{(hacia abajo)}$$

Con las sustituciones para $t = 2$, 3 y 4 s se obtienen velocidades finales de 19.6, 29.4 y 39.2 m/s, respectivamente. Todas estas velocidades son positivas porque se eligió la dirección descendente como positiva.

La y positiva en función del tiempo se calcula a partir de la ecuación (3a). Como la velocidad inicial es cero, escribimos

$$y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

Después del tiempo de 1 s, el desplazamiento descendente será

$$y = \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s})^2 = 4.90 \text{ m}$$

Figura 6.5 Un cuerpo en caída libre tiene una aceleración constante hacia abajo de 9.80 m/s^2.

Cálculos semejantes para $t = 2$, 3 y 4 s producen desplazamientos de 19.6, 44.1 y 78.4 m, respectivamente. Note que cada desplazamiento es positivo (en dirección descendente). Los resultados se resumen en la tabla 6.2.

Tabla 6.2

Velocidades y desplazamientos de una pelota arrojada desde el reposo

Tiempo t, s	Velocidad al final del tiempo t, m/s	Desplazamiento al final del tiempo t, m
0	0	0
1	9.80	4.90
2	19.6	19.6
3	29.4	44.1
4	39.2	78.4

Ejemplo 6.9

Suponga que una pelota se arroja hacia arriba con una velocidad inicial de 96 ft/s; explique, sin utilizar ecuaciones, cómo el movimiento ascendente es exactamente inverso al movimiento descendente.

Solución: Vamos a suponer que la dirección hacia arriba es positiva, lo que hace que la aceleración debida a la gravedad sea igual a -32 ft/s^2. El signo negativo indica que un objeto arrojado verticalmente hacia arriba verá reducida su velocidad en 32 ft/s cada segundo que se eleve. (Véase la figura 6.6.)

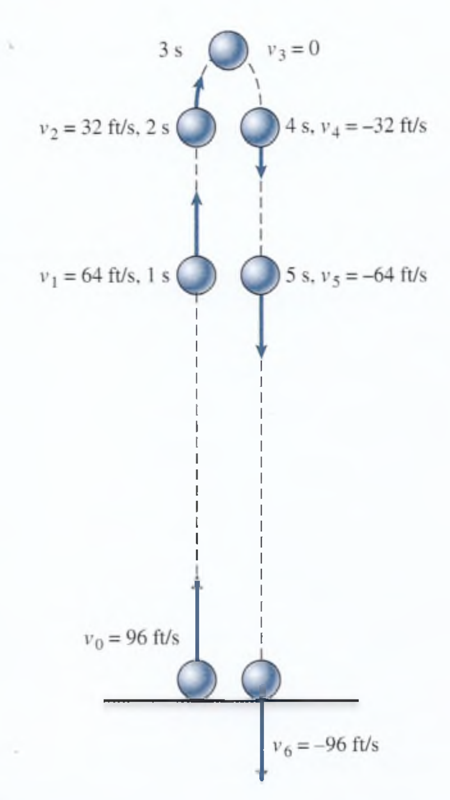


Figura 6.6 Una pelota arrojada verticalmente hacia arriba vuelve al suelo con la misma velocidad.

Si su velocidad inicial es 96 ft/s, su velocidad después de 1 s se reducirá a 64 ft/s. Después de 2 s su velocidad será de 32 ft/s, y después de 3 s su velocidad queda reducida a cero. Cuando la velocidad llega a cero, la pelota ha alcanzado su máxima altura y empieza a caer libremente partiendo del reposo. Sin embargo, ahora la velocidad de la pelota va a incrementarse en 32 ft/s cada segundo, ya que tanto la dirección del movimiento como la aceleración de la gravedad están en la dirección negativa. Su velocidad después de 4, 5 y 6 s será de −32, −64 y −96 ft/s², respectivamente. Excepto por el signo, que indica la dirección del movimiento, las velocidades son las mismas a iguales alturas en relación con el piso.

Ejemplo 6.10

Una pelota de beisbol arrojada verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio alto tiene una velocidad inicial de 20 m/s. (a) Calcule el tiempo necesario para que alcance la altura máxima. (b) Determine la altura máxima. (c) Determine su posición y su velocidad después de 1.5 s. (d) ¿Cuáles son su posición y su velocidad después de 5 s? (Véase la figura 6.7.)

Plan: Elegimos la dirección ascendente como positiva, puesto que la velocidad inicial se dirige hacia arriba. Ello significa que la aceleración será −9.8 m/s² para todos los incisos. En cada parte del problema adoptaremos la misma estrategia aplicada a los problemas de aceleración en general.

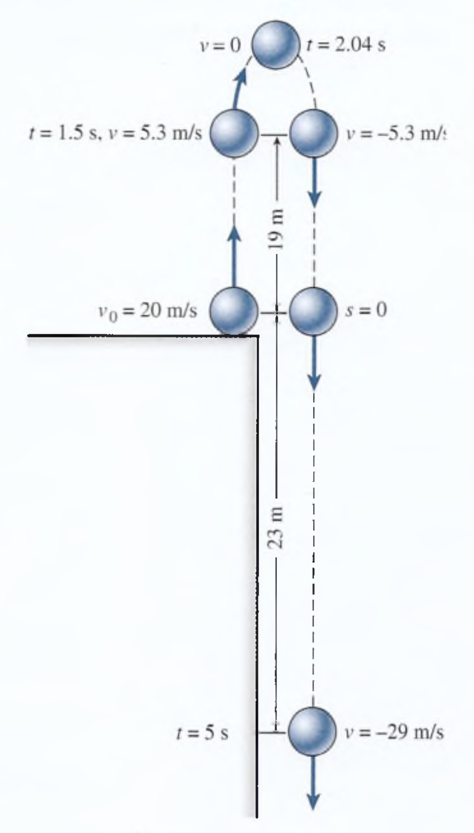


Figura 6.7 Una pelota arrojada verticalmente hacia arriba asciende hasta que su velocidad es cero; entonces cae con creciente velocidad hacia abajo.

Solución (a): El tiempo para alcanzar la altura máxima se halla tras reconocer que la velocidad de la pelota será igual a cero en ese punto. Los datos se ordenan como sigue:

Dados: $v_0 = 20$ m/s Encontrar: $t = ?$
$v_f = 0$ $y = ?$
$g = -9.8$ m/s²

El tiempo requerido para llegar a la altura máxima se determina a partir de la ecuación (2a):

$$t = \frac{v_f - v_0}{g} = -\frac{v_0}{g}$$
$$= \frac{-20 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ s}$$

Solución (b): La altura máxima se halla igualando $v_f = 0$ en la ecuación (1a).

$$y = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t = \frac{v_0}{2}t$$
$$= \frac{20 \text{ m/s}}{2}(2.04 \text{ s}) = 20.4 \text{ m}$$

Solución (c): Para determinar la posición y la velocidad después de 1.5 s debemos establecer condiciones nuevas

Dados: $v_0 = 20$ m/s Encontrar: $y = ?$
$g = -9.8$ m/s² $v_f = ?$
$t = 1.5$ s

Ahora podemos calcular la posición como sigue:

$$y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (20 \text{ m/s})(1.5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ s})^2$$
$$= 30 \text{ m} - 11 \text{ m} = 19 \text{ m}$$

La velocidad después de 1.5 s se obtiene con

$$v_f = v_0 + gt$$
$$= 20 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ s})$$
$$= 20 \text{ m/s} - 14.7 \text{ m/s} = 5.3 \text{ m/s}$$

Solución (d): Las mismas ecuaciones se aplican para determinar la posición y la velocidad después de 5 s. Por tanto,

$$y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (20 \text{ m/s})(5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2$$
$$= 100 \text{ m} - 123 \text{ m} = -23 \text{ m}$$

El signo negativo indica que la pelota se halla a 23 m por debajo del punto de lanzamiento.

La velocidad después de 5 s está dada por

$$\begin{aligned} v_f &= v_0 + gt \\ &= 20 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) \\ &= 20 \text{ m/s} - 49 \text{ m/s} = -29 \text{ m/s} \end{aligned}$$

En este caso, el signo negativo indica que la pelota se desplaza hacia abajo.

6.8 Movimiento de proyectiles

Hemos visto que los objetos lanzados verticalmente hacia arriba o hacia abajo, o que se dejan caer a partir del reposo sufren una aceleración uniforme en el campo gravitacional de la Tierra. Ahora estudiaremos el caso más general de un cuerpo que se lanza libremente, en una dirección no vertical, en un campo gravitacional, como se observa en la figura 6.8, donde una pelota de futbol se patea hacia el espacio. En ausencia de fricción, ese movimiento es otro ejemplo de aceleración uniforme o constante.

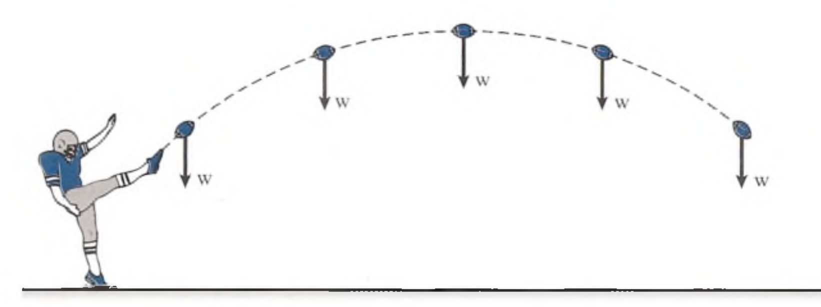


Figura 6.8 Una pelota de futbol pateada es un proyectil que se lanza libremente al espacio sólo bajo la influencia de la gravedad. Si se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre ella es su peso.

Un objeto que se lanza al espacio sin fuerza de propulsión propia recibe el nombre de ***proyectil***. Si se desprecia la resistencia ejercida por el aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso W, que provoca que su trayectoria se desvíe de una línea recta. El proyectil experimenta una aceleración constante hacia abajo debido a la fuerza gravitacional que se ejerce hacia el centro de la Tierra; pero difiere de los movimientos estudiados previamente pues, en general, la dirección de la gravedad no coincide con la dirección de la velocidad inicial. Como ninguna fuerza actúa horizontalmente para cambiar la velocidad, la aceleración horizontal es cero; esto produce una velocidad horizontal constante. Por otra parte, la fuerza de gravedad hacia abajo causa que la velocidad vertical cambie uniformemente. Por ende, en condiciones normales el movimiento de un proyectil ocurre en dos dimensiones y debe ser estudiado en esa forma.

6.9 Proyección horizontal

Si un objeto se proyecta horizontalmente, la mejor manera de describir su movimiento es considerar por separado el movimiento horizontal y el vertical. Por ejemplo, en la figura 6.9 un dispositivo electrónico está ajustado para proyectar al mismo tiempo una pelota horizontalmente, mientras deja caer otra, desde su posición de reposo, a la misma altura. La velocidad horizontal de la pelota proyectada no cambia, como lo indican las flechas, que son de la misma longitud a lo largo de toda su trayectoria. La velocidad vertical, por otra parte, es cero al principio y aumenta de manera uniforme de acuerdo con las ecuaciones que obtuvimos con anterioridad para el movimiento en una sola dimensión. Las pelotas golpearán el piso en el mismo instante, a pesar de que una de ellas se mueve también horizontalmente. Por tanto, los problemas se simplifican en gran medida si se calculan por separado las soluciones para sus componentes horizontal y vertical.

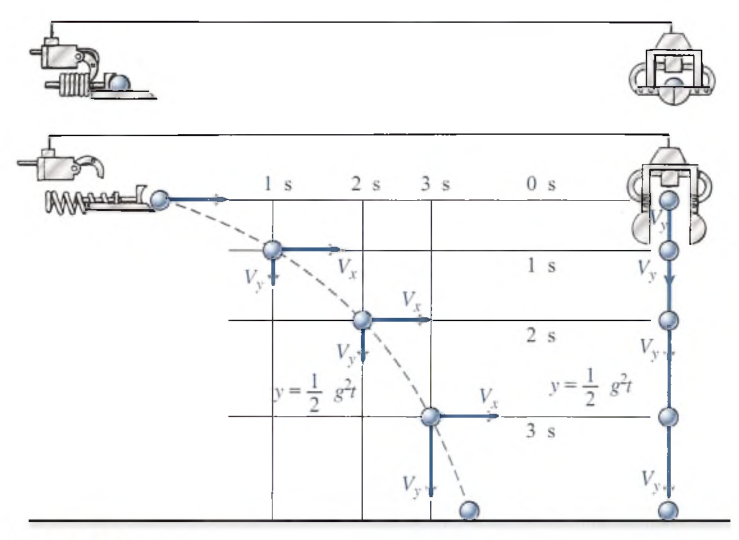


Figura 6.9

Las mismas ecuaciones generales presentadas en la tabla 6.1 para la aceleración uniforme se aplican también al movimiento de proyectiles. Sin embargo, sabemos de antemano que si la partícula se proyecta cerca de la Tierra, la aceleración vertical será igual a 9.8 m/s^2 o 32 ft/s^2 y que siempre estará dirigida hacia abajo. Entonces, si se decide que la dirección ascendente sea positiva, la aceleración de un proyectil será negativa e igual a la aceleración gravitacional. Podemos indicar las componentes de la velocidad mediante los subíndices apropiados. Por ejemplo, si queremos expresar el movimiento vertical en función del tiempo podemos escribir:

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Observe que y representa el desplazamiento vertical, v_{0y} la velocidad vertical inicial, y g la aceleración de la gravedad (normalmente -9.8 m/s^2).

Consideremos primero el movimiento de un proyectil lanzado horizontalmente en un campo gravitacional. En este caso, observamos que

$$v_{0x} = v_x \qquad v_{0y} = 0 \qquad a_x = 0 \qquad a_y = g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

porque la velocidad horizontal es constante y la velocidad vertical es inicialmente igual a cero. Por ello, los desplazamientos horizontal y vertical del proyectil pueden hallarse a partir de:

$$x = v_{0x}t \qquad \textit{Desplazamiento horizontal}$$
$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad \textit{Desplazamiento vertical} \qquad \textbf{(6.11)}$$

Como $v_f = v_0 + gt$, podemos determinar las componentes horizontal y vertical de la velocidad final a partir de

$$v_x = v_{0x} \qquad \textit{Velocidad horizontal}$$
$$v_y = v_{0y} + gt \qquad \textit{Velocidad vertical} \qquad \textbf{(6.12)}$$

El desplazamiento final y la velocidad de una partícula proyectada horizontalmente pueden hallarse a partir de sus componentes. En todas las ecuaciones anteriores, el símbolo g se interpreta como la aceleración debida a la gravedad, la cual siempre se dirige hacia abajo. Por tanto, g será negativa si el desplazamiento hacia arriba se elige como la dirección positiva.

En la tabla 6.3 se presenta un excelente resumen de cómo pueden modificarse las fórmulas generales de la aceleración uniforme para aplicarlas a proyectiles.

Tabla 6.3

Movimiento uniformemente acelerado y proyectiles

Fórmulas de aceleración general	Modificadas para el movimiento de proyectiles	
(1) $x = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t$	$x = v_{0x}t$	$y = \left(\frac{v_y + v_{0y}}{2}\right)t$
(2) $v_f = v_0 + at$	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} + gt$
(3) $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$x = v_{0x}t$	$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$
(4) $x = v_ft - \frac{1}{2}at^2$	$x = v_{0x}t$	$y = v_yt - \frac{1}{2}gt^2$
(5) $2ax = v_f^2 - v_0^2$	$a_x = 0$	$2gy = v_y^2 - v_{0y}^2$

Ejemplo 6.11

Un esquiador inicia un salto horizontalmente con una velocidad inicial de 25 m/s, como se muestra en la figura 6.10. La altura inicial al final de la rampa es de 80 m arriba del punto de contacto con el suelo. (a) ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el esquiador? (b) ¿Cuán lejos viaja horizontalmente? (c) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad final?

Plan: Para la proyección horizontal, se observa que la velocidad vertical inicial es cero y que la velocidad horizontal no cambia. Además, si se elige como positiva la dirección descendente, la aceleración será $+9.8\ \text{m/s}^2$ y el resto de los parámetros también serán positivos. Cada inciso del problema se resuelve sustituyendo los datos proporcionados en las ecuaciones apropiadas de la tabla 6.3.

Solución (a): El tiempo que pasa en el aire sólo es función de parámetros verticales.

Dados: $v_{0y} = 0$, $a = +9.8\ \text{m/s}^2$, $y = +80$ m Encontrar: $t = ?$

Necesitamos una ecuación que incluya t y no v_f.

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Igualando $v_{0y} = 0$ y resolviendo para t se obtiene

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{y} \qquad t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

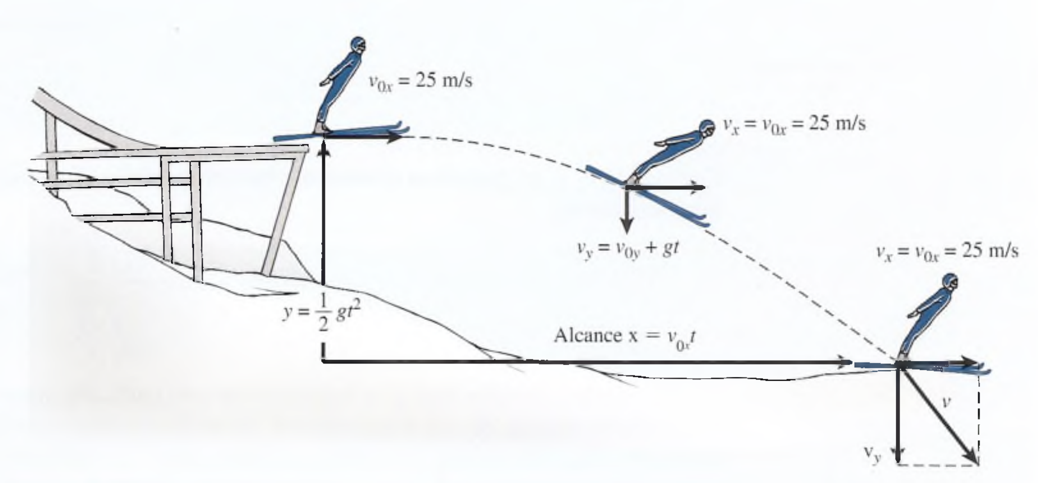


Figura 6.10 Un esquiador se lanza en un salto con una velocidad horizontal inicial de 25 m/s. Su posición y su velocidad pueden determinarse en función del tiempo.

Al sustituir con los valores dados de y y g se determina t.

$$t = \sqrt{\frac{2(80\text{ m})}{9.8\text{ m/s}^2}} \qquad \text{o} \qquad t = 4.04\text{ s}$$

Se requiere un tiempo de 4.04 s para que el esquiador llegue al suelo.

Solución (b): En vista de que la velocidad horizontal es constante, el ***alcance*** queda determinado tan sólo por el tiempo en el aire.

$$x = v_{0x}t = (25\text{ m/s})(4.04\text{ s}) = 101\text{ m}$$

Solución (c): La componente horizontal de la velocidad no cambia y, por tanto, es igual a 25 m/s en el punto de aterrizaje. La componente vertical final está dada por

$$v_y = gt = (9.8\text{ m/s}^2)(4.04\text{ s}) = 39.6\text{ m/s}$$

La componente horizontal es 25 m/s a la derecha y la componente vertical es 39.6 m/s dirigida *hacia abajo*. Recuerde que con fines prácticos se eligió la dirección descendente como positiva. Queda como ejercicio que usted demuestre que la velocidad final es 46.8 m/s a un ángulo de 57.7° por debajo de la horizontal. Ésta será la velocidad un instante antes de tocar el suelo.

6.10 El problema general de las trayectorias

El caso más general de movimiento de proyectiles se presenta cuando uno de éstos se lanza con cierto ángulo. Este problema se ilustra en la figura 6.11, donde el movimiento de un proyectil lanzado con un ángulo θ, con una velocidad inicial v_0, se compara con el movimiento de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba. Una vez más, resulta fácil advertir la ventaja de tratar por separado los movimientos horizontal y vertical. En este caso pueden usarse las ecuaciones de la tabla 6.3, y hemos de considerar la dirección hacia arriba como positiva. Por tanto, si la posición vertical y está por arriba del origen, será positiva; será negativa si está por debajo. De forma similar, las velocidades hacia arriba serán positivas. Puesto que la aceleración siempre se dirige hacia abajo, debemos dar a g un valor negativo.

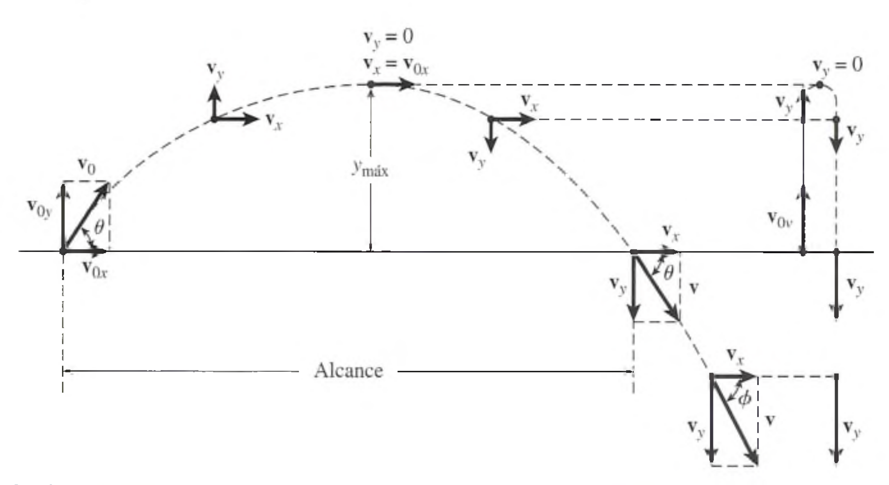


Figura 6.11 El movimiento de un proyectil lanzado con determinado ángulo se compara con el movimiento de un objeto arrojado verticalmente hacia arriba.

Estrategia para resolver problemas

Movimiento de proyectiles

1. Descomponga la velocidad inicial v_0 en sus componentes x y y:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta$$

2. Las componentes horizontal y vertical del desplazamiento en cualquier instante están dadas por

$$x = v_{0x}t$$
$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

3. Las componentes horizontales y verticales de la velocidad en cualquier instante están dadas por

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} + gt$$

4. La posición y la velocidad finales pueden determinarse a partir de sus componentes.
5. Asegúrese de utilizar los signos correctos y unidades coherentes. Recuerde que la gravedad g puede ser positiva o negativa, según su elección inicial.

Ejemplo 6.12

Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 80 m/s con un ángulo de 30° por encima de la horizontal. Determine (a) su posición y velocidad después de 6 s, (b) el tiempo necesario para que alcance su altura máxima, y (c) el alcance horizontal R, como se indica en la figura 6.11.

Plan: Esta vez elegimos como positiva la dirección hacia arriba, lo que hace que $g = -9.8$ m/s². Como el disparo tiene un ángulo, trabajaremos con las componentes inicial y final de la velocidad. Al tratar por separado el movimiento vertical del horizontal podemos resolver el problema para cada una de las incógnitas del ejemplo.

Solución (a): Las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = (80 \text{ m/s}) \cos 30° = 69.3 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta = (80 \text{ m/s}) \text{ sen } 30° = 40.0 \text{ m/s}$$

La componente x de su posición después de 6 s es

$$x = v_{0x}t = (69.3 \text{ m/s})(6 \text{ s}) = 416 \text{ m}$$

La componente y de su posición en ese lapso es

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

de donde

$$y = (40 \text{ m/s})(6 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(6 \text{ s})^2$$
$$y = 240 \text{ m} - 176 \text{ m} = 64.0 \text{ m}$$

La posición después de 6 s es de 416 m con una trayectoria hacia abajo y 64.0 m arriba de su posición inicial.

Para calcular su velocidad en este punto, primero debemos reconocer que la componente x de la velocidad no cambia. Por tanto,

$$v_x = v_{0x} = 69.3 \text{ m/s}$$

La componente y de la velocidad debe calcularse a partir de

$$v_y = v_{0y} + gt$$

de modo que

$$v_y = 40\text{ m/s} + (-9.8\text{ m/s}^2)(6\text{ s})$$
$$v_y = 40\text{ m/s} - 58.8\text{ m/s}$$
$$v_y = -18.8\text{ m/s}$$

El signo negativo indica que el proyectil ha rebasado el punto más alto y ahora su recorrido es descendente. Por último, es preciso calcular la velocidad resultante después de 6 s a partir de sus componentes, como se muestra en la figura 6.12.

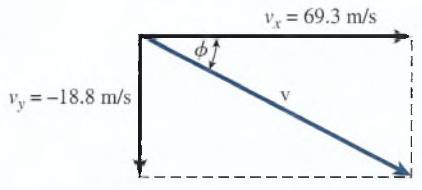


Figura 6.12

La magnitud de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(69.3\text{ m/s})^2 + (-18.8\text{ m/s})^2} = 71.8\text{ m/s}$$

El ángulo se determina con base en la función tangente

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = \left|\frac{-18.8\text{ m/s}}{69.3\text{ m/s}}\right| = 0.271$$
$$\phi = 15.2°\text{ S del E}$$

Solución (b): En el punto máximo de la trayectoria del proyectil, la componente y de su velocidad es igual a cero. Así, el tiempo para llegar a esa altura se calcula a partir de

$$v_y = v_{0y} + gt \qquad \text{donde} \qquad v_y = 0$$
$$0 = (40\text{ m/s}) + (-9.8\text{ m/s}^2)t$$

Al resolver para t se obtiene

$$t = \frac{40\text{ m/s}}{9.8\text{ m/s}^2} = 4.08\text{ s}$$

Como ejercicio, debe usar este resultado para demostrar que la altura máxima de la trayectoria es de 81.6 m.

Solución (c): El alcance del proyectil puede calcularse reconociendo que el tiempo total (t') del vuelo completo es igual a dos veces el tiempo que demora en llegar al punto más alto. En consecuencia

$$t' = 2(4.08\text{ s}) = 8.16\text{ s}$$

y el alcance es de

$$R = v_0xt' = (69.3\text{ m/s})(8.16\text{ s})$$
$$= 565\text{ m}$$

En este ejemplo se observa que el proyectil se eleva a una altura máxima de 81.6 m en un tiempo de 4.08 s. Después de 6 s alcanza un punto de 416 m con trayectoria hacia abajo y 64.0 m arriba del punto de partida. En ese punto su velocidad es de 71.8 m/s en una dirección de 15° debajo de la horizontal. El alcance total es de 565 m.

Resumen y repaso

Resumen

Una forma práctica de describir objetos en movimiento consiste en analizar su *velocidad* o su *aceleración*. En este capítulo se presentaron diversas aplicaciones que incluyen esas cantidades físicas.

- La *velocidad media* es la distancia recorrida por unidad de tiempo, y la *aceleración media* es el cambio de velocidad por unidad de tiempo

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \qquad a = \frac{v_f - v_0}{t}$$

- Las definiciones de velocidad y aceleración conducen al establecimiento de cinco ecuaciones básicas correspondientes al movimiento uniformemente acelerado:

$$x = \left(\frac{v_0 + v_f}{x}\right)t$$

$$v_f = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = v_f t - \frac{1}{2}at^2$$

$$2ax = v_f^2 - v_0^2$$

Si se conocen tres de los cinco parámetros (v_0, v_f, a, x, y t), los otros dos se determinan a partir de una de estas ecuaciones.

- Para resolver problemas de aceleración, lea el problema analizando cuáles son los tres parámetros proporcionados y cuáles son los dos desconocidos. Puede escribir columnas como éstas:

Dados: $a = 4$ m/s^2	Encontrar: $v_f = ?$
$x = 500$ m	$v_0 = ?$
$t = 20$ s	

Este procedimiento le ayuda a elegir la ecuación apropiada. Recuerde que debe elegir una dirección como positiva y aplicar sistemáticamente este criterio en toda la resolución del problema.

- *Aceleración gravitacional*: los problemas relativos a la aceleración gravitacional pueden resolverse de forma similar a otros problemas de aceleración. En este caso, uno de los parámetros se conoce de antemano:

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2 \text{ o } 32 \text{ ft/s}^2$$

El signo de la aceleración gravitacional es + o −, según se elija la dirección positiva hacia arriba o hacia abajo.

- *Movimiento de proyectiles*: la clave para resolver problemas que incluyen movimiento de proyectiles es tratar el movimiento horizontal y el vertical por separado. La mayor parte de los problemas de proyectiles se resuelven utilizando el siguiente procedimiento:
  - Descomponga la velocidad inicial v_0 en sus componentes x y y:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$$

  - Las componentes horizontal y vertical de su posición en cualquier instante están dadas por

$$x = v_{0x}t \qquad y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

  - Las componentes horizontal y vertical de su velocidad en cualquier instante están dadas por

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} + gt$$

  - Es posible obtener la posición y la velocidad finales a partir de sus componentes.

Un aspecto importante que es necesario recordar al aplicar estas ecuaciones es que deben ser congruentes en su conversión de signos y unidades.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

6.1. Explique con claridad la diferencia entre los términos *rapidez* y *velocidad*. Un piloto de carreras de automóviles recorre 500 vueltas en una pista de 1 mi en un tiempo de 5 h. ¿Cuál fue su rapidez media? ¿Cuál fue su velocidad media?

6.2. Un conductor de autobús recorre una distancia de 300 km en 4 h. Al mismo tiempo, un turista recorre los mismos 300 km en un automóvil, pero se detiene y hace dos pausas de 30 minutos. Sin embargo, el turista llega a su destino en el mismo instante que el conductor del autobús. Compare la rapidez media de los dos conductores.

6.3. Presente varios ejemplos de movimiento donde la rapidez sea constante pero la velocidad no.

6.4. Una bola de boliche desciende en una canal con inclinación de 30° una distancia corta y después se nivela unos cuantos segundos para iniciar finalmente un ascenso en otro tramo inclinado 30°. Comente la aceleración de la bola a medida que pasa por cada segmento de su trayecto. ¿La aceleración es la misma cuando la pelota sube por el tramo inclinado que cuando baja con esa misma inclinación? Suponga que la bola recibe un impulso inicial en la parte superior del primer tramo inclinado y después viaja libremente a mayor velocidad. ¿Será diferente la aceleración en cualquiera de los segmentos?

6.5. Una piedra es arrojada verticalmente hacia arriba. Asciende hasta la máxima altura, regresa al punto de partida y continúa descendiendo. Comente los signos de su desplazamiento, velocidad y aceleración en cada punto de su trayectoria. ¿Cuál es su aceleración cuando la velocidad llega a cero en el punto más alto?

6.6. Cuando no existe la resistencia del aire, un proyectil requiere el mismo tiempo para llegar al punto más alto que para regresar al punto de partida. ¿Seguirá siendo válida esta afirmación si la resistencia del aire no es insignificante? Trace diagramas de cuerpo libre para cada situación.

6.7. ¿El movimiento de un proyectil disparado a cierto ángulo es un ejemplo de aceleración uniforme? ¿Qué sucede si es disparado verticalmente hacia arriba o verticalmente hacia abajo? Explique.

6.8. ¿En qué ángulo se debe lanzar una pelota de beisbol para lograr el máximo alcance? ¿Con qué ángulo debe lanzarse para lograr la máxima altura?

6.9. Un cazador dispara directamente una flecha contra una ardilla que está en la rama de un árbol y el animal cae en el instante que la flecha sale del arco. ¿Lesionará la flecha a la ardilla? Trace las trayectorias que cabe esperar. ¿En qué condiciones no heriría la flecha a la ardilla?

6.10. Un niño deja caer una pelota desde la ventanilla de un automóvil que viaja con una rapidez constante de 60 km/h. ¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota en relación con el suelo? Describa el movimiento.

6.11. Un coche de juguete es arrastrado sobre el suelo con rapidez uniforme. Un resorte unido al coche lanza una canica verticalmente hacia arriba. Describa el movimiento de la canica en relación con el suelo y con el coche.

6.12. Explique el ajuste que es necesario realizar en la mira de un rifle cuando la distancia del blanco se va incrementando.

6.13. Explique el razonamiento en que se basa el uso de trayectorias altas o bajas para realizar las patadas de despeje en un juego de futbol americano.

Problemas

Sección 6.1 Rapidez y velocidad

6.1. Un automóvil recorre una distancia de 86 km a una rapidez media de 8 m/s. ¿Cuántas horas requirió para completar el viaje? Resp. 2.99 h

6.2. El sonido viaja con una rapidez media de 340 m/s. El relámpago que proviene de una nube causante de una tormenta distante se observa en forma casi inmediata. Si el sonido del rayo llega a nuestro oído 3 s después, ¿a qué distancia está la tormenta?

6.3. Un cohete pequeño sale de su plataforma en dirección vertical ascendente y recorre una distancia de 40 m antes de volver a la Tierra 5 s después de que fue lanzado. ¿Cuál fue la velocidad media de su recorrido? Resp. 16 m/s

6.4. Un automóvil transita por una curva en forma de U y recorre una distancia de 400 m en 30 s. Sin embargo, su posición final está a sólo 40 m de la inicial. ¿Cuál es la rapidez media y cuál es la magnitud de la velocidad media?

6.5. Una mujer camina 4 min en dirección al Norte a una velocidad media de 6 km/h; después camina hacia el Este a 4 km/h durante 10 min. ¿Cuál es su rapidez media durante el recorrido? Resp. 4.57 km/h

6.6. ¿Cuál es la velocidad media de todo el recorrido descrito en el problema 6.5?

6.7. Un automóvil avanza a una rapidez media de 60 mi/h durante 3 h y 20 min. ¿Cuál fue la distancia recorrida? Resp. 200 mi

6.8. ¿Cuánto tiempo lleva recorrer 400 km si la rapidez media es de 90 km/h?

6.9. Una canica rueda hacia arriba una distancia de 5 m en una rampa inclinada y luego se detiene y vuelve hasta un punto localizado 5 m más abajo de su punto de partida. Suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$. Todo

el recorrido lo realiza en solamente 2 s. ¿Cuál fue la rapidez media y cuál fue la velocidad media?
Resp. 7.5 m/s, −2.5 m/s

Sección 6.3 Aceleración uniforme

6.10. El extremo de un brazo robótico se mueve hacia la derecha a 8 m/s. Cuatro segundos después, se mueve hacia la izquierda a 2 m/s. ¿Cuál es el cambio de velocidad y cuál es la aceleración?

6.11. Una flecha se acelera de cero a 40 m/s en 0.5 s que permanece en contacto con la cuerda del arco. ¿Cuál es la aceleración media? Resp. 80 m/s^2

6.12. Un automóvil se desplaza inicialmente a 50 km/h y acelera a razón de 4 m/s^2 durante 3 s. ¿Cuál es la rapidez final?

6.13. Un camión que viaja a 60 mi/h frena hasta detenerse por completo en un tramo de 180 ft. ¿Cuáles fueron la aceleración media y el tiempo de frenado?
Resp. −21.5 ft/s^2, 4.09 s

6.14. En la cubierta de un portaaviones, un dispositivo de frenado permite detener un avión en 1.5 s. La aceleración media fue de 49 m/s^2. ¿Cuál fue la distancia de frenado? ¿Cuál fue la rapidez inicial?

6.15. En una prueba de frenado, un vehículo que viaja a 60 km/h se detiene en un tiempo de 3 s. ¿Cuáles fueron la aceleración y la distancia de frenado?
Resp. −5.56 m/s^2, 25.0 m

6.16. Una bala sale del cañón de un rifle de 28 in a 2700 ft/s. ¿Cuáles son su aceleración y su tiempo dentro del cañón?

6.17. A la pelota de la figura 6.13 se le imparte una velocidad inicial de 16 m/s en la parte más baja de un plano inclinado. Dos segundos más tarde sigue moviéndose sobre el plano, pero con una velocidad de sólo 4 m/s. ¿Cuál es la aceleración?
Resp. −6.00 m/s^2

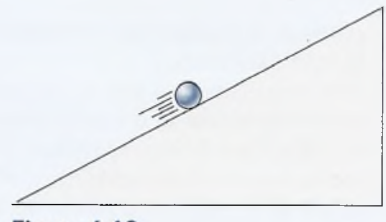


Figura 6.13

6.18. En el problema 6.17, ¿cuál es el desplazamiento máximo desde la parte inferior y cuál es la velocidad 4 s después de salir de la parte inferior?

6.19. Un tren monorriel que viaja a 22 m/s tiene que detenerse en una distancia de 120 m. ¿Qué aceleración media se requiere y cuál es el tiempo de frenado?
Resp. −2.02 m/s^2, 10.9 s

Sección 6.7 Gravedad y cuerpos en caída libre

6.20. Una pelota en estado de reposo se suelta y se deja caer durante 5 s. ¿Cuáles son su posición y su velocidad en ese instante?

6.21. Se deja caer una piedra a partir del estado de reposo. ¿Cuándo alcanzará un desplazamiento de 18 m por debajo del punto de partida? ¿Cuál es su velocidad en ese momento? Resp. 1.92 s, −18.8 m/s

6.22. Una mujer suelta una pesa desde la parte más alta de un puente y un amigo, que se encuentra abajo, medirá el tiempo que ocupa el objeto en llegar al agua en la parte inferior. ¿Cuál es la altura del puente si ese tiempo es de 3 s?

6.23. A un ladrillo se le imparte una velocidad inicial de 6 m/s en su trayectoria hacia abajo. ¿Cuál será su velocidad final después de caer una distancia de 40 m?
Resp. 28.6 m/s hacia abajo

6.24. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba y regresa a su posición inicial en 5 s. ¿Cuál es su velocidad inicial y hasta qué altura llega?

6.25. Una flecha se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 ft/s. ¿Cuál es su altura máxima? Resp. 100 ft

6.26. En el problema 6.25, ¿cuáles son la posición y la velocidad de la flecha después de 2 y de 6 s?

6.27. Un martillo es arrojado verticalmente hacia arriba en dirección a la cumbre de un techo de 16 m de altura. ¿Qué velocidad inicial mínima se requirió para que llegara ahí? Resp. 17.7 m/s

Sección 6.9 Proyección horizontal

6.28. Una pelota de beisbol sale despedida de un bate con una velocidad horizontal de 20 m/s. En un tiempo de 0.25 s, ¿a qué distancia habrá viajado horizontalmente y cuánto habrá caído verticalmente?

6.29. Un avión que vuela a 70 m/s deja caer una caja de provisiones. ¿Qué distancia horizontal recorrerá la caja antes de tocar el suelo, 340 m más abajo?
Resp. 583 m

6.30. En una explotación maderera, los troncos se descargan horizontalmente a 15 m/s por medio de un conducto engrasado que se encuentra 20 m por encima de un estanque para contener madera. ¿Qué distancia recorren horizontalmente los troncos?

6.31. Una bola de acero rueda y cae por el borde de una mesa desde 4 ft por encima del piso. Si golpea el suelo a 5 ft de la base de la mesa, ¿cuál fue su velocidad horizontal inicial? Resp. v_{0x} = 10.0 ft/s

6.32. Una bala sale del cañón de un arma con una velocidad horizontal inicial de 400 m/s. Halle los desplazamientos horizontal y vertical después de 3 s.

6.33. Un proyectil tiene una velocidad horizontal inicial de 40 m/s en el borde de un tejado. Encuentre las componentes horizontal y vertical de su velocidad después de 3 s. Resp. 40 m/s, −29.4 m/s

Sección 6.10 El problema más general de las trayectorias

6.34. A una piedra se le imprime una velocidad inicial de 20 m/s a un ángulo de 58°. ¿Cuáles son sus desplazamientos horizontal y vertical después de 3 s?

6.35. Una pelota de beisbol sale golpeada por el bate con una velocidad de 30 m/s a un ángulo de 30°. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad después de 3 s? Resp. 26.0 m/s, −14.4 m/s

6.36. En el caso de la pelota de beisbol del problema 6.35, ¿cuál es la altura máxima y cuál es el alcance?

6.37. Una flecha sale del arco con una velocidad inicial de 120 ft/s a un ángulo de 37° respecto a la horizontal. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su desplazamiento al cabo de dos segundos? Resp. $x = 192$ ft, $y = 80.4$ ft

***6.38.** En el problema 6.37, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la velocidad de la flecha después de 2 s?

***6.39.** En la figura 6.14, una pelota de golf sale del punto de partida, al ser golpeada, con una velocidad de 40 m/s a 65°. Si cae sobre un *green* ubicado 10 m más arriba que el punto de partida, ¿cuál fue el tiempo que permaneció en el aire y cuál fue la distancia horizontal recorrida respecto al palo? Resp. 7.11 s, 120 m

***6.40.** Un proyectil sale disparado del suelo con una velocidad de 35 m/s a un ángulo de 32°. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

***6.41.** El proyectil del problema 6.40 se eleva y cae, golpeando una cartelera de anuncios instalada 8 m por encima del suelo. ¿Cuál fue el tiempo de vuelo y qué distancia horizontal máxima recorrió el proyectil? Resp. 3.29 s, 97.7 m

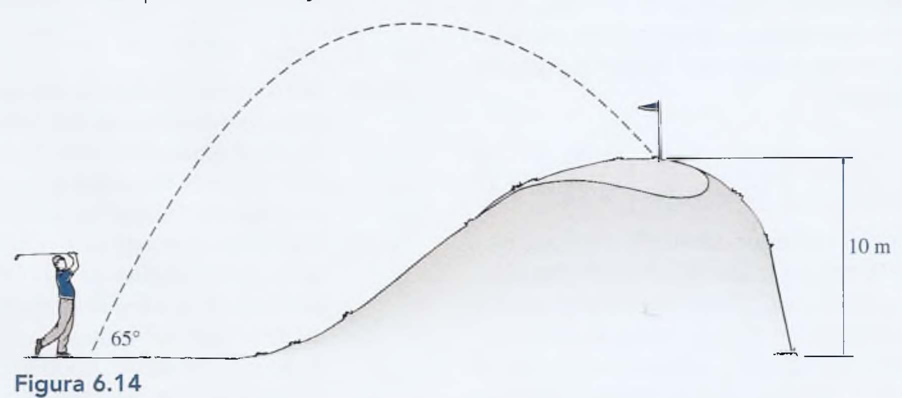


Figura 6.14

Problemas adicionales

6.42. Un cohete surca el espacio a 60 m/s y entonces recibe una aceleración repentina. Si su velocidad se incrementa a 140 m/s en 8 s, ¿cuál fue su aceleración media y qué distancia recorrió en este tiempo?

6.43. Un vagón de ferrocarril parte del reposo y desciende libremente por una pendiente. Con una aceleración media de 4 ft/s^2, ¿cuál será su velocidad al cabo de 5 s? ¿Qué distancia habrá recorrido en ese tiempo? Resp. 20 ft/s, 50 ft

***6.44.** Un objeto es arrojado horizontalmente a 20 m/s. Al mismo tiempo, otro objeto, ubicado 12 m más abajo, se deja caer desde el reposo. ¿En qué momento chocarán ambos y a qué distancia se hallarán abajo del punto de partida?

6.45. Un camión que transita a una velocidad inicial de 30 m/s se detiene por completo en 10 s. ¿Cuál será la aceleración del vehículo y cuál fue la distancia de frenado? Resp. −3.00 m/s^2, 150 m

6.46. Una pelota se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 23 m/s. ¿Cuáles serán sus posiciones y sus velocidades después de 2, de 4 y de 8 s?

6.47. Una piedra se arroja verticalmente hacia abajo desde la parte más alta de un puente. Al cabo de 4 segundos llega al agua que corre abajo. Si la velocidad final fue de 60 m/s, ¿cuál fue la velocidad inicial de la piedra y cuál es la altura del puente? Resp. $v_0 = 20.8$ m/s hacia abajo; $y = 162$ m

6.48. Una pelota se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 ft/s. ¿Cuáles son su posición y su velocidad después de (a) 1 s, (b) 3 s y (c) 6 s?

6.49. Un avión que vuela horizontalmente a 500 mi/h suelta un paquete. Al cabo de cuatro segundos, el paquete llega al suelo. ¿Cuál era la altitud del avión? Resp. +256 ft

6.50. En el problema 6.49, ¿cuál fue el alcance horizontal del paquete arrojado y cuáles son las componentes de su velocidad final?

6.51. El *green* de un campo de golf está a 240 ft horizontalmente y 64 ft verticalmente del punto donde el palo golpea una pelota. ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de la velocidad inicial si la pelota llega al *green* en este lugar después de 4 s? Resp. 100 ft/s, 53.1°

Preguntas para la reflexión crítica

6.52. Una larga franja de pavimento tiene marcas a intervalos de 10 m. Los estudiantes usan cronómetros para registrar los tiempos en que un automóvil pasa por cada marca. Así han obtenido los datos siguientes:

Distancia, m	0	10	20	30	40	50
Tiempo, s	0	2.1	4.2	6.3	8.4	10.5

Dibuje una gráfica que represente las distancias en el eje y y los tiempos en el eje x. ¿Cuál es el significado de la pendiente de esta curva? ¿Cuál es la rapidez media del vehículo? ¿Al cabo de cuánto tiempo la distancia es igual a 34 m? ¿Cuál es la aceleración del automóvil?

Resp. La pendiente es v, 4.76 m/s, 7.14 s, 0

6.53. Un astronauta intenta determinar la gravedad de la Luna dejando caer una herramienta desde una altura de 5 m. Los datos siguientes fueron registrados electrónicamente.

Altura, m	5.00	4.00	3.00	2.00	1.00	0
Tiempo, s	0	1.11	1.56	1.92	2.21	2.47

Trace una gráfica con estos datos. ¿Es una línea recta? ¿Cuál es la rapidez media durante toda la caída? ¿Cuál es la aceleración? ¿Cómo son estos resultados en comparación con los de la gravedad de la Tierra?

6.54. Un automóvil se desplaza inicialmente hacia el Norte a 20 m/s. Después de recorrer una distancia de 6 m, el vehículo pasa por el punto A, donde su velocidad sigue siendo en dirección Norte, pero se ha reducido a 5 m/s. (a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración del vehículo? (b) ¿Cuánto tiempo se requirió? (c) Si la aceleración se mantiene constante, ¿cuál será la velocidad del vehículo cuando regrese al punto A?

Resp. (a) 31.2 m/s^2, Sur; (b) 0.48 s; (c) −5 m/s

***6.55.** Una pelota que se desliza hacia arriba por una pendiente se halla inicialmente a 6 m de la parte más baja de dicha pendiente y tiene una velocidad de 4 m/s. Cinco segundos después se encuentra a 3 m de la parte más baja. Si suponemos una aceleración constante, ¿cuál fue la velocidad media? ¿Cuál es el significado de una velocidad media negativa? ¿Cuáles son la aceleración media y la velocidad final?

***6.56.** Se ha calculado que la aceleración debida a la gravedad en un planeta distante equivale a la cuarta parte del valor de la gravedad en la Tierra. ¿Significa esto que si se deja caer una pelota desde una altura de 4 m en ese planeta, caerá al suelo en la cuarta parte del tiempo que demora en caer en la Tierra? ¿Cuáles serían los tiempos de caída de la pelota en ese planeta y en la Tierra?

Resp. t_p = 1.81 s, t_T = 0.904 s

***6.57.** Considere las dos pelotas A y B que aparecen en la figura 6.15. La pelota A tiene una aceleración constante de 4 m/s^2 dirigida a la derecha, y la pelota B tiene una aceleración constante de 2 m/s^2 dirigida a la izquierda. La pelota A se desplaza inicialmente a la izquierda a 2 m/s y la pelota B se desplaza inicialmente a la izquierda a 5 m/s. Encuentre el tiempo t en que las dos pelotas chocan. Además, suponiendo que $x = 0$ en la posición inicial de la pelota A, ¿cuál es su desplazamiento en común cuando chocan?

Resp. t = 2.0 s, x = +4 m

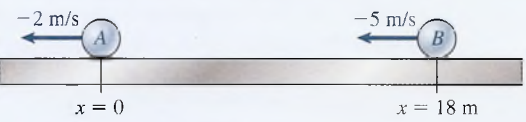


Figura 6.15

***6.58.** Inicialmente, un camión con una velocidad de 40 ft/s está a una distancia de 500 ft adelante de un automóvil. Si el automóvil parte del reposo y acelera a 10 ft/s^2, ¿cuándo alcanzará al camión? ¿A qué distancia de la posición inicial del automóvil está ese punto?

***6.59.** Una pelota que está en reposo se deja caer desde el techo de un edificio de 100 m de altura. En el mismo instante, una segunda pelota se lanza hacia arriba desde la base del edificio, con una velocidad inicial de 50 m/s. ¿Cuándo chocarán las dos pelotas y a qué distancia estarán entonces sobre el nivel de la calle?

Resp. 2.00 s, 80.4 m

***6.60.** Una persona asciende verticalmente en un globo con una velocidad de 4 m/s y suelta una bolsa de arena en el momento en que el globo está a 16 m sobre el nivel del suelo. Calcule la posición y la velocidad de la bolsa de arena en relación con el suelo después de 0.3 s y 2 s. ¿Cuántos segundos después de haber sido soltada llegará al suelo la bolsa de arena?

***6.61.** Se dispara verticalmente hacia arriba una flecha con una velocidad de 40 m/s. Tres segundos después, otra flecha es disparada hacia arriba con una velocidad de 60 m/s. ¿En qué tiempo y posición se encontrarán las dos flechas? Resp. 4.54 s, 80.6 m

***6.62.** Una persona desea incidir en un blanco que tiene un alcance horizontal de 12 km. ¿Cuál debe ser la velocidad de un objeto proyectado con un ángulo de 35° para que caiga en el blanco? ¿Cuánto tiempo permanecerá en el aire?

***6.63.** Un jabalí arremete directamente contra un cazador a la velocidad constante de 60 ft/s. En el instante en que el jabalí está a 100 yardas de distancia, aquél le dispara una flecha a 30° respecto al suelo. ¿Cuál debe ser la velocidad de la flecha para que alcance su blanco? Resp. 76.2 ft/s



7 Segunda ley de Newton

El transbordador espacial *Endeavor* despega para una misión de 11 días en el espacio. Todas las leyes de movimiento de Newton, la ley de la inercia, de la acción y reacción y la aceleración producida por una fuerza resultante, se muestran durante este despegue. (*Foto del Centro de Vuelo Espacial Marshall de la NASA.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Describirá la relación entre fuerza, masa y aceleración, e indicará las unidades congruentes para cada una de esas variables en el sistema métrico y en los sistemas de unidades usuales de Estados Unidos.
2. Definirá las unidades *newton* y *slug*, y explicará por qué son unidades derivadas y no fundamentales.
3. Demostrará mediante definiciones y ejemplos su comprensión de la diferencia entre masa y peso.
4. Determinará la masa a partir del peso, y el peso a partir de la masa en un lugar donde se conozca la aceleración debida a la gravedad.
5. Dibujará un diagrama de cuerpo libre para objetos en movimiento con aceleración constante, estableciendo que la fuerza resultante es igual a la masa total multiplicada por la aceleración, y calculará los parámetros desconocidos.

De acuerdo con la primera ley de Newton sobre el movimiento, un objeto sufrirá un cambio en su estado de movimiento o de reposo *únicamente* cuando actúe sobre él una fuerza resultante, no equilibrada. Ahora sabemos que un cambio en el movimiento, por ejemplo un cambio en la rapidez, da por resultado una *aceleración*. En múltiples aplicaciones industriales necesitamos predecir la aceleración que se producirá mediante una determinada fuerza. Por ejemplo, la fuerza hacia adelante que se requiere para acelerar un automóvil en reposo, hasta una rapidez de 60 km/h en 8 s es algo que interesa a la industria automotriz. En este capítulo se estudiarán las relaciones entre fuerza, masa y aceleración.

7.1 Segunda ley de Newton sobre el movimiento

Antes de estudiar formalmente la relación entre una fuerza resultante y la aceleración, consideraremos primero un experimento sencillo. Una pista lineal de aire es un aparato para estudiar el movimiento de objetos en condiciones que se aproximan a una fricción de cero. Cientos de pequeños chorros de aire originan una fuerza ascendente que equilibra el peso del deslizador, como se muestra en la figura 7.1. Se ata un hilo al frente del deslizador y se coloca un dinamómetro de peso despreciable para medir la fuerza horizontal aplicada, como se muestra en la figura. La aceleración que recibe el deslizador puede medirse determinando el cambio de rapidez en un intervalo de tiempo definido. La primera fuerza aplicada $\mathbf{F}_1$ en la figura 7.1a origina una aceleración $\mathbf{a}_1$. Si se duplica la fuerza, o sea $2\mathbf{F}_1$, se duplicará la aceleración, $2\mathbf{a}_1$, y si se triplica la fuerza, $3\mathbf{F}_1$, se triplicará la aceleración, $3\mathbf{a}_1$.

Estas observaciones demuestran que la aceleración de un determinado cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada, lo cual significa que la relación de fuerza a aceleración siempre es constante:

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\mathbf{a}_1} = \frac{\mathbf{F}_2}{\mathbf{a}_2} = \frac{\mathbf{F}_3}{\mathbf{a}_3} = \text{constante}$$

La constante es una medida de la eficacia de una fuerza dada para producir aceleración. Veremos que esta relación es una propiedad del cuerpo, llamada su masa m, donde

$$m = \frac{F}{a}$$

La masa de un kilogramo (1 kg) se definió en el capítulo 3 por comparación con un patrón. Conservando esta definición, ahora podemos definir una nueva unidad de fuerza que impartiría a la unidad de masa una unidad de aceleración.

La fuerza de un newton (1 N) es la fuerza resultante que imparte a una masa de 1 kg una aceleración de 1 m/s².

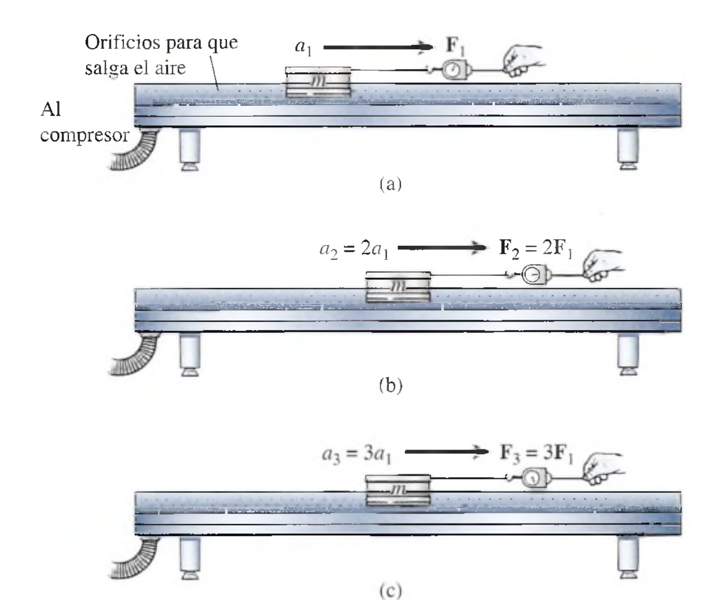


Figura 7.1 Variación de la aceleración con la fuerza.

FÍSICA HOY

La gravedad varía en toda la superficie de la Tierra, con la latitud y altitud, y se basa por zonas en la densidad de la Tierra.

FÍSICA HOY

Para medir las diferentes fuerzas de gravedad, los científicos utilizan un dispositivo extraordinario llamado *gradiómetro* o *gravitómetro*. Las primeras versiones eran balanzas de torsión, que usaban un tubo con mira para ver a qué distancia un peso torcía un rayo debido al efecto de la gravedad. Esto hizo posible hallar las estructuras geométricas llamadas *domos de sal*. Estas cavidades, rellenas de sal (la sal es menos densa que la piedra), por lo general se encuentran cerca de depósitos de petróleo y esquisto. Instrumentos posteriores usados en la exploración submarina silenciosa ayudaron a la navegación al medir las variaciones de gravedad ocasionadas por montes y zanjas submarinas. Después de que el gradiómetro submarino se vendió para su uso comercial, los geólogos de la industria del petróleo y gasolina lo usaron cuando volaban sobre áreas previamente trazadas para determinar las características subterráneas de la corteza con mucha mayor precisión que nunca antes. Para ver este gradiómetro nuevo, visite este sitio web: **www.bellgeo.com**

El ***newton*** se adoptó como unidad de fuerza del SI. Una fuerza resultante de 2 N producirá una aceleración de 2 m/s^2, y una fuerza de 3 N le impartirá una aceleración de 3 m/s^2 a una masa de 1 kg.

Ahora volvamos a analizar nuestro experimento de la pista de aire para averiguar cómo se afecta la aceleración al incrementar la masa. Esta vez se mantendrá constante la fuerza aplicada F. La masa puede cambiarse enganchando en cadena más deslizadores de igual tamaño y peso. Observe en la figura 7.2 que, si la fuerza no cambia, al incrementar la masa habrá una *disminución* proporcional en la aceleración. Al aplicar una fuerza constante de 12 N en cadena a masas de 1, 2 y 3 kg, se producirán aceleraciones de 12 m/s^2, 6 m/s^2 y 4 m/s^2, respectivamente. Estos tres casos se muestran en la figura 7.2a, b y c.

A partir de las observaciones anteriores, es posible enunciar la segunda ley de Newton sobre el movimiento.

Segunda ley de Newton sobre el movimiento: Siempre que una fuerza no equilibrada actúa sobre un cuerpo, en la dirección de la fuerza se produce una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Si se utiliza la unidad recién definida, el newton, esta ley se escribe como la ecuación siguiente:

$$\textit{Fuerza resultante} = \textit{masa} \times \textit{aceleración}$$

$$F = ma \qquad \textit{Segunda ley de Newton} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Puesto que esta relación depende de la definición de una nueva unidad, podemos sustituir únicamente unidades congruentes con tal definición. Por ejemplo, si la masa está dada en kilogramos (kg), la unidad de fuerza debe estar en newtons (N) y la unidad de aceleración debe estar en metros por segundo al cuadrado (m/s^2).

$$\textit{Fuerza}\ (\mathrm{N}) = \textit{masa}\ (\mathrm{kg}) \times \textit{aceleración}\ (\mathrm{m/s^2})$$

En el SUEU se define una nueva unidad de masa a partir de las unidades elegidas de *libra* (lb) para fuerza, y *pies por segundo al cuadrado* (ft/s^2) para la aceleración. La nueva unidad de masa se denomina ***slug*** (de *sluggish*, que en inglés significa lentitud, es decir, la propiedad inercial de la masa).

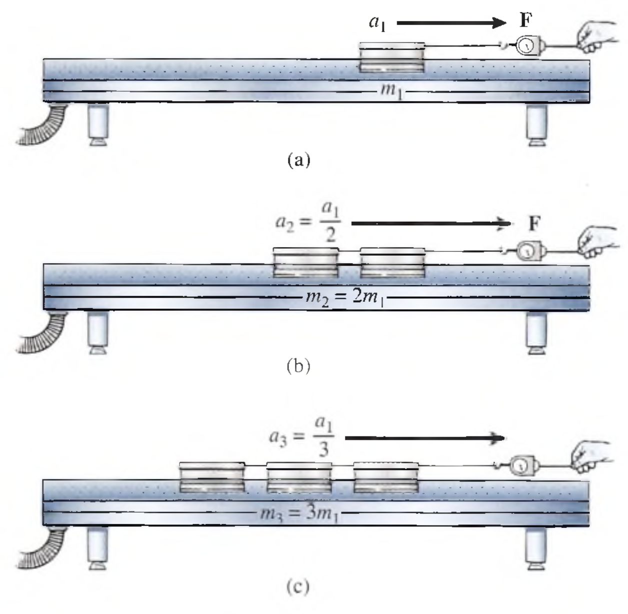


Figura 7.2 Variación de la aceleración con la masa.

Una masa de un slug es aquella a la que una fuerza resultante de 1 lb le imparte una aceleración de 1 ft/s².

$$\textit{Fuerza}\ (\text{lb}) = \textit{masa}\ (\text{slug}) = \textit{aceleración}\ (\text{ft/s}^2)$$

La unidad de fuerza del SI es menor que la unidad del SUEU, y una masa de un slug es mucho mayor que la masa de un kilogramo. Los siguientes factores de conversión resultan útiles:

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \qquad 1 \text{ slug} = 14.59 \text{ kg}$$

Una bolsa de manzanas de 1 lb puede contener cuatro o cinco manzanas y cada una de ellas pesa aproximadamente un newton. Una persona que pesa 160 lb en la Tierra tendría una masa de 5 slug o 73 kg.

Es importante observar que, en la segunda ley de Newton, la F representa una *resultante* o *fuerza* no equilibrada. Si sobre un objeto actúa más de una fuerza, será necesario determinar la fuerza resultante *a lo largo de la dirección del movimiento.* La fuerza resultante siempre estará a lo largo de la dirección del movimiento, ya que es la causa de la aceleración. Todas las componentes de las fuerzas perpendiculares a la aceleración estarán equilibradas. Si se elige el eje x en la dirección del movimiento, podemos determinar la componente x de cada fuerza y escribir

$$\sum F_x = ma_x \tag{7.2}$$

Se puede escribir una ecuación similar para las componentes y si el eje y se eligió a lo largo de la dirección del movimiento.

7.2 Relación entre peso y masa

Antes de analizar algunos ejemplos de la segunda ley de Newton, es necesario comprender con claridad la diferencia entre el ***peso*** de un cuerpo y su ***masa***. Tal vez éstos son los conceptos más confusos para el alumno principiante. La *libra* (lb), que es una unidad de fuerza, con frecuencia se utiliza como unidad de masa, la libra-masa (lb_m). El kilogramo, que es una unidad de masa, con frecuencia se usa en la industria como unidad de fuerza, el kilogramo-

fuerza (kgf). Estas unidades, aparentemente inconsistentes, son el resultado del uso de diversos sistemas de unidades. En esta obra debe haber menos motivo de confusión, puesto que sólo se utilizan unidades del SI y del SUEU o sistema usual en Estados Unidos (gravitacional británico). Por tanto, en este libro la *libra* (lb) siempre se refiere al *peso*, que es una fuerza, y la unidad *kilogramo* (kg) siempre se refiere a la *masa* de un cuerpo.

El peso de cualquier cuerpo es la fuerza con la cual el cuerpo es atraído verticalmente hacia abajo por la gravedad. Cuando un cuerpo cae libremente hacia la Tierra, la única fuerza que actúa sobre él es su peso **W**. Esta fuerza neta produce una aceleración **g**, que es la misma para todos los cuerpos que caen. Entonces, a partir de la segunda ley de Newton escribimos la relación entre el peso de un cuerpo y su masa:

$$W = mg \qquad \text{o} \qquad m = \frac{W}{g} \tag{7.3}$$

En cualquier sistema de unidades: (1) la masa de una partícula es igual a su peso dividido entre la aceleración de la gravedad, (2) el peso tiene las mismas unidades que la unidad de fuerza y (3) la aceleración de la gravedad tiene las mismas unidades que la aceleración.

Por consiguiente, resumimos lo anterior como:

$$\text{SI: } W\,(\text{N}) = m\,(\text{kg}) \times g\,(9.8\ \text{m/s}^2)$$
$$\text{SUEU: } W\,(\text{lb}) = m\,(\text{slug}) \times g\,(32\ \text{ft/s}^2)$$

Los valores para g y, por tanto, los pesos, en las relaciones anteriores se aplican únicamente en lugares de la Tierra cercanos al nivel del mar, donde g tiene estos valores.

Hay que recordar dos cosas para comprender cabalmente la diferencia entre masa y peso:

La masa es una constante universal igual a la relación del peso de un cuerpo con la aceleración gravitacional debida a su peso.

El peso es la fuerza de atracción gravitacional y varía dependiendo de la aceleración de la gravedad.

Por consiguiente, la masa de un cuerpo es tan sólo una medida de su inercia y no depende en lo absoluto de la gravedad. En el espacio exterior, un martillo tiene un peso insignificante, aunque sirve para clavar en la misma forma usual, puesto que su masa no cambia.

Para reforzar la distinción entre peso y masa, considere los ejemplos mostrados en la figura 7.3, donde una bola de 10 kg se coloca en tres lugares distintos. Si tomamos la bola de 10 kg de un punto cercano a la superficie de la Tierra ($g = 9.8\ \text{m/s}^2$) y la movemos a un punto donde la gravedad se reduce a la mitad a 4.9 m/s^2, observamos que su peso también se reduce a la mitad. La ilustración de la figura 7.3 no es un dibujo a escala, debido a que un objeto tendría que estar muy alejado de la superficie de la Tierra para que ocurriera un cambio significativo en la gravedad. No obstante, ayuda a entender la distinción entre *peso*, que depende de la gravedad, y *masa*, que es una relación constante de W con g. Aun cuando la superficie de la Luna, donde la gravedad es sólo un sexto de su valor en la Tierra, la masa de la bola sigue siendo 10 kg. Sin embargo, su peso se reduce a 16 N.

En unidades del SI, los objetos generalmente se describen en función de su masa en kilogramos, que es constante. En unidades del SUEU, en cambio, un cuerpo por lo común se describe indicando su peso en un punto donde la gravedad es igual a 32 ft/s^2. Con frecuencia esto causa confusión si el objeto se transporta a una locación donde la gravedad es considerablemente mayor o menor que 32 ft/s^2 y el *peso real* cambia. Esta confusión es simplemente una de las muchas razones por las cuales se deben descartar estas unidades anteriores. Se incluyen aquí sólo para proporcionar el grado de familiaridad necesario para trabajar con ellas ya que a veces se utilizan en el comercio y la industria en Estados Unidos.





Superficie de la Luna

$m = \frac{W}{g} = 10$ kg





Figura 7.3 El peso de un objeto varía dependiendo de la zona. Sin embargo, la masa es la relación constante del peso con la aceleración debida a la gravedad. *(Foto de la NASA.)*

Ejemplo 7.1

Determine la masa de un cuerpo cuyo peso en la Tierra es de 100 N. Si esta masa se llevara a un planeta distante donde $g = 2.0 \text{ m/s}^2$, ¿cuál sería su peso en ese planeta?

Plan: Primero hallamos la masa en la Tierra, donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Como la masa es constante, podemos usar el mismo valor para determinar el peso en el planeta distante donde $g = 2.0 \text{ m/s}^2$.

Solución:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{100 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 10.2 \text{ kg}$$

El peso del planeta es

$$W = mg = (10.2 \text{ kg})(2 \text{ m/s}^2); \qquad W = 20.4 \text{ N}$$

Ejemplo 7.2

Un astronauta que pesa 150 lb se da cuenta de que su peso se reduce a 60 lb en un lugar distante. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en ese lugar?

Plan: En unidades del SUEU, se supone que el astronauta pesa 150 lb sólo donde la aceleración es igual a $g = 32 \text{ ft/s}^2$. Por consiguiente, podemos hallar su masa. Luego encontramos la gravedad dado que la masa es la misma en el lugar nuevo.

Solución: En la Tierra, la masa es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{150 \text{ lb}}{32 \text{ ft/s}^2} = 4.69 \text{ slug}$$

Ahora bien, puesto que $W = mg$, determinamos que la gravedad en el lugar nuevo es

$$g = \frac{W}{m} = \frac{60 \text{ lb}}{4.69 \text{ slug}}; \qquad g = 12.8 \text{ ft/s}^2$$

7.3 Aplicación de la segunda ley de Newton a problemas de un solo cuerpo

La diferencia principal entre los problemas estudiados en este capítulo y los problemas estudiados en capítulos anteriores es que una fuerza neta no equilibrada actúa para producir una aceleración. Por tanto, después de construir diagramas de cuerpo libre que describan la situación, el primer paso consiste en la fuerza no equilibrada y establecerla igual al producto de la masa por la aceleración. La cantidad desconocida se determina, entonces, a partir de la relación establecida en la ecuación (7.1):

$$\textit{Fuerza resultante} = \textit{masa} \times \textit{aceleración}$$

$$F\ (\text{resultante}) = ma$$

Los ejemplos siguientes servirán para demostrar la relación entre fuerza, masa y aceleración.

Ejemplo 7.3

Una fuerza resultante de 29 N actúa sobre una masa de 7.5 kg en dirección Este. ¿Cuál es la aceleración resultante?

Plan: La fuerza resultante se da por la ecuación $F = ma$, y la aceleración está en la misma dirección que la fuerza resultante.

Solución: Al resolver para a, obtenemos

$$a = \frac{F}{m} = \frac{29\ \text{N}}{7.5\ \text{kg}}; \qquad a = 3.87\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, la aceleración resultante es 3.87 m/s^2 dirigida hacia el Este.

Ejemplo 7.4

¿Qué fuerza resultante le impartirá a un trineo de 24 lb una aceleración de 5 ft/s^2?

Plan: Primero hallamos la masa de un objeto cuyo peso en la Tierra es de 24 lb. Luego usamos la masa para encontrar la fuerza resultante a partir de $F = ma$.

Solución:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{24\ \text{lb}}{32\ \text{ft/s}^2} = 0.75\ \text{slug}$$

$$F = ma = (0.75\ \text{slug})(5\ \text{ft/s}^2) \qquad F = 3.75\ \text{lb}$$

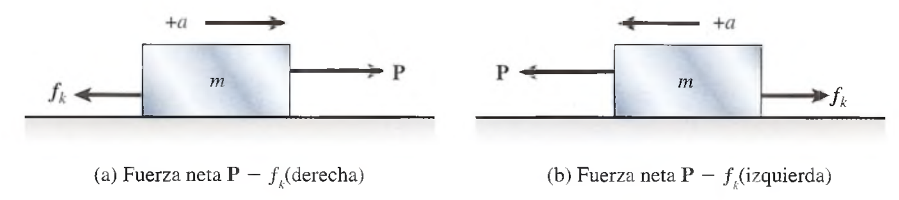
Ejemplo 7.5

En un experimento a bordo de un transbordador espacial, un astronauta observa que una fuerza resultante de sólo 12 N impartirá a una caja de acero una aceleración de 4 m/s^2. ¿Cuál es la masa de la caja?

Solución:

$$F = ma \qquad \text{o} \qquad m = \frac{F}{a}$$

$$m = \frac{12\ \text{N}}{4\ \text{m/s}^2}; \qquad m = 3\ \text{kg}$$



(a) Fuerza neta $\mathbf{P} - f_k$(derecha) (b) Fuerza neta $\mathbf{P} - f_k$(izquierda)

Figura 7.4 La dirección de la aceleración debe elegirse como positiva.

En los ejemplos 7.3 a 7.5, las fuerzas no equilibradas se determinaron fácilmente. No obstante, a medida que se incrementa el número de fuerzas que actúan sobre un cuerpo, el problema de determinar la fuerza resultante se vuelve menos sencillo. En estos casos, tal vez resulte útil analizar ciertas consideraciones.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza resultante siempre produce una aceleración *en la dirección de la fuerza resultante*. Esto significa que la fuerza neta y la aceleración que provoca tienen el mismo signo algebraico, y cada una de ellas tiene la misma línea de acción. Por consiguiente, si la dirección del movimiento (aceleración) se considera positiva, se deberán introducir menos factores negativos en la ecuación $F = ma$. Por ejemplo, en la figura 7.4b es preferible elegir la dirección del movimiento (izquierda) como positiva, ya que la ecuación

$$P - f_k = ma$$

es preferible a la ecuación

$$f_k - P = -ma$$

que resultaría si eligiéramos la dirección a la derecha como positiva.

Otra consideración que resulta del análisis anterior es que las fuerzas que actúan en dirección normal a la línea del movimiento estarán en equilibrio si la fuerza resultante es constante. Entonces, en problemas que incluyen fricción, las fuerzas normales pueden determinarse a partir de la primera condición de equilibrio.

En resumen, las ecuaciones siguientes se aplican a problemas de aceleración:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{7.4}$$

Una de estas ecuaciones se elige a lo largo de la línea de movimiento, y la otra será perpendicular a la misma. Esto simplifica el problema al asegurar que las fuerzas perpendiculares al movimiento estén equilibradas.

Ejemplo 7.6

Una fuerza horizontal de 200 N arrastra un bloque de 12 kg a través de un piso, donde $\mu_k = 0.4$. Determine la aceleración resultante.

Plan: Como la aceleración es producida por una fuerza *resultante*, trazaremos un diagrama de cuerpo libre (véase la figura 7.5b) y elegimos el eje x positivo a lo largo de la dirección del movimiento. Siguiendo los procedimientos aprendidos en capítulos anteriores, calcularemos la fuerza resultante y la estableceremos igual al producto de la masa por la aceleración.

Solución: Al aplicar la segunda ley de Newton al eje x, tenemos

$$\textit{Fuerza resultante} = \textit{masa} \times \textit{aceleración}$$

$$200 \text{ N} - f_k = ma$$

Luego, sustituimos $f_k = \mu_k n$ para obtener

$$200 \text{ N} - \mu_k n = ma$$

Puesto que las fuerzas verticales están equilibradas, en la figura 7.5b vemos que $\Sigma F_y = ma_y = 0$.

$$n - mg = 0 \qquad \text{o} \qquad n = mg$$

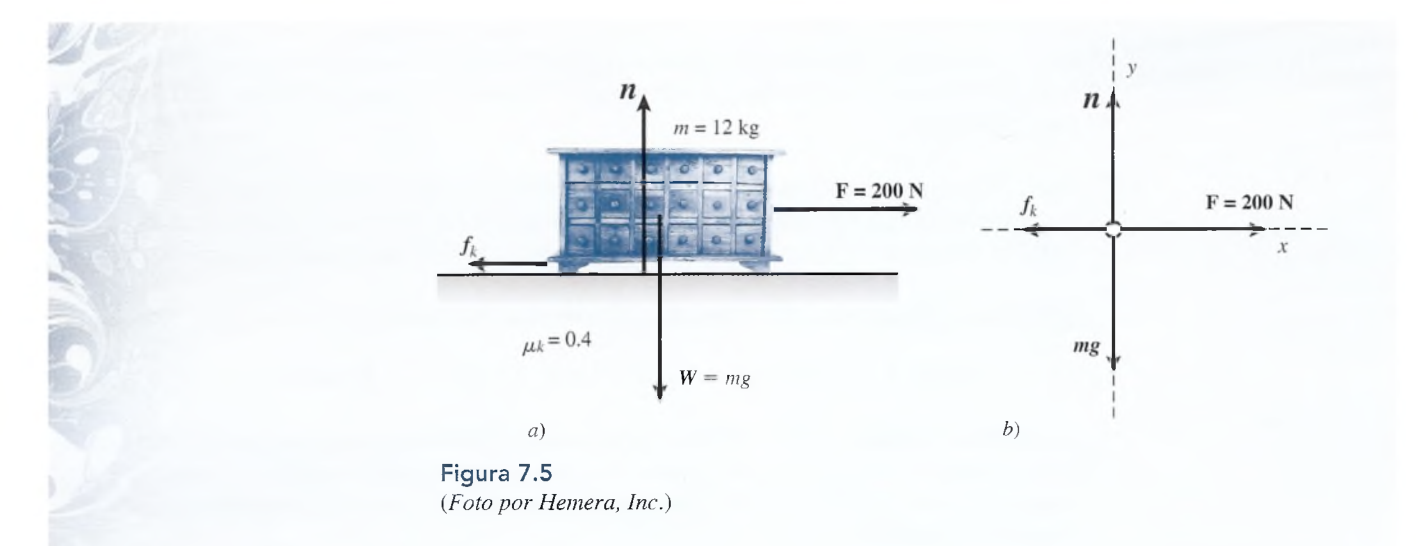


Figura 7.5
(Foto por Hemera, Inc.)

Entonces, sustituyendo en la ecuación de movimiento, tenemos

$$200\text{ N} - \mu_k mg = ma$$

$$200\text{ N} - (0.4)(12\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = (12\text{ kg})a$$

$$a = \frac{200\text{ N} - 47.0\text{ N}}{12\text{ kg}} \quad \text{y} \quad a = 12.7\text{ m/s}^2$$

7.4 Técnicas para resolver problemas

La resolución de todos los problemas físicos requiere una habilidad para organizar los datos proporcionados y para aplicar las fórmulas de una manera consistente. Con frecuencia un procedimiento es útil para el alumno principiante, lo cual es particularmente cierto para los problemas que se presentan en este capítulo. A continuación se indica una secuencia lógica de operaciones para resolver problemas que incluyen la segunda ley de Newton.

Estrategia para resolver problemas

Segunda ley de Newton sobre el movimiento

1. Lea el problema detenidamente y luego trace y marque un esquema.
2. Indique toda la información proporcionada y establezca qué es lo que va a calcular.
3. Construya un diagrama de cuerpo libre para cada objeto que sufre una aceleración y elija un eje x o y a lo largo de la línea de movimiento continua.
4. Indique la dirección positiva de la aceleración a lo largo de la línea de movimiento continua.
5. Distinga entre la masa y el peso de cada objeto.

$$W = mg \qquad m = \frac{W}{g}$$

6. A partir del diagrama de cuerpo libre, determine la fuerza resultante a lo largo de la línea de movimiento positiva elegida (ΣF).
7. Determine la masa total ($m_t = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$).
8. Establezca que la fuerza resultante (ΣF) es igual a la masa total multiplicada por la aceleración a:

$$\sum F = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)a$$

9. Sustituya las cantidades conocidas y calcule las desconocidas.

Ejemplo 7.7 El ascensor cargado que se muestra en la figura 7.6 se levanta con una aceleración de 2.5 m/s^2. Si la tensión en el cable que lo soporta es de 9600 N, ¿cuál es la masa del elevador y su contenido?

Plan: Seguiremos la estrategia para resolver problemas al trazar un diagrama de cuerpo libre apropiado (véase la figura 7.6) y escribir la segunda ley de Newton para la línea de aceleración. Por tanto, la masa del ascensor es la única variable desconocida en esa ecuación.

Solución: Organizamos los datos dados y establecemos qué vamos a calcular.

Dados: $T = 9600$ N; $g = 9.8$ m/s^2; $a = 2.5$ m/s^2 Encuentre: $m = ?$

Al despejar la masa, es útil escribir el peso como el producto de la masa por la gravedad (mg). Observe que la dirección positiva de la aceleración (hacia arriba) se indica en el diagrama de cuerpo libre. La aceleración a lo largo del eje x es cero y toda la aceleración a está a lo largo del eje y.

$$a_y = a \qquad \text{y} \qquad a_x = 0$$

Por tanto, la fuerza resultante es la suma de las fuerzas a lo largo del eje y

$$\sum F_y = T - mg$$

A partir de la segunda ley de Newton, escribimos

$$\textit{Fuerza resultante} = \textit{masa total} \times \textit{aceleración}$$
$$T - mg = ma$$

Por último, calculamos la masa siguiendo estos pasos:

$$T = mg + ma = m(g + a)$$
$$m = \frac{T}{g + a} = \frac{9600 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2 + 2.5 \text{ m/s}^2}$$
$$m = \frac{9600 \text{ N}}{12.3 \text{ m/s}^2} = 780.5 \text{ kg}$$

Puesto que la fuerza resultante debe estar en la misma dirección que la aceleración, muchas veces es conveniente seleccionar un solo eje a lo largo del movimiento como se hizo. Debemos también elegir la dirección del movimiento como positiva.

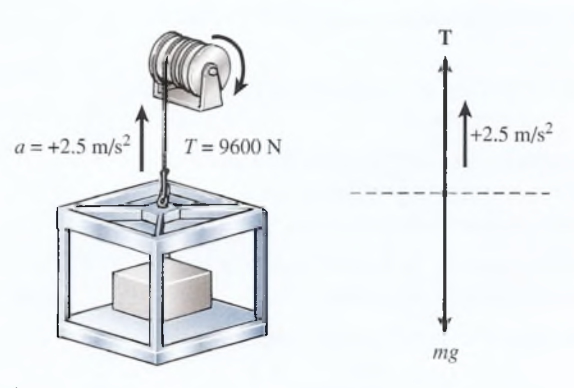


Figura 7.6 Aceleración hacia arriba en un campo gravitacional.

Ejemplo 7.8

Una bola de 100 kg se hace descender por medio de un cable, con una aceleración hacia abajo de 5 m/s^2. ¿Cuál es la tensión en el cable?

Plan: Seguimos la estrategia anterior. No obstante, ponga atención a los signos dados para cada uno de los vectores cuando aplique la segunda ley de Newton.

Solución: Al igual que en el ejemplo 7.7, trazamos un esquema y un diagrama de cuerpo libre, como en la figura 7.7. Al organizar la información, escribimos

Dados: $m = 100$ kg; $g = 9.8$ m/s^2; $a = 5$ m/s^2 Encuentre: $T = ?$

La dirección *hacia abajo* del movimiento se elige como dirección positiva. Esto significa que los vectores con dirección hacia abajo serán positivos y aquellos con dirección hacia arriba serán negativos. La fuerza resultantes es, por tanto, $mg - T$ y no $T - mg$. Ahora, a partir de la segunda ley de Newton, escribimos

Fuerza resultante hacia abajo = masa total × aceleración hacia abajo

$$mg - T = ma$$
$$T = mg - ma = m(g - a)$$
$$T = (100 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2 - 5 \text{ m/s}^2)$$
$$T = 480 \text{ N}$$

Si así lo prefiere, este problema puede resolverse al sustituir los valores conocidos al principio del problema en vez de hallar primero la solución algebraica. Sin embargo, por lo general es mejor hacer la sustitución al final.

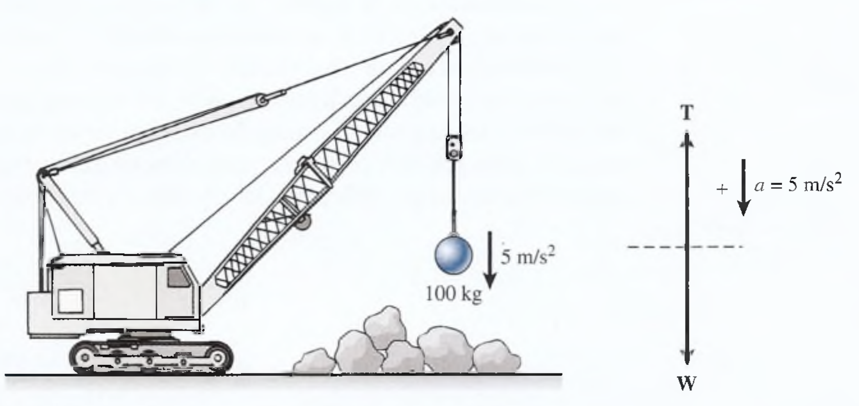


Figura 7.7 Aceleración hacia abajo.

Ejemplo 7.9

Una *máquina de Atwood* consiste en una polea simple con masas suspendidas a ambos lados unidas por un cable. Se trata de una versión simplificada de gran número de sistemas industriales en los cuales se utilizan contrapesos para equilibrar. Suponga que la masa del lado derecho es de 10 kg y que la masa del lado izquierdo es de 2 kg. (a) ¿Cuál es la aceleración del sistema? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

Plan: En este problema hay dos masas, una que se mueve hacia arriba y la otra que se mueve hacia abajo. En estos casos muchas veces es mejor aplicar la segunda ley de Newton primero a todo el sistema de movimiento. La línea de movimiento está, por tanto, hacia arriba a la izquierda (+) y hacia abajo a la derecha (+). Por tanto, la masa del sistema es todo lo que se está moviendo y la fuerza resultante es simplemente la diferencia en los pesos. Una vez que hallamos la aceleración de todo el sistema, podemos aplicar la segunda

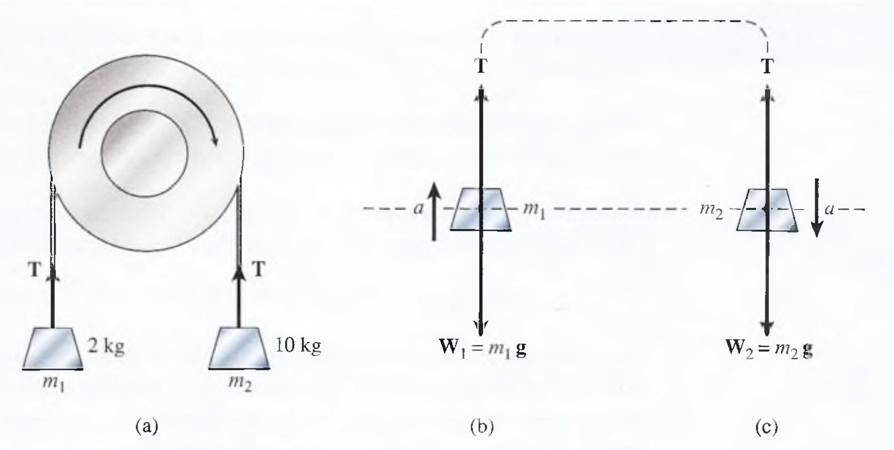


Figura 7.8 Dos masas cuelgan de una polea fija. Se muestran los diagramas de cuerpo libre; la dirección positiva de la aceleración se elige hacia arriba a la izquierda, y hacia abajo a la derecha.

ley de Newton en forma separada a cualquiera de las dos masas para obtener la tensión en la cuerda.

Solución (a): Primero se traza el esquema y los diagramas de cuerpo libre para cada masa, como se muestra en la figura 7.8. Los pesos de las masas se escriben como m_1g y m_2g, respectivamente. Al organizar los datos escribimos

Dados: $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 10$ kg; $g = 9.8$ m/s^2; Encuentre: a y T.

Determinaremos la aceleración al considerar *todo* el sistema. Observe que la polea simplemente cambia la dirección de las fuerzas. Si omitimos la masa del cable, la fuerza no equilibrada es tan sólo la diferencia en los pesos ($m_2g - m_1g$). La tensión en el cable no es un factor porque el cable ligero es parte del sistema de movimiento. Si omitimos la masa del cable, la masa total es la suma de todas las masas en movimiento ($m_2g + m_1g$). Al elegir una dirección positiva *constante* para el movimiento (*hacia arriba* en la izquierda y *hacia abajo* en la derecha), aplicamos la segunda ley de Newton:

$$m_2g - m_1g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_2g - m_1g}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{(10 \text{ kg} - 2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{10 \text{ kg} + 2 \text{ kg}}$$

$$a = 6.53 \text{ m/s}^2$$

Solución (b): Para resolver para la tensión T en el cable, se debe considerar *cualquiera* de las masas en forma individual ya que si se considera el sistema como un todo, no se incluye la tensión en el cable. Suponga que consideramos sólo aquellas fuerzas que actúan sobre la masa izquierda m_1.

Fuerza resultante en m_1 = *masa* m_1 × *aceleración de* m_1

La aceleración de m_1 es, desde luego, la misma que para el sistema total (6.53 m/s^2). Así que,

$$T - m_1g = m_1a \qquad \text{o} \qquad T = m_1a + m_1g = m_1(a + g)$$

$$T = (2 \text{ kg})(6.53 \text{ m/s}^2 + 9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$T = 32.7 \text{ N}$$

Demuestre que se obtendría la misma respuesta si se aplica la segunda ley de Newton a la segunda masa.

Ejemplo 7.10

Un bloque m_1 de 5 kg se encuentra en reposo sobre una mesa sin fricción. Tiene atada una cuerda que pasa sobre una polea liviana sin fricción y que está atada en su otro extremo a una masa m_2, como se muestra en la figura 7.9. (a) ¿Cuál debe ser la masa m_2 para impartir al sistema una aceleración de 2 m/s²? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda para este arreglo?

Plan: De nuevo resulta conveniente calcular la aceleración de *todo* el sistema al sumar las fuerzas a lo largo de toda la línea de movimiento. Después de determinar la aceleración, aplicaremos la segunda ley de Newton sólo a una de las masas para hallar la tensión en la cuerda que une las masas.

Solución (a): Dibuje diagramas de cuerpo libre para cada cuerpo del sistema, como se muestra en la figura 7.9. La dirección positiva constante es hacia la derecha en la mesa y hacia abajo para la masa suspendida. La información dada es

Dados: $m_1 = 5$ kg; $a = 2$ m/s²; $g = 9.8$ m/s²; Encuentre: m_2 y T.

La fuerza normal n equilibra el peso m_1g de la masa de la mesa y la cuerda es parte del sistema, así que la fuerza resultante sobre el sistema es simplemente el peso de la masa suspendida m_2g. Al aplicar la segunda ley de Newton a todo el sistema se obtiene

$$\textit{Fuerza resultante sobre el sistema} = \textit{masa total} \times \textit{aceleración}$$
$$m_2g = (m_1 + m_2)a$$

Para determinar la masa m_2, debemos despejar la variable como se muestra a continuación:

$$m_2g = m_1a + m_2a$$
$$m_2g - m_2a = m_1a$$
$$m_2(g - a) = m_1a$$
$$m_2 = \frac{m_1a}{g - a}$$

Ahora, la sustitución de valores conocidos da lo siguiente:

$$m_2 = \frac{(5\text{ kg})(2\text{ m/s}^2)}{9.8\text{ m/s}^2 - 2\text{ m/s}^2} = 1.28\text{ kg}$$

Solución (b): Ahora que conocemos la masa m_2, podemos encontrar la tensión en la cuerda al considerar cualquiera de las masas en forma independiente, m_1 o m_2. La opción más

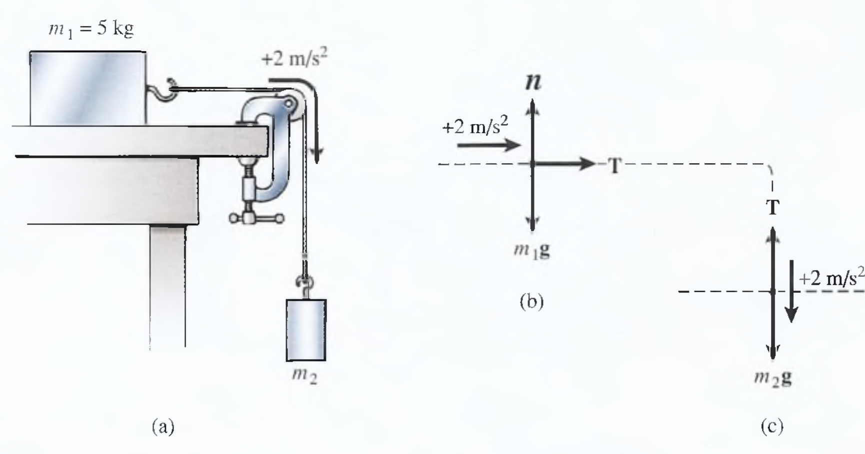


Figura 7.9

simple sería la masa de la mesa m_1, ya que la fuerza resultante sobre la masa es la tensión en la cuerda.

$$T = m_1 a = (5\text{ kg})(2\text{ m/s}^2)$$
$$T = 10.0\text{ N}$$

La misma respuesta se obtiene si aplicamos la segunda ley de Newton sólo para la masa suspendida. Al elegir la dirección positiva hacia abajo obtenemos

$$m_2 g - T = m_2 a \qquad \text{o} \qquad T = m_2(g - a)$$

De nuevo, la sustitución muestra que la tensión debe ser 10.0 N.

Ejemplo 7.11

Considere las masas $m_1 = 20$ kg y $m_2 = 18$ kg en el sistema representado en la figura 7.10. Si el coeficiente de fricción cinética es 0.1 y el ángulo de inclinación θ es 30°, encuentre (a) la aceleración del sistema y (b) la tensión en la cuerda que une las dos masas.

Plan: Este problema es parecido al ejemplo 7.10 excepto que una de las masas se mueve hacia arriba por el plano inclinado contra la fricción. Elegiremos con cuidado una línea consistente de movimiento para todo el sistema. La ley de Newton se aplicará primero a todo el sistema y después a una sola masa.

Solución (a): Trace un diagrama de cuerpo libre para cada objeto y luego liste la información dada.

Dadas: $m_1 = 20$ kg; $m_2 = 18$ kg; $g = 9.8$ m/s^2; Encuentre: a y T.

Observe la línea positiva de movimiento que se muestra en la figura 7.10. Necesitaremos trabajar con las componentes de los vectores que están a lo largo de esta línea o son perpendiculares a la misma. El ángulo de la pendiente es 30°, esto significa que el ángulo de referencia para el peso $m_1 g$ es 60° o el ángulo complementario del ángulo de la pendiente. Por tanto, la fuerza resultante en el sistema es la diferencia entre el peso suspendido $m_2 g$ y las fuerzas opuestas de fricción f_k y la componente del peso $m_1 g$ hacia abajo por el plano inclinado. Al aplicar la ley de Newton obtenemos

Fuerza resultante sobre todo el sistema = masa total × aceleración del sistema

$$m_2 g - f_k - m_1 g \cos 60° = (m_1 + m_2)a \tag{7.5}$$

Si observamos el diagrama de cuerpo libre y recordamos la definición de la fuerza de fricción, vemos que

$$f_k = \mu_k n \qquad \text{y} \qquad n = m_1 g \text{ sen } 60°$$

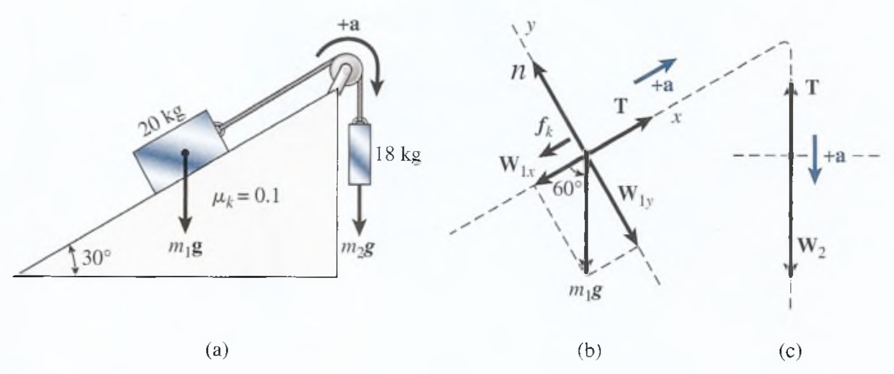


Figura 7.10

La sustitución de estas cantidades en la ecuación (7.5) da

$$m_2g - \mu_k(m_1g \text{ sen } 60°) - m_1g \cos 60° = (m_1 + m_2)a$$

Al resolver para a, tenemos

$$a = \frac{m_2g - \mu_k m_1 g \text{ sen } 60° - m_1 g \cos 60°}{m_1 + m_2}$$

Finalmente, sustituimos toda la información dada para hallar a:

$$a = \frac{(18 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 0.1(20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 60° - (20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \cos 60°}{20 \text{ kg} + 18 \text{ kg}}$$

$$a = 1.62 \text{ m/s}^2$$

Tal vez quiera sustituir la información dada si así lo prefiere, pero corre el peligro de cometer un error al principio que irá creciendo en el trabajo subsiguiente.

Solución (b): Para determinar la tensión en la cuerda, aplicamos la ley de Newton sólo a la masa de 18 kg. A partir de la figura 7.10c obtenemos

Fuerza resultante de m_2 = masa m_2 × aceleración de m_2

$$m_2g - T = m_2a$$

$$T = m_2g - m_2a = m_2(g - a)$$

$$T = (18 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2 - 1.62 \text{ m/s}^2)$$

$$T = 147 \text{ N}$$

Verifique este resultado al aplicar la ley de Newton a la masa sobre el plano inclinado.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo hemos considerado el hecho de que una fuerza resultante siempre producirá una aceleración en la dirección de la fuerza. La magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton sobre el movimiento. Los conceptos siguientes son esenciales para las aplicaciones de esta ley fundamental:

- La fórmula matemática que expresa la segunda ley de Newton sobre el movimiento puede escribirse así:

$$\textit{Fuerza} = \textit{masa} \times \textit{aceleración}$$

$$F = ma \qquad m = \frac{F}{a} \qquad a = \frac{F}{m}$$

En unidades del SI: $1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2)$

En unidades del SUEU: $1\ \text{lb} = (1\ \text{slug})(1\ \text{ft/s}^2)$

- El peso es la fuerza debida a una aceleración particular g. Por consiguiente, el peso W se relaciona con la masa m por medio de la segunda ley de Newton:

$$W = mg \quad m = \frac{F}{g} \quad g = 9.8\ \text{m/s}^2 \text{ o } 32\ \text{ft/s}^2$$

Por ejemplo, una masa de 1 kg tiene un peso de 9.8 N. Un peso de 1 lb tiene una masa de $\frac{1}{32}$ slug. En un problema específico, debe considerar si le informan el peso o la masa. Luego, es necesario determinar qué se requiere en una ecuación. Las conversiones de masa a peso y de peso a masa son comunes.

- Aplicación de la segunda ley de Newton:

1. Construir un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo que experimente una aceleración. Indicar en este diagrama la dirección de la aceleración positiva.
2. Determinar una expresión para la fuerza neta resultante sobre un cuerpo o un sistema de cuerpos.
3. Establecer que la fuerza resultante es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del sistema.
4. Resolver la ecuación resultante para la cantidad desconocida.

Conceptos clave

masa 140
newton 139
peso 140
segunda ley de Newton 139
slug 139

Preguntas de repaso

7.1. Indique con claridad la diferencia entre la masa de un objeto y su peso, y mencione cuáles son las unidades apropiadas para cada uno en los sistemas de unidades del SI y del SUEU.

7.2. ¿A qué nos referimos exactamente cuando decimos que un atleta es una persona de 160 lb? ¿Cuál sería la masa de esa persona en la Luna si $g_L = 6\ \text{ft/s}^2$?

7.3. Una pieza de latón redonda que se encuentra en el laboratorio está marcada como 500 g. ¿Esta cifra indica su peso o su masa? ¿Cómo lo sabe?

7.4. Se mantiene un estado de equilibrio en una mesa suspendida, colgando masas de las poleas montadas en diversos puntos de su borde circular. En el cálculo de las masas necesarias para establecer el equilibrio, a veces empleamos gramos en lugar de newtons. ¿Existe alguna justificación para hacerlo así?

7.5. Al trazar diagramas de cuerpo libre, ¿por qué es conveniente, en general, elegir el eje x o el eje y en la dirección del movimiento, aunque eso implique girar los ejes? Use como ilustración el ejemplo del movimiento a lo largo de un plano inclinado.

7.6. En el ejemplo de una máquina Atwood (ejemplo 7.9), no tomamos en cuenta la masa del cable que une las dos masas. Comente cómo se modifica este problema si la masa del cable es suficientemente grande para afectar el movimiento.

7.7. En la industria es frecuente oír hablar de un kilogramo-fuerza (kg_f), el cual se define como una fuerza equivalente al peso de 1 kg de masa junto a la superficie de la Tierra. En Estados Unidos a menudo se habla también de la libra-masa (lb_m), unidad que corresponde a la masa de un objeto cuyo peso es de 1 lb junto a la superficie de la Tierra. Calcule el valor de esas cantidades en las unidades del SI apropiadas y comente los problemas que se presentan a causa de su utilización.

Problemas

Sección 7.1 Segunda ley de Newton

7.1. Una masa de 4 kg está bajo la acción de una fuerza resultante de (a) 4 N, (b) 8 N y (c) 12 N. ¿Cuáles son las aceleraciones resultantes?
Resp. (a) 1 m/s^2, (b) 2 m/s^2, (c) 3 m/s^2

7.2. Una fuerza constante de 20 N actúa sobre una masa de (a) 2 kg, (b) 4 kg y (c) 6 kg. ¿Cuáles son las aceleraciones resultantes?

7.3. Una fuerza constante de 60 lb actúa sobre cada uno de tres objetos, produciendo aceleraciones de 4, 8 y 12 ft/s^2. ¿Cuáles son las masas?
Resp. 15, 7.5 y 5 slug

7.4. ¿Qué fuerza resultante debe actuar sobre un martillo de 4 kg para impartirle una aceleración de 6 m/s^2?

7.5. Se ha calculado que una fuerza resultante de 60 N producirá una aceleración de 10 m/s^2 en una carreta. ¿Qué fuerza se requiere para producir en ella una aceleración de sólo 2 m/s^2? Resp. 12 N

7.6. Un automóvil de 1000 kg avanza hacia el Norte a 100 km/h y frena hasta detenerse por completo en 50 m. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza requerida? Resp. 7717 N, Sur

Sección 7.2 La relación entre peso y masa

7.7. ¿Cuál es el peso de un buzón de correo de 4.8 kg? ¿Cuál es la masa de un depósito de 40 N?
Resp. 47.0 N, 4.08 kg

7.8. ¿Cuál es la masa de un niño de 60 lb? ¿Cuál es el peso de un hombre de 7 slugs?

7.9. Una mujer pesa 800 N en la Tierra. Cuando camina en la Luna, su peso es de sólo 133 N. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en la Luna y cuál es la masa de la mujer en ese satélite? ¿Y en la Tierra?
Resp. 1.63 m/s^2, 81.6 kg en ambos lugares

7.10. ¿Cuál es el peso de un astronauta de 70 kg en la superficie de la Tierra? Compare la fuerza *resultante* necesaria para impartirle una aceleración de 4 m/s^2 en la Tierra y la fuerza *resultante* que se requiere para impartirle la misma aceleración en el espacio, donde la gravedad es insignificante.

7.11. Calcule la masa y el peso de un cuerpo si una fuerza resultante de 16 N basta para impartirle una aceleración de 5 m/s^2. Resp. 3.20 kg, 31.4 N

7.12. Encuentre la masa y el peso de un cuerpo, sabiendo que una fuerza resultante de 850 N hace que su rapidez se incremente de 6 m/s a 15 m/s en un tiempo de 5 s junto a la superficie de la Tierra.

7.13. Calcule la masa y el peso de un cuerpo, considerando que con una fuerza resultante de 400 N provoca una disminución de 4 m/s en su velocidad en 3 s.
Resp. 300 kg, 2940 N

Sección 7.3 Aplicación de la segunda ley de Newton a problemas de un solo cuerpo

7.14. ¿Qué fuerza horizontal se requiere para jalar un trineo de 6 kg con una aceleración de 4 m/s^2 cuando una fuerza de fricción de 20 N se opone al movimiento?

7.15. Un automóvil de 1200 kg tiene una rapidez de 25 m/s. ¿Qué fuerza resultante se requiere para detenerlo a 70 m en un terreno nivelado? ¿Cuál debe ser el coeficiente de fricción cinética?
Resp. −5357 N, 0.456

7.16. Una masa de 10 kg se eleva por medio de un cable ligero. ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la aceleración es igual a (a) cero, (b) 6 m/s^2 hacia arriba y (c) 6 m/s^2 hacia abajo?

7.17. Una masa de 20 kg cuelga en el extremo de una cuerda. Halle la aceleración de la masa si la tensión en el cable es (a) 196 N, (b) 120 N y (c) 260 N.
Resp. 0, −3.8 m/s^2, +3.2 m/s^2

7.18. Un ascensor de 800 kg se iza verticalmente con una cuerda resistente. Calcule la aceleración del ascensor cuando la tensión en la cuerda es de (a) 9000 N, (b) 7840 N y (c) 2000 N.

7.19. Se aplica una fuerza horizontal de 100 N para arrastrar un gabinete de 8 kg sobre un piso nivelado. Encuentre la aceleración del gabinete si $\mu_k = 0.2$.
Resp. 10.5 m/s^2

7.20. En la figura 7.11, una masa desconocida desciende deslizándose por el plano inclinado a 30°. ¿Cuál es la aceleración si no existe fricción alguna?

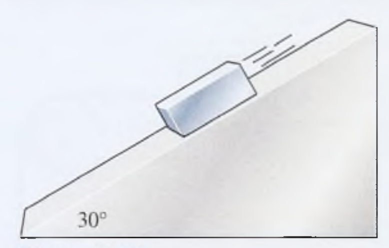


Figura 7.11

7.21. Suponga que $\mu_k = 0.2$ en la figura 7.11. ¿Cuál es la aceleración? ¿Por qué no es necesario conocer la masa del bloque? Resp. 3.20 m/s^2, baja por el plano

***7.22.** Suponga que $m = 10$ kg y $\mu_k = 0.3$ en la figura 7.11. ¿Qué fuerza de empuje **P** dirigida hacia arriba y a lo largo del plano inclinado de la figura 7.11 producirá una aceleración de 4 m/s^2 en dirección ascendente por el plano?

***7.23.** ¿Qué fuerza **P** hacia abajo por el plano inclinado de la figura 7.11 se requiere para que la aceleración *hacia abajo* por dicho plano sea de 4 m/s^2? Suponga que $m = 10$ kg y $\mu_k = 0.3$. Resp. 16.5 N

Sección 7.4 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a problemas con varios cuerpos

7.24. Suponga una fricción cero en el sistema que muestra la figura 7.12. ¿Cuál es la aceleración del sistema? ¿Cuál es la tensión T en la cuerda de unión?

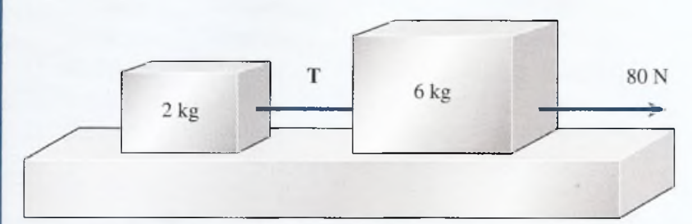


Figura 7.12

7.25. ¿Qué fuerza ejerce el bloque A sobre el bloque B de la figura 7.13? Resp. 11.2 N

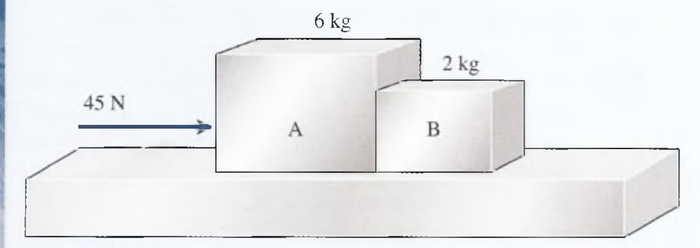


Figura 7.13

***7.26.** ¿Cuáles son la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda de unión para la distribución que presenta la figura 7.14? Las superficies no tienen fricción.

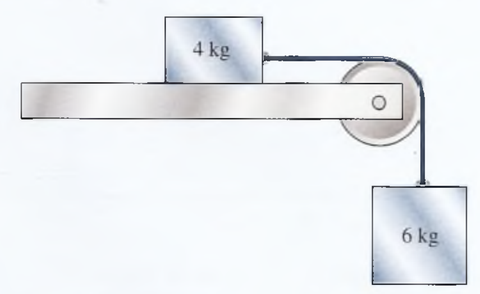


Figura 7.14

***7.27.** Si el coeficiente de fricción cinética entre la mesa y el bloque de 4 kg es de 0.2 en la figura 7.14, ¿cuál es la aceleración del sistema? ¿Cuál es la tensión en la cuerda? Resp. 5.10 m/s^2, 28.2 N

***7.28.** Supongamos que las masas m_1 = 2 kg y m_2 = 8 kg están unidas por una cuerda que pasa por una polea ligera sin fricción como indica la figura 7.15. ¿Cuáles son la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda?



Figura 7.15

***7.29.** El sistema descrito en la figura 7.16 parte del reposo. ¿Cuál es la aceleración si se supone una fricción de cero?

Resp. 2.69 m/s^2 descendiendo por el plano

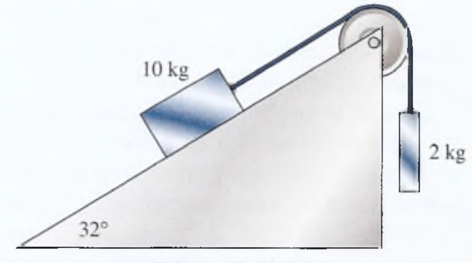


Figura 7.16

***7.30.** ¿Cuál es la aceleración en la figura 7.16 cuando el bloque de 10 kg desciende por el plano en presencia de fricción? Suponga que μ_k = 0.2.

***7.31.** ¿Cuál es la tensión en la cuerda en el problema 7.30? Resp. 22.2 N

Problemas adicionales

7.32. En la figura 7.15 suponga que la masa m_2 es el triple de la masa m_1. Calcule la aceleración del sistema.

7.33. Un trabajador de 200 lb está de pie sobre una báscula en el ascensor donde la aceleración hacia arriba es 6 ft/s^2. El ascensor se detiene y acelera hacia abajo a 6 ft/s^2. ¿Cuáles serán las lecturas en los movimientos ascendente y descendente?

Resp. 238 lb, 163 lb

7.34. Una carga de 8 kg es acelerada hacia arriba por medio de una cuerda cuya resistencia de rotura es de 200 N. ¿Cuál es la aceleración máxima?

7.35. El valor de $\mu_k = 0.7$ para neumáticos de caucho en una carretera de concreto. ¿Cuál es la distancia horizontal mínima de frenado para una camioneta de 1600 kg que circula a 20 m/s? Resp. 29.2 m

***7.36.** Supongamos que las masas de 4 y 6 kg de la figura 7.14 se intercambian, de modo que la masa más grande esté sobre la mesa. ¿Cuáles serían la aceleración y la tensión en la cuerda (sin tomar en cuenta la fricción)?

***7.37.** Considere dos masas *A* y *B* unidas mediante una cuerda y colgadas de una sola polea. Si la masa *A* es el doble que la masa *B*, ¿cuál será la aceleración del sistema? Resp. 3.27 m/s²

***7.38.** Una masa de 5 kg descansa sobre un plano inclinado a 34° en el cual $\mu_k = 0.2$. ¿Qué impulso hacia arriba del plano inclinado hará que el bloque se acelere a 4 m/s²?

***7.39.** Un bloque de 96 lb descansa sobre una mesa en la cual $\mu_k = 0.2$. Una cuerda atada a este bloque pasa por una polea ligera sin fricción. ¿Qué peso habrá que aplicar en el extremo libre para que el sistema tenga una aceleración de 4 ft/s²? Resp. 35.7 lb

Preguntas para la reflexión crítica

7.40. En un experimento de laboratorio, la aceleración de un carrito se mide por la separación de los puntos marcados a intervalos regulares en una cinta recubierta de parafina. Pesos cada vez más grandes son transferidos del carrito a un gancho colocado en el extremo de una cinta que pasa por una polea ligera sin fricción. De esta manera, la masa de todo el sistema se mantiene constante. En virtud de que el carrito se mueve sobre una pista neumática horizontal con fricción insignificante, la fuerza resultante es igual a las pesas colocadas en el extremo de la cinta. Así se han registrado los siguientes datos:

Peso, *W*	2	4	6	8	10	12
Aceleración, m/s²	1.4	2.9	4.1	5.6	7.1	8.4

Elabore una gráfica de peso contra aceleración. ¿Cuál es el significado de la pendiente de esa curva? ¿Cuál es la masa del sistema?

7.41. En el experimento descrito en el problema 7.40, el estudiante coloca un peso constante de 4 N en el extremo libre de la cinta. Se realizan varios ensayos y, en cada uno de ellos, la masa del carrito se incrementa agregándole pesas. ¿Qué pasa con la aceleración cuando la masa del sistema se incrementa? ¿Cuál tiene que ser el valor del producto de la masa del sistema y la aceleración en cada ensayo? ¿Será necesario incluir la masa del peso constante 4 N en estos experimentos?

7.42. Se usa una disposición similar a la que presenta la figura 7.14, salvo que las masas son sustituidas. ¿Cuál es la aceleración del sistema si la masa suspendida es tres veces mayor que la masa colocada sobre la mesa y $\mu_k = 0.3$? Resp. 6.62 m/s²

7.43. Tres masas, de 2 kg, 4 kg y 6 kg, están unidas (en ese orden) por cuerdas y han sido colgadas del techo con otra cuerda, de modo que la masa más grande está en la posición más baja. ¿Cuál es la tensión en cada cuerda? Si después son separadas del techo, ¿cuál deberá ser la tensión en la cuerda superior para que el sistema tenga una aceleración ascendente de 4 m/s²? En este último caso, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas que unen las tres masas?

7.44. Un astronauta de 80 kg sale a una caminata espacial y empuja un panel solar de 200 kg que se desprendió de una nave espacial. Esa fuerza imparte en el panel una aceleración de 2 m/s². ¿A qué aceleración está sujeto el astronauta? ¿Los dos seguirán acelerando después del empujón? ¿Por qué sí o por qué no? Resp. −5.00 m/s², no

7.45. Un trineo de 400 lb desciende por una colina (μ_k = 0.2) cuya pendiente tiene un ángulo de 60°. ¿Cuál es la fuerza normal sobre el trineo? ¿Cuál es la fuerza de fricción cinética? ¿Cuál es la fuerza resultante colina abajo? ¿Cuál es la aceleración? ¿Es necesario conocer el peso del trineo para calcular su aceleración?

7.46. Tres masas, $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 8$ kg y $m_3 = 6$ kg, están unidas como indica la figura 7.17. Sin tomar en cuenta la fricción, ¿cuál es la aceleración del sistema? ¿Cuáles son las tensiones en la cuerda de la izquierda y la cuerda de la derecha? ¿Sería igual la aceleración si la masa de en medio m_2 fuera eliminada?

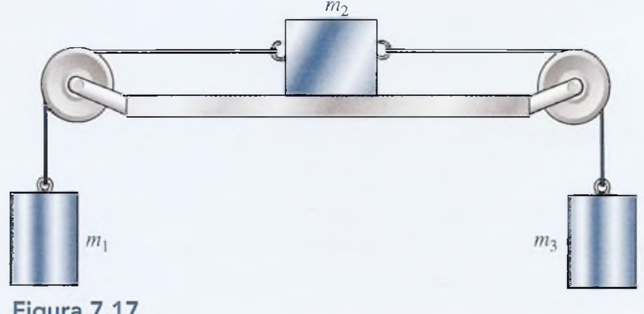


Figura 7.17

***7.47.** Suponga que $\mu_k = 0.3$ entre la masa m_2 y la mesa de la figura 7.17. Las masas m_2 y m_3 son de 8 y 6 kg respectivamente. ¿Qué masa m_1 se requiere para que el sistema se acelere hacia la izquierda a 2 m/s²?

***7.48.** Un bloque de masa desconocida recibe un impulso hacia arriba en un plano inclinado a 40° y después queda libre. Continúa ascendiendo por el plano (+) con una aceleración de -9 m/s². ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética? Resp. 0.360

***7.49.** El bloque *A* de la figura 7.18 pesa 64 lb. ¿Cuál tendrá que ser el peso de un bloque *B* si el bloque *A* sube por el plano con una aceleración de 6 ft/s²? No tome en cuenta la fricción.

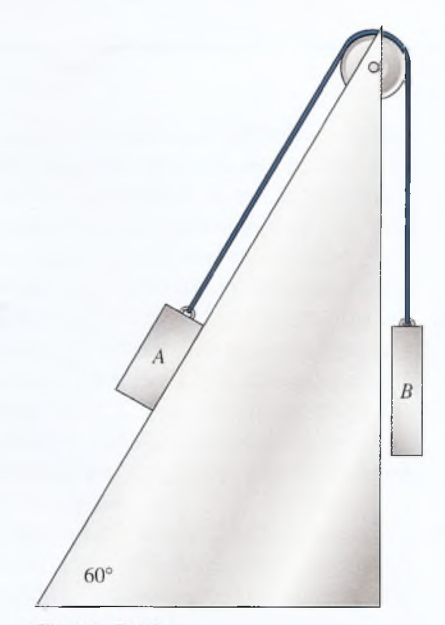


Figura 7.18

***7.50.** La masa del bloque *B* de la figura 7.18 es de 4 kg. ¿Cuál debe ser la masa del bloque *A* para que descienda por el plano con una aceleración de 2 m/s²? No tome en cuenta la fricción. Resp. 7.28 kg

***7.51.** Suponga que las masas *A* y *B* de la figura 7.18 son de 4 kg y 10 kg, respectivamente. El coeficiente de fricción cinética es 0.3. Calcule la aceleración si (a) el sistema asciende inicialmente por el plano inclinado y (b) si el sistema desciende inicialmente por dicho plano.



8 Trabajo, energía y potencia



La Ninja, una montaña rusa en el parque Six Flags de Georgia, tiene una altura de 122 ft y una rapidez de 52 mi/h. La energía potencial de la gravedad debida a su altura cambia en energía cinética de movimiento y el intercambio entre los dos tipos de energía continúa hasta el final del recorrido. (*Fotografía de Paul E. Tippens.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá y escribirá las fórmulas matemáticas para el trabajo, la energía potencial, la energía cinética y la potencia.
2. Aplicará los conceptos de trabajo, energía y potencia para resolver problemas similares a los presentados como ejemplos en el texto.
3. Definirá y demostrará con ejemplos su conocimiento de las unidades siguientes: joule, libra-pie, watt, caballo de fuerza y libra-pie por segundo.
4. Analizará y aplicará sus conocimientos sobre la relación entre la realización de un trabajo y el cambio correspondiente en la energía cinética.
5. Analizará y aplicará su conocimiento del principio de la conservación de la energía mecánica.
6. Determinará la potencia de un sistema y comprenderá su relación con el tiempo, la fuerza, la distancia y la velocidad.

La razón principal de aplicar una fuerza resultante es causar un desplazamiento. Por ejemplo, una enorme grúa que levanta una viga de acero hasta la parte superior de un edificio; el compresor de un acondicionador de aire que fuerza el paso de un fluido a través de su ciclo de enfriamiento, y las fuerzas electromagnéticas que mueven electrones por la pantalla de un televisor. Como aprenderemos aquí, siempre que una fuerza actúa a distancia se realiza un *trabajo*, el cual es posible predecir o medir. La capacidad de realizar trabajo se define como ***energía*** y la razón de cambio que puede efectuar se definirá como ***potencia***. En la actualidad, las industrias centran su interés principal en el uso y el control de la energía, por lo que es esencial comprender a fondo los conceptos de trabajo, energía y potencia.

8.1 Trabajo

Cuando tratamos de arrastrar un carro con una cuerda, como se observa en la figura 8.1a, no pasa nada. Estamos ejerciendo una fuerza y, sin embargo, el carro no se ha movido. Por otra parte, si incrementamos en forma continua esta fuerza, llegará un momento en que el carro se desplazará. En este caso, en realidad hemos logrado algo a cambio de nuestro esfuerzo. En física este logro se define como ***trabajo***. El término *trabajo* tiene una definición operacional, explícita y cuantitativa. Para que se realice un trabajo han de cumplirse tres requisitos:

1. Debe haber una fuerza aplicada.
2. La fuerza debe actuar a través de cierta distancia, llamada ***desplazamiento***.
3. La fuerza debe tener una componente a lo largo del desplazamiento.

Suponiendo que se cumplen esas condiciones, es posible dar una definición formal de trabajo:

Trabajo es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes del desplazamiento y de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

$$\textit{Trabajo} = \textit{Componente de la fuerza} \times \textit{desplazamiento}$$

$$\text{Trabajo} = F_x x \qquad \textbf{(8.1)}$$

En esta ecuación, F_x es la componente de **F** a lo largo del desplazamiento x. En la figura 8.1, sólo F_x contribuye al trabajo. Su magnitud puede determinarse por trigonometría, y el trabajo puede expresarse en términos del ángulo θ formado entre **F** y x:

$$\text{Trabajo} = (F \cos \theta)x \qquad \textbf{(8.2)}$$

Con gran frecuencia la fuerza que realiza el trabajo está dirigida íntegramente a lo largo del desplazamiento. Esto sucede cuando una pesa se eleva en forma vertical o cuando una fuerza horizontal arrastra un objeto por el piso. En estos casos sencillos, $F_x = F$, y el trabajo es simplemente el producto de la fuerza por el desplazamiento:

$$\text{Trabajo} = Fx \qquad \textbf{(8.3)}$$

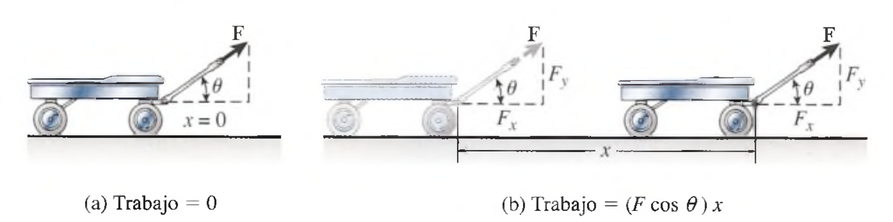


Figura 8.1 El trabajo realizado por una fuerza **F** que ocasiona un desplazamiento x.

Otro caso especial se presenta cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento. En esta situación, el trabajo será de cero, ya que $F_x = 0$. Un ejemplo es el movimiento paralelo a la superficie terrestre, en el que la gravedad actúa verticalmente hacia abajo y es perpendicular a todos los desplazamientos horizontales. En esos casos, la fuerza de gravedad no influye.

Ejemplo 8.1

¿Qué trabajo realiza una fuerza de 60 N al arrastrar un carro como el de la figura 8.1 a través de una distancia de 50 m, cuando la fuerza transmitida por el manubrio forma un ángulo de 30° con la horizontal?

Plan: Sólo contribuye al trabajo la componente de la fuerza aplicada **F** que se halla a lo largo del desplazamiento. El trabajo se determinará como el producto de esta componente $F \cos \theta$ por el desplazamiento lineal x.

Solución: Al aplicar la ecuación (8.1) se obtiene

$$\text{Trabajo} = (F \cos \theta)x = (60 \text{ N})(\cos 30°)(50 \text{ m})$$

$$\text{Trabajo} = 2600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Observe que las unidades de trabajo son las unidades de fuerza multiplicadas por las de distancia. Por tanto, en unidades del SI, el trabajo se mide en *newtons-metro* (N · m). Por convención, esta unidad combinada se llama **joule** y se representa con el símbolo J.

Un joule (1 J) es igual al trabajo realizado por una fuerza de un newton al mover un objeto a lo largo de una distancia paralela de un metro.

En el ejemplo 8.1, el trabajo realizado para arrastrar el carro se escribiría 2600 J.

En Estados Unidos, el trabajo se expresa a veces también en unidades del SUEU. Cuando la fuerza se expresa en *libras* (lb) y el desplazamiento en *pies* (ft), la unidad de trabajo correspondiente se llama ***libra-pie*** (ft · lb).

Una libra-pie (1 ft · lb) es igual al trabajo realizado por una fuerza de una libra al mover un objeto a lo largo de una distancia paralela de un pie.

No hay un nombre especial para esta unidad.

Los factores de conversión siguientes son útiles cuando se comparan unidades de trabajo en los dos sistemas:

$$1 \text{ J} = 0.7376 \text{ ft} \cdot \text{lb} \qquad 1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1.356 \text{ J}$$

8.2 Trabajo resultante

Cuando consideramos el trabajo de varias fuerzas que actúan sobre el mismo objeto es útil distinguir entre el trabajo positivo y el negativo. En este texto se sigue la convención de que el trabajo de una fuerza concreta es positivo si la componente de la fuerza se halla en la misma dirección que el desplazamiento. El trabajo negativo lo realiza una componente de fuerza que se opone al desplazamiento real. Así, el trabajo que realiza una grúa al levantar una carga es positivo, pero la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la carga realiza uno negativo. De igual forma, si estiramos un resorte, el trabajo sobre éste es positivo y el trabajo sobre el resorte es negativo cuando éste se contrae y nos arrastra. Otro ejemplo importante de trabajo negativo es el que se realiza mediante una fuerza de fricción que se opone a la dirección del desplazamiento.

Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento, el ***trabajo resultante*** (trabajo total) es la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas individuales. Esto también será igual al trabajo de la fuerza resultante. La realización de un trabajo neto requiere la existencia de una fuerza resultante. En el ejemplo 8.2 se aclaran estas ideas.

Ejemplo 8.2 Una fuerza de impulsión de 80 N mueve un bloque de 5 kg hacia arriba por un plano inclinado a 30°, como se muestra en la figura 8.2. El coeficiente de fricción cinética es de 0.25 y la longitud del plano es de 20 m. (a) Calcule el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque. (b) Demuestre que el trabajo neto realizado por estas fuerzas tiene el mismo valor que el trabajo de la fuerza resultante.

Plan: Elabore y marque un diagrama de cuerpo libre (véase la figura 8.2b) donde se muestre cada fuerza que actúa a lo largo del desplazamiento x. Es importante distinguir entre el trabajo de una fuerza individual, como **P**, f_k, n o **W** y el *trabajo resultante*. En la primera parte del problema consideraremos el trabajo de cada una de estas fuerzas independientemente de las otras. Luego, una vez que se reconozca que todas ellas tienen un desplazamiento común, demostraremos que el trabajo resultante equivale a la suma de los trabajos individuales.

Solución (a): Note que la fuerza normal no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento y cos 90° = 0

$$(\text{Trabajo})_n = (n \cos 90°)x \quad \text{o} \quad (\text{Trabajo})_n = 0$$

La fuerza de impulsión **P** se ejerce por completo a lo largo del desplazamiento y en la misma dirección. Por tanto,

$$(\text{Trabajo})_P = (P \cos 0°)x = (80 \text{ N})(1)(20 \text{ m})$$
$$(\text{Trabajo})_P = 1600 \text{ J}$$

Para calcular el trabajo de la fuerza de fricción f_k y el trabajo del peso **W**, primero debemos determinar las componentes del peso tanto a lo largo del plano como perpendicularmente a él.

$$W = mg = (5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2); \quad W = 49.0 \text{ N}$$
$$W_x = (49.0 \text{ N}) \text{ sen } 30° = 24.5 \text{ N}$$
$$W_y = (49.0 \text{ N}) \cos 30° = 42.4 \text{ N}$$

Observe que la referencia al ángulo de 30° es respecto al eje y en este caso para evitar un diagrama amontonado, lo que significa que el lado opuesto es la componente x y el lado adyacente la componente y. Elija con detenimiento las funciones trigonométricas correctas.

Las fuerzas normales al plano están equilibrados, de forma que $n = W_y$ y

$$n = W_y = 42.4 \text{ N}$$

Esto significa que la fuerza de fricción f_k es

$$f_k = \mu_k n = (0.25)(42.4 \text{ N}) \qquad \text{o} \qquad f_k = -10.6 \text{ N}$$

El signo menos indica que la fuerza de fricción se dirige hacia abajo del plano. En consecuencia, el trabajo realizado por esta fuerza es

$$(\text{Trabajo})_f = f_k x = (-10.6 \text{ N})(20 \text{ m}); \qquad (\text{Trabajo})_f = -212 \text{ J}$$

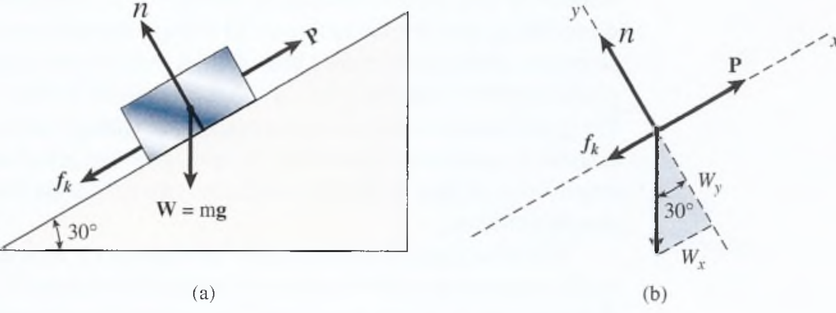


Figura 8.2 Trabajo que se requiere para empujar un bloque hacia arriba por un plano inclinado a 30°.

El peso **W** del bloque también realiza un trabajo negativo, ya que su componente W_x tiene dirección opuesta al desplazamiento.

$$(\text{Trabajo})_W = -(24.5 \text{ N})(20 \text{ m}) = -490 \text{ J}$$

Solución (b): El trabajo neto es igual a la suma de los trabajos realizados por cada fuerza

$$\begin{aligned}\text{Trabajo neto} &= (\text{trabajo})_n = (\text{trabajo})_P = (\text{trabajo})_f + (\text{trabajo})_W \\ &= 0 + 1600 \text{ J} - 212 \text{ J} - 490 \text{ J} \\ &= 898 \text{ J}\end{aligned}$$

Para demostrar que éste es también el trabajo de la fuerza resultante, calculamos primero esta última, que es igual a la suma de las fuerzas a lo largo del plano inclinado

$$\begin{aligned}F_R &= P - f_k - W_x \\ &= 80 \text{ N} - 10.6 \text{ N} - 24.5 \text{ N} = 44.9 \text{ N}\end{aligned}$$

Por tanto, el trabajo de F_R es

$$\text{Trabajo neto} = F_R x = (44.9 \text{ N})(20 \text{ m}) = 898 \text{ J}$$

que es igual al valor obtenido cuando se calcula el trabajo de cada fuerza por separado.

Es importante distinguir entre el trabajo *resultante* o *neto* y el trabajo de una fuerza individual. Si nos referimos al trabajo necesario para mover un objeto cierta distancia, el trabajo realizado por la fuerza que tira de él no es necesariamente el trabajo resultante. El trabajo puede haberse realizado por medio de una fuerza de fricción o de otras fuerzas. El *trabajo resultante* es simplemente el trabajo hecho por una fuerza resultante. Si ésta es cero, entonces el trabajo resultante también es cero, aun cuando diversas fuerzas individuales puedan estar realizando un trabajo positivo o negativo.

8.3 Energía

La energía puede considerarse *algo que es posible convertir en trabajo*. Cuando decimos que un objeto tiene energía, significa que es capaz de ejercer una fuerza sobre otro objeto para realizar un trabajo sobre él. Por el contrario, si realizamos un trabajo sobre un objeto, le hemos proporcionado a éste una cantidad de energía igual al trabajo realizado. Las unidades de energía son las mismas que las del trabajo: *joule* y *libra-pie*.

En mecánica nos interesan dos tipos de energía:

Energía cinética K, que es la energía que tiene un cuerpo en virtud de su movimiento.

Energía potencial U, que es la energía que tiene un sistema en virtud de su posición o condición.

Se dice que toda masa *m* que tenga velocidad posee también energía cinética. No obstante, para que haya energía potencial es preciso tener el *potencial* —valga la expresión— de una fuerza aplicada. Por tanto, un objeto en sí no puede tener energía potencial; más bien, esta última ha de pertenecer al *sistema*. Una caja que se mantiene a cierta distancia sobre la superficie de la Tierra es un ejemplo de un sistema con energía potencial. Si se le soltara, nuestro planeta ejercería una fuerza sobre ella; sin la Tierra no habría energía potencial.

Se puede pensar en numerosos ejemplos de cada tipo de energía. Por ejemplo, un automóvil en marcha, una bala en movimiento y un volante que gira tienen la capacidad de realizar trabajo a causa de su movimiento. De forma similar, un objeto que ha sido levantado, un resorte comprimido y una liga estirada tienen el potencial para realizar trabajo siempre que se active una fuerza. En la figura 8.3 se presentan varios ejemplos de cada tipo de energía.

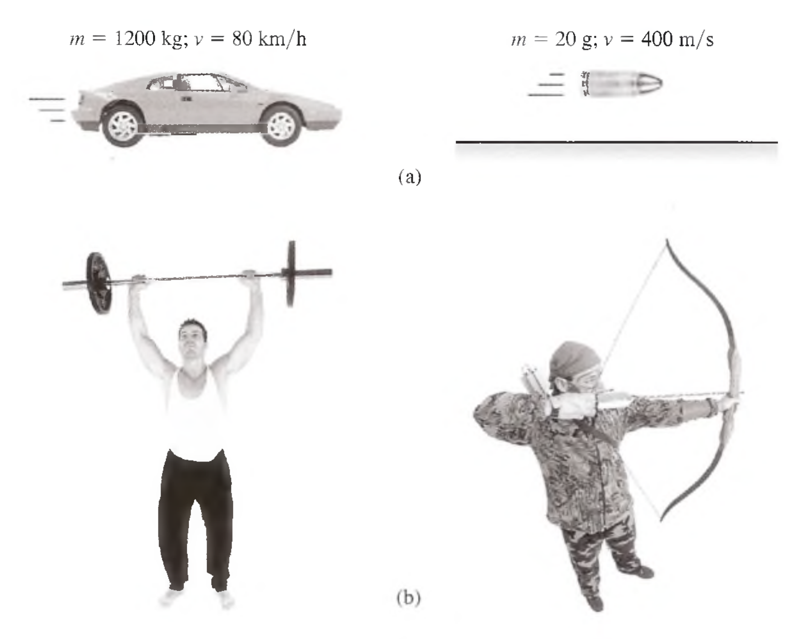


Figura 8.3 (a) Energía cinética de un automóvil o de una bala en movimiento. (b) Energía potencial de una pesa suspendida o de un arco tenso. (*Fotografía de Hemera, Inc.*)

8.4 Trabajo y energía cinética

Hemos definido la energía cinética como la capacidad de realizar trabajo como resultado del movimiento de un cuerpo. Para analizar la relación entre movimiento y trabajo, consideremos una fuerza **F** que actúa sobre el carrito de la figura 8.4. Supondremos que esta fuerza es la *fuerza resultante* sobre el carrito y despreciaremos toda fuerza de fricción. Digamos que el carrito y su carga tienen una masa combinada m y que tiene una velocidad inicial y final v_0 y v_f, respectivamente. De acuerdo con la segunda ley de Newton del movimiento, habrá una aceleración resultado de la razón

$$a = \frac{F}{m} \tag{8.4}$$

Para proseguir con este ejemplo, recuerde que en el capítulo 5 vimos que

$$2ax = v_f^2 - v_0^2$$

que puede expresarse en términos de a como sigue:

$$a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2x}$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación 8.4 queda

$$\frac{F}{m} = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2x}$$

Figura 8.4 El trabajo realizado por la fuerza resultante **F** produce un cambio en la energía cinética de la masa total m. (*Fotografías de Hemera.*)

Después de reordenar los factores y simplificar se obtiene

$$Fx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Si se presta atención, este resultado muestra que el miembro izquierdo de la ecuación representa el *trabajo resultante* hecho por una fuerza constante ejercida a lo largo del desplazamiento x. Los términos del miembro derecho son los valores inicial y final de una cantidad importante ($\frac{1}{2}mv^2$). Denominaremos a esta cantidad la energía cinética y escribiremos la fórmula

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \textit{Energía cinética} \qquad \textbf{(8.5)}$$

Con esta definición, ahora podemos afirmar que *el trabajo resultante efectuado sobre una masa **m** por una fuerza constante* F *ejercida a lo largo de una distancia **x** es igual al cambio de energía cinética* ΔK. Ésta es la definición de lo que designaremos ***teorema del trabajo-energía.***

Teorema del trabajo-energía: El trabajo de una fuerza externa resultante ejercida sobre un cuerpo es igual al cambio de la energía cinética de ese cuerpo

$$Fx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \textbf{(8.6)}$$

En muchas aplicaciones, la fuerza F de la ecuación (8.6) no es constante, sino que varía significativamente a lo largo del tiempo. En tales casos, el teorema del trabajo-energía puede aplicarse para determinar la *fuerza media*, que podemos considerar como la fuerza constante que realizaría la misma cantidad de trabajo.

Un análisis cuidadoso del teorema del trabajo-energía demostrará que un incremento de la energía cinética ($v_f > v_0$) ocurre como resultado de un *trabajo positivo*, en tanto que una *disminución* en la energía cinética ($v_f < v_0$) es el resultado de un trabajo *negativo*. En el caso especial en que el trabajo sea cero, la energía cinética es constante e igual al valor dado en la ecuación (8.6). Cabe señalar, asimismo, que las unidades de la energía cinética han de ser iguales que las del trabajo. Como ejercicio, debe demostrar que 1 kg · m/s^2 = 1 J.

Ejemplo 8.3

Calcule la energía cinética de un mazo de 4 kg en el instante en que su velocidad es de 24 m/s.

Solución: Con la aplicación directa de la ecuación (8.5) obtenemos

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(4 \text{ kg})(24 \text{ m/s})^2$$

$$K = 1\,150 \text{ J}$$

Ejemplo 8.4

Calcule la energía cinética de un automóvil de 3 200 lb que viaja a 60 mi/h (88 ft/s).

Plan: Como se describe el peso del auto en unidades del SUEU, debemos dividir entre la gravedad para hallar su masa. Después se calcula la energía cinética como siempre.

Solución:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3\,200 \text{ lb}}{32 \text{ ft/s}^2}\right)(88 \text{ ft/s})^2 = 3.87 \times 10^5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

El uso de ft · lb como unidad es anacrónico y se pide no emplearlo. Sin embargo, aún se le utiliza, si bien limitadamente, de modo que a veces es preciso realizar la conversión respectiva.

Ejemplo 8.5 ¿Qué fuerza media F es necesaria para detener una bala de 16 g que viaja a 260 m/s y que penetra en un trozo de madera a una distancia de 12 cm?

Plan: La fuerza ejercida por el bloque sobre la bala no es de ningún modo constante, pero puede suponer una fuerza *media* de detención. Entonces, el trabajo necesario para detener la bala será igual al cambio de energía cinética (véase la figura 8.5).

Solución: Tras observar que la velocidad de la bala cambia de un valor inicial de $v_0 =$ 260 m/s a uno final igual a cero, la aplicación directa de la ecuación (8.6) resulta en

$$Fx = \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \text{o} \qquad Fx = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Al resolver explícitamente para F se obtiene

$$F = \frac{-mv_f^2}{2x}$$

Las cantidades dadas en SI son

$$m = 16 \text{ g} = 0.016 \text{ kg}; \quad x = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}; \quad v_0 = 260 \text{ m/s}$$

Al sustituir valores se obtiene la fuerza media de detención

$$F = \frac{-mv_0^2}{2x} = \frac{-(0.016 \text{ kg})(260 \text{ m/s})^2}{2(0.12 \text{ m})}$$

$$F = -4510 \text{ N}$$

El signo menos indica que la fuerza era opuesta al desplazamiento. Cabe señalar que esta fuerza es aproximadamente 30 000 veces el peso de la bala.

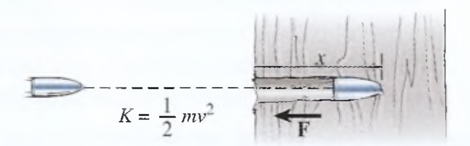


Figura 8.5 El trabajo realizado para detener la bala es igual al cambio en la energía cinética de ésta.

8.5 Energía potencial

La energía que posee el sistema en virtud de sus posiciones o condiciones se llama *energía potencial*. Como la energía se expresa a sí misma en forma de trabajo, la energía potencial implica que debe haber un potencial para realizar trabajo. Supongamos que el martinete de la figura 8.6 se utiliza para levantar un cuerpo cuyo peso es **W** hasta una altura h por arriba del pilote colocado sobre el suelo. Decimos que el sistema Tierra-cuerpo tiene una energía potencial gravitacional. Cuando se deje caer ese cuerpo, realizará un trabajo al golpear el pilote. Si es lo suficientemente pesado y cae desde una altura suficientemente grande, el trabajo realizado hará que el pilote recorra una distancia y.

La fuerza externa **F** necesaria para elevar el cuerpo debe ser por lo menos igual al peso **W**. Entonces, el trabajo realizado por el sistema está dado por

$$\text{Trabajo} = Wh = mgh$$

Esta cantidad de trabajo también puede ser efectuada *por* el cuerpo después de caer una distancia h. Por tanto, el cuerpo tiene una energía potencial igual en magnitud al trabajo externo necesario para elevarlo. Esta energía no proviene del sistema Tierra-cuerpo, sino que resulta del trabajo realizado sobre el sistema por un agente externo. Sólo una fuerza *externa*, como **F** en la figura 8.6 o la fricción, puede añadir o extraer energía del sistema formado por el cuerpo y la Tierra.

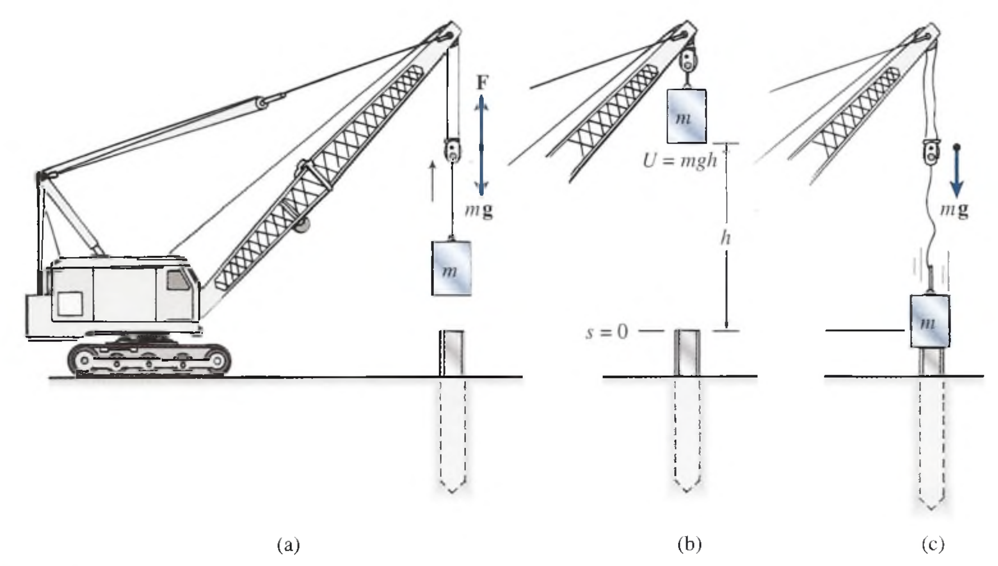


Figura 8.6 (a) Para levantar una masa m hasta una altura h se requiere un trabajo igual a mgh. (b) Por tanto, la energía potencial es mgh. (c) Cuando se deja caer la masa tiene la capacidad para realizar el trabajo equivalente a mgh sobre el pilote.

FÍSICA HOY

El agua que está en la rueda superior de una noria tiene energía potencial. A medida que el agua cae, esta energía se vuelve energía cinética, la cual se aprovecha para hacer girar la rueda. La energía potencial disminuye a medida que la energía cinética aumenta.

Con base en lo anterior, la energía potencial U se determina a partir de

$$U = Wh = mgh \qquad \textit{Energía potencial} \qquad \textbf{(8.7)}$$

donde W y m son, respectivamente, el peso y la masa de un objeto situado a una distancia h arriba de un punto de referencia.

La energía potencial depende de la elección de un nivel de referencia específico. La energía potencial gravitacional en el caso de un avión es muy diferente cuando se mide respecto a la cima de una montaña, un rascacielos o el nivel del mar. La capacidad de realizar trabajo es mucho mayor si el avión cae al nivel del mar. La energía potencial tiene un significado físico únicamente cuando se establece un nivel de referencia.

Ejemplo 8.6

Una caja de herramientas de 1.2 kg se halla 2 m por encima de una mesa que está a la vez a 80 cm del piso. Determine la energía potencial respecto a la parte superior de la mesa y respecto al piso.

Plan: La altura por encima de la mesa y la altura arriba del piso son los dos puntos de referencia de la energía potencial. El producto del peso por la altura nos dará la energía potencial respecto a ellos.

Solución (a): La energía potencial respecto a la parte superior de la mesa es

$$U = mgh = (1.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m})$$
$$= 23.5 \text{ J}$$

Observe que kilogramos, metros y segundos son las únicas unidades de masa, longitud y tiempo que pueden ser congruentes con la definición de joule.

Solución (b): La altura total en el segundo caso es la suma de la altura de la parte superior de la mesa a partir del piso y la altura de la caja de herramientas por encima de la mesa.

$$U = mgh = mg(2 \text{ m} + 0.80 \text{ m})$$
$$= (1.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(2.8 \text{ m})$$
$$= 32.9 \text{ J}$$

Ejemplo 8.7 Una unidad comercial de aire acondicionado de 300 kg es elevada por medio de la cadena de un montacargas hasta que su energía potencial es de 26 kJ con relación al piso. ¿Cuál será la altura arriba de éste?

Plan: Resolveremos la ecuación (8.7) para h y luego sustituiremos los valores conocidos.

Solución: Tenemos que $U = 26$ kJ o 26 000 J y que $m = 300$ kg; por tanto

$$U = mgh; \qquad h = \frac{U}{mg}$$

$$h = \frac{26\,000 \text{ J}}{(300 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 8.84 \text{ m}$$

FÍSICA HOY

Las piedras de una pirámide de Egipto construida hace 2500 años tienen hoy la misma energía potencial que cuando se construyó la pirámide.

Hemos señalado que el potencial para realizar trabajo tan sólo es función del peso mg y de la altura h sobre algún punto de referencia. La energía potencial en una posición específica sobre ese punto no depende de la trayectoria seguida para llegar a esa posición, puesto que debe realizarse el mismo trabajo contra la gravedad independientemente de la trayectoria. En el ejemplo 8.7, se necesitó un trabajo de 26 kJ para subir el acondicionador de aire a una altura vertical de 8.84 m. Si preferimos ejercer una fuerza menor subiéndolo por un plano inclinado, se requerirá una mayor distancia. En cualquier caso, el trabajo realizado contra la gravedad es de 26 kJ, ya que el resultado final es la colocación de una masa de 300 kg a una altura de 8.84 m.

8.6 Conservación de la energía

Con mucha frecuencia, a rapideces relativamente bajas tiene lugar un intercambio entre las energías potencial y cinética. Supongamos que se levanta una masa m hasta una altura h y luego se la deja caer (véase la figura 8.7). Una fuerza externa ha incrementado la energía del sistema, dándole una energía potencial $U = mgh$ en el punto más alto. Ésta es la energía total disponible para el sistema y no puede modificarse a menos que se enfrente a una fuerza de resistencia externa. En la medida en que la masa cae, su energía potencial disminuye debido a que se reduce la altura sobre el piso. La pérdida de energía potencial reaparece en forma de

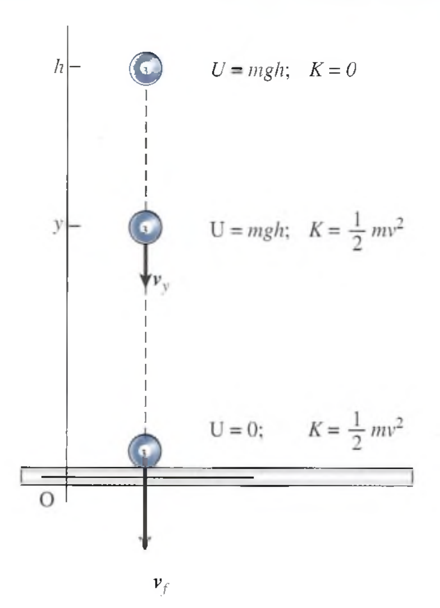


Figura 8.7 Si no hay fricción, la energía total ($U + K$) es constante. Es la misma en la parte superior, a la mitad, en la parte inferior o en cualquier otro punto de la trayectoria.

energía cinética de movimiento. En ausencia de la resistencia del aire, la energía total ($U + K$) permanece igual. La energía potencial sigue transformándose en energía cinética hasta que la masa llega al piso ($h = 0$).

En esta posición final, la energía cinética es igual a la energía total, y la energía potencial es cero. Es importante señalar que la suma de U y K es la misma en cualquier punto durante la caída (véase la figura 8.7). Si denotamos la energía total de un sistema con E, entonces podemos escribir

$$\textit{Energía total} = \textit{energía cinética} + \textit{energía potencial} = \textit{constante}$$

$$E = K + U = \textit{constante}$$

En el ejemplo de una pelota que cae, se dice que la energía mecánica se conserva. En la parte más alta la energía total es mgh, en tanto que en la parte más baja es $\frac{1}{2}mv_f^2$, si despreciamos la resistencia del aire. Ahora estamos listos para enunciar el principio de ***conservación de la energía mecánica:***

> **Conservación de la energía mecánica:** En ausencia de resistencia del aire o de otras fuerzas disipadoras, la suma de las energías potencial y cinética es una constante, siempre que no se añada ninguna otra energía al sistema.

Siempre que se aplique este principio resulta conveniente pensar en el principio y el fin del proceso de que se trate. En cualquiera de esos puntos, si hay velocidad v, existe una energía cinética K; si hay altura h, hay energía potencial U. Si asignamos los subíndices 0 y f a los puntos inicial y final, respectivamente, podemos escribir

$$\textit{Energía total en el punto inicial} = \textit{energía total en el punto final}$$

$$U_0 + K_0 = U_f + K_f$$

O, con base en las fórmulas apropiadas

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{8.8}$$

Desde luego, esta ecuación se aplica estrictamente sólo en los casos donde no hay fuerzas de fricción y no se añade energía al sistema.

En el ejemplo donde se plantea el caso de un objeto que cae a partir del reposo desde una altura inicial h_0, la energía total inicial es igual a $mgh_0(v_0 = 0)$, y la energía total final es $\frac{1}{2}mv_f^2$ ($h_f = 0$). Por tanto

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Resolviendo esta relación para v_f obtenemos una ecuación útil para determinar la velocidad final a partir de las consideraciones generales sobre la energía de un cuerpo que cae desde el reposo sin que lo afecte la fricción

$$v_f = \sqrt{2gh_0}$$

Cabe señalar que la masa no es importante al determinar la velocidad final, ya que aparece en todas las fórmulas de la energía. Una gran ventaja que ofrece este método es que la velocidad final se calcula a partir de los estados inicial y final de la energía. Si no hay fricción, la trayectoria seguida no importa. Por ejemplo, resulta la misma velocidad final si el objeto sigue una trayectoria curva a partir de la misma altura inicial.

FÍSICA HOY

El mayor obstáculo para los ciclistas que compiten en carreras es la fuerza de fricción producida por la resistencia del aire (70%) en contacto con sus propios cuerpos. Usar ropa muy ajustada y mantenerse agachados en su vehículo puede reducir tal resistencia. El peso de la bicicleta, el del ciclista y la fricción ocasionada por el camino son otros obstáculos. El diseño de la bicicleta ayuda a incrementar la aceleración. Aleaciones de poco peso y materiales mixtos, el mejoramiento de los cojinetes de las ruedas, diversos lubricantes y los diseños aerodinámicos ayudan a reducir el peso y la fricción producida por la bicicleta.

Ejemplo 8.8

En la figura 8.8, una bola de demolición de 40 kg se impulsa lateralmente hasta que queda 1.6 m por arriba de su posición más baja. Despreciando la fricción, ¿cuál será su velocidad cuando regrese a su punto más bajo?

Plan: La conservación de la energía total requiere que la suma $U + K$ sea la misma en los puntos inicial y final. La velocidad puede determinarse reconociendo que la energía cinética final ha de equivaler a la energía potencial inicial si se conserva la energía.

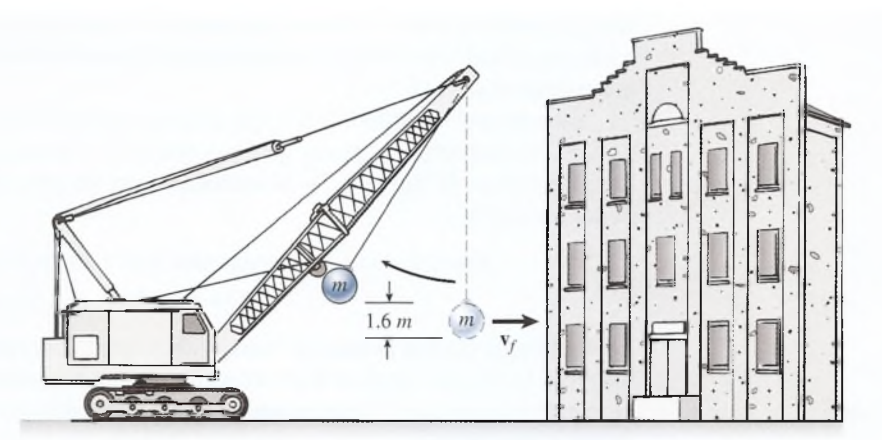


Figura 8.8 La velocidad de una masa suspendida al pasar por el punto más bajo de su trayectoria puede determinarse a partir de las consideraciones generales sobre la energía.

Solución: Si se aplica la ecuación (8.8) se obtiene

$$mgh_0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad \text{o} \qquad mgh_0 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Al resolver para la velocidad final y sustituir los valores conocidos queda

$$v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2(9.8\text{ m/s}^2)(1.6\text{ m})}$$
$$v_f = 5.60\text{ m/s}$$

Como un ejemplo adicional, demuestre que la energía total E al principio y al final del proceso es de 627 J.

8.7 Energía y fuerzas de fricción

Es útil considerar la conservación de la energía mecánica como un proceso de contabilidad, en el que se lleva un recuento de lo que pasa a la energía de un sistema desde el principio hasta el fin. Suponga que retira $1000 del banco y luego paga $400 por un pasaje de avión a Nueva York. Le quedarían $600 para gastar en diversiones. Los $400 ya se gastaron y no pueden reembolsarse, pero deben tenerse en cuenta. Ahora considere un trineo en la cima de una colina y suponga una energía total de 1000 J. Si 400 J de energía se pierden a causa de las fuerzas de fricción, el trineo llegaría al fondo con una energía de 600 J para usarlos en velocidad. No es posible recobrar los 400 J perdidos en trabajo contra las fuerzas de fricción, así que la energía total E_f es menor que la energía total inicial E_0. Además, aún hay que considerar el calor y otras pérdidas disipadoras en el proceso. Podríamos escribir la afirmación siguiente:

Energía total inicial = energía total final + pérdida debida a la fricción

$$U_0 + K_0 = U_f + K_f + |\text{trabajo contra la fricción}| \tag{8.9}$$

El trabajo realizado por las fuerzas de fricción siempre es negativo, de modo que hemos empleado las rayas verticales de valor absoluto para indicar que estamos considerando el valor positivo de la pérdida de energía.

Al considerar la fricción ahora podemos escribir un postulado más general de la ***conservación de la energía:***

Conservación de la energía: La energía total de un sistema es siempre constante, aun cuando se trasforme la energía de una forma a otra dentro del sistema.

En las aplicaciones del mundo real no es posible dejar de considerar las fuerzas externas; por tanto, es posible obtener un postulado aún más general del principio de conservación de la energía reescribiendo la ecuación (8.9) en términos de los valores inicial y final de la altura y la velocidad:

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 + |f_k x| \tag{8.10}$$

Se ha sustituido el término que denota la pérdida de energía por el valor absoluto del trabajo realizado por una fuerza cinética de fricción ejercida a lo largo de la distancia x.

Naturalmente, si un objeto parte del reposo ($v_0 = 0$) a partir de una altura h_0 sobre su posición final, la ecuación (8.10) se simplifica a

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + |f_k x| \tag{8.11}$$

Al resolver problemas, es útil establecer la suma de las energías potencial y cinética en algún punto inicial. Luego se determina la energía total en el punto final y se suma el valor absoluto de cualquier pérdida de energía. La conservación de la energía precisa que estas dos ecuaciones sean equivalentes. Con base en tal postulado, se puede determinar entonces el parámetro incógnito.

Ejemplo 8.9

Un trineo de 20 kg descansa en la cima de una pendiente de 80 m de longitud y 30° de inclinación, como se observa en la figura 8.9. Si $\mu_k = 0.2$, ¿cuál es la velocidad al pie del plano inclinado?

Plan: Al principio la energía total E es la energía potencial $U = mgh_0$. Una parte se pierde al realizar trabajo contra la fricción $f_k x$, lo que deja el resto para la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Se traza un diagrama de cuerpo libre como el de la figura 8.9, el cual se usa para calcular la magnitud de la fuerza de fricción. Por último, después de aplicar la ley de la conservación de la energía es posible determinar la velocidad al pie del plano inclinado.

Solución: Antes de hacer algún cálculo, escribamos la ecuación de la conservación en términos generales. La energía total en la cima ha de ser igual a la energía total en la parte inferior menos la *pérdida* por realizar trabajo contra la fricción.

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 + |f_k x|$$

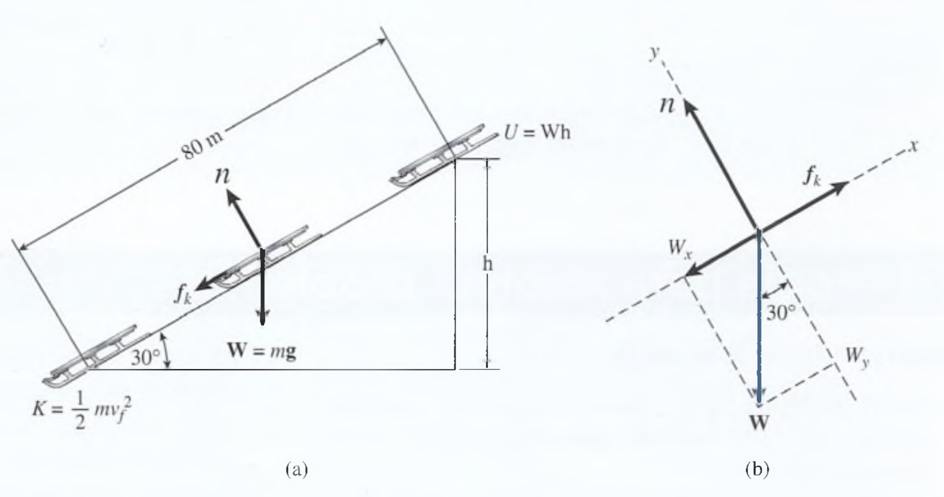
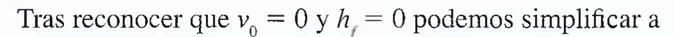


Figura 8.9 Una parte de la energía potencial inicial que tenía el trineo en la cima del plano inclinado se pierde debido al trabajo que se realiza para contrarrestar la fricción cuando el trineo desciende.



Tras reconocer que $v_0 = 0$ y $h_f = 0$ podemos simplificar a

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + |f_k x|$$

Ahora se advierte qué es necesario para determinar la velocidad final. Aun hay que establecer la altura inicial y la fuerza de fricción. A partir del triángulo trazado en la figura 8.9 es posible hallar la altura h_0 como sigue:

$$h_0 = (80 \text{ m}) \text{ sen } 30° = 40 \text{ m}$$

La fuerza de fricción depende del valor de la fuerza normal. Un estudio del diagrama de cuerpo libre revela que las fuerzas se hallan en equilibro perpendicular con el plano inclinado, así que la fuerza normal es igual a la componente y la altura; por tanto

$$\begin{aligned} n &= W_y = mg \cos 30° \\ &= (20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \cos 30° = 170 \text{ N} \end{aligned}$$

La fuerza de fricción es el producto de μk por n, así que

$$f_k = \mu_k n = (0.2)(170 \text{ N}) = 34.0 \text{ N}$$

Con esta información, volvemos a la ecuación de conservación

$$\begin{aligned} mgh_0 &= \frac{1}{2}mv_f^2 + |f_k x| \\ (20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(40 \text{ m}) &= \frac{1}{2}(20 \text{ kg})v_f^2 + |(34 \text{ N})(80 \text{ m})| \\ 7\,840 \text{ J} &= \frac{1}{2}(20 \text{ kg})v_f^2 + 2\,720 \text{ J} \end{aligned}$$

De los 7 840 J disponibles para el sistema, 2 720 J se perdieron en trabajo para contrarrestar la fricción y el resto fue energía cinética. Ahora podemos determinar la velocidad final

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(20 \text{ kg})v_f^2 &= 7\,840 \text{ J} - 2\,720 \text{ J} \\ (10 \text{ kg})v_f^2 &= 5\,120 \text{ J} \\ v_f &= \sqrt{\frac{5\,120 \text{ J}}{10 \text{ kg}}} = 22.6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Como ejercicio adicional, usted debe demostrar que la velocidad final sería de 28.0 m/s si no hubiera fuerzas de fricción.

Estrategia para resolver problemas

Conservación de la energía

1. Lea el problema, luego trace y marque un diagrama sencillo, donde identificará cada objeto cuya altura o velocidad cambie.
2. Determine un punto de referencia para medir la energía potencial gravitacional; por ejemplo, la base de un plano inclinado, el piso de una habitación o el punto más bajo en la trayectoria de una partícula.
3. Para cada objeto, anote las alturas y las velocidades iniciales y finales: h_0, v_0, h_f y v_f. Cada una de las alturas se mide a partir de la posición de referencia elegida y sólo se requieren las magnitudes para las velocidades.

4. La energía total del sistema en cualquier instante es la suma de las energías cinética y potencial. Por consiguiente, la energía total inicial E_0 y la energía total final E_f son

$$E_0 = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad E_f = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

5. Determine si hay fuerzas de fricción. Si la fricción o la resistencia del aire están presentes, entonces la pérdida de energía debe darse como dato o calcularse. Con frecuencia, la pérdida de energía al realizar un trabajo contra la fricción es simplemente el producto de la fuerza de fricción f por el desplazamiento x. Recuerde que $f = \mu_k n$.
6. Escriba la ecuación de la conservación de la energía y despeje la incógnita

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 + |\text{pérdidas de energía}|$$

7. Recuerde utilizar el valor absoluto de la pérdida de energía cuando aplique la relación anterior. El trabajo real contra la fricción siempre es negativo, pero en este caso se está tomando en cuenta como una pérdida.

8.8 Potencia

En nuestra definición de trabajo, el *tiempo* no participó en forma alguna. La misma cantidad de trabajo se realiza si la tarea dura una hora o un año. Si se le da tiempo suficiente, aun el motor menos potente llega a levantar una carga enorme. Sin embargo, si deseamos realizar una tarea con eficiencia, la razón de *cambio* con la que se efectúa el trabajo se vuelve una cantidad importante en ingeniería.

Potencia es la razón de cambio con la que se realiza el trabajo.

$$P = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} \tag{8.12}$$

La unidad del SI para la potencia es el *joule por segundo*, y se denomina ***watt*** (W). Por tanto, un foco de 80 W consume energía a razón de 80 J/s.

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

En unidades del SUEU, se utiliza la *libra-pie por segundo* (ft · lb/s) y no se da ningún nombre en particular a esta unidad.

El watt y la libra-pie por segundo tienen el inconveniente de ser unidades demasiado pequeñas para la mayor parte de los propósitos industriales. Por ello, se usan el ***kilowatt*** (kW) y el ***caballo de fuerza*** (hp), que se definen como:

$$1 \text{ kW} = 1\,000 \text{ W}$$
$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

En Estados Unidos, el watt y el kilowatt se usan casi exclusivamente en relación con la energía eléctrica; el caballo de fuerza se reserva para la energía mecánica. Esta práctica es simplemente una convención y de ningún modo es obligatoria. Resulta perfectamente correcto hablar de un foco de 0.08 hp o mostrar muy ufanos un motor de 238 kW. Los factores de conversión son:

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW}$$
$$1 \text{ kW} = 1.34 \text{ hp}$$

Puesto que el trabajo se realiza de manera continua, es útil disponer de una expresión para la potencia que incluya la velocidad. Así,

$$P = \frac{\text{trabajo}}{t} = \frac{Fx}{t} \tag{8.13}$$

de donde

$$P = F\frac{x}{t} = Fv \tag{8.14}$$

donde v es la velocidad del cuerpo sobre la que se aplica la fuerza paralela F.

Ejemplo 8.10

La carga de un ascensor tiene una masa total de 2800 kg y se eleva a una altura de 200 m en un lapso de 45 s. Exprese la potencia media tanto en unidades del SI como del SUEU.

Solución: Ésta es una aplicación directa de la ecuación (8.13), donde la distancia x se convierte en la altura h sobre el suelo.

$$P = \frac{Fx}{t} = \frac{mgh}{t}$$

$$P = \frac{(2\,800 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(200 \text{ m})}{45 \text{ s}} = 1.22 \times 10^5 \text{ W}$$

$$P = 122 \text{ kW}$$

Como 1 hp = 746 W, los caballos de fuerza desarrollados son

$$P = (1.22 \times 10^5 \text{ W})\left(\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}}\right) = 164 \text{ hp}$$

Ejemplo 8.11

Se subirá un piano de 280 kg a rapidez constante hasta un departamento 10 m arriba del piso. La grúa que carga el piano gasta una potencia media de 600 W. ¿Cuánto tiempo se requiere para realizar el trabajo?

Plan: Se escribe la ecuación de la potencia y luego se despeja el tiempo.

Solución: Puesto que h = 10 m, m = 280 kg y P = 600 W se tiene que

$$P = \frac{mgh}{t} \quad \text{o} \quad t = \frac{mgh}{P}$$

$$t = \frac{(280 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})}{600 \text{ W}}$$

$$t = 45.7 \text{ s}$$

Las empresas de suministro de energía cobran a sus clientes por *kilowatt-hora* en lo que se denomina *recibo de luz*. Como ejercicio, debe analizar las unidades con objeto de demostrar que el producto de una unidad de potencia por el tiempo es en realidad una unidad de trabajo o energía.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo se han explicado los conceptos de trabajo, energía y potencia. A continuación se resumen los aspectos esenciales que es necesario recordar:

- El *trabajo* realizado por una fuerza **F** que actúa a lo largo de una distancia x se calcula a partir de las ecuaciones siguientes (use la figura 8.1 como referencia):

$$\text{Trabajo} = F_x x \qquad \text{Trabajo} = (F\cos\theta)x$$

Unidad del SI: joule (J) Unidad del SUEU: libra-pie: (ft · lb)

- La *energía cinética* K es la capacidad para realizar trabajo como resultado del movimiento. Tiene las mismas unidades que el trabajo y se determina a partir de

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad K = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2$$

- La *energía potencial* gravitacional es la que resulta de la posición de un objeto respecto a la Tierra. La energía potencial U tiene las mismas unidades que el trabajo y se calcula a partir de

$$U = Wh \qquad U = mgh$$

donde W o mg es el peso del objeto y h la altura sobre una posición de referencia.

- El trabajo neto es igual al cambio registrado en la energía cinética:

$$Fx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

- Conservación de la energía mecánica sin fricción:

$$U_0 + K_0 = U_f + K_f$$

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

- Conservación de la energía incluida la fricción:

$$E_0 = E_f + |\text{pérdidas de energía}|$$

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 + f_k x$$

- Potencia es la razón de cambio con la que se realiza un trabajo:

$$P = \frac{\text{trabajo}}{t} \qquad P = \frac{Fx}{t} \qquad P = Fv$$

Unidad del SI: watt (W) Unidad del SUEU: ft · lb/s
Otras unidades: 1 kW = 10^3 W 1 hp = 550 ft · lb/s

Conceptos clave

Preguntas de repaso

8.1. Señale con claridad la diferencia entre el concepto de trabajo que tiene un físico y el de una persona común.

8.2. Dos equipos compiten tirando de los extremos de una cuerda. ¿Realizan algún trabajo? ¿En qué instante?

8.3. Siempre que se realiza un trabajo neto sobre un cuerpo, ¿éste se somete necesariamente a una aceleración? Explique.

8.4. Una clavadista está de pie en un trampolín a 10 ft de altura sobre el agua. ¿Qué tipo de energía resulta de esta posición? ¿Qué pasa con esa energía cuando ella se zambulle en el agua? ¿Se realiza algún trabajo? En caso afirmativo, ¿quién efectúa el trabajo y sobre qué lo realiza?

8.5. Compare las energías potenciales de dos cuerpos A y B si (a) A tiene el doble de altura que B pero ambos tienen la misma masa; (b) B tiene el doble de peso que A pero ambos tienen la misma altura, y (c) A tiene el doble de peso que B pero B tiene el doble de altura que A.

8.6. Compare las energías cinéticas de dos cuerpos A y B si (a) A tiene el doble de velocidad que B, (b) A tiene la mitad de masa que B y (c) A tiene el doble de masa y la mitad de la velocidad que B.

8.7. Al apilar tablas de 8 pies, usted levanta una de ellas por el centro y la coloca encima de la pila. Su ayudante levanta un extremo de su tabla, lo apoya sobre la pila y después levanta el otro extremo. Compare el trabajo que ambos han realizado.

8.8. A la luz de lo que ha aprendido sobre trabajo y energía, describa el procedimiento más eficiente para tocar la campana en la feria en el juego de golpear

un muelle con un mazo. ¿Qué precauciones deben tomarse?

8.9. La montaña rusa de una feria se anuncia con "una altura máxima de 100 ft y una rapidez máxima de 60 mi/h". ¿Cree usted que digan la verdad en ese anuncio? Explique su respuesta.

8.10. Un hombre ha cortado el césped de su jardín durante varios años con una cortadora de 4 hp. Un día compra una cortadora de 6 hp. Después de usar algún tiempo la nueva cortadora, tiene la impresión de que ahora cuenta con el doble de potencia. ¿Por qué cree usted que está convencido de ese aumento de potencia?

Problemas

Sección 8.1 Trabajo

8.1. ¿Cuál es el trabajo realizado por una fuerza de 20 N que actúa a lo largo de una distancia paralela de 8 m? ¿Qué fuerza realizará el mismo trabajo en una distancia de 4 m? Resp. 160 J, 40 N

8.2. Un trabajador levanta un peso de 40 lb hasta una altura de 10 ft. ¿A cuántos metros se puede levantar un bloque de 10 kg con la misma cantidad de trabajo?

8.3. Un remolcador ejerce una fuerza constante de 4 000 N sobre un barco, desplazándolo una distancia de 15 m. ¿Cuál es el trabajo realizado? Resp. 60 kJ

8.4. Un martillo de 5 kg es levantado a una altura de 3 m. ¿Cuál es el trabajo mínimo requerido para hacerlo?

8.5. Un empuje de 120 N se aplica a lo largo del asa de una cortadora de césped. Ese empuje produce un desplazamiento horizontal de 14 m. Si el asa forma un ángulo de 30° con el suelo, ¿qué trabajo fue realizado por la fuerza de 120 N? Resp. 1 460 J

8.6. El baúl de la figura 8.10 es arrastrado una distancia horizontal de 24 m mediante una cuerda que forma un ángulo θ con el piso. Si la tensión de la cuerda es de 80 N, ¿cuál es el trabajo realizado en cada uno de los ángulos siguientes: 0°, 30°, 60°, 90°?

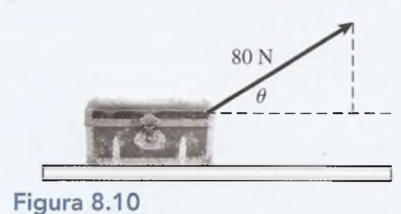


Figura 8.10

8.7. Una fuerza horizontal empuja un trineo de 10 kg hasta una distancia de 40 m en un sendero. Si el coeficiente de fricción de deslizamiento es 0.2, ¿qué trabajo ha realizado la fuerza de fricción? Resp. −784 J

8.8. Un trineo es arrastrado una distancia de 12.0 m por medio de una cuerda, con una tensión constante de 140 N. La tarea requiere 1 200 J de trabajo. ¿Qué ángulo forma la cuerda con el suelo?

Sección 8.2 Trabajo resultante

8.9. Una fuerza media de 40 N comprime un resorte hasta una distancia de 6 cm. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de 40 N? ¿Qué trabajo realiza el resorte? ¿Cuál es el trabajo resultante? Resp. 2.40 J, −2.40 J, 0 J

8.10. Una fuerza horizontal de 20 N arrastra un pequeño trineo 42 metros sobre el hielo a velocidad rápida. Halle el trabajo realizado por las fuerzas de tracción y de fricción. ¿Cuál es la fuerza resultante?

8.11. Un bloque de 10 kg es arrastrado 20 m por una fuerza paralela de 26 N. Si $\mu_k = 0.2$, ¿cuál es el trabajo resultante y qué aceleración se produce? Resp. 128 J, 0.640 m/s^2

8.12. Una cuerda que forma un ángulo de 35° con la horizontal arrastra una caja de herramientas de 10 kg sobre una distancia horizontal de 20 m. La tensión en la cuerda es de 60 N y la fuerza de fricción constante es de 30 N. ¿Qué trabajo realizan la cuerda y la fricción? ¿Cuál es el trabajo resultante?

8.13. En el ejemplo descrito en el problema 8.12, ¿cuál es el coeficiente de fricción entre la caja de herramientas y el piso? Resp. 0.472

*8.14. Un trineo de 40 kg es arrastrado horizontalmente una distancia de 500 m ($\mu_k = 0.2$). Si el trabajo resultante es de 50 kJ, ¿cuál fue la fuerza de tracción paralela?

*8.15. Suponga que $m = 8$ kg en la figura 8.11 y $\mu_k = 0$. ¿Qué trabajo mínimo tendrá que realizar la fuerza P para llegar a la parte más alta del plano inclinado? ¿Qué trabajo se requiere para levantar verticalmente el bloque de 8 kg hasta la misma altura? Resp. 941 J, 941 J

*8.16. ¿Cuál es el trabajo mínimo que debe realizar la fuerza P para mover el bloque de 8 kg hasta la parte más

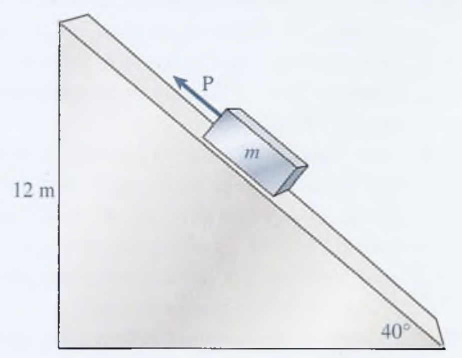


Figura 8.11

alta del plano inclinado si $\mu_k = 0.4$? Compare este resultado con el trabajo necesario para levantar el bloque verticalmente hasta la misma altura.

***8.17.** ¿Cuál es el trabajo resultante cuando el bloque de 8 kg se desliza desde la parte más alta hasta la más baja del plano inclinado de la figura 8.11? Suponga que $\mu_k = 0.4$. Resp. 492 J

Sección 8.4 Trabajo y energía cinética

8.18. ¿Cuál es la energía cinética de una bala de 6 g en el instante en que su rapidez es de 190 m/s? ¿Cuál es la energía cinética de un automóvil de 1 200 kg que viaja a 80 km/h?

8.19. ¿Cuál es la energía cinética de un automóvil de 2 400 lb cuando circula a una rapidez de 55 mi/h? ¿Cuál es la energía cinética de una pelota de 9 lb cuando su rapidez es de 40 ft/s? Resp. 244 000 ft lb; 225 ft lb

8.20. ¿Cuál es el cambio en la energía cinética cuando una pelota de 50 g golpea el pavimento a una velocidad de 16 m/s y rebota a la velocidad de 10 m/s?

8.21. Una carreta de 400 kg entra sin control en un campo de maíz a una velocidad de 12 m/s y finalmente se detiene. ¿Cuál fue la magnitud del trabajo realizado por esa carreta? Resp. −28.8 kJ

8.22. Un automóvil de 2 400 lb aumenta su rapidez de 30 mi/h a 60 mi/h. ¿Qué trabajo resultante se requirió para lograrlo? ¿Cuál es el trabajo equivalente en joules?

8.23. Un martillo de 0.6 kg se mueve a 30 m/s justo antes de golpear la cabeza de una alcayata. Calcule la energía cinética inicial. ¿Qué trabajo realizó la cabeza del martillo? Resp. 270 J, −270 J

8.24. Un martillo de 12 lb que se mueve a 80 ft/s golpea la cabeza de un clavo y lo hunde en la pared hasta una profundidad de $\frac{1}{4}$ in. ¿Cuál fue la fuerza media de detención?

8.25. ¿Qué fuerza media se necesita para incrementar la velocidad de un objeto de 2 kg de 5 m/s a 12 m/s en una distancia de 8 m? Resp. 14.9 N

***8.26.** Compruebe la respuesta del problema 8.25 aplicando la segunda ley de Newton del movimiento.

***8.27.** Un proyectil de 20 g choca contra un banco de fango (véase la figura 8.12) y penetra 6 cm antes de detenerse. Calcule la fuerza de detención F si la velocidad de entrada es de 80 m/s. Resp. −1 070 N

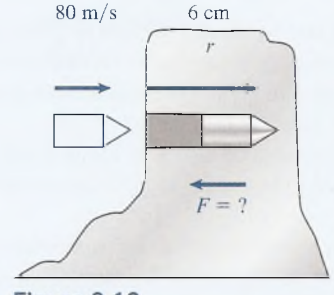


Figura 8.12

***8.28.** Un automóvil de 1500 kg transita a 60 km/h por una carretera nivelada. ¿Qué trabajo se requiere para frenarlo? Si $\mu_k = 0.7$, ¿cuál es la distancia de frenado?

Sección 8.5 Energía potencial

8.29. Un bloque de 2 kg reposa sobre una mesa a 80 cm del piso. Calcule la energía potencial del bloque en relación con: (a) el piso, (b) el asiento de una silla que está a 40 cm del piso y (c) el techo, a 3 m del piso. Resp. 15.7 J, 7.84 J, −43.1 J

8.30. Un ladrillo de 1.2 kg está suspendido a 2 m de distancia arriba de un pozo de inspección y luego se le deja caer. El fondo del pozo está 3 m por debajo del nivel de la calle. Con respecto a la calle, ¿cuál es la energía potencial del ladrillo en cada uno de esos lugares? ¿Cuál es el cambio en términos de energía potencial?

8.31. En cierto instante, un proyectil de mortero desarrolla una velocidad de 60 m/s. Si su energía potencial en ese punto es igual a la mitad de su energía cinética, ¿cuál es su altura sobre el nivel del suelo? Resp. 91.8 m

***8.32.** Un trineo de 20 kg es empujado en una pendiente de 34° hasta una altura vertical de 140 m. Una fuerza de fricción constante de 50 N actúa durante toda esa distancia. ¿Qué trabajo externo se requirió? ¿Cuál fue el cambio en la energía potencial?

***8.33.** Se requiere una fuerza media de 600 N para comprimir un resorte una distancia de 4 cm. ¿Cuál es el valor del trabajo realizado por el resorte? ¿Cuál es el cambio en la energía potencial del resorte comprimido? Resp. −24 J, +24 J

Sección 8.6 Conservación de la energía

8.34. Una pesa de 18 kg se levanta hasta una altura de 12 m y después se suelta en caída libre. ¿Cuáles son la energía potencial, la energía cinética y la energía total en: (a) el punto más alto, (b) 3 m sobre el nivel del suelo y (c) en el suelo?

8.35. Un martillo de 4 kg se levanta a una altura de 10 m y se deja caer. ¿Cuáles son las energías potencial y cinética del martillo cuando ha caído a un punto ubicado a 4 m del nivel del suelo? Resp. 157 J, 235 J

8.36. ¿Cuál será la velocidad del martillo del problema 8.35 justo antes de golpear el suelo? ¿Cuál es la velocidad en el punto ubicado a 4 m?

8.37. ¿Qué velocidad inicial debe impartirse a una masa de 5 kg para elevarla a una altura de 10 m? ¿Cuál es la energía total en cualquiera de los puntos de su trayectoria? Resp. 14 m/s, 490 J

8.38. Un péndulo simple de 1 m de longitud tiene en su extremo una pesa de 8 kg. ¿Cuánto trabajo se requiere para mover el péndulo desde su punto más bajo hasta una posición horizontal? A partir de consideraciones de energía, halle la velocidad de la pesa cuando pasa por el punto más bajo en su oscilación.

8.39. En la figura 8.13 se ilustra un péndulo balístico. Una pelota de 40 g es golpeada por una masa suspendida de 500 g. Después del impacto, las dos masas se elevan una distancia vertical de 45 mm. Calcule la velocidad de las masas combinadas inmediatamente después del impacto. Resp. 93.9 cm/s

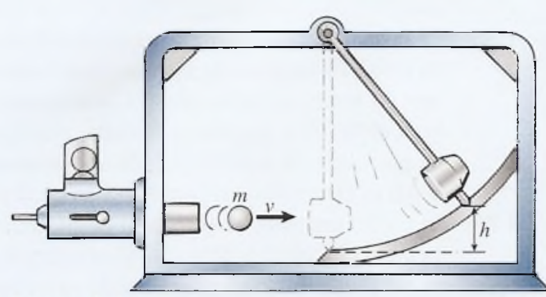


Figura 8.13

***8.40.** Un trineo de 100 lb se desliza a partir del reposo en la parte más alta de un plano inclinado a 37°. La altura original es de 80 ft. En ausencia de fricción, ¿cuál es la velocidad del trineo cuando llega al punto más bajo del plano inclinado?

***8.41.** En la figura 8.14, un carrito de 8 kg tiene una velocidad inicial de 7 m/s en su descenso. Desprecie la fricción y calcule la velocidad cuando el bloque llega al punto *B*. Resp. 21.0 m/s

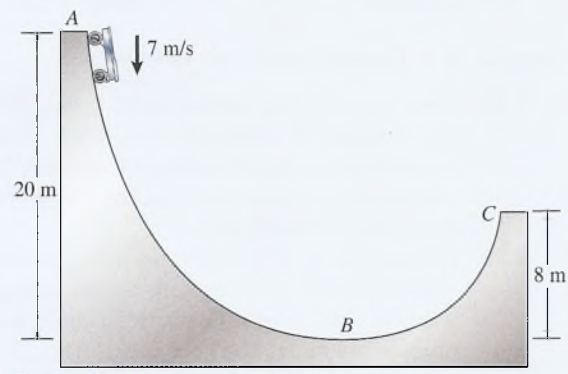


Figura 8.14

***8.42.** ¿Cuál es la velocidad del bloque de 8 kg en el punto *C* en el problema 8.41?

***8.43.** Una muchacha que pesa 80 lb está sentada en un columpio cuyo peso es insignificante. Si se le imparte una velocidad inicial de 20 ft/s, ¿a qué altura se elevará? Resp. 6.25 ft

Sección 8.7 Energía y fuerzas de fricción

8.44. Un trineo de 60 kg se desliza desde el reposo hasta el fondo de una pendiente de 30 m de longitud y 25° de inclinación. Una fuerza de fricción de 100 N actúa en toda esa distancia. ¿Cuál es la energía total en la cumbre y al pie de la pendiente? ¿Cuál es la velocidad que alcanza el trineo en el punto más bajo?

8.45. Un bloque de 500 g se suelta desde la parte más alta de un plano inclinado a 30° y se desliza 160 cm hasta llegar al punto más bajo. Una fuerza de fricción constante de 0.9 N actúa durante toda esa distancia. ¿Cuál es la energía total en el punto más alto? ¿Qué trabajo ha realizado la fricción? ¿Cuál es la velocidad en el punto más bajo?

Resp. 3.92 J, −1.44 J, 3.15 m/s

8.46. ¿Qué velocidad inicial debe impartirse al bloque de 500 g del problema 8.45 para que apenas logre llegar al punto más alto de la misma pendiente?

8.47. Un carro de 64 lb empieza a subir por un plano inclinado a 37° con una velocidad inicial de 60 ft/s. Si queda inmóvil después de haberse desplazado una distancia de 70 ft, ¿cuánta energía se perdió a causa de la fricción? Resp. 906 ft·lb

***8.48.** Una pelota de 0.4 kg cae una distancia vertical de 40 m y rebota a una altura de 16 m. ¿Cuánta energía se perdió en el choque contra el suelo?

***8.49.** A un trineo de 4 kg se le imparte una velocidad inicial de 10 m/s en la cumbre de una pendiente de 34°. Si $\mu_k = 0.2$, ¿qué distancia habrá recorrido el trineo cuando su velocidad alcance los 30 m/s?

Resp. 104 m

***8.50.** Suponga que la masa del carrito de la figura 8.14 es de 6 kg y que se pierden 300 J de energía en el trabajo realizado para contrarrestar la fricción. ¿Cuál es la velocidad cuando la masa llega al punto *C*?

***8.51.** El conductor de un autobús aplica los frenos para evitar un accidente. Al hacerlo, los neumáticos dejan una marca de 80 ft de largo sobre el suelo. Si $\mu_k = 0.7$, ¿con qué rapidez circulaba el vehículo antes que el conductor frenara? Resp. 59.9 ft/s

Sección 8.8 Potencia

8.52. La correa transportadora de una estación automática levanta 500 toneladas de mineral a una altura de 90 ft en 1 h. ¿Qué potencia media se requiere para esto, en caballos de fuerza?

8.53. Una masa de 40 kg se eleva a una distancia de 20 m en un lapso de 3 s. ¿Qué potencia media se utiliza?

Resp. 2.61 kW

8.54. Un ascensor de 300 kg es elevado una distancia vertical de 100 m en 2 min. ¿Cuál es la potencia empleada?

8.55. Un motor de 90 kW se utiliza para elevar una carga de 1 200 kg. ¿Cuál es la velocidad media durante el ascenso? Resp. 7.65 m/s

8.56. ¿A qué altura puede un motor de 400 W subir una masa de 100 kg en 3 s?

8.57. Un estudiante de 800 N sube corriendo un tramo de escaleras y asciende 6 m en 8 s. ¿Cuál es la potencia media que ha desarrollado? Resp. 600 W

***8.58.** Una lancha de carreras debe desarrollar 120 hp para desplazarse a una rapidez constante de 15 ft/s sobre el agua. ¿Cuál es la fuerza media de resistencia que puede atribuirse al agua?

Problemas adicionales

8.59. Un trabajador saca de un pozo un cubo de 20 kg a rapidez constante y realiza un trabajo de 8 kJ. ¿Cuál es la profundidad del pozo? Resp. 40.8 m

8.60. Una fuerza horizontal de 200 N empuja horizontalmente una caja de 800 N una distancia de 6 m a velocidad constante. ¿Qué trabajo ha realizado esa fuerza de 200 N? ¿Cuál es el trabajo resultante?

***8.61.** Una masa de 10 kg es izada a una altura de 20 m y luego se suelta. ¿Cuál es la energía total del sistema? ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando se encuentra a 5 m del suelo? Resp. 1960 J, 17.1 m/s

8.62. Una caja se levanta a rapidez constante de 5 m/s por un motor cuya potencia de salida es de 4 kW. ¿Cuál es la masa de la caja?

8.63. Una montaña rusa alcanza una altura máxima de 100 ft. ¿Cuál es la rapidez máxima en millas por hora cuando llega a su punto más bajo? Resp. 54.4 mi/h

8.64. Una fuerza de 20 N arrastra un bloque de 8 kg hasta una distancia horizontal de 40 m mediante una cuerda que forma un ángulo de 37° con la horizontal. Suponga que $\mu_k = 0.2$ y que el tiempo requerido es de 1 min. ¿Qué trabajo resultante se ha realizado?

8.65. ¿Cuál es la velocidad del bloque del problema 8.64 al final del recorrido? ¿Qué potencia *resultante* se requirió? Resp. 5.20 m/s, 1.80 W

8.66. Un esquiador de 70 kg desciende por una pendiente de 30 m que forma un ángulo de 28° con la horizontal. Suponga que $\mu_k = 0.2$. ¿Cuál es la velocidad del esquiador cuando llega al pie de la pendiente?

***8.67.** Una pulga de 0.3 mg puede saltar a una altura de 3 cm, aproximadamente. ¿Cuál debe ser su rapidez cuando empieza el salto? ¿Es necesario conocer la masa de la pulga? Resp. 76.7 cm/s; no

***8.68.** Una montaña rusa llega hasta su punto más bajo y apenas tiene fuerza para alcanzar la siguiente cuesta, 15 m más arriba. ¿Cuál es la rapidez mínima en el punto más bajo de su recorrido?

***8.69.** El martillo de un martinete para hincar pilotes pesa 800 lb y cae una distancia de 16 ft antes de golpear el pilote. El impacto hinca este último 6 in dentro del suelo. ¿Cuál fue la fuerza media para hincar el pilote? Resp. –25 600 lb

***8.70.** Suponga que el agua en la parte superior de la cascada mostrada en la figura 8.15 se lleva a una turbina ubicada en la base de la caída, a una distancia vertical de 94 m (308 ft). Digamos que 20% de la energía disponible se pierde debido a la fricción y a otras fuerzas de resistencia. Si entran en la turbina 3000 kg de agua por minuto, ¿cuál es su potencia de salida?

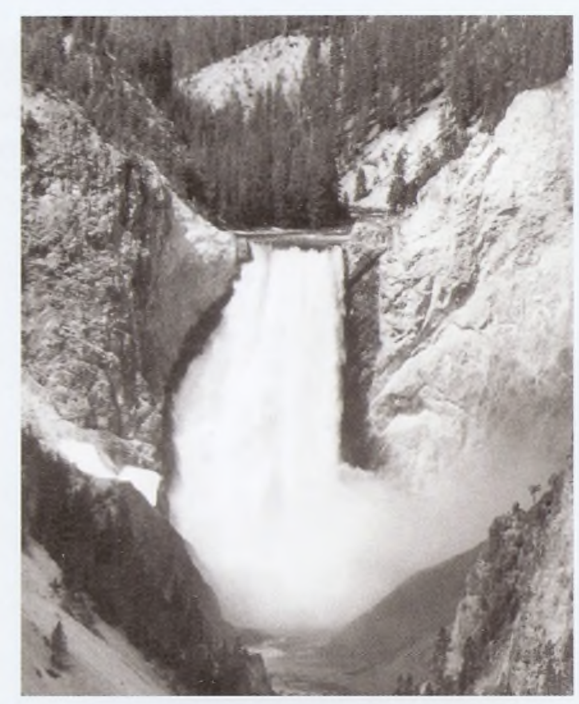


Figura 8.15 Lower Falls en el parque nacional de Yellowstone (*Fotografía de Paul E. Tippens.*)

Preguntas para la reflexión crítica

***8.71.** Una tabla colocada como rampa se utiliza para descargar cajas de clavos de la parte posterior de un camión. La altura de la plataforma del camión es 60 cm y la tabla tiene 1.2 m de longitud. Suponga que $\mu_k = 0.4$ y a las cajas se les imparte un empujón inicial para que empiecen a descender. ¿Cuál es su rapidez cuando llegan al suelo? ¿Qué rapidez inicial debería tener al llegar al suelo para subir de nuevo deslizándose hasta la plataforma del camión? Si no existiera fricción, ¿estas dos preguntas tendrían la misma respuesta? Resp. 1.90 m/s, 4.46 m/s, sí

***8.72.** Una caja fuerte de 96 lb es empujada para que suba una distancia de 12 ft por un plano inclinado a 30° con fricción insignificante. ¿Cuál es el incremento de la energía potencial? ¿Se produciría el mismo cambio de energía potencial si una fuerza de fricción de 10 lb se opusiera al movimiento ascendente por el plano? ¿Por qué? ¿Se requeriría el mismo trabajo?

***8.73.** Una pelota de 2 kg está suspendida de un cable de 3 m unido a la pared por medio de una alcayata. Se tira de la pelota, de modo que el cable forma un ángulo de 70° con la pared, y luego la soltamos. Si durante la colisión con la pared se pierden 10 J de energía, ¿cuál es el ángulo máximo entre el cable y la pared después del primer rebote? Resp. 59.2°

***8.74.** Una pelota de 3 kg se deja caer desde una altura de 12 m y alcanza una velocidad de 10 m/s justo antes de llegar al suelo. ¿Cuál es la fuerza media retardataria ocasionada por la presencia del aire? Si la pelota rebota sobre el suelo con una rapidez de 8 m/s, ¿cuánta energía habrá perdido en el impacto? ¿A qué altura rebotará la pelota si la resistencia promedio del aire es la misma que en el caso anterior?

***8.75.** Considere una montaña rusa donde la primera cuesta tiene una altura de 34 m. Si en la montaña rusa se pierde sólo 8% de la energía entre las dos primeras cuestas, ¿cuál es la máxima altura posible para la segunda cuesta? Resp. 31.3 m

***8.76.** Un bloque de 4 kg se comprime contra un resorte en la parte inferior del plano inclinado que se muestra en la figura 8.16. Se requirió una fuerza de 4000 N para comprimir el resorte hasta una distancia de 6 cm. Si el resorte se suelta y el coeficiente de fricción es de 0.4, ¿hasta qué altura del plano inclinado se moverá el bloque?

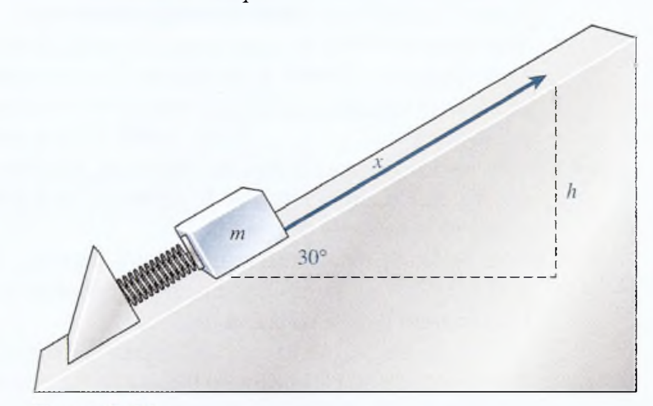


Figura 8.16



9 Impulso y cantidad de movimiento



El astronauta Edward H. White II, piloto del vuelo espacial *Gemini-Titan 4*, flota en el espacio con gravedad cero. White está unido a la nave espacial por medio de un cable umbilical de 25 ft y un cable sujetador de 23 ft, los dos recubiertos de chapa de oro para formar una cuerda. A su derecha, White lleva una unidad de mano de maniobra automática (HHSMU, por sus siglas en inglés). Al disparar la pistola de gas se transfiere la cantidad de movimiento al astronauta. (*Foto de la NASA.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá y dará ejemplos de impulso y cantidad de movimiento como cantidades vectoriales.
2. Escribirá y aplicará la relación entre impulso y el cambio en la cantidad de movimiento resultante.
3. Enunciará la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y la aplicará a la resolución de problemas físicos.
4. Definirá y calculará el coeficiente de restitución para dos superficies.

5. Distinguirá la diferencia entre choque elástico e inelástico, por medio de ejemplos y definiciones.
6. Predecirá las velocidades de dos cuerpos que chocan, después del impacto, cuando se conocen el coeficiente de restitución, las masas y las velocidades iniciales.

La energía y el trabajo son cantidades escalares que no informan absolutamente nada respecto de la dirección. La ley de la conservación de la energía describe tan sólo la relación entre los estados iniciales y finales; no dice nada acerca de cómo están distribuidas las energías. Por ejemplo, cuando chocan dos objetos, podemos decir que la energía total antes de la colisión debe ser igual a la energía después de la misma, si no tomamos en cuenta la fricción y otras pérdidas de calor. Sin embargo, necesitaremos un nuevo concepto si vamos a determinar cómo se reparte la energía total entre los objetos, o incluso sus direcciones relativas después del impacto. Los conceptos de ***impulso*** y ***cantidad de movimiento***, que se presentan en este capítulo, añaden una descripción vectorial a nuestro estudio de la energía y el movimiento.

9.1 Impulso y cantidad de movimiento

Cuando se golpea una pelota de golf en el campo de juego, como se observa en la figura 9.1, una gran fuerza media **F** actúa sobre la pelota durante un corto espacio de tiempo Δt, haciendo que ésta se acelere desde el reposo hasta una velocidad final $\mathbf{v}_f$. Es sumamente difícil medir tanto la fuerza como la duración de su acción; pero el producto de ambas $\mathbf{F}\,\Delta t$ puede calcularse en función del cambio de velocidad resultante de la pelota de golf. A partir de la segunda ley de Newton, sabemos que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0}{\Delta t}$$

Al multiplicar por Δt se obtiene

$$\mathbf{F}\,\Delta t = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0)$$

o bien,

$$\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_0 \qquad \textbf{(9.1)}$$

Esta ecuación es muy útil para resolver problemas relacionados con choques, a los que se han asignado nombres especiales a sus términos.

El impulso $\mathbf{F}\,\Delta t$ es una cantidad vectorial de igual magnitud que el producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en el que actúa. Su dirección es la misma que la de la fuerza.

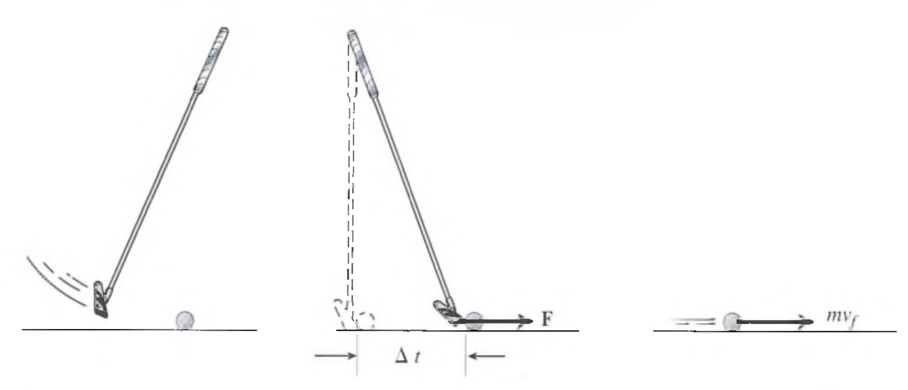


Figura 9.1 Cuando el palo de golf golpea la pelota, una fuerza F que actúa durante un espacio de tiempo provoca un cambio en la cantidad de movimiento de la pelota.

La cantidad de movimiento **p** de una partícula es una cantidad vectorial de igual magnitud que el producto de su masa m por su velocidad **v**.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Por tanto, la ecuación (9.1) puede enunciarse verbalmente así:

$$\textit{Impulso } (\mathbf{F}\,\Delta t) = \textit{cambio de la cantidad de movimiento } (m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_0)$$

La unidad del SI del impulso es el *newton-segundo* (N · s). La unidad de la cantidad de movimiento es el *kilográmetro por segundo* (kg · m/s). Resulta conveniente distinguir entre estas unidades, aun cuando en realidad sean iguales:

$$\mathrm{N \cdot s} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2} \times \mathrm{s} = \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Las unidades correspondientes en el SUEU son la *libra-segundo* (lb · s) y el *slug-pie por segundo* (slug · ft/s).

Ejemplo 9.1

La cabeza de un mazo de 3 kg se mueve a una velocidad de 14 m/s en el momento que golpea un perno de acero. Se detiene a los 0.02 s. Determine la fuerza media sobre el perno.

Plan: Primero, determinaremos el impulso $\mathbf{F}\,\Delta t$, que es igual al cambio en la cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$ para el mazo. Después calcularemos el tiempo al dividir la fuerza media entre el impulso. Dado que tanto la cantidad de movimiento como el impulso son cantidades vectoriales, debemos ser cuidadosos con los signos.

Solución: Considere que la dirección hacia arriba es positiva y que la cabeza inicialmente se mueve hacia abajo. Esto significa que $v_0 = -14$ m/s, $v_f = 0$, $m = 3$ kg y $\Delta t = 0.02$ s.

$$F\,\Delta t = mv_f - mv_0 = 0 - (3\text{ kg})(-14\text{ m/s})$$
$$= +42.0\text{ N}\cdot\text{m}$$

Al dividir el impulso entre 0.02 obtenemos

$$F\,\Delta t = 42\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \text{o} \qquad F = \frac{42\text{ N}\cdot\text{m}}{0.02\text{ s}} = 2\,100\text{ N}$$

La fuerza media que actúa sobre el perno cuando el *mazo se detiene* es 2 100 N con dirección hacia arriba (+). La fuerza de reacción ejercida *sobre el mazo* es igual en magnitud, pero opuesta en dirección. Hay que destacar que las fuerzas determinadas en esta forma son *fuerzas* medias. Al principio del contacto con el perno, la fuerza cuando el mazo se detiene será mucho mayor que 2 100 N.

Ejemplo 9.2

Una pelota de beisbol de 0.15 kg que se mueve hacia el bateador a una velocidad de 30 m/s es golpeada con un bat, lo cual causa que se mueva en dirección contraria a una velocidad de 42 m/s. (Use como referencia la figura 9.2.) Determine el impulso y la fuerza media ejercida sobre la pelota si el bat está en contacto con la pelota durante 0.002 s.

Plan: Trace un esquema como el que se muestra en la figura 9.2. Observe que se indican las direcciones y los signos de la velocidad. Reconocemos que el impulso impartido a la pelota debe ser igual al cambio en la cantidad de movimiento de la pelota, y los signos dados para la velocidad antes y después de que el bat golpea la pelota deben concordar.

Solución: Al considerar la dirección hacia la derecha como positiva y organizar los datos, tenemos

Dados: $m = 0.15$ kg, $v_0 = -30$m/s, $v_f = +42$m/s, $\Delta t = 0.002$ s

Calcule: $F\,\Delta t$ y Δt

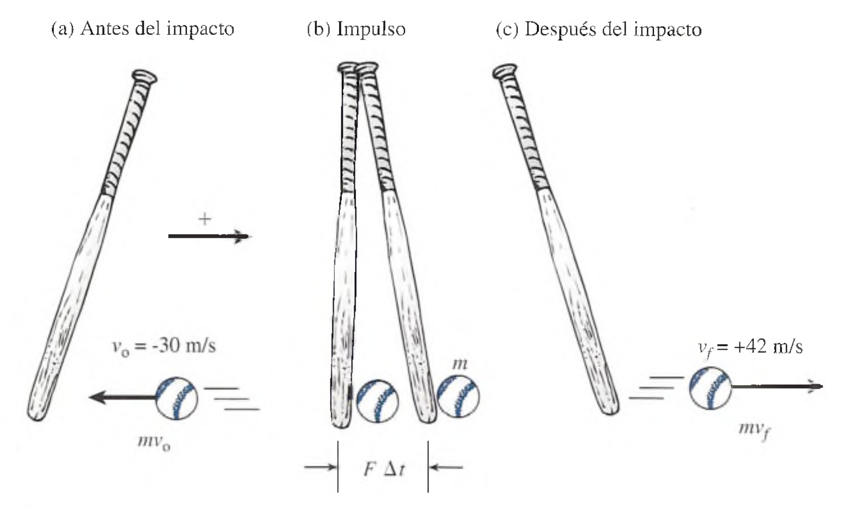


Figura 9.2 El impulso $F\ \Delta t$ es igual al cambio en la cantidad de movimiento.

Al sustituir en la ecuación (9.1) primero encontramos el valor del impulso.

$$\begin{aligned} F\ \Delta t &= mv_f - mv_0 \\ &= (0.15\ \text{kg})(42\ \text{m/s}) - (0.15\ \text{kg})(-30\ \text{m/s}) \\ &= 6.30\ \text{kg} \cdot \text{m/s} + 4.50\ \text{kg m/s} = 10.8\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

La velocidad cambia de -30 m/s a $+42$ m/s, un cambio total de $+72$ m/s. Es fácil darse cuenta de que el uso incorrecto de los signos puede conducir a un error importante.

A continuación se nos pide que hallemos la fuerza media ejercida por el bat mientras está en contacto con la pelota durante 0.002 s. Al resolver para F obtenemos

$$F\ \Delta t = 10.8\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$F = \frac{10.8\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.002\ \text{s}} = 5\,400\ \text{N}$$

Una vez más, debemos reconocer que ésta es la fuerza *media* en la pelota.

9.2 Ley de la conservación de la cantidad de movimiento

Consideremos una colisión de *frente entre* las masas m_1 y m_2, como se muestra en la figura 9.3. Suponga que las superficies están libres de fricción. Indicamos sus velocidades antes del impacto como $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ y después del impacto como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. El impulso de la fuerza $\mathbf{F}_1$ que actúa sobre la masa de la derecha es

$$F_1\ \Delta t = m_1v_1 - m_1u_1$$

En forma similar, el impulso de la fuerza $\mathbf{F}_2$ sobre la masa de la izquierda es

$$F_2\ \Delta t = m_2v_2 - m_2u_2$$

Durante el tiempo Δt, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, de modo que

$$F_1\ \Delta t = -\ F_2\ \Delta t$$

o bien,

$$m_1v_1 - m_1u_1 = -(m_2v_2 - m_2u_2)$$

y, finalmente, reagrupando los términos,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad \textbf{(9.2)}$$

Cantidad de movimiento total antes del impacto = Cantidad de movimiento total después del impacto

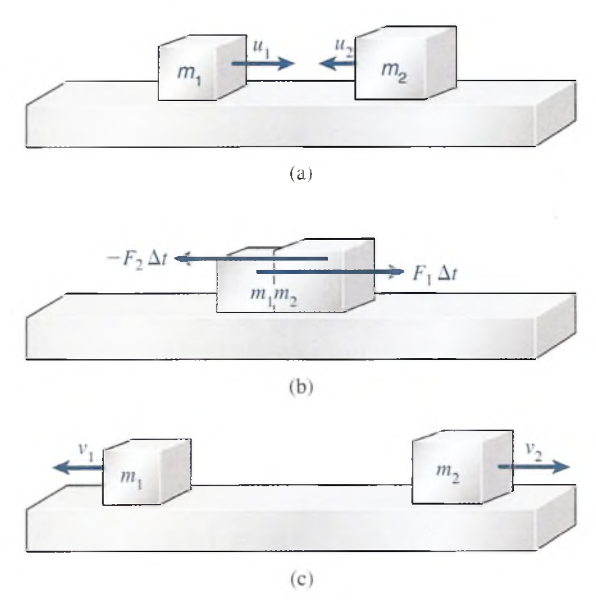


Figura 9.3 (a) Antes del impacto: $m_1u_1 + m_2u_2$; (b) durante el impacto $F_1\Delta t = -F_2\Delta t$; (c) después del impacto $m_1v_1 + m_2v_2$.

Por tanto, hemos deducido un enunciado de la ley de la ***conservación de la cantidad de movimiento:***

La cantidad de movimiento total de los cuerpos que chocan es igual antes y después del impacto.

Ejemplo 9.3 Supongamos que una masa m_1 de 8 kg que se mueve a la derecha a 4 m/s choca con una masa m_2 de 6 kg que se mueve a la izquierda a 5 m/s. ¿Cuál es la cantidad de movimiento total antes y después del impacto?

Plan: Trazaremos un esquema para este problema similar al mostrado en la figura 9.3. Después, elegiremos la dirección a la derecha como positiva, organizaremos los datos y sumaremos la cantidad de movimiento de las dos masas antes del impacto. Finalmente, suponiendo que la cantidad de movimiento se conserva, daremos el mismo valor para la cantidad de movimiento final.

Solución: Tomamos el movimiento hacia la derecha como positivo y organizamos los datos.

Dados: $m_1 = 8\text{ kg}, u_1 = +4\text{ m/s}$ Encuentre: $p_0 = ?$

$m_2 = 6\text{ kg}, u_2 = -5\text{ m/s}$ $p_f = ?$

Ahora bien, la cantidad de movimiento total *antes* del impacto es

$$\begin{aligned} p_0 &= m_1u_1 + m_2u_2 \\ &= (8\text{ kg})(4\text{ m/s}) + (6\text{ kg})(-5\text{ m/s}) \\ &= 32\text{ kg}\cdot\text{m/s} - 30\text{ kg}\cdot\text{m/s} = +2\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

Finalmente, conservación de la cantidad de movimiento significa que el mismo valor se aplica a la cantidad de movimiento total *después* del impacto.

Si la velocidad de cualquier masa después del impacto puede determinarse, la otra velocidad también puede obtenerse a partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Ejemplo 9.4 Un cañón de 1 400 kg montado sobre ruedas dispara una bala de 60 kg en dirección horizontal con una velocidad de 50 m/s, como se muestra en la figura 9.4. Suponiendo que el cañón se pueda mover libremente, ¿cuál será su velocidad de retroceso?

Plan: Trace y marque un esquema como el de la figura 9.4, marcando como positiva la dirección a la derecha. Después organice los datos y haga la sustitución en la ecuación de la conservación para resolver para la velocidad de retroceso del cañón. Es útil elegir un subíndice para cada masa que identifica, como m_c o m_b para la bala del cañón. Por ejemplo, podemos representar la cantidad de movimiento para el cañón *antes* de la colisión como $m_c u_c$. Dado que la velocidad de retroceso debe ser a la *izquierda* y la masa del cañón es mucho *más grande* que la del proyectil, nos aseguramos de que nuestra respuesta sea consistente.

Solución: Recuerde que la derecha es positiva y la u se aplica antes y la v se aplica después de la colisión.

Dados: $m_c = 1\,400$ kg, $u_c = 0$ m/s　　Encuentre: $v_c = ?$

$m_b = 60$ kg, $u_b = 0$ m/s

$v_b = 50$ m/s

La sustitución en la ecuación de la conservación da

$$m_c u_c + m_b u_b = m_c v_c + m_b v_b$$
$$0 + 0 = m_c v_c + m_b v_b$$

Al resolver para la velocidad del cañón después de la colisión, tenemos

$$m_c v_c = -m_b v_b \qquad \text{o} \qquad v_c = \frac{-m_b v_b}{m_c}$$

$$v_c = \frac{-(60 \text{ kg})(50 \text{ m/s})}{1\,400 \text{ kg}} = -2.14 \text{ m/s}$$

El signo y la magnitud de la velocidad de retroceso es razonable para la información dada.

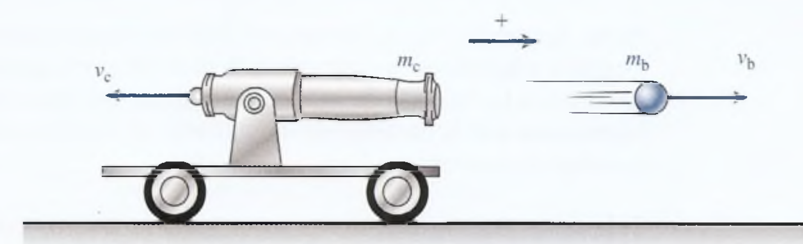


Figura 9.4 Cálculo de la velocidad de retroceso de un cañón.

Puede realizarse un experimento interesante que demuestra la conservación de la cantidad de movimiento utilizando ocho balines pequeños y una pista acanalada, como se muestra en la figura 9.5. Si se suelta un balín desde el lado izquierdo, se detendrá al chocar con los demás, y el que está en el extremo derecho rodará hacia la derecha con la misma velocidad. En forma similar, cuando dos, tres, cuatro o cinco balines se sueltan desde la izquierda, el mismo número de ellos rodará hacia la derecha con la misma velocidad, mientras que los otros permanecerán en reposo en el centro.

Es razonable preguntar por qué dos balines salen rodando en la figura 9.5, en lugar de que salga uno solo con el doble de velocidad, puesto que de este modo también se conservaría la cantidad de energía. Por ejemplo, si cada balín tiene una masa de 50 g, y si dos balines salen del lado izquierdo a una velocidad de 20 cm/s, la cantidad de movimiento total antes del impacto será 2 000 g · cm/s. Una cantidad de movimiento igual se puede alcanzar después del impacto si

Figura 9.5 Conservación de la cantidad de movimiento.

sólo rueda un balín de la izquierda, suponiendo que lo haga a una velocidad de 40 cm/s. La explicación se basa en el hecho de que la energía debe conservarse. Si un balín saliera disparado con el doble de velocidad, su energía cinética sería mucho mayor que la disponible a partir de los otros dos de la izquierda. La energía cinética que entraría entonces al sistema sería

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(0.2 \text{ m/s})^2$$
$$= 2 \times 10^{-3} \text{ J}$$

La energía cinética de un balín que viaja a 40 cm/s es exactamente del doble de este valor.

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.05 \text{ kg})(0.4 \text{ m/s})^2$$
$$= 4 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Por tanto, la energía, al igual que la cantidad de movimiento, es importante en la descripción del fenómeno de choque.

9.3 Choques elásticos e inelásticos

FÍSICA HOY

Debido a su cantidad de movimiento, un buque superpetrolero con carga completa que navega a 16 nudos tardará 20 minutos en detenerse. Si un objeto inmóvil apareciera a tres millas náuticas de distancia, habría un choque.

A partir del experimento descrito en la sección 9.2, se puede suponer que la energía cinética, al igual que la cantidad de movimiento, no cambia a causa de un choque o colisión. Sin embargo, esta suposición sólo es aproximadamente cierta para los cuerpos duros, como los balines y las bolas de billar; pero no resulta verdadera en el caso de los cuerpos blandos que rebotan con mucho mayor lentitud después de chocar. Durante el impacto, todos los cuerpos se deforman ligeramente y así se liberan pequeñas cantidades de calor. El vigor con el que un cuerpo recobra su forma original, después de sufrir una deformación, es una medida de su ***elasticidad*** o capacidad de restitución.

Si la energía cinética permanece constante en un choque (el caso ideal), se dice que el choque es ***completamente elástico.*** En este ejemplo no se pierde ninguna energía en forma de calor o deformación en un choque. Una bola de acero templado que se deja caer sobre una placa de mármol se aproxima a lo que sería un choque completamente elástico.

Cuando los cuerpos que chocan se adhieren entre sí y se mueven como un solo cuerpo después del choque, se dice que el choque es ***completamente inelástico.*** Una bala que se incrusta en un bloque de madera es un ejemplo de este tipo de choque. La mayoría de los choques se encuentran entre estos dos extremos.

En una colisión completamente elástica entre dos masas m_1 y m_2, podemos decir que tanto la energía como la cantidad de movimiento se conservan. Por tanto, es posible aplicar dos ecuaciones:

$$\text{Energía: } \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\text{Cantidad de movimiento: } m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

podemos simplificar y obtener

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$
$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$

Al dividir la primera ecuación entre la segunda nos queda

$$\frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - u_2^2}{v_2 - u_2}$$

Factorizando los numeradores y efectuando la división obtenemos

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

o bien,

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2) \quad \textbf{(9.3)}$$

Por consiguiente, en el caso ideal de un choque completamente elástico, la velocidad relativa después del choque, $v_1 - v_2$, es igual al valor negativo de la velocidad relativa antes del choque. Cuanto más parecidas sean estas cantidades, tanto más elástica será la colisión. La relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del choque se llama ***coeficiente de restitución.***

El coeficiente de restitución e es la razón o relación negativa de la velocidad relativa después del choque, entre la velocidad relativa antes del choque.

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}$$

Al incorporar el signo menos en el numerador de esta ecuación, nos queda

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \quad \textbf{(9.4)}$$

Si el choque es completamente elástico, entonces $e = 1$. Si el choque es completamente inelástico, $e = 0$. En el caso del choque inelástico, los dos cuerpos salen despedidos con la misma velocidad, es decir, $v_2 = v_1$. En general, el coeficiente de restitución tiene un valor entre 0 y 1.

Un método sencillo para determinar el coeficiente de restitución aparece en la figura 9.6. Una esfera del material que se va a medir se deja caer sobre una placa fija, desde una altura h_1. El rebote se mide a una altura h_2. En este caso, la masa de la placa es tan grande que v_2 es aproximadamente 0. Por lo tanto,

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = -\frac{v_1}{u_1}$$

La velocidad u_1 es simplemente la velocidad adquirida durante la caída desde la altura h_1, y se determina a partir de

$$u_1^2 - u_0^2 = 2gh_1$$

Pero la velocidad inicial $u_0 = 0$, por lo cual

$$u_1^2 = 2gh_1$$

o bien,

$$u_1 = \sqrt{2gh_1}$$

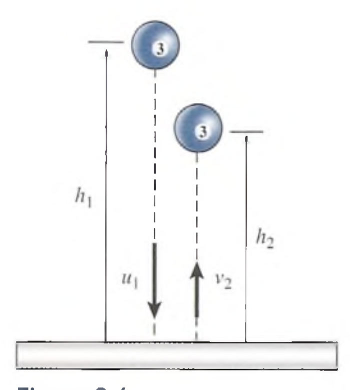


Figura 9.6

FÍSICA HOY

Para que las pelotas deportivas cumplan con un estándar de uso aceptable, deben tener un alto coeficiente de restitución. El coeficiente de restitución se mide al dejar caer las pelotas desde ciertas alturas en una superficie dura. Después se mide la altura de rebote. Las pelotas que alcanzan una altura aceptable se desechan. ¿Por qué el coeficiente debe ser menor que 1.00?

Hemos considerado la dirección hacia abajo como positiva. Si la pelota rebota hasta una altura h_2, su velocidad de rebote v_1 debe ser $-\sqrt{2gh_2}$. (El signo menos indica el cambio de dirección.) Así pues, el coeficiente de restitución está dado por

$$e = -\frac{v_1}{u_1} = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}$$

o bien,

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \tag{9.5}$$

El coeficiente resultante es una propiedad conjunta de la pelota y de la superficie sobre la cual rebota.

En el caso de una superficie muy elástica, el valor de e es de 0.95 o mayor (acero o vidrio); mientras que para sustancias menos elásticas e puede ser muy pequeño. Es interesante observar que la altura de rebote es una función del vigor con que se restablece la deformación por el impacto. Contrariamente a la creencia popular, un balín de acero o una canica rebotan a mucho mayor altura que la mayoría de las pelotas de hule.

Estrategia para resolver problemas

Conservación de la cantidad de movimiento: Choques

1. Lea el problema y luego trace y marque un diagrama sencillo. Indique la dirección del movimiento para cada masa, trazando vectores en el diagrama.
2. Elija el eje x a lo largo de la línea de choque e indique la dirección positiva. Las velocidades se considerarán positivas o negativas de acuerdo con esta elección.
3. Escriba una lista de las masas y velocidades conocidas, teniendo cuidado de utilizar en forma apropiada el signo y las unidades para cada velocidad. El uso de subíndices y letras adecuados le ayudará a seguir la pista de las diferentes masas y velocidades, antes y después del choque.
4. Escriba la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento:
$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$
5. Sustituya en esa ecuación todas las cantidades conocidas y simplifique la expresión resultante. Cuando sustituya las velocidades, es esencial que incluya el signo apropiado para cada una de ellas.
6. Si el choque es completamente *inelástico*, proceda a resolver la ecuación de la cantidad de movimiento para la cantidad desconocida.
7. Si la colisión es elástica, la conservación de la energía le ofrecerá una segunda ecuación independiente:
$$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2)$$
donde e es el *coeficiente de restitución*. (Para choques perfectamente elásticos, $e = 1$.) Por último, resuelva esta ecuación simultáneamente con la ecuación de la cantidad de movimiento. Tenga cuidado de no confundir los signos de sustitución con los signos de operación.

Ejemplo 9.5

Una pelota de 2 kg que se desplaza hacia la izquierda con una rapidez de 24 m/s choca de frente con otra pelota de 4 kg que viaja hacia la derecha a 16 m/s. (a) Encuentre la velocidad resultante si las dos pelotas se quedan pegadas después del choque. (b) Determine sus velocidades finales si el coeficiente de restitución es 0.80.

Plan: Dibujaremos y marcaremos un esquema que indique la dirección a la derecha como positiva. Luego, después de listar la información dada, aplicaremos la ecuación de la conservación para una colisión completamente inelástica en la que la velocidad combinada después del choque puede determinarse directamente a partir de la conservación. Segundo, usaremos la definición del coeficiente de restitución para establecer otra relación entre las velocidades finales. Eso resolverá dos ecuaciones simultáneas para hallar las velocidades finales de cada masa.

Solución (a): Primero organizamos los datos:

Dados: $m_1 = 2$ kg, $u_1 = -24$ m/s, $e = 0.8$ Encuentre: $v_1 = ?$
$m_2 = 4$ kg, $u_2 = +16$ m/s $v_2 = ?$

Para el caso inelástico, $e = 0$ y la velocidad combinada después del choque es

$$v_c = v_1 = v_2$$

Por tanto, podemos escribir la ecuación (9.2) como sigue:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c$$

Dado que la dirección hacia la derecha se considera positiva, sustituyendo, obtenemos:

$$(2 \text{ kg})(-24 \text{ m/s}) + (4 \text{ kg})(16 \text{ m/s}) = (2 \text{ kg} + 4 \text{ kg})v_c$$
$$-48 \text{ kg} \cdot \text{m/s} + 64 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (6 \text{ kg})v_c$$
$$16 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (6 \text{ kg})v_c$$

de donde

$$v_c = 2.67 \text{ m/s}$$

El hecho de que esta velocidad también sea positiva indica que ambos cuerpos se mueven juntos hacia la derecha después del choque.

Solución (b): En este caso e no es cero y las balas rebotan después del choque con diferentes velocidades. Por tanto, necesitamos más información de la que es posible obtener de la ecuación de la cantidad de movimiento por sí sola. Tanto el valor $e = 0.80$ como la ecuación (9.4) nos ofrecen más información.

$$e = 0.80 = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

o bien,

$$v_2 - v_1 = (0.80)(u_1 - u_2)$$

Al sustituir los valores conocidos para u_1 y u_2, obtenemos

$$v_2 - v_1 = (0.80)(-24 \text{ m/s} - 16 \text{ m/s})$$
$$= (0.80)(-40 \text{ m/s})$$

o finalmente

$$v_2 - v_1 = -32 \text{ m/s}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de la cantidad de movimiento para obtener otra relación entre v_2 y v_1, lo cual nos permite resolver las dos ecuaciones simultáneamente.

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

El lado izquierdo de esta ecuación ya fue resuelto en la parte (a) y es igual a 16 kg · m/s. Por tanto, sustituimos los valores de m_1 y m_2 en el lado derecho

$$16 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (2 \text{ kg})v_1 + (4 \text{ kg})v_2$$

de donde

$$2v_1 + 4v_2 = 16 \text{ m/s}$$

o bien,

$$v_1 + 2v_2 = 8 \text{ m/s}$$

Así, tenemos dos ecuaciones:

$$v_2 - v_1 = -32 \text{ m/s} \qquad v_1 + 2v_2 = 8 \text{ m/s}$$

Resolviéndolas en forma simultánea, obtenemos

$$v_1 = 24 \text{ m/s} \qquad v_2 = -8 \text{ m/s}$$

Por tanto, vemos que las pelotas invierten sus direcciones: m_1 se mueve hacia la derecha a una velocidad de 24 m/s y m_2 se mueve hacia la izquierda a una velocidad de 8 m/s.

Ejemplo 9.6 Una bala de 12 g se dispara hacia un bloque de madera de 2 kg suspendido de un cordel, como muestra la figura 9.7. El impacto de la bala hace que el bloque oscile hasta 10 cm más arriba de su nivel original. Calcule la velocidad de la bala cuando golpea el bloque.

Plan: El problema necesita dividirse en dos partes: la conservación de la cantidad de movimiento durante el impacto y la conservación de energía durante la oscilación hacia arriba del bloque y de la bala. La velocidad inicial para la oscilación hacia arriba es la misma que la velocidad final en el impacto. Por tanto, calcularemos la velocidad v_c requerida para alcanzar la altura máxima y usaremos la conservación de la cantidad de movimiento para hallar la velocidad de entrada de la bala que se requiere para impartir esa velocidad a las masas combinadas.

Solución: Usaremos los símbolos m_b para la masa de la bala y m_w para la masa del bloque de madera. La energía cinética de las masas combinadas debe ser igual a la energía potencial en el punto más alto. Por tanto,

$$\frac{1}{2}(m_b + m_w)v_c^2 = (m_b + m_w)gh$$

Al dividir la masa combinada $(m_b + m_w)$ y simplificar, obtenemos

$$v_c^2 = 2gh \qquad \text{o} \qquad v_c = \sqrt{2gh}$$

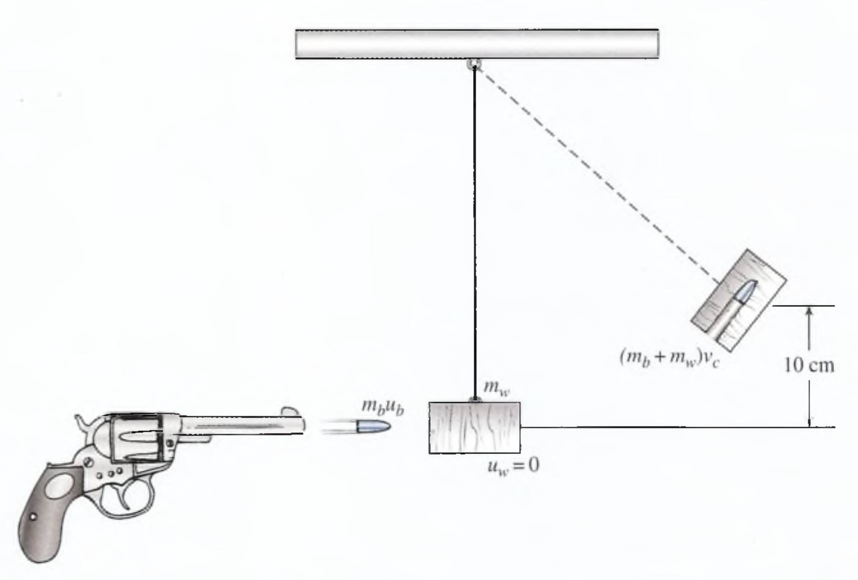


Figura 9.7 Cálculo de la velocidad de entrada de una bala disparada hacia un bloque suspendido.

de donde

$$v_c = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(0.10 \text{ m})} = 1.40 \text{ m/s}$$

Ahora bien, podemos usar esto como la velocidad combinada final después del choque. La conservación de la cantidad de movimiento requiere que

$$m_b u_b + m_w u_w = (m_b + m_w) v_c$$

Sabemos que $m_b = 0.012$ kg, $m_w = 2$ kg, $u_w = 0$ y $v_c = 1.40$ m/s. Al sustituir estos valores tenemos

$$(0.012 \text{ kg})u_b + 0 = (0.012 \text{ kg} + 2 \text{ kg})(1.40 \text{ m/s})$$
$$(0.012 \text{ kg})u_b + 0 = 0.0168 \text{ kg} \cdot \text{m/s} + 2.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$
$$(0.012 \text{ kg})u_b = 2.82 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

lo que nos da una velocidad de entrada de la bala de

$$u_b = 235 \text{ m/s}$$

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo hemos aprendido la relación entre impulso y cantidad de movimiento. Se presentaron problemas físicos relacionados con choques elásticos e inelásticos. Los principales conceptos se resumen a continuación:

- El *impulso* es el producto de la fuerza media **F** y el intervalo de tiempo Δt durante el cual actúa esa fuerza.

$$\text{Impulso} = F\,\Delta t$$
Unidades del SI: N · s
Unidades del SUEU: lb · s

- La cantidad de *movimiento* de una partícula es su masa multiplicada por su velocidad.

Cantidad de movimiento $p = mv$
Unidades del SI: kg · m/s
Unidades del SUEU: slug · ft/s

- El impulso es igual al cambio que se produce en la cantidad de movimiento:

$$F\,\Delta t = mv_f - mv_0$$

Nota: N · s = kg · m/s (unidades equivalentes)

- *Conservación de la cantidad de movimiento:* La cantidad de movimiento total antes del impacto es igual a la cantidad de movimiento total después del impacto. (Véase la figura 9.3.)

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

- El *coeficiente de restitución* se determina a partir de las velocidades relativas antes y después del choque, o en función de la altura del rebote:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \qquad e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

- Si el choque es completamente elástico, $e = 1$.
Si el choque es completamente inelástico, $e = 0$.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

9.1. Muestre la equivalencia entre las unidades de impulso y las unidades de cantidad de movimiento en unidades del SUEU.

9.2. Comente el carácter vectorial del impulso y de la cantidad de movimiento.

9.3. ¿Cómo son, comparadas entre sí, la magnitud del impulso 1 lb · s y la magnitud del impulso 1 N · s?

9.4. Comente la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento en el caso de (a) un choque elástico y (b) un choque inelástico.

9.5. Si no sostenemos con firmeza un rifle al dispararlo, tal parece que recibimos una reacción o "patada" más intensa que si mantenemos firmemente el arma contra el hombro. Explique este fenómeno. ¿Qué efecto produce el peso del arma en este caso?

9.6. Una granada para mortero explota en el aire. ¿Cómo se conserva en este caso la cantidad de movimiento? ¿Cómo se conserva la energía?

9.7. Suponga que usted golpea una pelota de tenis en el aire con una raqueta. La pelota golpea primero la cancha de concreto y después rebota sobre la barda, cayendo en el césped. ¿Cuántos impulsos intervinieron en este caso y cuál de esos impulsos fue mayor?

9.8. Un hombre y su hija se encuentran frente a frente en un estanque congelado. Describa los movimientos relativos y las velocidades de cada uno de ellos si la muchacha empuja a su padre hacia atrás. ¿Serían esos valores diferentes si el padre empujara a la hija?

9.9. Dos carritos cuyas masas son m_1 y m_2 están atados por un cordón y se ha colocado entre ellos un resorte comprimido. Cuando el cordón se quema con la llama de un fósforo, el resorte se libera e imprime un impulso idéntico a cada carrito. Compare la razón de sus desplazamientos con la razón de sus masas en algún instante posterior.

Problemas

Sección 9.1 Impulso y cantidad de movimiento

9.1. Una llave de tuercas de 0.5 kg cae desde una altura de 10 m. ¿Cuál es su cantidad de movimiento inmediatamente antes de tocar el suelo?
Resp. 7 kg · m/s, hacia abajo

9.2. Calcule la cantidad de movimiento y la energía cinética de un automóvil de 2400 lb que avanza hacia el norte a 55 mi/h.

9.3. Un camión de 2500 kg que viaja a 40 km/h golpea una pared de ladrillo y se detiene en 0.2 s. (a) ¿Cuál es el cambio en su cantidad de movimiento? (b) ¿Cuál es el impulso? (c) ¿Cuál es la fuerza media sobre la pared durante el choque?
Resp. (a) 27750 kg · m/s o -2.78×10^4 kg · m/s, (b) -27750 kg · m/s o -2.78×10^4 N · s, (c) 138750 N o 1.39×10^5 N

9.4. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de una bala de 3 g que se mueve a 600 m/s en una dirección 30° por encima de la horizontal? ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de esta cantidad de movimiento?

9.5. Una pelota de beisbol de 0.2 kg lanzada hacia la izquierda a 20 m/s es impulsada en la dirección contraria a 35 m/s al ser golpeada por un bat. La fuerza media sobre la pelota es de 6400 N. ¿Cuánto tiempo estuvo en contacto con el bat? Resp. 1.72 ms

9.6. Un bat ejerce una fuerza media de 248 lb sobre una pelota de 0.6 lb durante 0.01 s. La velocidad de llegada de la pelota fue de 44 ft/s. Si ésta sale disparada en la dirección opuesta, ¿cuál es su velocidad?

***9.7.** Una pelota de 500 g se desplaza de izquierda a derecha a 20 m/s. Un bat impulsa la pelota en la dirección opuesta a una velocidad de 36 m/s. El tiempo de contacto fue de 0.003 s. ¿Cuál fue la fuerza promedio sobre la pelota? Resp. 9333 N

***9.8.** Una pelota de caucho de 400 g se deja caer sobre el pavimento desde una distancia vertical de 12 m. Está en contacto con el pavimento durante 0.01 s y rebota hasta una altura de 10 m. ¿Cuál es el cambio total registrado en su cantidad de movimiento? ¿Qué fuerza media actúa sobre la pelota?

***9.9.** Un taco de billar golpea la bola ocho con una fuerza media de 80 N durante un tiempo de 12 ms. Si la masa de la bola es 200 g, ¿cuál será su velocidad?
Resp. 4.80 m/s

9.10. Un jugador de golf golpea una pelota de 46 g con una velocidad inicial de 50 m/s a 30°. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la cantidad de movimiento impartida a la pelota?

***9.11.** La superficie del palo de golf del problema 9.10 está en contacto con la pelota durante 1.5 ms. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza media sobre la pelota? (Sugerencia: Calcule en forma independiente el impulso y la cantidad de movimiento horizontal y vertical.)
Resp. $F_x = 1326.67$ N, $F_y = 766.67$ N

Sección 9.2 Conservación de la cantidad de movimiento

9.12. Una niña de 20 kg y un niño en patines están descansando parados frente a frente. Se empujan entre ellos lo más fuerte que pueden y el niño se mueve a la izquierda con una velocidad de 2 m/s, mientras que la niña se mueve a la derecha con una velocidad de 3 m/s. ¿Cuál es la masa del niño?

9.13. La masa del camión de juguete de la figura 9.8 es del triple de la masa del cochecito, y están unidos en su parte trasera por una cuerda y un resorte comprimido. Cuando el resorte se rompe, el cochecito se mueve a la izquierda a 6 m/s. ¿Cuál es la velocidad impartida al camión de juguete? Resp. 2 m/s

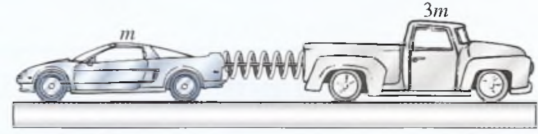


Figura 9.8 Un cochecito y un camión de juguete unidos por una cuerda después de comprimirse contra un resorte.

9.14. Una persona de 70 kg, parada sobre una plataforma de hielo sin fricción arroja un balón de futbol americano hacia adelante con una velocidad de 12 m/s. Si la persona se mueve hacia atrás a una velocidad de 34 cm/s, ¿cuál es la masa del balón?

9.15. Un niño que pesa 20 kg está quieto en un carrito. Cuando el niño salta hacia adelante a 2 m/s, el carrito es lanzado hacia atrás a 12 m/s. ¿Cuál es la masa del carrito? Resp. 3.33 kg

9.16. Dos niños, cuyos pesos son de 80 lb y 50 lb, respectivamente, están inmóviles sobre sus patines de ruedas. El mayor de ellos empuja al más pequeño y éste se aleja a 6 mi/h. ¿Cuál es la velocidad del niño mayor?

9.17. Cuando un cohete de 60 g estalla, un trozo de 45 g es lanzado a la izquierda y el otro a la derecha, con una velocidad de 40 m/s. ¿Cuál es la velocidad del trozo de 45 g? Resp. -13.3 m/s

***9.18.** Una bala de 24 g es disparada a una velocidad inicial de 900 m/s con un rifle de 5 kg. Halle la velocidad de retroceso del rifle. ¿Cuál es la razón entre la energía cinética de la bala y la del rifle?

***9.19.** Una bola de boliche de 6 kg choca directamente contra un bolo de 1.8 kg. Éste se mueve hacia adelante

a 3 m/s y la pelota reduce su velocidad a 1.6 m/s. ¿Cuál era la velocidad inicial de la bola de boliche? Resp. 2.50 m/s

***9.20.** Un hombre que pesa 60 kg está de pie sobre un lago de hielo y atrapa una pelota de 2 kg. Tanto la pelota como el hombre se mueven a 8 cm/s después que éste atrapa la pelota. ¿Cuál era la velocidad de la pelota antes de ser atrapada? ¿Cuánta energía se perdió en el proceso?

***9.21.** Una piedra de 200 g se mueve hacia el sur a 10 m/s y golpea un bloque de 3 kg que inicialmente estaba en reposo. (a) Si los dos se mantienen juntos después del choque, ¿cuál será su velocidad común? (b) ¿Qué cantidad de energía se perdió en el choque? Resp. 62.5 cm/s, 9.38 J

Sección 9.3 Choques elásticos e inelásticos

9.22. Un automóvil que circulaba a 8 m/s choca contra otro de la misma masa que estaba detenido frente a un semáforo. ¿Cuál es la velocidad de los autos chocados inmediatamente después de la colisión, suponiendo que ambos se mantengan juntos?

9.23. Un camión de 2000 kg que viaja a 10 m/s choca contra un automóvil de 1200 kg que inicialmente estaba en reposo. ¿Cuál es la velocidad común después del choque si ambos se mantienen juntos? ¿Cuál es la pérdida en términos de energía cinética? Resp. 6.25 m/s, 37 500 J

9.24. Un niño de 30 kg está de pie sobre una superficie sin fricción. Su padre le arroja un balón de futbol americano de 0.8 kg con una velocidad de 15 m/s. ¿Qué velocidad tendrá el niño después de atrapar el balón?

9.25. Un objeto de 20 g que se mueve hacia la izquierda a 8 m/s choca de frente con un objeto de 10 g que se desplaza hacia la derecha a 5 m/s. ¿Cuál es la velocidad combinada de ambos después del impacto? Resp. 3.67 m/s hacia la izquierda

***9.26.** Dos bolas de metal *A* y *B* están suspendidas como se muestra en la figura 9.9, así que cada una toca a la otra. Las masas se indican en la figura. La bola *A* se jala hacia un lado hasta que queda a 12 cm sobre su posición inicial y luego se deja caer. Si golpea la bola *B* en una colisión completamente elástica, halle la altura *h* alcanzada por la bola *B*, suponiendo que la fricción sea cero.

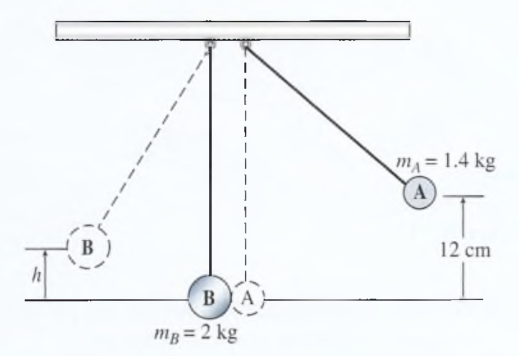


Figura 9.9 Colisión completamente elástica de dos bolas de metal suspendidas.

***9.27.** Un bloque de barro de 2 kg está suspendido del techo por una cuerda larga, como indica la figura 9.9. Una bola de acero de 500 g, lanzada horizontalmente, se incrusta en el barro provocando que las dos masas suban a una altura de 20 cm. Halle la velocidad a la cual se incrustó la bola. Resp. 9.90 m/s

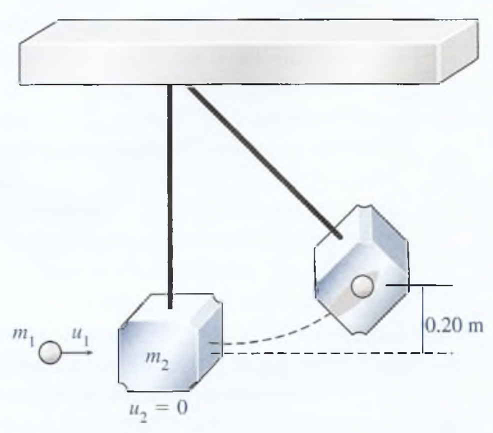


Figura 9.10

***9.28.** Del problema 9.27, suponga que la bola de 500 g atraviesa por completo el barro y sale del otro lado con una velocidad de 10 m/s. ¿Cuál debe ser la nueva velocidad de entrada si el bloque se eleva a la misma altura anterior de 20 cm?

***9.29.** Una bala de 9 g está incrustada en un péndulo balístico de 2.0 kg parecido al que se muestra en la figura 9.7. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la bala si ambas masas combinadas se elevan hasta una altura de 9 cm? Resp. 296.47 m/s

***9.30.** Una bola de billar lanzada hacia la izquierda a 30 cm/s choca de frente con otra bola que se movía hacia la derecha a 20 cm/s. Las dos bolas tienen la misma masa. Si el choque es perfectamente elástico, ¿cuál será la velocidad de cada bola después del impacto?

9.31. El coeficiente de restitución del acero es 0.90. Si una bola de acero se deja caer desde una altura de 7 m, ¿hasta qué altura rebotará? Resp. 5.67 m

***9.32.** ¿Cuánto tiempo transcurre entre el primer contacto con la superficie hasta el segundo contacto con ella en el problema 9.31?

***9.33.** Una pelota que se deja caer desde una posición en reposo sobre una placa horizontal fija rebota hasta una altura igual al 81 por ciento de su altura original. ¿Cuál es el coeficiente de restitución? ¿Cuál debe

ser la velocidad en el primer impacto para que la pelota rebote a una altura de 8 m?

Resp. 0.9, 13.9 m/s

***9.34.** Un bloque de 300 g que se mueve hacia el norte a 50 cm/s choca contra un bloque de 200 g que se desplaza hacia el sur a 100 cm/s. Si el choque fue completamente inelástico, ¿cuál es la velocidad común de los bloques en cuanto empiezan a desplazarse juntos? ¿Cuál es la pérdida de energía?

***9.35.** Suponga que el choque descrito en el problema 9.34 es perfectamente elástico. ¿Cuáles serán las velocidades después del impacto?

Resp. −80 cm/s, +70 cm/s

***9.36.** Un objeto de 5 kg y otro de 12 kg se aproximan entre sí a velocidades iguales de 25 m/s. ¿Cuáles serán sus velocidades después del impacto si el choque es (a) completamente inelástico o (b) perfectamente elástico?

Problemas adicionales

9.37. Una fuerza promedio de 4000 N que actúa sobre un trozo de metal de 400 g que estaba en reposo, provoca que el trozo de metal se mueva del reposo a una velocidad de 30 m/s. ¿Cuál fue el tiempo de contacto en lo que se refiere a esta fuerza?

Resp. 3.00 ms

9.38. Un objeto de 600 g cuya velocidad es inicialmente de 12 m/s choca contra una pared y rebota con la mitad de su energía cinética original. ¿Cuál fue el impulso que recibió de la pared?

9.39. Un bloque de 10 kg que descansa sobre una superficie horizontal es golpeado por un proyectil balístico de 20 g que se mueve a 200 m/s. La bala atraviesa totalmente el bloque y sale de él a una velocidad de 10 m/s. ¿Cuál es la velocidad del bloque?

Resp. 38.0 cm/s

9.40. ¿Cuánta energía cinética se perdió en el problema 9.39?

9.41. Un cuerpo de 60 g que se mueve hacia la derecha con una velocidad inicial de 100 cm/s choca con un cuerpo de 150 g que se movía hacia la izquierda a 30 cm/s. El coeficiente de restitución es de 0.8. ¿Cuáles son las velocidades de ambos después del impacto? ¿Qué porcentaje de la energía se ha perdido en el impacto?

Resp. −67.1 cm/s, +36.9 cm/s; 35.5%

9.42. El bloque de la figura 9.10 pesa 1.5 kg. ¿A qué altura se elevará dicho bloque si es golpeado por un proyectil de 40 g que se incrusta en él con una velocidad inicial de 80 m/s? Resp. 22.0 cm

9.43. Un vagón desenganchado de un ferrocarril se desplaza hacia el norte a 10 m/s y golpea dos vagones idénticos, enganchados entre sí, que inicialmente se movían hacia el sur a 2 m/s. Si los tres vagones quedan enganchados después de la colisión, ¿cuál será su velocidad común? Resp. 2.00 m/s, norte

***9.44.** Una partícula atómica cuya masa es 2.00×10^{-27} kg se desplaza con una velocidad de 4.00×10^{6} m/s y choca de frente con una partícula de masa 1.20×10^{-27} kg que estaba en reposo. Si suponemos que el choque fue perfectamente elástico, ¿cuál es la velocidad de la partícula incidente después de dicho impacto?

***9.45.** Un bat golpea una pelota de 400 g que se movía horizontalmente hacia la izquierda a 20 m/s. La pelota sale despedida por el bat con una velocidad de 60 m/s, a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical del impulso impartido a la pelota?

Resp. 28.8 N · s, 12 N · s

***9.46.** Si el bat del problema 9.45 estuvo en contacto con la pelota durante 5 ms, ¿cuál fue la magnitud de la fuerza media sobre la pelota?

***9.47.** El carrito *A* tiene una masa de 300 g y se mueve en una pista neumática sin fricción a 1.4 m/s cuando golpea al carrito *B* que estaba en reposo. El choque es perfectamente elástico y la velocidad del carrito de 300 g se reduce a 0.620 m/s después del choque. ¿Cuál era la masa del otro carrito y cuál fue su velocidad después del choque? Resp. 116 g, 2.02 m/s

***9.48.** En la figura 9.11, una masa de 1 kg se desplaza con una velocidad de 15 m/s hacia una masa de 2 kg en reposo. No hay fricción en ninguna superficie. ¿Cuál será la velocidad común si se desplazan juntas después del choque? ¿Cuál es la razón entre la energía cinética final y la energía cinética inicial del sistema?

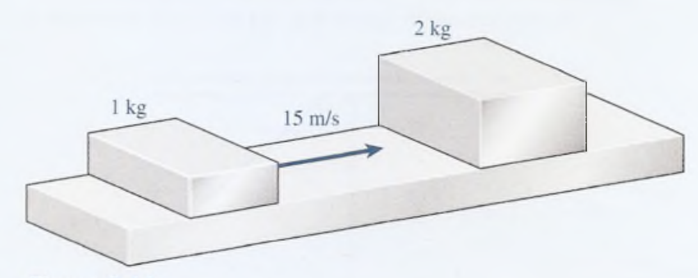


Figura 9.11

***9.49.** Supongamos que el choque del problema 9.48 fue perfectamente elástico. Determine la velocidad de cada una de las masas después del choque.

Resp. $v_1 = -5$ m/s, $v_2 = 10$ m/s

***9.50.** Una masa de 2 kg se mueve hacia la derecha a 2 m/s y choca con una masa de 6 kg que se mueve hacia la izquierda a 4 m/s. Si el choque es completamente inelástico, ¿cuál es la velocidad común de las dos masas después de chocar y cuánta energía se perdió en el impacto?

***9.51.** En el problema 9.50, suponga que el choque es perfectamente elástico. ¿Cuáles son las velocidades después del choque? Resp. −1 m/s, −7 m/s

Preguntas para la reflexión crítica

***9.52.** Un astronauta que sale de una cápsula en órbita utiliza un revólver para controlar su movimiento. Con todo su equipo, el astronauta pesa 200 lb en la Tierra. Si el revólver dispara balas de 0.05 lb a 2 700 ft/s y el astronauta ha disparado 10 tiros, ¿cuál es la velocidad final de dicho astronauta? Compare la energía cinética final de las 10 balas con la del astronauta. ¿Por qué es tan considerable la diferencia? Resp. −6.75 ft/s, balas = 56 953 ft lb, astronauta = 142.38 ft lb

***9.53.** Al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento para hallar la velocidad final de objetos en colisión, ¿se podría usar el peso de los objetos en lugar de la masa de los mismos? ¿Por qué sí o por qué no? Compruebe usted su respuesta aplicándola a alguno de los ejemplos de este texto.

***9.54.** Una bala de 20 g que se mueve a 200 m/s golpea un bloque de madera de 10 kg, lo atraviesa por completo y sale del otro lado con una velocidad de 10 m/s. ¿Cuál era la velocidad del bloque después del impacto? ¿Cuánta energía se perdió? Resp. 0.380 m/s, 399.27 J

***9.55.** Una pelota de beisbol de 0.30 kg se mueve horizontalmente a 40 m/s cuando es golpeada por un bat. Si la pelota está en contacto con el bat durante un periodo de 5 ms y se separa de él a una velocidad de 60 m/s, en un ángulo de 30°, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza media que actúa sobre el bat?

***9.56.** Cuando dos masas chocan producen impulsos iguales, pero en direcciones opuestas. Las masas no cambian en el choque, por lo cual el cambio registrado en la cantidad de movimiento de una de ellas debe ser igual al cambio registrado en la otra, pero con signo negativo. ¿Es válida esta afirmación independientemente de que el choque sea elástico o inelástico? Compruebe su respuesta con los datos de los problemas 9.50 y 9.51.

***9.57.** Dos coches de juguete con masas m y $3m$ se aproximan uno al otro viajando los dos a 5 m/s. Si continúan moviéndose unidos, ¿cuál será su rapidez común después del impacto? ¿Cuáles serán las velocidades de los coches si el choque fue perfectamente elástico?

***9.58.** Una bala de 8 g es disparada en dirección horizontal contra dos bloques que descansan sobre una superficie sin fricción. El primer bloque tiene una masa de 1 kg y la masa del segundo es de 2 kg. La bala atraviesa por completo el primer bloque y se aloja dentro del segundo. Después de esos choques, el bloque de 1 kg se mueve a una velocidad de 1 m/s y el bloque de 2 kg se mueve a 2 m/s. ¿Cuál es la velocidad de la bala antes y después de salir del primer bloque? Resp. 627 m/s, 502 m/s

***9.59.** Una masa A de 1 kg está unida a un soporte por medio de una cuerda de 80 cm de longitud y está sostenida horizontalmente como indica la figura 9.12. Cuando esta masa se suelta, oscila hacia abajo y golpea la masa B de 2 kg, la cual está en reposo sobre una mesa sin fricción. Suponiendo que el choque haya sido perfectamente elástico, ¿cuál es la velocidad de cada una de las masas inmediatamente después del impacto?

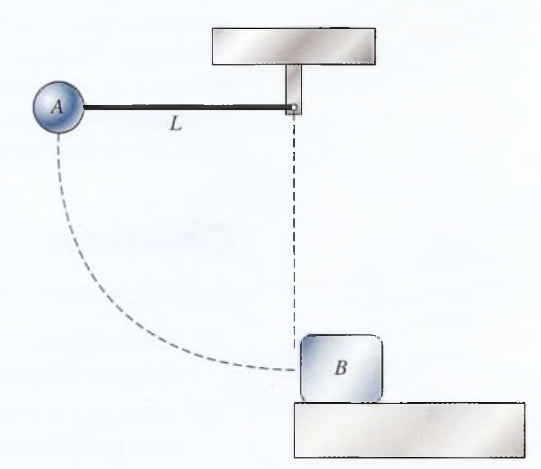
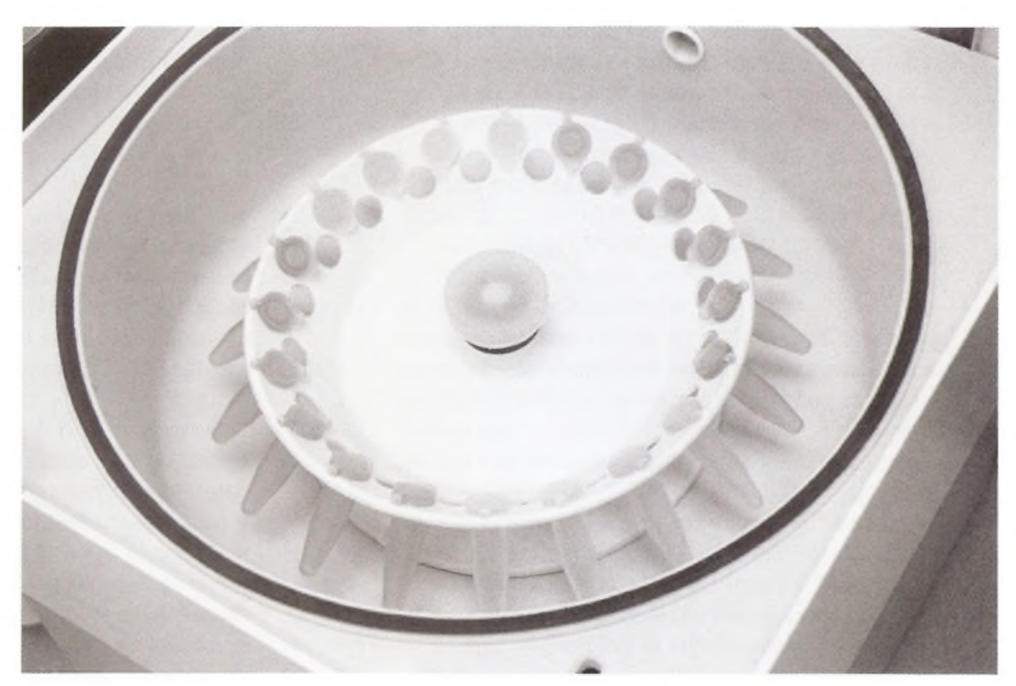


Figura 9.12

10 Movimiento circular uniforme



Los centrifugadores se emplean para eliminar las partículas sólidas de un líquido. Las partículas con más masa tienen mayor inercia y, por tanto, se mueven hacia afuera de los tubos hasta que la fuerza centrípeta necesaria las hace moverse en un círculo. (No hay fuerza hacia afuera sobre esas partículas.) En biología y bioquímica, los centrifugadores se usan para aislar y separar biocompuestos a partir de su peso molecular. El mismo principio se aplica en una escala mucho mayor cuando se utilizan centrifugadores gigantescos para probar las reacciones de los pilotos y astronautas frente a fuerzas superiores que las experimentadas en la gravedad de la Tierra. (*Fotografía © vol. 29 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará por medio de definiciones y ejemplos su comprensión de los conceptos de aceleración y fuerza centrípetas.
2. Aplicará sus conocimientos sobre fuerza y aceleración centrípetas para resolver problemas similares a los que se presentan en este texto.
3. Definirá y aplicará los conceptos de frecuencia y periodo de rotación y los relacionará con la rapidez lineal de un objeto en el movimiento circular uniforme.
4. Aplicará sus conocimientos sobre la fuerza centrípeta a problemas relacionados con los ángulos de inclinación, el péndulo cónico y el movimiento en un círculo vertical.
5. Enunciará y aplicará la ley de la gravitación universal.

En los capítulos anteriores hemos considerado principalmente el movimiento rectilíneo. Ello basta para describir y aplicar la mayor parte de los conceptos técnicos. Sin embargo, en general, los cuerpos de la naturaleza se mueven en trayectorias curvas. Los proyectiles de artillería se desplazan siguiendo trayectorias parabólicas debido a la influencia del campo gravitacional terrestre. Los planetas giran alrededor del Sol en trayectorias casi circulares. En el nivel atómico, los electrones giran alrededor del núcleo de los átomos. En realidad, es difícil imaginar un fenómeno físico que no suponga el movimiento al menos en dos dimensiones.

10.1 Movimiento en una trayectoria circular

La primera ley de Newton dice que todos los cuerpos que se mueven en línea recta con rapidez constante mantendrán inalterada su velocidad a menos que actúe sobre ellos una fuerza externa. La velocidad de un cuerpo es una cantidad vectorial definida por su rapidez y su dirección. Igual que se requiere una fuerza resultante para cambiar su rapidez, hay que aplicar una fuerza resultante para cambiar su dirección. Siempre que esa fuerza actúa en una dirección diferente de la dirección original del movimiento, ocasiona un cambio en la trayectoria de la partícula en movimiento.

El movimiento más sencillo en dos dimensiones se produce cuando una fuerza externa constante actúa siempre formando ángulos rectos respecto a la trayectoria de la partícula en movimiento. En este caso, la fuerza resultante producirá una aceleración que sólo cambia la dirección del movimiento y mantiene la rapidez constante. Este tipo de movimiento sencillo se conoce como ***movimiento circular uniforme.***

> El movimiento circular uniforme es un movimiento en el que la rapidez no cambia, sólo hay un cambio en la dirección.

Un ejemplo del movimiento circular uniforme consiste en dar vueltas en una trayectoria circular a una piedra atada a un cordel, como se ilustra en la figura 10.1. Mientras la piedra gira con rapidez constante, la fuerza hacia el centro originada por la tensión en el cordel cambia constantemente la dirección de la piedra, haciendo que ésta se mueva en una trayectoria circular. Si el cordel se rompiera, la piedra saldría disparada en una dirección tangencial, es decir, perpendicular al radio de su trayectoria circular.

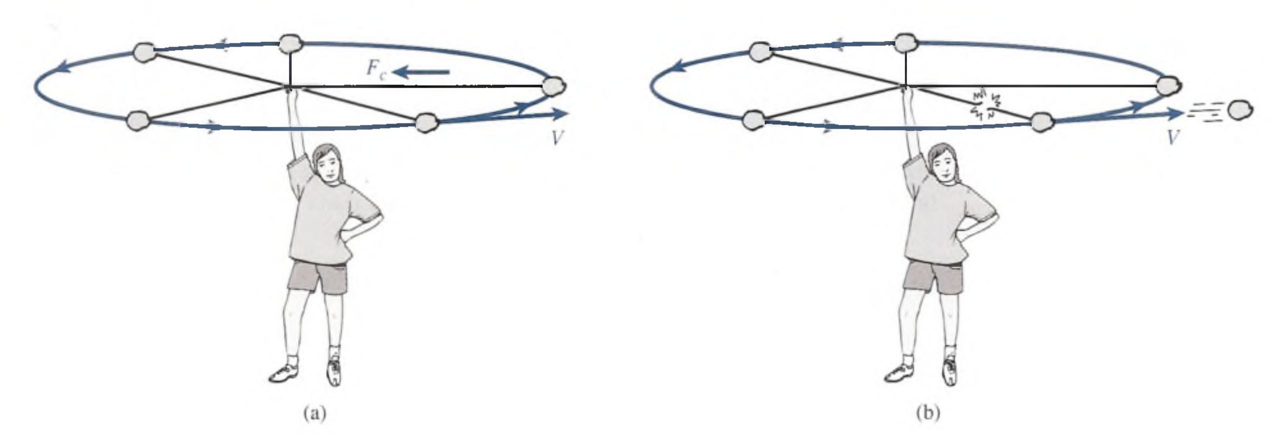


Figura 10.1 (a) La tensión hacia adentro que el cordel ejerce sobre la piedra hace que ésta se mueva en una trayectoria circular. (b) Si el cordel se rompe, la piedra sale volando en dirección tangencial al círculo.

10.2 Aceleración centrípeta

La segunda ley del movimiento de Newton establece que una fuerza resultante debe producir una aceleración en la dirección de la fuerza. En el movimiento circular uniforme, la aceleración cambia la velocidad de una partícula que se mueve alterando su dirección.

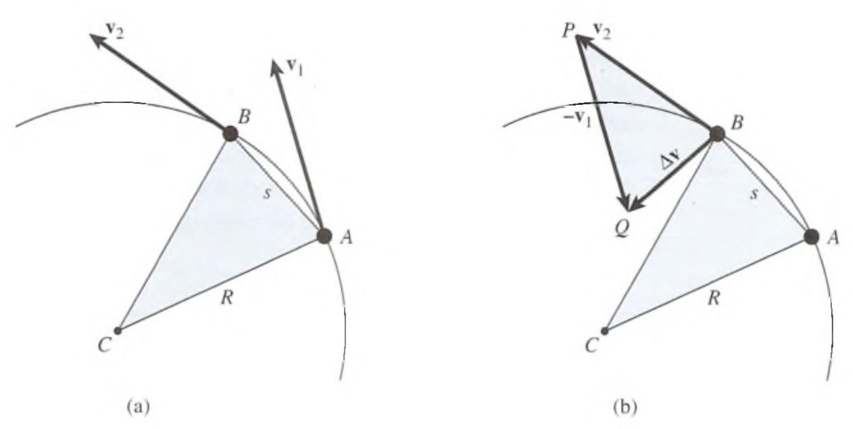


Figura 10.2 (a) A y B son las posiciones en dos instantes separados por un intervalo de tiempo Δt. (b) El cambio de velocidad v se representa gráficamente. El vector apuntará directamente hacia el centro si Δt es lo suficientemente pequeño para que la cuerda s sea igual al arco que une los puntos A y B.

FÍSICA HOY

Una piedra incrustada en el neumático (montado en una llanta con diámetro de 14 o 15 in) de un automóvil que se desplaza con una rapidez apropiada para una autopista está sometida a una aceleración centrípeta de 2 500 m/s² o 250 g, aproximadamente.

La posición y la velocidad de una partícula que se mueve en una trayectoria circular de radio R se presenta en dos instantes en la figura 10.2. Cuando la partícula se halla en el punto A, su velocidad se representa con el vector $\mathbf{v}_1$. Después del intervalo de tiempo Δt, su velocidad se denota por el vector $\mathbf{v}_2$. La aceleración, por definición, es el cambio de velocidad por unidad de tiempo. Por tanto,

$$\mathrm{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} \tag{10.1}$$

El cambio en la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ se representa gráficamente en la figura 10.2b. La diferencia entre los dos vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ se construye de acuerdo con los métodos expuestos en el capítulo 2. Como las velocidades $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ tienen la misma magnitud, forman los lados del triángulo isósceles BPQ cuya base es $\Delta\mathbf{v}$. Si construimos un triángulo similar ABC, puede observarse que la relación entre la magnitud de $\Delta\mathbf{v}$ y la magnitud de cualquiera de las velocidades es la misma que la relación entre la cuerda s y el radio R. Esta proporcionalidad se escribe simbólicamente así:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{R} \tag{10.2}$$

donde v representa la magnitud absoluta de $\mathbf{v}_1$ o de $\mathbf{v}_2$.

La distancia que recorre realmente la partícula desde el punto A hasta el punto B no es la distancia s, sino la longitud del arco de A a B. Cuanto más corto es el intervalo de tiempo Δt, más cerca estarán estos puntos hasta que, en el límite, la longitud de la cuerda se iguala con la longitud del arco. En este caso, la longitud s está dada por

$$s = v\Delta t$$

la cual, cuando se sustituye en la ecuación (10.2) resulta en

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\,\Delta t}{R}$$

Según la ecuación (10.1) la aceleración es $\Delta v/\Delta t$, de modo que podemos reordenar los términos y obtener

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Por consiguiente, la razón del cambio de velocidad, o ***aceleración centrípeta***, está dada por

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{10.3}$$

donde v es la ***rapidez lineal*** de una partícula que se mueve en una trayectoria circular de radio R.

El término ***centrípeta*** significa que la aceleración siempre se dirige hacia el centro. Observe en la figura 10.2b que el vector $\Delta\mathbf{v}$ no apunta hacia el centro. Esto se debe a que hemos considerado un intervalo de tiempo grande entre las mediciones de A y B. Si restringimos la separación de esos puntos a una distancia infinitesimal, el vector $\Delta\mathbf{v}$ apuntaría hacia el centro.

Las unidades de la aceleración centrípeta son las mismas que las de la aceleración lineal. Por ejemplo, en el SI, v^2/R tendría las unidades

$$\frac{(\mathrm{m/s})^2}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = \mathrm{m/s}^2$$

Ejemplo 10.1

Un cuerpo de 2 kg se ata al extremo de una cuerda y se hace girar en un círculo horizontal de 1.5 m de radio. Si el cuerpo realiza tres revoluciones completas por segundo, determine su rapidez lineal y su aceleración centrípeta.

Plan: La distancia recorrida por el cuerpo en una revolución es igual al perímetro del círculo ($P = 2\pi R$); como da tres revoluciones por segundo, el tiempo para una de ellas debe ser la tercera parte de un segundo, o 0.333 s. Con esta información podemos determinar la rapidez lineal del cuerpo, así como la aceleración a partir de la ecuación (10.3).

Solución: Primero se determina el perímetro de la trayectoria circular

$$P = 2\pi R = 2\pi(1.5\ \mathrm{m}) \qquad \text{o} \qquad P = 9.43\ \mathrm{m}$$

Al dividir la distancia entre los 0.333 s necesarios para dar una revolución se obtiene

$$v = \frac{9.43\ \mathrm{m}}{0.333\ \mathrm{s}} = 28.3\ \mathrm{m/s}$$

Después se calcula la aceleración con base en la ecuación (10.3)

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(28.3\ \mathrm{m/s})^2}{1.5\ \mathrm{m}} \qquad \text{o} \qquad a_c = 534\ \mathrm{m/s}^2$$

El procedimiento utilizado para calcular la rapidez lineal en el ejemplo 10.1 es tan útil que conviene recordarlo. Si definimos como ***periodo*** el tiempo para completar una revolución y lo designamos con la letra T, la rapidez lineal puede calcularse dividiendo el perímetro entre el periodo. Por tanto,

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{10.4}$$

Otro parámetro útil en problemas de ingeniería es la rapidez rotacional, expresada en *revoluciones por minuto* (rpm) o *revoluciones por segundo* (rev/s). Esta cantidad se llama *frecuencia de rotación* y es la recíproca del periodo

$$f = \frac{1}{T} \tag{10.5}$$

La validez de esta relación se demuestra observando que la recíproca de segundos entre revoluciones (s/rev) es revoluciones por segundo (rev/s). Al sustituir esta definición en la ecuación (10.4) se obtiene otra ecuación para determinar la rapidez lineal.

$$v = 2\pi f R \tag{10.6}$$

Por ejemplo, si la frecuencia es 1 rev/s y el radio 1 m, la rapidez lineal será 2π m/s.

10.3 Fuerza centrípeta

FÍSICA HOY

Técnico en diseño de parques de juegos mecánicos

¿De qué magnitud es la fuerza que mantiene firmes en sus asientos del "remolino inclinado" a los visitantes de un parque de atracciones? Los técnicos en diseño de parques mecánicos aprovechan el movimiento circular uniforme para hacer que sus atracciones sean seguras, divertidas y emocionantes.

La fuerza dirigida hacia el centro necesaria para mantener el movimiento circular uniforme se conoce como ***fuerza centrípeta***. De acuerdo con la segunda ley de Newton del movimiento, la magnitud de esta fuerza debe ser igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta, es decir,

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R} \qquad \textbf{(10.7)}$$

donde m es la masa de un objeto que se mueve con una velocidad v en una trayectoria circular de radio R. Las unidades elegidas para las cantidades F_c, m, v y R deben ser congruentes con el sistema seleccionado. Por ejemplo, las unidades del SI para mv^2/R son

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{\text{m}} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$$

Analizando la ecuación (10.7) se pone de manifiesto que la fuerza hacia el centro $\mathbf{F}_c$ es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto en movimiento. Esto significa que, para incrementar la rapidez lineal al doble de su valor original se requiere una fuerza cuatro veces mayor que la original. Razonando de igual forma se demuestra que, si se duplica la masa del objeto o se reduce a la mitad el radio de giro, será necesaria una fuerza centrípeta dos veces mayor que la original.

Para problemas en los que la rapidez rotacional se expresa en términos de la ***frecuencia***, la fuerza centrípeta puede determinarse a partir de

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = 4\pi^2 f^2 mR \qquad \textbf{(10.8)}$$

Esta relación se obtiene al sustituir la ecuación (10.6), que expresa la rapidez lineal en términos de la frecuencia de revolución.

Ejemplo 10.2

Una pelota de 4 kg se hace girar en un círculo horizontal por medio de una cuerda de 2 m de longitud. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si el periodo es de 0.5 s?

Plan: La tensión de la cuerda equivale a la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular. La rapidez lineal se determina dividiendo el perímetro de la trayectoria entre el periodo o tiempo que lleva dar una revolución.

Solución: La velocidad alrededor de la trayectoria es

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(2\text{ m})}{0.5\text{ s}} = 25.1\text{ m/s}$$

por lo que la fuerza centrípeta es

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{(4\text{ kg})(25.1\text{ m/s})^2}{2\text{ m}}$$

$$F_c = 1\,260\text{ N}$$

Ejemplo 10.3 Dos masas de 500 g giran alrededor de un eje central a 12 rev/s, como se muestra en la figura 10.3. (a) ¿Cuál es la fuerza constante que actúa sobre cada masa? (b) ¿Cuál es la tensión en la barra de soporte?

Plan: La fuerza total hacia abajo de las pesas y la barra se equilibra con la fuerza hacia arriba que ejerce el soporte central. Por tanto, la fuerza resultante que actúa sobre cada pesa al girar está dirigida hacia el centro y es igual a la fuerza centrípeta. Determinaremos la velocidad a partir del radio y la frecuencia de revolución; luego calcularemos la fuerza centrípeta de cada masa.

Solución (a): La velocidad de cada masa es

$$v = 2\pi fR = 2\pi(12 \text{ rev/s})(0.30 \text{ m})$$
$$= 22.6 \text{ m/s}$$

Ahora determinaremos la fuerza centrípeta con base en la ecuación (10.7).

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{(0.500 \text{ kg})(22.6 \text{ m/s})^2}{0.300 \text{ m}}$$
$$F_c = 853 \text{ N, } \textit{hacia el centro}$$

El mismo cálculo se realiza para cualquiera de las masas.

Solución (b): La fuerza resultante sobre cada masa es igual a 853 N dirigida *hacia* el centro. Esa fuerza es ejercida *por* la barra *sobre* la masa. Aunque con frecuencia *creemos* que la fuerza hacia *afuera* actúa sobre la masa en realidad es la fuerza de *reacción* ejercida *por* la masa *sobre* la barra. La tensión en esta última se debe a esta fuerza dirigida hacia afuera y es igual en magnitud a la fuerza centrípeta de 853 N.

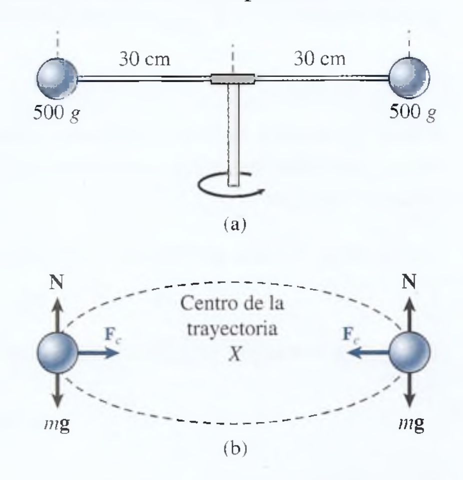


Figura 10.3 Objetos que se mueven en una trayectoria circular. La fuerza resultante que ejerce la barra sobre los objetos suministra la fuerza centrípeta necesaria. De acuerdo con la tercera ley de Newton, los objetos ejercen una fuerza de reacción igual y opuesta llamada *fuerza centrífuga*. Estas fuerzas no se cancelan entre sí porque actúan sobre objetos diferentes.

10.4 Peralte de curvas

Cuando un automóvil toma una curva cerrada en una carretera perfectamente horizontal, la fricción entre los neumáticos y el pavimento genera una fuerza centrípeta (véase la figura 10.4). Si esta fuerza se vuelve demasiado grande, el auto puede derrapar y salir de la carretera. El máximo valor de la fuerza de fricción estática determina la velocidad máxima con la que un automóvil puede tomar una curva de un radio determinado.

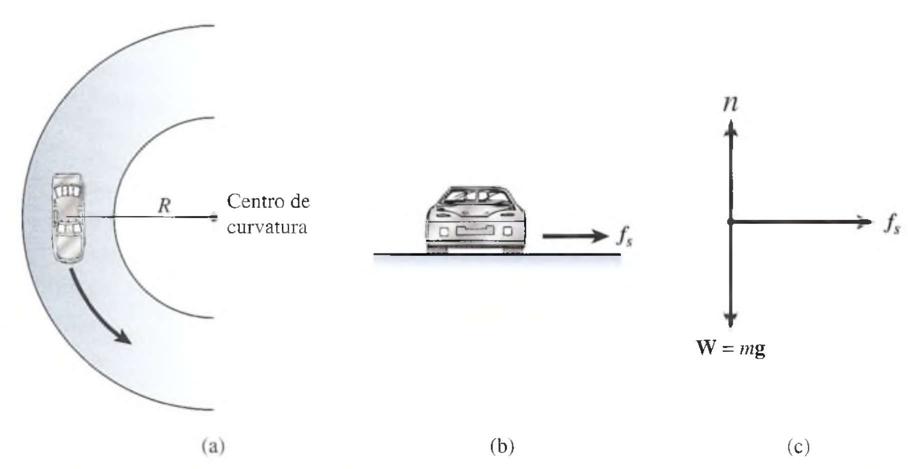


Figura 10.4 Fuerza centrípeta de fricción. Observe que no existe una fuerza hacia afuera sobre el automóvil.

Ejemplo 10.4

¿Cuál es la máxima velocidad a la que, sin derrapar, un automóvil puede tomar una curva cuyo radio es de 100 m, si el coeficiente de fricción estática es de 0.7?

Plan: En este ejemplo, la fricción estática genera la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular. A medida que el auto aumenta la velocidad, la fuerza centrípeta (fricción) será demasiado grande para contrarrestar la máxima fuerza de fricción estática y en ese instante la fuerza centrípeta igualará a esta última. Por tanto, hay dos fórmulas que pueden emplearse para calcular la misma fuerza:

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s n \qquad \text{y} \qquad F_c = \frac{mv^2}{R}$$

y puesto que $F_c = f_{s,\text{máx}}$, podemos escribir

$$\frac{mv^2}{R} = \mu_s n \qquad \textbf{(10.9)}$$

Luego podemos aplicar la primera condición del equilibrio para determinar la fuerza normal y sustituir los datos que tenemos a fin de calcular la velocidad en el instante en que el auto se derrapa.

Solución: Como las fuerzas verticales están en equilibrio, sabemos que

$$n = W = mg \qquad \text{y} \qquad f_{s,\text{máx}} = \mu_0 mg$$

así que la ecuación (10.9) se transforma en

$$\frac{mv^2}{R} = \mu_s mg \qquad \text{o} \qquad v^2 = \mu_s gR$$

de donde

$$v = \sqrt{\mu_s gR} \qquad \textbf{(10.10)}$$

Por último, se sustituyen los valores que tenemos de g, R y μ_s para determinar la máxima rapidez

$$v = \sqrt{(0.7)(9.8\text{ m/s}^2)(100\text{ m})} = 26.2\text{ m/s}$$

o aproximadamente 94.3 km/h (58.6 mi/h).

Quizá parezca sorprendente que el peso del automóvil no participe en el cálculo de la máxima rapidez. Nuestra propia experiencia contradice esta independencia respecto al peso. Sin embargo, no debe confundirnos la estabilidad de un automóvil con las condiciones para que se derrape. La fuerza ejercida por la carretera sobre los neumáticos actúa en la parte inferior de éstos, un punto considerablemente por debajo del centro de gravedad del auto.

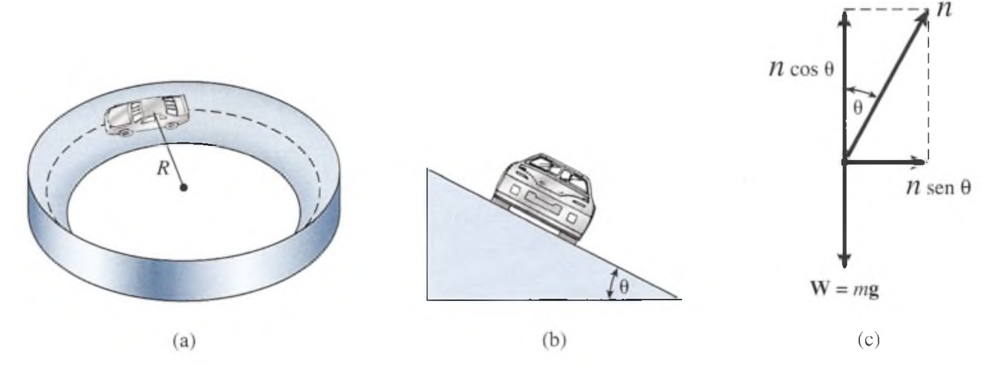


Figura 10.5 Efectos del peralte de una curva. La componente horizontal de la fuerza normal, $\boldsymbol{n}$ sen θ, proporciona la aceleración centrípeta necesaria.

Por tanto, un autobús es mucho más probable que se vuelque que un Corvette. Cabe recordar, asimismo, que los factores que influyen en la fricción son numerosos y que no se controlan cuando se aplica la ecuación (10.10) en cierta situación. Aspectos como el dibujo de los neumáticos, la temperatura y las variaciones del camino también pueden influir en la aplicación estricta de las ecuaciones. Y, no obstante, es posible utilizarlas para obtener cálculos confiables de ingeniería.

Ahora consideremos los efectos del peralte de una carretera para reducir o eliminar la necesidad de la fricción como generadora de la fuerza centrípeta. Considere la trayectoria circular que sigue el automóvil de la figura 10.5a. Cuando el auto está en reposo o marcha con rapidez lenta, la fuerza de fricción se dirige hacia la inclinación; cuando se aumenta la rapidez, la fuerza de fricción estática disminuye hasta invertir su dirección y entonces actúa hacia *abajo* de la inclinación. La rapidez óptima se alcanza cuando la fuerza de fricción equivale a cero y toda la fuerza centrípeta es generada por la componente central de la fuerza normal ejercida por la carretera sobre el auto. Las componentes de la fuerza normal son

$$n_x = n \text{ sen } \theta \qquad \text{y} \qquad n_y = n \cos \theta$$

Hay que señalar que el ángulo de inclinación θ de la carretera es igual que el ángulo respecto al eje y en un diagrama de cuerpo libre (véase la figura 10.5c) y representa la componente horizontal, n sen θ, la cual genera la fuerza centrípeta. Si denotamos con v la velocidad tangencial y el radio de la vuelta con R podemos escribir

$$n \text{ sen } \theta = \frac{mv^2}{R}$$

Y puesto que las fuerzas verticales se hallan en equilibrio

$$n \cos \theta = mg$$

Aquí el ángulo θ representa el ángulo en el que la fricción es igual a cero y recibe el nombre de *ángulo de peralte óptimo*. Al dividir la primera de estas ecuaciones entre la segunda y recordando que tan θ = (sen θ/cos θ) se obtiene la expresión siguiente:

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gR} \qquad \textit{Ángulo de peralte óptimo} \qquad \textbf{(10.11)}$$

Ejemplo 10.5

El límite de velocidad de cierta carretera es de 80 km/h. Encuentre el ángulo de peralte óptimo para una curva cuyo radio es de 300 m.

Plan: Primero se convierte la velocidad de 80 km/h en unidades congruentes del SI y luego se aplica la ecuación (10.11) para hallar el ángulo de peralte óptimo.

Solución: Sabemos que 1 km = 1 000 m y que 1 h = 3 600 s, así que

$$v = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}\left(\frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ km}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}\right) = 22.2\text{ m/s}$$

Al sustituir en la ecuación (10.11) se obtiene

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{(22.2\text{ m/s})^2}{(9.8\text{ m/s}^2)(300\text{ m})} = 0.168$$

El ángulo de peralte óptimo será entonces

$$\theta = 9.5°$$

En realidad, las carreteras no siempre están inclinadas según ángulos de peralte *óptimo*, ya que en las vueltas de radios pequeños los ángulos serían muy grandes. Si el radio de la vuelta de este ejemplo cambiara de 300 a 30 m, el ángulo de peralte óptimo sería colosal: 59°. Sin embargo, sí hay ejemplos en que los ángulos sí se acercan a los óptimos. Considere al motociclista dentro de una esfera que se presenta en la feria local, o mire ciertas zonas de las pistas de autos de las carreras de NASCAR (siglas en inglés de la Asociación Nacional de Carreras de Autos de Serie).

10.5 El péndulo cónico

Un ***péndulo cónico*** consta de una masa m que gira en un círculo horizontal con una rapidez constante v al extremo de una cuerda de longitud L. Si comparamos la figura 10.6 con la 10.5 vemos que la fórmula deducida para el ángulo de inclinación también se aplica al ángulo que forma la cuerda con la vertical en el caso del péndulo cónico. En este último caso, la fuerza centrípeta necesaria la proporciona la componente horizontal de la tensión en la cuerda. La componente vertical es igual al peso de la masa que gira; por tanto,

$$T\,\text{sen}\,\theta = \frac{mv^2}{R} \qquad T\cos\theta = mg$$

de donde

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

se obtiene como en la sección 10.4.

Un estudio cuidadoso de la ecuación (10.11) demostrará que, al incrementarse la rapidez lineal, el ángulo que forma la cuerda con la vertical también aumenta. Por ende, se eleva la posición vertical de la masa (como se indica en la figura 10.6), originando una reducción en la distancia h por debajo del punto de apoyo. Si deseamos expresar la ecuación (10.11) en términos de la posición vertical h, debemos observar que

$$\tan\theta = \frac{R}{h}$$

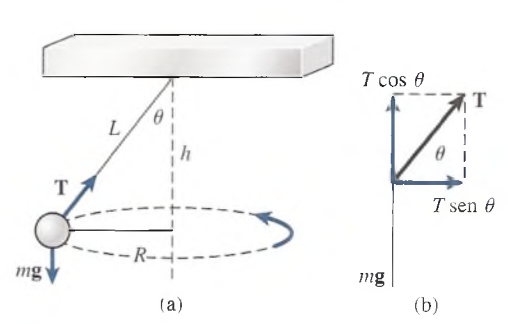


Figura 10.6

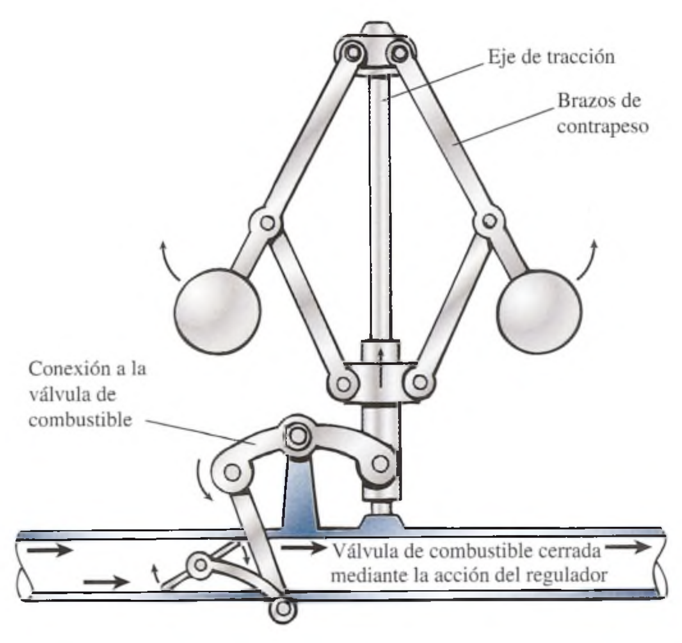


Figura 10.7 En ciertas aplicaciones, reguladores centrífugos se usan para regular la velocidad con la apertura o el cierre de válvulas.

de donde obtenemos

$$\frac{R}{h} = \frac{v^2}{gR}$$

Por tanto, la distancia del peso por debajo del soporte es una función de la rapidez lineal y está dada por

$$h = \frac{gR^2}{v^2}$$

Una forma más útil para esta ecuación se obtiene expresando la rapidez lineal en términos de la frecuencia rotacional. Como $v = 2\pi fR$, podemos escribir

$$h = \frac{gR^2}{4\pi^2 f^2 R^2} = \frac{g}{4\pi^2 f^2}$$

Si se resuelve para f se obtiene

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} \tag{10.12}$$

Las primeras aplicaciones de la relación entre la frecuencia de rotación y el peso se ejemplificaron con el regulador centrífugo mostrado en la figura 10.7. La ubicación de las pesas sirve para abrir o cerrar válvulas de combustible. Todavía hoy se usan aparatos semejantes en aplicaciones científicas o de ingeniería, pero se emplean rara vez en los automóviles modernos donde la rapidez se controla ahora con unidades de control electrónico (ECU, *Electronic Control Unit*).

10.6 Movimiento en un círculo vertical

El movimiento en un círculo vertical es diferente del movimiento circular explicado en secciones previas. Puesto que la gravedad siempre actúa hacia abajo, la dirección del peso es la misma en la parte más alta que en la parte más baja de la trayectoria. No obstante, las fuerzas que conservan el movimiento circular siempre deben dirigirse hacia el centro de ésta. Cuando actúa sobre un objeto más de una fuerza, es la *fuerza resultante* la que origina la fuerza centrípeta.

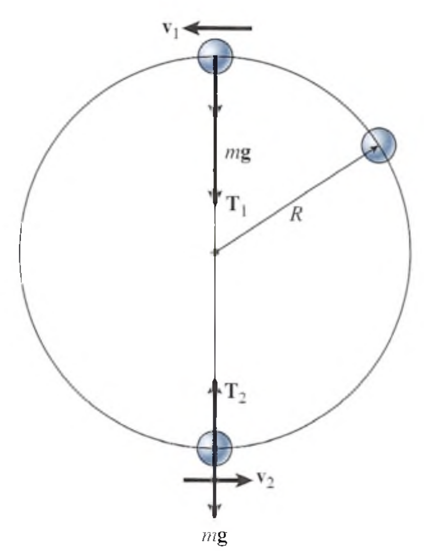


Figura 10.8

Considere una masa m atada al extremo de una cuerda y girando en un círculo de radio R, como se muestra en la figura 10.8. Denotamos con v_1 la velocidad en la parte más alta de la trayectoria circular y con v_2 la velocidad en la parte más baja. Consideremos primero la fuerza resultante sobre el objeto cuando éste pasa por el punto más alto. Tanto el peso mg como la tensión T_1 en la cuerda se dirigen hacia abajo. La resultante de estas fuerzas es la fuerza centrípeta; por tanto,

$$T_1 + mg = \frac{mv_1^2}{R} \quad \textbf{(10.13)}$$

Por otra parte, cuando la masa pasa por el punto más bajo, el peso mg aún se dirige hacia abajo, pero la tensión T_2 tiene dirección hacia arriba. La resultante es todavía la fuerza centrípeta necesaria, así que tenemos

$$T_2 - mg = \frac{mv_2^2}{R} \quad \textbf{(10.14)}$$

A partir de estas ecuaciones queda claro que la tensión en la cuerda en la parte más baja es mayor que en la parte más alta. En un caso, el peso se suma a la tensión, mientras que en el otro, se resta de ella. La fuerza centrípeta (resultante) es una función de la velocidad, de la masa y del radio en cualquier sitio.

Estrategia para resolver problemas

Movimiento circular uniforme

1. Lea el problema y luego trace y marque un diagrama.
2. Elija un eje perpendicular al movimiento circular en el punto donde la fuerza centrípeta actúa sobre una masa determinada.
3. Considere la dirección de la fuerza centrípeta (hacia el centro) como positiva.
4. La fuerza resultante hacia el centro es la fuerza centrípeta necesaria. Si sobre la masa actúa más de una fuerza, la fuerza *neta* dirigida hacia el centro será igual a mv^2/R. Éste es en realidad un enunciado de la segunda ley de Newton para el movimiento circular.

$$\sum F = \frac{mv^2}{R} \qquad a_c = \frac{v^2}{R}$$

5. Al calcular la fuerza central resultante ($\sum F$), considere las fuerzas dirigidas hacia el centro como positivas y las fuerzas que se alejan de él como negativas. El miembro derecho de la ecuación, mv^2/R, siempre es positivo.
6. Sustituya las cantidades conocidas y despeje el factor desconocido. Tenga cuidado de distinguir entre el peso y la masa de un objeto.

Ejemplo 10.6 En la figura 10.8, suponga que una pelota de 2 kg tiene una velocidad de 5 m/s cuando al girar pasa por la parte más alta del círculo cuyo radio es de 80 cm. (a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda en ese instante? (b) ¿Cuál es la mínima rapidez necesaria al pasar por la parte más alta para que se conserve el movimiento circular?

Plan: Impondremos un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas ejercidas sobre la pelota en la parte superior de la vuelta (véase la figura 10.8), donde se indicará la dirección de la aceleración (hacia abajo) como positiva. Luego resolveremos para la tensión incógnita (T_1) igualando la fuerza resultante a la masa por la aceleración centrípeta. Seguiremos el mismo procedimiento para hallar la mínima velocidad, tras advertir que la tensión en la cuerda será igual a cero en ese instante.

Solución (a): En la parte de arriba de la trayectoria, tanto el peso mg como la tensión de la cuerda se dirigen hacia abajo y hacia el centro del círculo; por tanto, al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

$$T_1 + mg = \frac{mv_1^2}{R} \qquad \text{o} \qquad T_1 = \frac{mv_1^2}{R} - mg$$

Al sustituir $R = 0.80$ m, $g = 9.8$ m/s^2, $v = 5$ m/s y m = 2 kg, queda

$$T_1 = \frac{(2\text{ kg})(5\text{ m/s})^2}{(0.80\text{ m})} - (2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)$$
$$= 62.5\text{ N} - 19.6\text{ N} = 42.9\text{ N}$$

Cabe advertir que la fuerza centrípeta de 62.5 N es la *fuerza resultante* en todos los puntos de la trayectoria circular donde la velocidad de la masa es de 5 m/s. En la parte de arriba, el peso de 19.6 N proporciona parte de esta fuerza necesaria; el resto se origina por la tensión de la cuerda (42.9 N).

Solución (b): La ***velocidad crítica*** v_c se presenta cuando la tensión de la cuerda disminuye a cero ($T_1 = 0$) y toda la fuerza centrípeta es proporcionada por el peso mg. En este caso,

$$T_1 + mg = \frac{mv_c^2}{R} \quad \text{se convierte en} \quad mg = \frac{mv_c^2}{R}$$

Al cancelar la masa que multiplica y divide, y despejar v_c esta ecuación se simplifica a

$$v_c = \sqrt{gR} \qquad \textit{Velocidad crítica} \qquad \textbf{(10.15)}$$

Al sustituir los datos conocidos se determina ahora la velocidad crítica, v_c

$$v_c = \sqrt{(9.8\text{ m/s}^2)(0.80\text{ m})} = 2.80\text{ m/s}$$

si la velocidad en la parte de arriba disminuye a menos de 2.80 m/s, ya no se tendrá la fuerza necesaria para mantener el movimiento circular y la pelota se convertirá en un cuerpo en caída libre.

10.7 Gravitación

La Tierra y los planetas siguen órbitas casi circulares alrededor del Sol. Newton sugirió que la fuerza hacia el centro que mantiene el movimiento planetario es tan sólo un ejemplo de la fuerza universal llamada ***gravitación***, la cual actúa sobre todas las masas del universo. Él enunció su tesis en la ***ley de gravitación universal:***

> Toda partícula en el universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Figura 10.9 La ley de la gravitación universal.

Esta proporcionalidad suele enunciarse en forma de una ecuación:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \textbf{(10.16)}$$

donde m_1 y m_2 son las masas de cualquier par de partículas separadas por una distancia r, como se muestra en la figura 10.9.

La constante de proporcionalidad G es una constante universal igual a

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \\ &= 3.44 \times 10^{-8}\ \text{lb} \cdot \text{ft}^2/\text{slug}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.7

Dos pelotas, una de 4 kg y otra de 2 kg, están colocadas de modo que sus centros quedan separados una distancia de 40 cm. ¿Cuál es la fuerza con la que se atraen mutuamente?

Solución: La fuerza de atracción se determina a partir de la ecuación (10.16):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(4\ \text{kg})(2\ \text{kg})}{(0.40\ \text{m})^2}$$

$$F = 3.34 \times 10^{-9}\ \text{N}$$

La fuerza gravitacional es, en realidad, pequeña. Debido a que la masa de la Tierra es relativamente grande en comparación con la de los objetos que se hallan en su superficie, solemos suponer que las fuerzas gravitacionales son muy grandes. Sin embargo, si consideramos dos canicas muy cercanas entre sí que yacen sobre una superficie horizontal, nuestra experiencia nos permite comprobar que la atracción gravitacional es débil.

Ejemplo 10.8

En la superficie de la Tierra, la aceleración debida a la gravedad es de 9.8 m/s². Si el radio de la Tierra es de 6.38×10^6 m, calcule la masa de la Tierra.

Plan: Para calcular la masa de la Tierra se considerará una pequeña masa de prueba m' cercana a la superficie de nuestro planeta y cuyo radio se denotará con R_e. Para nuestros fines, diremos que toda la masa de la tierra m_e se halla en su centro geométrico. La anterior suposición es razonable, ya que representa la distancia media de la masa m' desde cada partícula que forma la Tierra. La fuerza gravitacional sobre nuestra masa de prueba puede calcularse con la ecuación $W = m'g$, así como con la ecuación (10.6). Si se igualan ambas expresiones, la masa de prueba se cancela y la única incógnita que queda será la masa de la Tierra.

Solución: Suponga que la masa de la Tierra está dada por m_e y que su radio es R_e. Para una masa de prueba m' cercana a la superficie terrestre se tiene que

$$W = m'g = \frac{Gm'm_e}{R_e^2}$$

Al cancelar la masa de prueba m' y despejar m_e, queda

$$m_e = \frac{gR_e^2}{G}$$

ecuación con la que es posible determinar la masa de la Tierra tras sustituir los datos conocidos

$$m_e = \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(6.38 \times 10^6 \text{ m})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

10.8 El campo gravitacional y el peso

En capítulos anteriores hemos definido el ***peso*** como la atracción que ejerce la Tierra sobre las masas ubicadas cerca de su superficie. Tal vez ahora conviene revisar este concepto a la luz de la ley de la gravitación de Newton. La atracción que cualquier masa esférica grande (como la de la Tierra) ejerce sobre otra masa localizada por fuera de la esfera puede calcularse suponiendo que la masa total de la esfera grande se concentra en su centro. Suponga, como en el ejemplo 10.8, que una masa m se halla en la superficie de la Tierra, cuya masa es m_e. Al igualar el peso mg con la fuerza gravitacional se obtiene

$$mg = \frac{Gmm_e}{R_e^2}$$

El radio de la Tierra se representa con el símbolo R_e. Ahora, tras cancelar la masa m, queda el valor siguiente para la aceleración debida a la gravedad

$$g = \frac{Gm_e}{R_e^2} \qquad \textbf{(10.17)}$$

En la sección 10.7 utilizamos la ecuación (10.16) para determinar la masa de la Tierra a partir del radio proporcionado. También nos indica esta ecuación que la gravedad y, por tanto, el peso de un objeto depende de su ubicación sobre la superficie de nuestro planeta.

Ejemplo 10.9

¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra se reducirá el peso de una persona hasta la mitad del valor que tiene estando en la superficie?

Plan: El peso mg en la superficie se reducirá a la mitad cuando la aceleración debida a la gravedad g se vuelva $\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)$, que equivale a 4.9 m/s². Se aplica la ecuación (10.17), esta vez para la distancia general $r = R_e + h$, donde h es la altura sobre la superficie terrestre

$$g = \frac{Gm_e}{r^2} = 4.9 \text{ m/s}^2 \qquad r = R_e + h$$

Al despejar r podemos restar el radio de la Tierra para determinar la altura, h.

Solución:

$$r^2 = \frac{Gm_e}{4.9 \text{ m/s}^2} \qquad \text{o} \qquad r = \sqrt{\frac{Gm_e}{4.9 \text{ m/s}^2}}$$

De ejemplos anteriores sabemos que $m_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg, así que

$$r = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{4.9 \text{ m/s}^2}} = 9.02 \times 10^6 \text{ m}$$

Por último, restamos $R_e = 6.38 \times 10^6$ m para determinar la altura h sobre la superficie de la Tierra

$$h = 9.02 \times 10^6 \text{ m} - 6.38 \times 10^6 \text{ m} = 2.64 \times 10^6 \text{ m}$$

En un punto a una distancia de 2 640 km sobre la Tierra el peso de un objeto será la mitad de lo que vale en la superficie de nuestro planeta.

Si conocemos la aceleración debida a la gravedad en cualquier sitio de la superficie terrestre podemos determinar la fuerza gravitacional (peso) que actúa sobre un objeto. La dirección de esta fuerza será hacia el centro de la Tierra. Observe la figura 10.10. Resulta conveniente definir el ***campo gravitacional*** como la *fuerza por unidad de masa* en un lugar determinado. La magnitud de este campo es simplemente la aceleración debida a la gravedad:

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{Gm_e}{r^2} \tag{10.18}$$

donde r es la distancia del centro de la Tierra al punto donde se va a determinar la gravedad. Debe observarse que el campo gravitacional es una *propiedad del espacio* y existe hasta cierto punto por arriba de la Tierra, haya o no masa situada en ese punto. Al conocer el campo gravitacional o la aceleración debida a la gravedad en ese punto, inmediatamente podemos determinar el peso de cierta masa colocada en ese lugar.

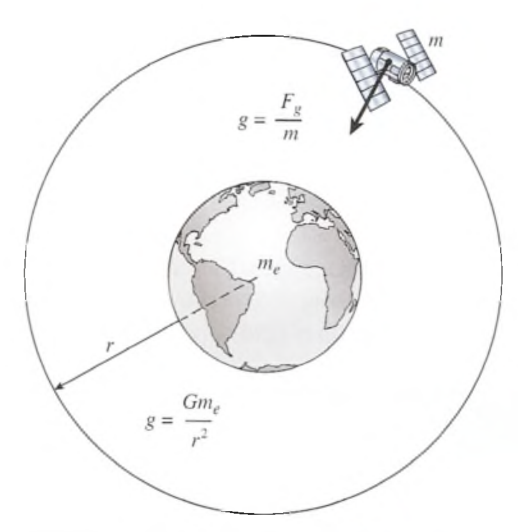


Figura 10.10 El campo gravitacional sobre la Tierra puede representarse por medio de la aceleración g que podría experimentar una pequeña masa m si estuviera colocada en ese punto. La magnitud del campo se determina a partir de la masa m_e de la Tierra y de la distancia R de dicha masa al centro de nuestro planeta.

10.9 Satélites en órbitas circulares

Un satélite terrestre no es sino un proyectil que "cae" alrededor de la Tierra. En un experimento ficticio representado en la figura 10.11, imagine que usted está sobre la Tierra y lanza pelotas de beisbol a velocidades cada vez mayores. Cuanta más velocidad imparte a la bola, más larga es la trayectoria curva hasta el suelo. Puesto que la superficie de la Tierra es curva, uno no puede sino imaginar que si la velocidad fuera lo suficientemente grande, al caer la pelota simplemente seguiría la superficie curva alrededor de la Tierra. Por supuesto, este ejemplo adolece de dos serios problemas: primero, que la superficie de la Tierra no es uniforme y que definitivamente habría obstrucciones; segundo, que debido a la gran aceleración que habría cerca de la superficie terrestre, la velocidad tendría que ser excepcionalmente grande. Los cálculos muestran que se requerirían velocidades del orden de 29 000 km/h o



Figura 10.11 Una bola de beisbol lanzada horizontalmente con velocidad cada vez más grande tarde o temprano se convertiría en un satélite al "caer" alrededor de la Tierra.

18 000 mi/h. La pelota se quemaría y quedaría reducida a cenizas rápidamente a tales rapideces debido a la fricción atmosférica. Sin embargo, hoy en día hay gran número de satélites colocados en órbita alrededor de la Tierra en altitudes donde la resistencia y la rapidez excesivas no constituyen un problema. Algunos se mueven en órbitas que son casi circulares mientras "caen" alrededor de nuestro planeta. Si se colocara una estación espacial en una órbita circular alrededor de la Tierra, ni el vehículo espacial ni los pasajeros quedarían "ingrávidos"; por el contrario, la fuerza gravitacional (peso) es la que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular.

Considere por un momento el satélite de masa m que se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r, como se muestra en la figura 10.12. La fuerza centrípeta mv^2/r se determina a partir de la ley de la gravitación de Newton:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_e}{r^2}$$

Simplificando y resolviendo para la velocidad v queda

$$v = \sqrt{\frac{Gm_e}{r}} \tag{10.19}$$

Observe que sólo hay una rapidez v que un satélite puede tener para permanecer en una órbita de radio fijo r. Si cambia la rapidez, lo hace también el radio de la órbita.

FÍSICA HOY

Comunicaciones en órbita

Los satélites colocados en órbita geoestacionaria (GEO, *Geostationary Earth Orbit*) permiten brindar servicios de fax, videoconferencias, internet, servicio telefónico fijo de larga distancia, televisión y multimedia de banda ancha a las áreas en desarrollo en todo el mundo. Los satélites colocados en órbita terrestre media (MEO, *Medium Earth Orbit*) se usan para teléfonos celulares, teléfonos fijos y otras tecnologías de comunicación personal. Los satélites colocados en órbita terrestre baja (LEO, *Low Earth Orbit*) se usan en teléfonos móviles manuales, radiolocalizadores personales, fax, rastreadores de barcos o camiones, teléfonos ordinarios fijos y multimedia de banda ancha.

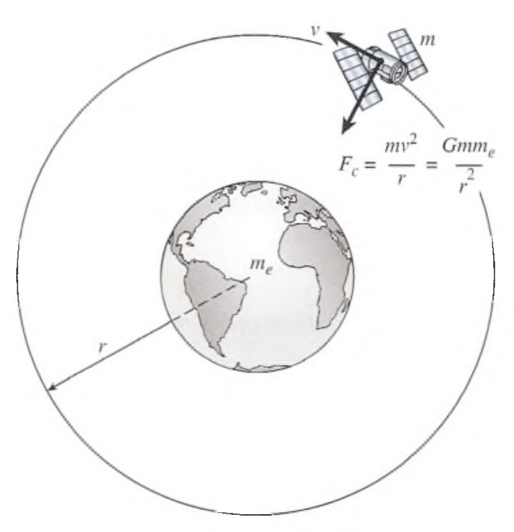


Figura 10.12 La fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular se origina por la fuerza gravitacional de atracción. Por tanto, un satélite sólo puede tener una rapidez v que le permita permanecer en una órbita de radio fijo.

Ejemplo 10.10

Una astronauta con una masa de 100 kg viaja en una estación espacial que se mueve en una órbita circular 900 km sobre la superficie terrestre. (a) ¿Cuál es la rapidez de la estación espacial? (b) ¿Cuál es el peso del astronauta?

Plan: Primero debe determinarse el radio r de la órbita, que es igual a la suma de la altura h y el radio de la Tierra (R_e). Luego es necesario hallar la rapidez con base en la ecuación (10.19) y el peso del astronauta a partir de la ley de la gravitación de Newton. Del ejemplo 10.8 se sabe que la masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg.

Solución (a): Puesto que $R_e = 6.38 \times 10^6$ m y que $h = 900$ km, r se calcula como sigue

$$r = R_e + h = 6.38 \times 10^6 \text{ m} + 0.900 \times 10^6 \text{ m}; \qquad r = 7.28 \times 10^6 \text{ m}$$

Ahora se encuentra la rapidez sustituyendo este valor en la ecuación (10.19)

$$v = \sqrt{\frac{Gm_e}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{7.28 \times 10^6 \text{ m}}}$$
$$= 7\,400 \text{ m/s } (16\,600 \text{ mi/h})$$

Solución (b): El peso del astronauta de 100 kg en órbita se calcula a partir de la ley de gravitación de Newton

$$W = \frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(100 \text{ kg})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{7.28 \times 10^6 \text{ m}}$$
$$= 753 \text{ N}$$

Como ejercicio adicional, compruebe el mismo resultado a partir de mv^2/R. Note que el astronauta no es en lo absoluto "ingrávido", simplemente se encuentra en una situación de caída libre que le da la apariencia de carecer de peso, puesto que no existe una fuerza hacia arriba o normal que actúe para equilibrar el peso.

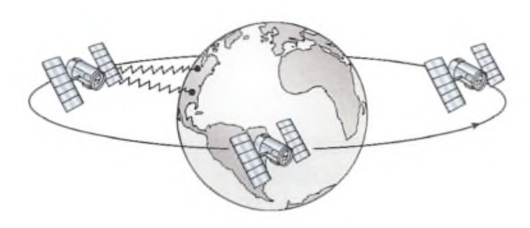


Figura 10.13 Los satélites geosincrónicos están ubicados de modo que puedan moverse alrededor de la Tierra en órbitas ecuatoriales con un periodo igual al de la Tierra (un día).

Para gran número de satélites, el periodo T, o sea el tiempo que le lleva al satélite dar una revolución completa en su órbita, es muy importante. Por ejemplo, los satélites de comunicación deben rodear la Tierra en un periodo igual al que emplea el planeta en dar un giro; en otras palabras, necesitan un día. Se dice que tales órbitas son ***geosincrónicas*** y los satélites se llaman *satélites sincrónicos*. Como se observa en la figura 10.13, esos satélites permanecen en un punto accesible en una latitud necesariamente constante, lo que permite que con facilidad haya comunicación directa entre dos puntos de la Tierra. Son necesarios tres satélites de éstos para permitir la comunicación por línea directa entre todos los puntos de la Tierra.

La obtención de una relación entre el periodo T de un satélite (o de un planeta) y el radio r de su órbita puede lograrse aplicando los conceptos que ya se han estudiado en este capítulo. Si suponemos una órbita circular, la velocidad del satélite es:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Igualando esta expresión a v, como se indica en ecuación (10.19), tenemos

$$\sqrt{\frac{Gm_e}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Al resolver para T se obtiene la ecuación siguiente:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_e}\right) r^3 \qquad \textbf{(10.20)}$$

El cuadrado del periodo de una revolución es proporcional al cubo del radio de la órbita.

Ejemplo 10.11 ¿Cuál debe ser la altitud de todos los satélites sincrónicos que están colocados en órbita alrededor de la Tierra?

Plan: El periodo de uno de tales satélites es igual a un día, o 8.64×10^4 s. Con este dato, usaremos la ecuación (10.20) para determinar la distancia r desde el centro de la Tierra. Luego restaremos el radio del planeta para obtener la altura h sobre la superficie terrestre.

Solución: La distancia r que va del centro de la Tierra al satélite se calcula con

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_e}\right)r^3 \qquad \text{o} \qquad r^3 = \left(\frac{Gm_eT^2}{4\pi^2}\right)$$

$$r^3 = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(8.64 \times 10^4\ \text{s})^2}{4\pi^2}$$
$$= 7.54 \times 10^{22}\ \text{m}^3$$

después de obtener la raíz cúbica de ambos miembros se obtiene

$$r = 4.23 \times 10^7\ \text{m}$$

Por último, después de restar el radio de la Tierra encontramos que

$$h = 42.3 \times 10^6\ \text{m} - 6.38 \times 10^6\ \text{m} = 35.8 \times 10^6\ \text{m}$$

La órbita geocéntrica debe tener 35 800 km o más de 22 000 millas sobre la superficie terrestre.

10.10 Leyes de Kepler

Durante miles de años se ha estudiado el movimiento de los planetas y las estrellas. Desde el siglo II d. C., el astrónomo griego Claudio Ptolomeo postuló la teoría de que la Tierra era el centro del universo. Muchos siglos después, Nicolás Copérnico (1473-1543) fue capaz de demostrar que la Tierra y otros planetas en realidad se movían en órbitas circulares alrededor del Sol.

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) realizó gran número de mediciones sobre el movimiento de los planetas durante un periodo de 20 años, proporcionando medidas de notable precisión sobre el movimiento de los planetas y de más de 700 estrellas visibles al ojo humano. Puesto que el telescopio todavía no se inventaba, Brahe hizo sus mediciones utilizando un gran sextante y un compás. A partir de estas primeras observaciones el modelo del sistema solar ha evolucionado hasta llegar al que se acepta actualmente.

El astrónomo alemán Johannes Kepler, discípulo de Brahe, retomó los innumerables datos recopilados por su mentor y trabajó con ellos muchos años intentando desarrollar un modelo matemático que concordara con los datos observados. Al principiar esta investigación parecía obvio a Kepler que las órbitas de los planetas pudieran no ser circulares. Sus estudios demostraron que la órbita del planeta Marte era en realidad una elipse, con el Sol en uno de sus focos. Esta conclusión posteriormente se generalizó para todos los planetas que giran alrededor del Sol, y Kepler fue capaz de establecer varios enunciados matemáticos relacionados con el sistema solar. Hoy en día dichos enunciados se conocen como las ***leyes de Kepler del movimiento planetario.***

Primera ley de Kepler: Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Esta ley a veces se llama *ley de órbitas*.

En la figura 10.14 se presenta un planeta de masa mp que se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, cuya masa es m_s. El eje semimayor es a y el eje semimenor es b. El valor más pequeño de la distancia r del planeta al Sol se llama perihelio y el valor más grande

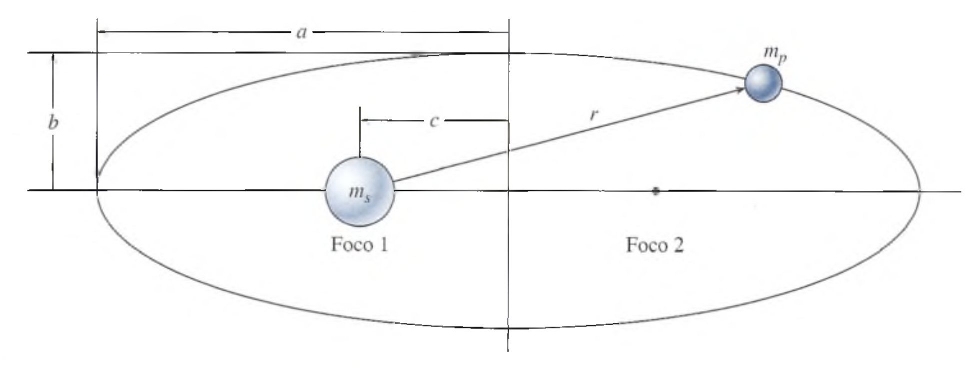


Figura 10.14 La primera ley de Kepler establece que todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos. El eje semimayor a y el eje semimenor b se indican en esta figura.

se llama *afelio*. La distancia c del Sol al centro de la elipse debe obedecer la ecuación: $a^2 = b^2 + c^2$. La razón c/a se define como la *excentricidad* de la órbita. Salvo Marte, Mercurio y Plutón, la mayoría de las órbitas planetarias son casi circulares y tienen una excentricidad que es aproximadamente igual a 1, ya que c es casi igual a a.

Segunda ley de Kepler: Una línea que conecte un planeta con el Sol abarca áreas iguales en tiempos iguales. A esta ley se le llama también *ley de áreas*.

La segunda ley se ilustra en la figura 10.15. Significa que el planeta debe moverse más lentamente cuando está más alejado del Sol, y más rápidamente cuando está más cercano a él. Newton pudo demostrar posteriormente que esta observación, igual que las otras dos leyes, eran consecuencia de su ley de la gravitación universal.

Tercera ley de Kepler: El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. Esta ley también se conoce como la *ley de los periodos*.

La tercera ley de Kepler se representa claramente por medio de la ecuación (10-20), la cual se obtuvo para un satélite en una órbita circular. También es cierta para elipses si reemplazamos R (la distancia media del planeta al Sol) con a, el eje semimayor de la elipse. En consecuencia, una forma más general para la ecuación (10.20) puede escribirse como:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_s} \qquad \textbf{(10.21)}$$

Observe que cuando la trayectoria del planeta es circular, $a = R$, y la ecuación (10.21) es igual a la (10.20).

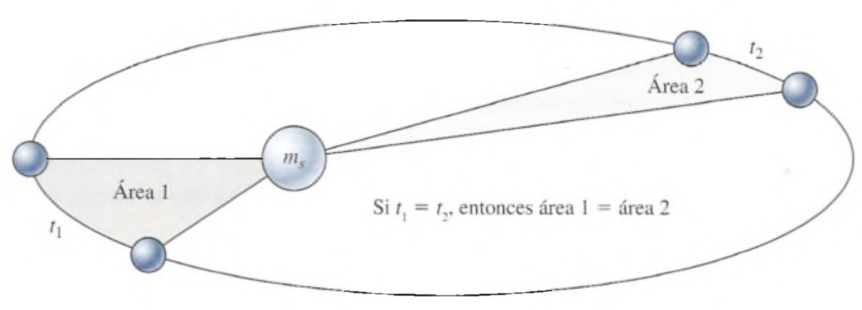


Figura 10.15

Resumen y repaso

Resumen

Hemos definido el movimiento circular uniforme como un movimiento con trayectoria circular en el que la rapidez es constante y únicamente cambia la dirección. El cambio de dirección causado por una fuerza central se denomina *aceleración centrípeta*. Los principales conceptos que aparecen en este capítulo son los siguientes:

- La rapidez lineal v de un objeto con movimiento circular uniforme se calcula a partir del periodo T o la frecuencia f:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad v = 2\pi f R$$

- La aceleración centrípeta a_c se calcula a partir de la rapidez lineal, el periodo o la frecuencia en la forma siguiente:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad a_c = 4\pi^2 f^2 R$$

- La fuerza centrípeta F_c es igual al producto de la masa m por la aceleración centrípeta a_c. Está dada por

$$F_c = \frac{mv^2}{R} \qquad F_c = 4\pi^2 f^2 mR$$

- Otras fórmulas útiles son las siguientes:

$$v = \sqrt{\mu_s g R} \qquad \text{Máxima rapidez sin deslizamiento}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR} \qquad \text{Ángulo de peralte o péndulo cónico}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} \qquad \text{Frecuencia del péndulo cónico}$$

- **Ley de la gravitación de Newton:** toda partícula del universo atrae a las demás con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}; \qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

- **Primera ley de Kepler:** todos los planetas se mueven en órbitas de elipse con el Sol en uno de los focos de ésta.
- **Segunda ley de Kepler:** una línea que conecta un planeta con el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Tercera ley de Kepler:** el cuadrado del periodo T de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_s}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

10.1. Explique por medio de diagramas por qué se dirige hacia el centro la aceleración de un cuerpo que se mueve en círculos a rapidez constante.

10.2. Un ciclista se inclina hacia un lado cuando toma una curva. ¿Por qué? Describa con un diagrama de cuerpo libre las fuerzas que actúan sobre él.

10.3. Al hacer un viraje circular, un automóvil entra en un tramo de hielo, derrapa y se sale del camino. Según la primera ley de Newton, el vehículo se moverá hacia delante en dirección tangente a la curva, no hacia fuera en ángulo recto respecto a ella. ¿Por qué?

10.4. Si la fuerza impulsora del movimiento circular se dirige hacia el centro de rotación, ¿por qué el agua se separa de la ropa durante el ciclo de rotación de una máquina lavadora?

10.5. Cuando una pelota atada al extremo de una cuerda se hace girar en círculos a rapidez constante, la fuerza centrípeta dirigida hacia dentro es igual en magnitud a la fuerza centrífuga dirigida hacia fuera. ¿Representa esto una condición de equilibrio? Explique su respuesta.

10.6. ¿Qué factores intervienen para calcular los ángulos de los peraltes más adecuados en las carreteras?

10.7. ¿La fuerza centrífuga realiza algún trabajo en el movimiento circular uniforme?

10.8. Un motociclista recorre una pista circular con rapidez constante. ¿De dónde proviene la fuerza centrípeta y sobre qué actúa? ¿De dónde proviene la fuerza de reacción centrífuga y sobre qué actúa?

10.9. Una piedra atada al extremo de una cuerda se mueve describiendo un círculo vertical. ¿En qué condiciones puede ser constante su rapidez lineal? ¿Sobre qué actúa la fuerza centrípeta? ¿Sobre qué actúa la fuerza centrífuga?

10.10. ¿Cuál es el valor de la constante gravitacional G en la Luna?

10.11. Conociendo la masa de la Tierra, su distancia del Sol y su velocidad orbital, explique cómo se podría calcular la masa del Sol.

10.12. ¿De dónde proviene la fuerza que mantiene los satélites en órbita alrededor de la Tierra? ¿Realmente carecen de peso los satélites en órbita? ¿Qué pasa con la órbita si el satélite aumenta o disminuye su velocidad?

10.13. ¿Qué sucede con la fuerza gravitacional entre dos masas cuando la distancia entre ellas se duplica? ¿Qué pasa si cada una de las masas se duplica?

10.14. La Tierra se mueve más lentamente en su órbita durante el verano que en el invierno. Según las leyes de Kepler, ¿diría usted que la Tierra está más cerca o más lejos del Sol en los meses de invierno?

Problemas

Sección 10.2 Aceleración centrípeta

10.1. Una pelota está unida al extremo de una cuerda de 1.5 m y gira en círculos con rapidez constante de 8 m/s. ¿Cuál es la aceleración centrípeta? Resp. 42.7 m/s^2

10.2. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia de rotación de la pelota descrita en el problema 10.1?

10.3. Una polea motriz de 6 cm de diámetro se hace girar a 9 rev/s. ¿Cuál es la aceleración centrípeta en un punto localizado en el borde de la polea? ¿Cuál sería la rapidez lineal de una banda accionada por la polea? Resp. 95.9 m/s^2, 1.70 m/s

10.4. Un objeto gira describiendo un círculo de 3 m de diámetro con una frecuencia de 6 rev/s. ¿Cuál es el periodo de revolución, la rapidez lineal y la aceleración centrípeta?

10.5. Un automóvil transita por una curva de 50 m de radio y recibe una aceleración centrípeta de 2 m/s^2. ¿Cuál es su rapidez constante? Resp. 10.0 m/s

10.6. Un automóvil de 1 500 kg recorre una pista circular con una rapidez constante de 22 m/s. Si la aceleración centrípeta es de 6 m/s^2, ¿cuál es el radio de la pista?

10.7. Un avión desciende siguiendo una trayectoria curva de radio R a la velocidad v. La aceleración centrípeta es de 20 m/s^2. Si tanto la velocidad como el radio se duplican, ¿qué valor tendrá la nueva aceleración? Resp. 40 m/s^2

Sección 10.3 Fuerza centrípeta

10.8. Un niño de 20 kg se desplaza en círculos a 16 m/s sobre una pista de 16 m de radio, en uno de los juegos mecánicos de una feria. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el niño?

10.9. Una piedra de 3 kg, atada a una cuerda de 2 m, oscila describiendo un círculo horizontal, de manera que completa una revolución en 0.3 s. ¿Cuál es la fuerza centrípeta sobre la piedra? ¿Se ejerce sobre la piedra alguna fuerza que la impulse hacia fuera? Resp. 2630 N, no

10.10. Un objeto de 5 kg oscila describiendo un círculo horizontal con una rapidez de 30 m/s. ¿Cuál es el radio de su trayectoria si la fuerza centrípeta es de 2 000 N?

10.11. Dos masas de 8 kg están unidas en el extremo de una varilla de aluminio de 400 mm de longitud. La varilla está sostenida en su parte media, gira en círculos y sólo puede soportar una tensión máxima de 800 N. ¿Cuál es la frecuencia máxima de revolución? Resp. 3.56 rev/s

10.12. Una camisa mojada de 500 g gira contra la pared interna de una máquina lavadora a 300 rpm. El diámetro del tambor giratorio es de 70 cm. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre la camisa?

10.13. Un corredor de 70 kg recorre una pista de 25 m de radio con una rapidez de 8.8 m/s. ¿Cuál es la fuerza central que hace al corredor describir la curva y a qué se debe esa fuerza? Resp. 217 N, a la fricción

10.14. En una carrera de trineos realizada durante la olimpiada de invierno, un equipo toma una curva de 24 ft de radio con una rapidez de 60 mi/h. ¿Cuál es la aceleración? ¿A cuántas g están sometidos los tripulantes?

Sección 10.4 Cálculo del peralte de curvas

10.15. En un día lluvioso, el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera es de sólo 0.4. ¿Cuál es la rapidez máxima a la que puede transitar un automóvil en una curva de 80 m de radio? Resp. 63.8 km/h

10.16. Un autobús toma una curva de 120 m de radio con una rapidez de 96 km/h. Si ésta es la rapidez a la que comienza a derrapar, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera?

10.17. Halle el coeficiente de fricción estática necesario para mantener un movimiento a 20 m/s en una curva cuyo radio es de 84 m. Resp. 0.486

10.18. Un niño de 20 kg se sienta a 3 m del centro de una plataforma giratoria. Si $\mu_s = 0.4$, ¿cuál es el máximo número de revoluciones por minuto que puede alcanzar la plataforma antes que el niño resbale?

10.19. Una plataforma gira libremente a 100 rev/m. Si el coeficiente de fricción estática es 0.5, ¿a qué distancia del centro de la plataforma se puede colocar un perno sin que resbale? Resp. 4.45 cm

10.20. Calcule el ángulo del peralte óptimo para que el automóvil transite por la curva descrita en el problema 10.15 sin derrapar.

10.21. Halle el ángulo del peralte óptimo para evitar que el autobús del problema 10.16 derrape. Resp. 31.2°

10.22. Se ha encontrado que el ángulo de peralte óptimo para una curva de 20 m de radio es de 28°. ¿Para qué rapidez fue proyectado este ángulo?

10.23. En un camino de 9 m de ancho hay una curva cuyo radio es de 96 m. ¿Cuánto más alto debe estar el borde externo respecto al interno para que un automóvil pueda transitar por la curva a la rapidez óptima de 40 km/h? Resp. 1.17 m

Sección 10.5 El péndulo cónico

10.24. Un péndulo cónico oscila describiendo un círculo horizontal de 30 cm de radio. ¿Qué ángulo forma el cordón del péndulo respecto a la vertical cuando la rapidez lineal de la masa es de 12 m/s?

10.25. ¿Cuál es la rapidez lineal de los contrapesos ilustrados en la figura 10.16 si $L = 20$ cm y $\theta = 60°$? ¿Cuál es la frecuencia de revolución? Resp. 1.71 m/s, 1.58 rev/s

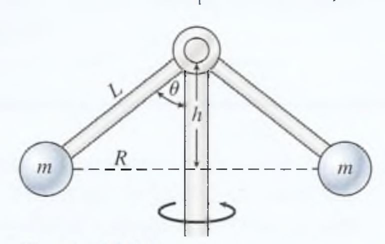


Figura 10.16

10.26. Si la longitud de L en la figura 10.16 es de 60 cm, ¿qué velocidad se requiere para que los contrapesos se muevan formando un ángulo de 30° con la vertical?

10.27. Cada uno de los contrapesos de la figura 10.16 tiene una masa de 2 kg. La longitud L es de 40 cm y el eje gira a 80 rev/min. ¿Cuál es la tensión en cada brazo? ¿Cuál es el ángulo θ? ¿Cuál es la altura h? Resp. 56.1 N, 69.6°, 14 cm

10.28. En la figura 10.16, suponga que $L = 6$ in, que el peso de cada contrapeso es 1.5 lb y que el eje gira a 100 rev/min. ¿Cuál es la tensión en cada brazo? ¿Cuál es el ángulo θ? ¿Cuál es la distancia h?

10.29. Considere las "sillas voladoras" de la figura 10.17. La longitud $L = 10$ m y la distancia $a = 3$ m. ¿Cuál tendrá que ser la velocidad tangencial de la silla para que la cuerda forme un ángulo de 30° con la vertical? Resp. 6.73 m/s

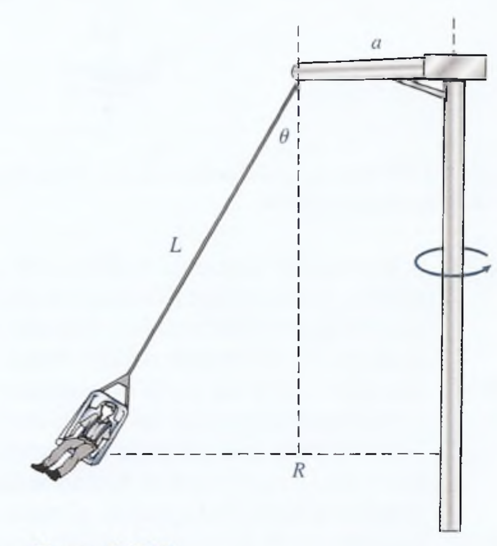


Figura 10.17

10.30. ¿Cuál será la frecuencia de revolución del columpio de la figura 10.17 si el ángulo θ es igual a 25°?

Sección 10.6 Movimiento en un círculo vertical

10.31. Una piedra yace en el fondo de un cubo que se mueve describiendo un círculo vertical de 70 cm de radio. ¿Cuál es la menor rapidez a la que debe moverse el cubo en la parte superior del círculo para que la piedra no se salga de él? Resp. 2.62 m/s

10.32. Una piedra de 1.2 kg está atada al extremo de una cuerda de 90 cm de longitud. A continuación, la piedra se hace girar con una rapidez constante describiendo un círculo vertical. ¿Cuál es la velocidad crítica que la cuerda debe alcanzar en la parte superior de la trayectoria para no perder su tensión?

10.33. Suponga que la piedra del problema 10.32 se mueve con una rapidez constante de 8 m/s describiendo un círculo vertical. ¿Cuáles son las tensiones de la cuerda cuando está en la parte superior y en la inferior del círculo? Resp. 73.6 N, 97.1 N

***10.34.** El piloto de pruebas de la figura 10.18 se lanza en picada a 620 ft/s y describe una curva de 2800 ft de radio. Si el piloto pesa 160 lb, ¿qué aceleración experimentará en el punto más bajo del círculo? ¿Cuál es la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto?

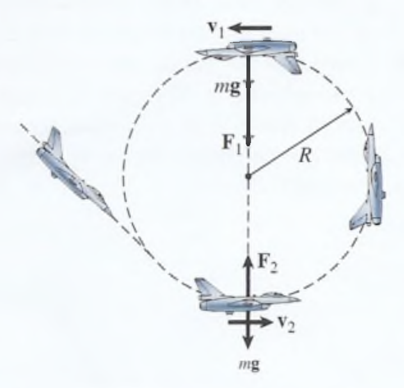


Figura 10.18 Fuerzas que soporta un avión en los límites superior e inferior de un rizo vertical.

10.35. Si el piloto del problema 10.34 no está sujeto a una aceleración mayor que siete veces la gravedad ($7\,g$), ¿cuál es la velocidad máxima para salir del descenso en un rizo de 1 km de radio? Resp. 943 km/h

10.36. Una pelota de 3 kg oscila describiendo un círculo vertical en el extremo de un cordón de 8 m. Cuando llega a la parte más alta de su trayectoria, su velocidad es de 16 m/s. ¿Cuál es la tensión en el cordón? ¿Cuál es la velocidad crítica en el punto más alto?

10.37. Una niña de 36 kg ocupa el asiento de un columpio que está sujeto por dos cadenas de 20 m de longitud cada una. Si una persona suelta a la niña desde una posición 8 m por debajo del punto más alto del columpio, ¿qué fuerza ejercerá éste sobre la niña cuando ella pase por el punto más bajo? Resp. 776 N

Sección 10.7 Gravitación

10.38. ¿Qué distancia debe haber entre un peso de dos toneladas y un peso de tres ton si su fuerza de atracción mutua es igual a 0.0004 lb?

10.39. Una masa de 4 kg se encuentra a una distancia de 8 cm de una masa de 2 kg. Calcule la fuerza de atracción gravitacional entre las dos masas. Resp. 8.34×10^{-8} N

10.40. Una masa de 3 kg está colocada a 10 cm de una masa de 6 kg. ¿Cuál es la fuerza gravitacional resultante sobre una masa de 2 kg colocada en el punto medio de una recta que une las dos primeras masas?

10.41. La aceleración debida a la gravedad en un planeta distante es de 5.00 m/s^2 y el radio del planeta es de 4560 km aproximadamente. Use la ley de la gravitación para estimar la masa de ese planeta. Resp. 1.56×10^{24} kg

***10.42.** La masa de la Tierra es aproximadamente 81 veces mayor que la de la Luna. Si el radio de la Tierra es cuatro veces mayor que el de la Luna, ¿cuál es la aceleración debida a la gravedad en la Luna?

***10.43.** Dos masas, una de 60 kg y otra de 20 kg, están a una distancia de 10 m. ¿En qué punto de la recta que une a estas dos cargas se puede colocar otra masa de manera que la fuerza resultante sobre ella sea cero? Resp. a 6.34 m de la masa de 60 kg

Sección 10.10 Leyes de Kepler

10.44. ¿Qué rapidez debe tener un satélite para que describa una órbita circular de 800 km sobre la superficie de la Tierra?

10.45. La masa de Júpiter es de 1.90×10^{27} kg y su radio mide 7.15×10^{7} m. ¿Qué rapidez debe alcanzar una nave espacial para volar en círculos a una altura de 6.00×10^{7} m sobre la superficie de Júpiter? Resp. 31 000 m/s (69 800 mi/h, aproximadamente)

10.46. ¿Cuál es la rapidez orbital de un satélite cuya órbita se encuentra 1200 km sobre la superficie de la Tierra?

10.47. El radio de la Luna es de 1.74×10^{6} m y la aceleración debida a la gravedad es de 1.63 m/s^2. Aplique la ley de la gravitación universal para hallar la masa de la Luna. Resp. 7.40×10^{22} kg

10.48. Un satélite se halla a una distancia de 900 km sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el periodo del movimiento del satélite?

10.49. ¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra debe estar un satélite para que complete una vuelta alrededor de nuestro planeta en un lapso de 28 h? Resp. 4.04×10^{7} m

Problemas adicionales

10.50. ¿A qué frecuencia ha de girar una bola de 6 lb en un radio de 3 ft para producir una aceleración centrípeta de 12 ft/s^2? ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

10.51. ¿Qué aceleración centrípeta se necesita para mover una masa de 2.6 kg en un círculo horizontal de 300 mm de radio si su rapidez lineal es de 15 m/s? ¿Cuál es la fuerza centrípeta? Resp. 750 m/s^2, 1950 N

10.52. ¿Cuál debe ser la rapidez de un satélite colocado 1 000 mi sobre la superficie de la Tierra si se tiene que desplazar en una trayectoria circular?

10.53. Una pelota de 2 kg oscila describiendo un círculo vertical en el extremo de un cordón de 2 m de largo. ¿Cuál deberá ser la velocidad crítica en la parte más alta de la órbita para que ésta conserve su forma circular? Resp. 4.43 m/s

10.54. Una piedra de 4 kg oscila a la rapidez constante de 10 m/s en un círculo vertical en el extremo de un cordón de 1.4 m. ¿Cuáles son las tensiones en el cordón en la parte más alta y en la más baja de esa trayectoria circular?

10.55. ¿Qué frecuencia de revolución se necesita para que los contrapesos de la figura 10.16 se levanten hasta una distancia vertical de 25 mm por encima de su posición más baja? Suponga que $L = 150$ mm. Resp. 84.6 rev/min

10.56. La masa combinada de una motocicleta y su conductor es de 210 kg. Si el motociclista va a tomar un círculo vertical completo de 6 m de radio, ¿cuál tendrá que ser la rapidez crítica en el punto más alto?

10.57. Si la rapidez en la parte más alta del círculo descrito en el problema 10.56 es de 12 m/s, ¿cuál es la fuerza normal en el punto más alto del círculo? Resp. 2980 N

10.58. El límite de rapidez en cierta curva de 200 ft de radio es 45 mi/h. ¿Cuál es el ángulo de peralte óptimo para esa curva? ¿Las carreteras están construidas en realidad de acuerdo con sus ángulos óptimos?

10.59. En el péndulo cónico mostrado en la figura 10.17, suponga que $a = 2$ m y $L = 4$ m. ¿Qué rapidez lineal se requiere para que en su oscilación se desplace hasta un ángulo de 20°? Resp. 3.47 m/s

Preguntas para la reflexión crítica

10.60. Una moneda yace en una plataforma giratoria a una distancia de 12 cm del centro de rotación. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.6, ¿cuál es la máxima frecuencia de rotación para que la moneda no resbale? Supongamos que la frecuencia se reduce a la mitad. ¿A qué distancia del centro se puede colocar ahora la moneda? Resp. 1.11 rev/s, 48 cm

***10.61.** El aparato de laboratorio que se ilustra en la figura 10.19 permite que una masa giratoria estire un resorte, de modo que el cordón de soporte quede en posición vertical con una frecuencia de rotación específica. Supongamos que la masa del peso oscilante es 400 g y el radio de revolución es de 14 cm. Por medio de un cronómetro se ha observado que el tiempo que corresponde a 50 revoluciones es 35 s. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre el peso oscilante?

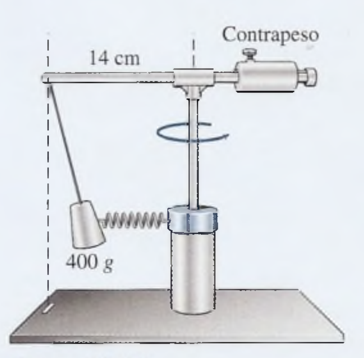


Figura 10.19

10.62. En el problema 10.61, suponga que se agrega una masa de 100 g a la masa de 400 g del peso oscilante. La fuerza necesaria para estirar el resorte sería la misma que antes, pero la masa de rotación se habrá incrementado. ¿Qué cambia cuando se realiza de nuevo el experimento, de modo que la fuerza centrípeta sea la misma que en el caso anterior? ¿Sobre qué actúa la fuerza centrípeta en este experimento?

***10.63.** Una plataforma de 10 in de diámetro gira a 78 rev/min. Un insecto yace sobre ella a 1 in del borde exterior. Si el insecto pesa 0.02 lb, ¿qué fuerza actúa sobre él? ¿De dónde proviene esa fuerza? ¿Hacia dónde deberá desplazarse el insecto para reducir dicha fuerza a la mitad?

10.64. El diámetro de Júpiter es 11 veces mayor que el de la Tierra y su masa es casi 320 veces mayor que la de nuestro planeta. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de Júpiter? Resp. 25.9 m/s^2

10.65. Suponga que $L = 50$ cm y $m = 2$ kg en la figura 10.16. ¿Cuántas revoluciones por segundo se necesitan para que se forme un ángulo $\theta = 30°$? ¿Cuál es la tensión en la varilla de soporte en ese punto? Resp. 0.757 rev/s, 22.6 N

***10.66.** Un bloque de 9 kg ha sido colocado en la plataforma de un camión que transita por una curva de 86 m de radio. Suponga que $\mu_k = 0.3$ y que $\mu_s = 0.4$. ¿La fuerza de fricción sobre el bloque actúa acercándose al centro de la curva o alejándose de él? ¿Cuál es la máxima rapidez a la que puede tomar la curva el camión sin que derrape? Si el camión toma la curva a una rapidez mucho mayor, ¿cuál será la fuerza resultante sobre el bloque?



Rotación de cuerpos rígidos

Las turbinas de viento como la que se muestran en esta figura, pueden generar una energía considerable que no perjudica el ambiente y es renovable. Estas fuentes de energía representan 20 por ciento de las necesidades energéticas de Dinamarca. Los conceptos de aceleración rotacional, velocidad angular, desplazamiento angular, inercia rotacional y otros temas estudiados en este capítulo son útiles para describir la operación de las turbinas de viento. (*Foto © vol. 29 PhotoDisc/ Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá el *desplazamiento angular, la velocidad angular* y la *aceleración angular,* y aplicará estos conceptos a la resolución de problemas físicos.
2. Ofrecerá analogías que relacionen los parámetros del movimiento rotacional (θ, ω, α) con los parámetros del movimiento rectilíneo, y resolverá problemas de aceleración angular de una manera parecida a lo que se aprendió en el capítulo 6, la resolución de problemas sobre aceleración tangencial (consulte la tabla 11.1).
3. Escribirá y aplicará las relaciones entre la rapidez o aceleración lineal y la rapidez o aceleración angulares.
4. Definirá el *momento de inercia* de un cuerpo y describirá en qué forma pueden utilizarse esta cantidad y la rapidez angular para calcular la *energía cinética rotacional.*
5. Aplicará los conceptos de la segunda *ley de Newton, trabajo rotacional, potencia rotacional* y *cantidad de movimiento angular* a la resolución de problemas físicos.

Se ha considerado únicamente el ***movimiento traslacional,*** en el que la posición de un objeto cambia a lo largo de una línea recta. Pero es posible que un objeto se mueva en una trayectoria curva o que tenga un movimiento rotacional. Por ejemplo, las ruedas, ejes, poleas, giróscopos y muchos otros dispositivos mecánicos, giran sobre su eje sin que haya movimiento traslacional. La generación y transmisión de potencia casi siempre depende de algún tipo de movimiento rotacional. Es esencial que usted sea capaz de predecir y controlar este tipo de movimiento. Los conceptos y fórmulas que se presentan en este capítulo serán útiles para que adquiera estas habilidades esenciales.

11.1 Desplazamiento angular

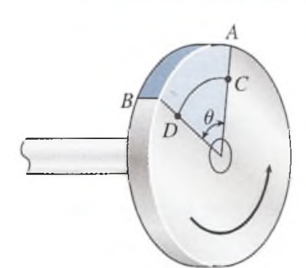


Figura 11.1 El desplazamiento angular θ se indica por la porción sombreada del disco. El desplazamiento angular es el mismo de C a D que de A a B para un cuerpo rígido.

El ***desplazamiento angular*** de un cuerpo describe la cantidad de rotación. Si el punto A en el disco giratorio de la figura 11.1 gira sobre su eje hasta el punto B, el desplazamiento angular se denota por el ángulo θ. Hay varias formas de medir este ángulo. Ya nos hemos familiarizado con las unidades de grados y revoluciones, las cuales están relacionadas de acuerdo con la definición

$$1 \text{ rev} = 360°$$

Ninguna de estas unidades es útil para describir la rotación de cuerpos rígidos. Una medida más fácil de aplicar el desplazamiento angular es el ***radián*** (rad). Un ángulo de 1 rad es un ángulo central cuyo arco s es igual en longitud al radio R (véase la figura 11.2). Es más común que el radián se defina por la siguiente ecuación:

$$\theta = \frac{s}{R} \tag{11.1}$$

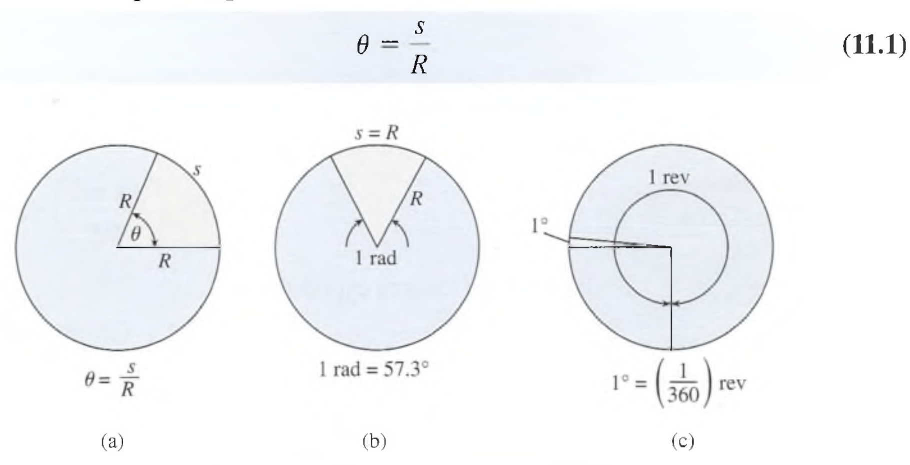


Figura 11.2 Medida del desplazamiento angular y una comparación de unidades.

donde s es la longitud de arco de un círculo descrito por el ángulo θ. Puesto que el cociente s entre R es la razón de dos distancias, el radián es una cantidad sin unidades.

El factor de conversión que permite relacionar radianes con grados se encuentra considerando un arco de longitud s igual al perímetro o circunferencia de un círculo $2\pi R$. Dicho ángulo en radianes se obtiene a partir de la ecuación (11.1)

$$\theta = \frac{2\pi \cancel{R}}{\cancel{R}} = 2\pi \text{ rad}$$

Así tenemos,

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad}$$

de donde se observa que

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

Ejemplo 11.1

Un extremo de una cuerda se ata a una cubeta de agua y el otro extremo se enrolla muchas veces alrededor de un carrete circular de 12 cm de radio. ¿Cuántas revoluciones del carrete se requiere para levantar la cubeta a una distancia vertical de 5 m?

Plan: La distancia vertical de elevación debe ser igual a la longitud de la cuerda envuelta alrededor del carrete de modo que la longitud de arco $s = 5$ m. Primero se calcula la rotación en *radianes* necesarios para una longitud de arco de 5 m. Recuerde establecer el modo de radianes en su calculadora (normalmente está en modo de grados). Más adelante una conversión de este ángulo a revoluciones dará la respuesta buscada.

Solución: A partir de la ecuación (11.1), obtenemos

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{5 \text{ m}}{0.12 \text{ m}} = 41.7 \text{ rad}$$

Recordemos que 1 rev $= 2\pi$ rad, se hace la conversión para hallar el ángulo en revoluciones.

$$\theta = 41.7 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 6.63 \text{ rev}$$

Por tanto, aproximadamente seis revoluciones dos tercios levantarán la cubeta 5 m.

Ejemplo 11.2

Un asiento en el perímetro de una rueda de la fortuna en la feria experimenta un desplazamiento angular de 37°. Si el radio de la rueda es 20 m, ¿qué longitud de arco describe el asiento?

Plan: Dado que el desplazamiento angular se definió en función de los radianes, los grados deben convertirse a radianes. La longitud de arco puede entonces determinarse al resolver la ecuación (11.1) para s.

$$\theta = (37°)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 0.646 \text{ rad}$$

La longitud de arco está dada por

$$s = R\theta = (20 \text{ m})(0.646 \text{ rad})$$
$$s = 12.9 \text{ m}$$

La unidad radián desaparece porque representa una relación de longitud a longitud (m/m = 1).

11.2 Velocidad angular

A la razón de cambio del desplazamiento angular con respecto al tiempo se le llama ***velocidad angular.*** Por lo tanto, si un objeto gira a través de un ángulo θ en un tiempo t, su velocidad angular media está dada por

$$\overline{\omega} = \frac{\theta}{t} \qquad \textit{Velocidad angular} \qquad \textbf{(11.2)}$$

El símbolo ω (letra griega omega) se usa para denotar la velocidad angular. Cuando una barra aparece sobre el símbolo, indica que la velocidad angular es un valor medio. Aun cuando la velocidad angular puede expresarse en *revoluciones por minuto (rpm) o revoluciones por segundo (rev/s)*, en la mayoría de los problemas físicos es necesario utilizar *radianes por segundo* para adaptarse a la opción básica del desplazamiento angular θ en radianes. Tenga en mente que la velocidad angular puede estar en el sentido de las manecillas del reloj o contrasentido; es decir, tiene dirección. Debemos elegir una dirección positiva para la rotación y sustituir los signos que concuerden con esa elección.

Puesto que la velocidad de rotación en gran número de problemas técnicos se expresa en términos revoluciones por minuto o revoluciones por segundo, es conveniente hallar una expresión para la conversión a radianes por segundo. Si la frecuencia de revoluciones en rev/s se denota por medio del símbolo f, la velocidad angular en rad/s está dada por

$$\omega = 2\pi f \qquad \textbf{(11.3)}$$

Si la frecuencia está en rpm en vez de rev/s, el factor de conversión es $(2\pi/60)$.

Ejemplo 11.3 La rueda de una bicicleta tiene de radio de 33 cm y gira 40 revoluciones en 1 min. ¿Qué distancia lineal recorrerá la bicicleta en 30 s?

Plan: Primero se convertirá la velocidad angular de la rueda a radianes por segundo. Luego podemos usar la definición de velocidad media para calcular la longitud de arco s descrita por un punto en el borde de la rueda. Esta distancia será la misma que la recorrida por la bicicleta a lo largo de una trayectoria horizontal.

Solución: Primero se convierte la frecuencia de rpm a rev/s.

$$f = \left(\frac{40 \text{ rev}}{1 \text{ min}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 0.667 \text{ rev/s}$$

Sustituyendo esta frecuencia en la ecuación (11.3) se obtiene la velocidad angular.

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(0.667 \text{ rev/s}) = 4.19 \text{ rad/s}$$

Ahora bien, se vuelve a escribir la ecuación (11.1) y la ecuación (11.2), con lo cual se obtiene

$$s = \theta R \qquad \text{y} \qquad \theta = \overline{\omega} t$$

Esto significa que la distancia s es

$$s = (\omega t)R = (4.19 \text{ rad/s})(30 \text{ s})(0.33 \text{ m})$$
$$s = 41.5 \text{ m}$$

Es importante observar que la velocidad angular descrita por la ecuación (11.2) representa un valor *medio* (o un valor constante). La misma distinción se debe hacer entre la velocidad angular *instantánea* y la *media* tal como se estudió en el capítulo 6 para las velocidades instantáneas y medias.

11.3 Aceleración angular

Al igual que el movimiento rectilíneo, el movimiento rotacional puede ser uniforme o acelerado. La velocidad de la rotación puede aumentar o disminuir bajo la influencia de un momento de torsión resultante. Por ejemplo, si la velocidad angular cambia de un valor inicial ω_o a un valor final ω_f en un tiempo t, la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

La letra griega α (*alfa*) denota la aceleración angular. Una forma más útil de esta ecuación es

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \tag{11.4}$$

Al comparar la ecuación (11.4) con la ecuación (6.4) para la aceleración lineal se verá que sus formas son idénticas si establecemos analogías entre los parámetros angulares y lineales.

Ahora que hemos introducido el concepto de velocidades angulares inicial y final, podemos expresar la velocidad angular media en términos de sus valores inicial y final:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_f + \omega_0}{2}$$

Al sustituir esta igualdad para $\overline{\omega}$ en la ecuación (11.2) se obtiene una expresión más útil para el desplazamiento angular:

$$\theta = \overline{\omega} t = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)t \tag{11.5}$$

Esta ecuación es similar a una ecuación deducida para el movimiento rectilíneo. En realidad, las ecuaciones para la aceleración angular tienen la misma forma básica que las que se obtuvieron en el capítulo 6 para la aceleración lineal si establecemos las siguientes analogías:

$$s \text{ (m)} \leftrightarrow \theta \text{ (rad)}$$
$$v \text{ (m/s)} \leftrightarrow \omega \text{ (rad/s)}$$
$$a \text{ (m/s}^2) \leftrightarrow \alpha \text{ (rad/s}^2)$$

El tiempo, desde luego, es el mismo para ambos tipos de movimiento y se mide en segundos. La tabla 11.1 ilustra las similitudes entre el movimiento rotacional y el rectilíneo.

Tabla 11.1

Comparación de las fórmulas de la aceleraciones lineal y la aceleración angular.

Aceleración lineal constante	Aceleración angular constante
(1) $s = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)t$
(2) $v_f = v_0 + at$	$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$
(3) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(4) $s = v_f t - \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_f t - \frac{1}{2}\alpha t^2$
(5) $2as = v_f^2 - v_0^2$	$2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$

Al aplicar estas fórmulas, debemos tener cuidado de elegir las unidades apropiadas para cada cantidad. También es importante seleccionar una dirección (en el sentido del avance de las manecillas del reloj o contrario a éste) como positiva y conservarla en forma consistente para asignar los signos apropiados a cada cantidad.

Ejemplo 11.4

Un volante aumenta su velocidad de rotación de 6 a 12 rev/s en 8 s. Determine la aceleración angular en radianes por segundo al cuadrado.

Plan: Cuando se aplican las ecuaciones para la aceleración angular uniforme, las únicas unidades angulares aceptables son los radianes. Primero debemos cambiar las unidades para las velocidades angulares final e inicial. Luego se organizan los datos dados, se elige una ecuación adecuada y se resuelve para la aceleración angular.

Solución: Las velocidades angulares son:

$$\omega_0 = 2\pi f = \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{6 \text{ rev}}{\text{s}}\right) = 37.7 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 2\pi f = \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{12 \text{ rev}}{\text{s}}\right) = 75.4 \text{ rad/s}$$

Ahora bien, podemos resolver para α usando la definición de aceleración angular.

Dados: $\omega_0 = 37.7$ rad/s; $\omega_f = 75.4$ rad/s; $t = 8$ s Encuentre: $\alpha = ?$

Seleccionemos la ecuación (2) de la tabla 11.1 como la ecuación que contiene α y no θ. Al resolver para α obtenemos

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{75.4 \text{ rad/s} - 37.7 \text{ rad/s}}{8 \text{ s}}$$

$$\alpha = 4.71 \text{ rad/s}^2$$

Ejemplo 11.5

Una rueda de esmeril que gira inicialmente a 6 rad/s recibe una aceleración constante de 2 rad/s² durante 3 s. Determine su desplazamiento angular y su velocidad angular final.

Plan: Organice los datos dados, seleccione la ecuación apropiada y resuelva para obtener los valores desconocidos.

Solución:

Dados: $\omega_0 = 6$ rad/s; $\alpha = 2$ rad/s²; $t = 3$ s Encuentre: $\theta = ?$

La ecuación (3) contiene α y no ω_f. El desplazamiento angular es

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = (6 \text{ rad/s})(3 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2 \text{ rad/s}^2)(3 \text{ s})^2 = 27.0 \text{ rad}$$

La velocidad angular final ω_f se obtiene a partir de la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \omega_f &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 6 \text{ rad/s} + (2 \text{ rad/s}^2)(3 \text{ s}) \\ &= 12.0 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

11.4 Relación entre los movimientos rotacional y rectilíneo

El ***eje de rotación*** de un cuerpo rígido que gira se puede definir como la línea de partículas que permanecen estacionarias durante la rotación. Se puede tratar de una línea a través del cuerpo, como en el caso de un trompo, o puede ser una línea a través del espacio, como un aro en rotación. En cualquier caso, nuestra experiencia nos dice que cuanto más lejos está la partícula del eje de rotación, mayor es su velocidad tangencial. Este hecho se expresó en el capítulo 10 mediante la fórmula

$$v = 2\pi f R$$

donde f es la frecuencia de rotación. Ahora deduzcamos una relación similar en términos de velocidad angular. La partícula de la figura 11.3 gira a través de un arco s que se describe como

$$s = \theta R$$

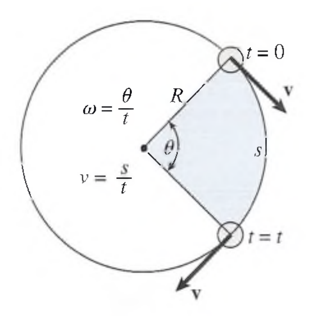


Figura 11.3 Relación entre velocidad angular y velocidad tangencial.

a partir de la ecuación (11.1). Si la distancia es recorrida en un tiempo t, la velocidad tangencial de la partícula está dada por

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\theta R}{t}$$

Puesto que $\theta/t = \omega$, la velocidad tangencial se puede expresar como una función de la velocidad angular.

$$v = \omega R \tag{11.6}$$

Este resultado también proviene de la ecuación (11.3), en la cual la velocidad angular se expresa como una función de la frecuencia de revolución.

Ejemplo 11.6

Un eje de tracción tiene una velocidad angular de 60 rad/s. ¿A qué distancia del eje deben colocarse unos contrapesos para que éstos tengan una velocidad tangencial de 12 m/s?

Solución: Al despejar R en la ecuación (11.6), obtenemos

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{12 \text{ m/s}}{60 \text{ rad/s}} = 0.200 \text{ m}$$

Consideremos de nuevo una partícula que se mueve en un círculo de radio R y supongamos que la velocidad tangencial cambia de cierto valor inicial v_0 al valor final v_f en un tiempo t. La *aceleración tangencial* a_T de dicha partícula está dada por

$$a_T = \frac{v_f - v_0}{t}$$

Debido a la estrecha relación entre la velocidad tangencial y la angular, como quedó representado en la ecuación (11.6), podemos expresar también la aceleración tangencial en función de un cambio en la velocidad angular.

$$a_T = \frac{\omega_f R - \omega_0 R}{t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} R$$

o bien

$$a_T = \alpha R \tag{11.7}$$

donde α representa la ***aceleración angular***.

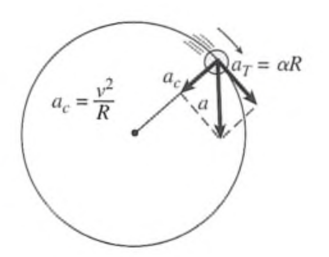


Figura 11.4 Relación entre las aceleraciones tangencial y centrípeta.

Debemos ser cuidadosos en distinguir entre la aceleración tangencial, como quedó definida en la ecuación (11.7), y la aceleración centrípeta definida por

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{11.8}$$

La ***aceleración tangencial*** representa un cambio en la velocidad tangencial, mientras que la aceleración centrípeta representa tan sólo un cambio en la dirección del movimiento. La distinción se muestra gráficamente en la figura 11.4. La aceleración resultante puede determinarse calculando el vector suma de las aceleraciones tangencial y centrípeta.

Ejemplo 11.7

Calcule la aceleración resultante de una partícula que se mueve en un círculo de radio 0.5 m en el instante en que su velocidad angular es 3 rad/s y su aceleración angular es 4 rad/s^2.

Plan: Trazaremos un esquema similar a aquel de la figura 11.4, luego determinaremos la velocidad tangencial v como el producto ωR. La aceleración centrípeta a_c entonces se determinará a partir de la ecuación (11.8). La aceleración tangencial a_T está dada por la ecuación (11.7). La resultante de estos vectores perpendiculares darán la aceleración angular neta.

Solución: Dado que $R = 0.5$ m y $\omega = 3$ rad/s, obtenemos

$$v = \omega R = (3 \text{ rad/s})(0.5 \text{ m}) = 1.50 \text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta a partir de la ecuación (11.8), es, por tanto,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(1.50 \text{ m/s})^2}{(0.5 \text{ m})} = 4.50 \text{ m/s}^2$$

Ahora bien, de la ecuación (11.7), la aceleración tangencial es

$$a_T = \alpha R = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ m}); \qquad a_T = 2.00 \text{ m/s}^2$$

Por último, la magnitud de la aceleración resultante se obtiene del teorema de Pitágoras.

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = \sqrt{(2.00 \text{ m/s}^2)^2 + (4.50 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$a = 4.92 \text{ m/s}^2$$

La dirección de la aceleración, si lo desea puede obtenerse a partir de sus componentes en la forma usual.

11.5 Energía cinética rotacional: momento de inercia

Hemos visto que una partícula que se mueve en un círculo de radio R tiene una rapidez lineal dada por

$$v = \omega R$$

Si la partícula tiene una masa m, tendrá una energía cinética que se obtiene por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2$$

Un cuerpo rígido como el de la figura 11.5 se puede considerar formado por muchas partículas de diferentes masas localizadas a diversas distancias del eje de rotación O. La energía

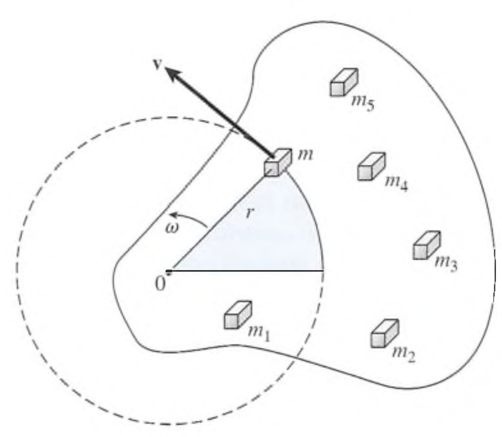


Figura 11.5 Rotación de un cuerpo extenso. El cuerpo puede considerarse como un conjunto de masas individuales que giran con la misma velocidad angular.

cinética total de un cuerpo será entonces la suma de las energías cinéticas de cada partícula que forma el cuerpo. Así,

$$K = \sum \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

Puesto que la constante $\frac{1}{2}$ y la velocidad angular ω son las mismas para todas las partículas, se puede reorganizar la ecuación anterior y obtener

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum mr^2\right)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, $\Sigma\, mr^2$, tiene el mismo valor para un cuerpo dado independientemente de su estado de movimiento. Se define esta cantidad como el ***momento de inercia*** y se representa por I:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

o bien

$$I = \sum mr^2 \tag{11.9}$$

La unidad del SI para I es el *kilogramo-metro al cuadrado* y la unidad del SUEU es el *slug-ft cuadrado*.

Utilizando esta definición, podemos expresar la ***energía cinética rotacional*** de un cuerpo en términos de su momento de inercia y de su velocidad angular:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{11.10}$$

Note la similitud entre los términos m para el movimiento rectilíneo e I para el movimiento rotacional.

Ejemplo 11.8

Calcule el momento de inercia para el sistema ilustrado en la figura 11.6. El peso de las barras que unen las masas es insignificante y el sistema gira con una velocidad angular de 6 rad/s. ¿Cuál es la energía cinética rotacional? (Considere que las masas están concentradas en un punto.)

Plan: El momento de inercia del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de cada masa respecto del centro de rotación. La energía cinética rotacional está dada por la ecuación (11.10) usando el valor calculado para I.

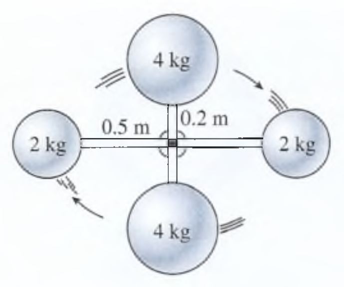


Figura 11.6 Cálculo del momento de inercia.

Solución: Partiendo de la ecuación (11.9), se obtiene

$$I = \sum mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2$$
$$I = (2\text{ kg})(0.5\text{ m})^2 + (4\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 + (2\text{ kg})(0.5\text{ m})^2 + (4\text{ kg})(0.2\text{ m})^2$$
$$I = 1.32\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Usando este resultado y el hecho de que $\omega = 6$ rad/s, la energía cinética rotacional está dada por

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(1.32\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(6\text{ rad/s})^2 \quad \text{o} \quad K = 23.8\text{ J}$$

Para cuerpos que no están compuestos por masas separadas, sino que son en realidad distribuciones continuas de materia, los cálculos del momento de inercia son más difíciles y generalmente requieren conocimientos de cálculo integral. En la figura 11.7 se muestran algunos casos sencillos, junto con las fórmulas para calcular sus momentos de inercia.

A veces es conveniente expresar la inercia rotacional de un cuerpo en términos de su ***radio de giro k***. Esta cantidad se define como la distancia radial del centro de rotación a la circunferencia en la cual se puede considerar concentrada la masa total del cuerpo sin cambiar su momento de inercia. De acuerdo con esta definición, el momento de inercia se calcula a partir de la fórmula,

$$I = mk^2 \tag{11.11}$$

donde m representa la masa total del cuerpo que gira y k es su radio de giro.

11.6 La segunda ley del movimiento en la rotación

Suponga que analizamos el movimiento de rotación de un cuerpo rígido en la figura 11.8. Considere a una fuerza **F** que actúa sobre la pequeña masa m, indicada por la porción sombreada del objeto, a una distancia r del eje de rotación.

La fuerza **F** aplicada en forma perpendicular a r hace que el cuerpo gire con una aceleración tangencial:

$$a_T = \alpha r$$

donde α es la aceleración angular. Partiendo de la segunda ley de Newton del movimiento,

$$F = ma_T = m\alpha r$$

Al multiplicar ambos lados de esta relación por r queda

$$Fr = (mr^2)\alpha$$

La cantidad Fr se reconoce como el momento de torsión producido por la fuerza **F** con respecto al eje de rotación. Por lo tanto, para la masa m escribimos

$$\tau = (mr^2)\alpha$$

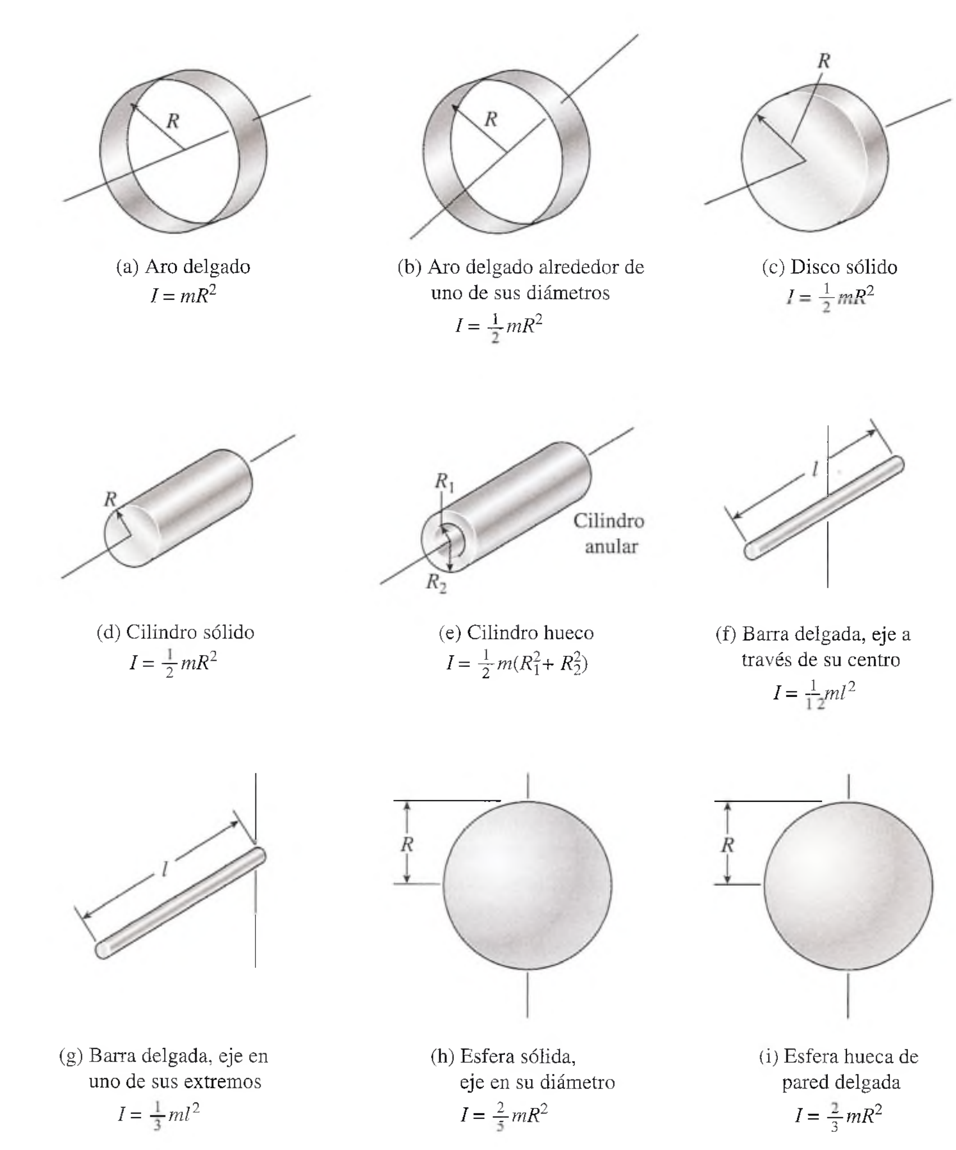


Figura 11.7 Momentos de inercia de algunos cuerpos con respecto a sus ejes indicados.

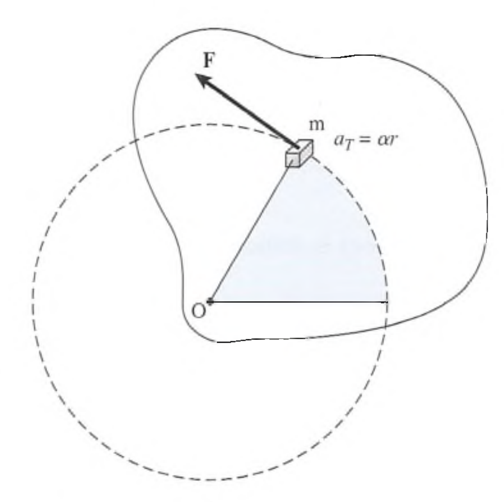


Figura 11.8 La segunda ley de Newton para el movimiento de rotación establece la relación entre el momento de torsión Fr y la aceleración angular α.

Se puede deducir una ecuación similar para todas las demás porciones del objeto que gira. Sin embargo, la aceleración angular será constante para cada porción independientemente de su masa o de su distancia al eje. Por consiguiente, el momento de torsión resultante en todo el cuerpo es

$$\tau = \left(\sum mr^2\right)\alpha$$

o bien,

$$\tau = I\alpha \qquad \textbf{(11.12)}$$

Momento de torsión = momento de inercia × aceleración angular

Observe la similitud de la ecuación (11.12) con la segunda ley del movimiento rectilíneo, $F = ma$. La *ley del movimiento rotacional de Newton* se enuncia como sigue:

> Un momento de torsión resultante aplicado a un cuerpo rígido siempre genera una aceleración angular que es directamente proporcional al momento de torsión aplicado e inversamente proporcional al momento de inercia del cuerpo.

Al aplicar la ecuación (11.12), es importante recordar que el momento de torsión producido por una fuerza es igual al producto de su distancia al eje por la componente perpendicular de la fuerza. También debe recordarse que la aceleración angular se expresa en radianes por segundo por segundo.

Ejemplo 11.9

Un disco de esmeril de radio 0.6 m y 90 kg de masa gira a 460 rpm. ¿Qué fuerza de fricción, aplicada en forma tangencial al borde, hará que el disco se detenga en 20 s?

Plan: La inercia rotacional I puede determinarse a partir de la fórmula para un disco dada en la figura 11.7. Por tanto, la aceleración angular α puede calcularse del cambio en la velocidad angular por unidad de tiempo. Para hallar la fuerza F en el borde, recordaremos que el momento de torsión (FR) debe ser igual al producto $I\alpha$, de acuerdo con la segunda ley de Newton.

Solución: La inercia rotacional de un disco es

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(90\text{ kg})(0.60\text{ m})^2 = 16.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Al convertir 460 rpm a unidades de rad/s, la velocidad angular inicial se escribe como

$$\omega_0 = \left(460\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right); \qquad \omega_0 = 48.2\text{ rad/s}$$

Observe que $\omega_f = 0$ y $t = 20$ s, es posible hallar la aceleración angular α.

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{0 - (48.2\text{ rad/s})}{20\text{ s}}$$
$$= -2.41\text{ rad/s}^2$$

A partir de la segunda ley de Newton, recordemos que el momento de torsión resultante ($\tau = FR$), debe ser igual al producto de la inercia rotacional y la aceleración angular ($\tau = I\alpha$). Por tanto,

$$FR = I\alpha \qquad \text{o} \qquad F = \frac{I\alpha}{R}$$

$$F = \frac{(16.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(-2.41\text{ rad/s}^2)}{0.60\text{ m}} = -65.0\text{ N}$$

El signo negativo aparece debido a que la fuerza debe tener una dirección opuesta a la dirección de rotación del disco.

11.7 Trabajo y potencia rotacionales

En el capítulo 8 se definió el trabajo como el producto de un desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Ahora consideremos el trabajo realizado en el desplazamiento rotacional bajo la influencia de un momento de torsión resultante.

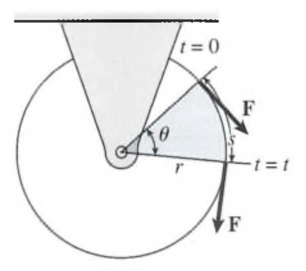


Figura 11.9 Trabajo y potencia en el movimiento de rotación.

Considere la fuerza **F** que actúa al borde de una polea de radio r, como muestra la figura 11.9. El efecto de dicha fuerza es hacer girar la polea a través de un ángulo θ mientras el punto en el que se aplica la fuerza se mueve una distancia s. La longitud de arco s se relaciona con θ mediante

$$s = r\theta$$

Así, el trabajo de la fuerza **F** es por definición

$$\text{Trabajo} = Fs = Fr\theta$$

pero Fr es el momento de torsión debido a la fuerza, por lo que obtenemos

$$\text{Trabajo} = \tau\theta \qquad \textbf{(11.13)}$$

El ángulo θ debe expresarse en radianes en cualquier sistema de unidades de modo que el trabajo pueda expresarse en libras-pie o joules.

La energía mecánica generalmente se transmite en la forma de ***trabajo rotacional***. Cuando hablamos de la potencia de salida que desarrollan las máquinas, lo que nos interesa es la razón de cambio con que se realiza el trabajo rotacional. Por tanto, la potencia rotacional puede determinarse dividiendo ambos lados de la ecuación (11.13) entre el tiempo t requerido para que el momento de torsión τ lleve a cabo un desplazamiento θ:

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{\tau\theta}{t} \qquad \textbf{(11.14)}$$

Puesto que θ/t representa la velocidad angular media $\bar{\omega}$, escribimos

$$\text{Potencia} = \tau\bar{\omega} \qquad \textbf{(11.15)}$$

Observe la similitud entre esta relación y su análoga, $P = Fv$, obtenida anteriormente para el movimiento rectilíneo. Ambas medidas son una potencia *media*.

Ejemplo 11.10

Una rueda de 60 cm de radio tiene un momento de inercia de 5 kg · m². Se aplica una fuerza constante de 60 N tangente al borde de la misma. Suponiendo que parte del reposo, ¿qué trabajo se realiza en 4 s y qué potencia se desarrolla?

Plan: El trabajo es el producto del momento de torsión por el desplazamiento angular. Primero se calcula el momento de torsión al multiplicar la fuerza del borde por el radio de la rueda. Luego hallamos la aceleración angular a partir de la segunda ley de Newton. Una vez que sabemos la aceleración podemos determinar el desplazamiento lineal, así como el trabajo y la potencia gastados.

Solución: La información dada se organiza como sigue:

Dados: $R = 0.60$ m, $F = 60$ N, $I = 5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $t = 4$ s Encuentre: *trabajo* y *potencia*

El momento de torsión aplicado al borde de la rueda es

$$\tau = FR = (60\ \text{N})(0.60\ \text{m}) = 36.0\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Enseguida, determinamos α a partir de la segunda ley de Newton ($\tau = I\alpha$).

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{36\ \text{N}\cdot\text{m}}{5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}; \qquad \alpha = 7.20\ \text{rad/s}^2$$

El desplazamiento angular θ es

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(7.20 \text{ rad/s}^2)(4 \text{ s})^2 = 57.6 \text{ rad}$$

El trabajo es, por tanto,

$$\text{Trabajo} = \tau\theta = (36 \text{ N} \cdot \text{m})(57.6 \text{ rad}) = 2\,070 \text{ J}$$

Por último, la potencia media es el trabajo por unidad de tiempo, o

$$P = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{2\,070 \text{ J}}{4 \text{ s}}; \qquad P = 518 \text{ W}$$

El mismo resultado podría encontrarse si se calcula la velocidad angular media ω y se usa la ecuación (11.15). Como ejemplo adicional, podríamos decir que el trabajo realizado es igual al cambio en la energía rotacional.

11.8 Rotación y traslación combinadas

Para comprender la relación entre el movimiento rectilíneo y angular de un objeto que rota, primero considere que un disco circular de radio R se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin rotación ni fricción. Como se muestra en la figura 11.10a, cualquier pieza de este disco viajará a una velocidad igual a la del centro de la masa.

Ahora bien, suponga que el mismo disco rota libremente sin deslizarse por la misma superficie, como en la figura 11.10b. Se requiere más energía para mantener la misma rapidez horizontal, ya que ahora además de rotación hay traslación. Como no hay deslizamiento, el centro de la masa del disco está rotando en relación al punto de contacto P con la misma velocidad angular que la del disco que está rotando. Así, podemos escribir una relación familiar entre la velocidad tangencial v del centro de la masa del disco y su rapidez rotacional ω.

$$v = \omega R \qquad \text{o} \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

Para saber si ha comprendido esta ecuación considere una rueda de bicicleta de 50 cm de radio que rota a 20 rad/s. Verifique que la rapidez horizontal de la bicicleta sea 10 m/s.

Al trabajar con problemas que involucran tanto la rotación como la traslación, debemos recordar sumar la energía cinética rotacional K_R a la energía cinética trasnacional K_T. Por ejemplo, al aplicar el principio de conservación de la energía total, sabemos que el total de todos los tipos de energía antes de un suceso debe ser igual al total después del suceso más cualquier pérdida debida a la fricción o a otras fuerzas disipativas.

$$(U_0 + K_{T0} + K_{R0}) = (U_f + K_{Tf} + K_{Rf}) + |\text{Pérdidas}| \qquad \textbf{(11.16)}$$

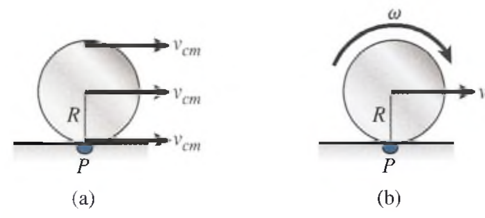


Figura 11.10 (a) Todas las partes de un disco en traslación pura se mueven con la velocidad v_{cm} del centro de masa. (b) Un objeto rodando es una combinación de traslación y rotación de tal forma que la velocidad lineal horizontal está dada por $v = \omega R$.

Los subíndices 0 y f se refieren a los valores inicial y final de la energía potencial U, la energía cinética rotacional K_R y la energía cinética trasnacional K_T. El término "pérdidas" puede establecerse como 0 si suponemos que el movimiento es sin fricción.

Ejemplo 11.11

Un aro y un disco circular tienen cada uno una masa de 2 kg y un radio 10 cm. Se dejan caer rodando desde el reposo a una altura de 20 m a la parte inferior de un plano inclinado, como se muestra en la figura 11.11. Compare sus rapideces finales.

Plan: Como estamos interesados en hallar la rapidez v en la parte inferior del plano inclinado, los parámetros rotacionales se convertirán en sus parámetros lineales correspondientes. Por ejemplo, la inercia rotacional I de un aro es mR^2 y la inercia rotacional I de un disco es $\frac{1}{2}mR^2$. Además, la velocidad rotacional ω es la razón v/R. La conservación de energía exige que la suma de energía potencial, cinética y rotacional en la parte superior del plano inclinado debe ser igual a la suma de estas energías en la parte inferior. De esta manera, podemos aplicar primero la ecuación (11.16) para el aro y luego para el disco, suponiendo pérdidas de fricción insignificantes para cada caso.

Solución: En cada caso, $U = mgh$; $K_R = \frac{1}{2}mv^2$, y $K_T = \frac{1}{2}I\omega^2$. La conservación de la energía sin pérdidas de la fricción da

$$(U_0 + K_{T0} + K_{R0}) = (U_f + K_{Tf} + K_{Rf})$$

$$mgh_0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para el aro: $I = mR^2$, así que al sustituir se obtiene

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(mR^2)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Al simplificar y resolver para v, obtenemos

$$v = \sqrt{gh_0} = \sqrt{(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})} \qquad \text{o} \qquad v = 14.0\text{ m/s}$$

Para el disco: $I = \frac{1}{2}mR^2$, y

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

Esto puede resolverse para obtener

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh_0} = \sqrt{\frac{4}{3}(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})} \qquad \text{o} \qquad v = 16.2\text{ m/s}$$

Observe que aun cuando las masas y los radios son los mismos, el disco tiene una inercia rotacional inferior que da como resultado una rapidez final mayor. Llegará primero a la parte inferior que el anillo.

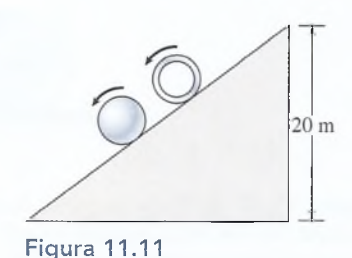


Figura 11.11

11.9 Cantidad de movimiento angular

FÍSICA HOY

¿Por qué un frisbee que se lanza y gira, vuela, mientras que uno que no gira se cae? La respuesta es la cantidad de movimiento angular. El frisbee que gira tiene una gran cantidad de movimiento angular, con su material más grueso en los bordes. La cantidad de movimiento angular ayuda al disco que gira a vencer los momentos de torsión provocados por las fuerzas dinámicas.

Considere una partícula de masa m que se mueve en un círculo de radio r, como muestra la figura 11.12a. Si su velocidad tangencial es v, tendrá una cantidad de movimiento rectilíneo $p = mv$. Con respecto al eje de rotación fijado, definimos la cantidad de ***movimiento angular*** $\boldsymbol{L}$ de la partícula como el producto de su cantidad de movimiento rectilíneo por la distancia perpendicular que va del eje a la partícula que gira.

$$L = mvr \qquad \textbf{(11.17)}$$

Ahora consideremos la definición de la cantidad de movimiento angular cuando ésta se aplica a un cuerpo rígido extenso. La figura 11.12b describe este tipo de cuerpo, el cual gira alrededor de su eje O. Cada partícula del cuerpo tiene una cantidad de movimiento angular dado por la ecuación (11.17). Sustituyendo $v = \omega r$, cada partícula tiene una cantidad de movimiento angular dada por

$$mvr = m(\omega r)r = (mr^2)\omega$$

Puesto que el cuerpo es rígido, todas las partículas que lo forman tienen la misma velocidad angular, y la cantidad de movimiento angular del cuerpo es

$$L = \left(\sum mr^2\right)\omega$$

Por tanto, la cantidad de movimiento angular total es igual al producto de la velocidad angular del cuerpo por su momento de inercia:



$$L = I\omega \qquad \textbf{(11.18)}$$

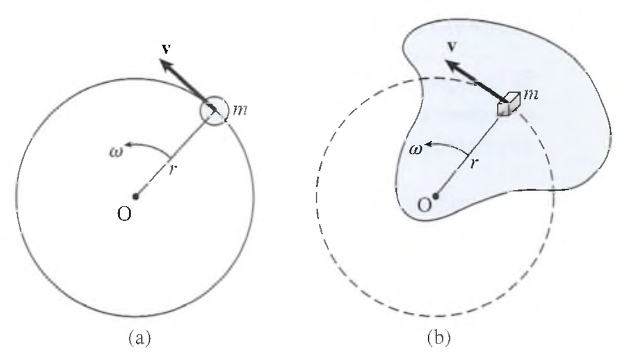


Figura 11.12 Definición de la cantidad de movimiento angular.

Ejemplo 11.12 Una varilla uniforme delgada mide 1 m de longitud y tiene una masa de 6 kg. Si la varilla se hace girar en su centro y se queda en rotación con una velocidad angular de 16 rad/s, calcule su cantidad de movimiento angular.

Solución: El momento de inercia de una varilla delgada es, a partir de la figura 11.7,

$$I = \frac{ml^2}{12} = \frac{(6\text{ kg})(1\text{ m})^2}{12} = 0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Entonces, su cantidad de movimiento angular es

$$\begin{aligned} L = I\omega &= (0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(16\text{ rad/s}) \\ &= 8\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Observe que la unidad del SI de la cantidad de movimiento angular es kg · m²/s. La unidad del SUEU es slug · ft²/s.

11.10 Conservación de la cantidad de movimiento angular

Podemos entender mejor la definición de movimiento si regresamos a la ecuación básica para el movimiento angular, $\tau = I\alpha$. Recuerde la ecuación que define la aceleración angular

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$\tau = I\left(\frac{\omega_f - \omega_0}{t}\right)$$

Al multiplicar por t, obtenemos

$$\tau t = I\omega_f - I\omega_0 \qquad \textbf{(11.19)}$$

Impulso angular = cambio en la cantidad de movimiento angular

El producto τt se define como *impulso angular*. Observe la semejanza entre esta ecuación y la que se obtuvo en el capítulo 9 para el impulso lineal.

Si no se aplica ningún momento de torsión externo a un cuerpo que gira, podemos establecer $\tau = 0$ en la ecuación (11.19), y obtener

$$0 = I\omega_f - I\omega_0$$

$$I\omega_f = I\omega_0 \qquad \textbf{(11.20)}$$

Cantidad de movimiento angular final = cantidad de movimiento angular inicial

De esta manera, llegamos a un enunciado para expresar la ***conservación de la cantidad de movimiento angular:***

> Si la suma de los momentos de torsión externos que actúan sobre un cuerpo o sistema de cuerpos es cero, la cantidad de movimiento angular permanece sin cambios.

Este enunciado resulta verdadero aun en el caso de que el cuerpo que gira no sea rígido, sino que pueda cambiar su forma de tal modo que su momento de inercia cambie. En este caso, la rapidez angular también cambia de tal modo que el producto $I\omega$ siempre es constante. Los patinadores, clavadistas y acróbatas controlan la rapidez con que giran sus cuerpos extendiendo o encogiendo sus extremidades para aumentar o disminuir su rapidez angular.

Un experimento interesante que ilustra la conservación de la cantidad de movimiento angular se muestra en la figura 11.13. Una mujer está parada sobre una plataforma giratoria y

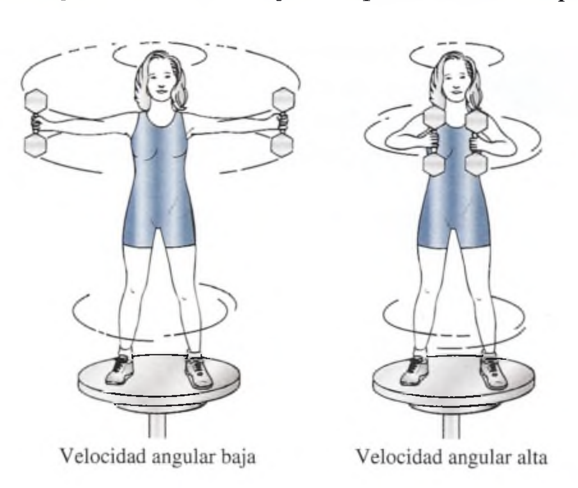


Figura 11.13 Experimento para demostrar la conservación de la cantidad de movimiento angular. La mujer controla su velocidad de rotación moviendo las pesas hacia adentro para aumentar su rapidez rotacional o hacia afuera para disminuirla.

sostiene unas pesas grandes en cada mano. Al principio, empieza a girar con los brazos completamente extendidos. Al acercar las manos a su cuerpo, disminuye su momento de inercia. Dado que la cantidad de su movimiento angular no puede cambiar notará un aumento considerable en su rapidez angular. Al extender sus brazos podrá disminuir su rapidez angular.

Ejemplo 11.13 Suponga que la mujer que sostiene las pesas con los brazos extendidos en la figura 11.13 tiene una inercia rotacional de 6 $kg \cdot m^2$ cuando y que la inercia rotacional disminuye a 2 $kg \cdot m^2$ cuando coloca las pesas junto a su cuerpo. Con las pesas en su posición extendida rota a 1.4 rev/s. ¿Cuál será su velocidad de rotación cuando acerca las pesas al cuerpo?

Plan: Si no existe momento de torsión externo, el equilibrio rotacional del sistema no cambia. Esto significa que la cantidad de movimiento angular con las pesas extendidas debe ser el mismo que cuando las pesas están cerca de ella. El cambio en la rapidez angular debe compensar la reducción en la inercia rotacional. Además, si estamos contentos con la velocidad final en rev/s no habrá necesidad de cambiar a rad/s.

Solución: La conservación de la cantidad de movimiento angular exige que

$$I_f\omega_f = I_0\omega_0 \qquad \text{o} \qquad \omega_f = \frac{I_0\omega_0}{I_f}$$

$$\omega_f = \frac{(6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(1.4\ \text{rev/s})}{(2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)} = 4.20\ \text{rev/s}$$

Básicamente observamos que el hecho de disminuir la inercia rotacional a un tercio provoca que la rapidez angular se triplique con el fin de conservar la cantidad de movimiento angular.

Estrategia para resolver problemas

Rotación de cuerpos rígidos

1. Es útil saber que los problemas relacionados con la rotación de un cuerpo rígido son similares a los que usted ya ha resuelto para la aceleración lineal constante. Revise las analogías incluidas en el resumen que se presenta al final de este capítulo.
2. Cuando efectúe conversiones de movimiento rectilíneo a angular o viceversa, recuerde las relaciones siguientes:

$$s = \theta R \qquad v = \omega R \qquad a = \alpha R$$

Cuando aplique estas relaciones, las medidas angulares deben estar en radianes (rad).

3. Los problemas de aceleración angular uniforme se enfocan en la misma forma que se hizo para la aceleración lineal en el capítulo 6. (Consulte la tabla 11.1.) Basta con que localice tres de las cantidades dadas y seleccione la ecuación apropiada que contenga un solo factor desconocido. Tenga cuidado de usar en forma congruente las unidades para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.
4. Las aplicaciones sobre la segunda ley de Newton, el trabajo, la energía, la potencia y la cantidad de movimiento también se abordan de la misma manera como se hizo en capítulos anteriores. Tan sólo recuerde que, para la rotación, utilizamos la inercia rotacional en lugar de la masa lineal y que empleamos medidas angulares para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo ampliamos el concepto de movimiento circular para incluir la rotación de un cuerpo rígido formado por muchas partículas. Descubrimos que muchos problemas se pueden resolver por los métodos expuestos anteriormente para el movimiento rectilíneo. Los conceptos esenciales se resumen a continuación.

- Semejanzas entre el movimiento rotacional y el movimiento rectilíneo:

Rotacional	θ	ω	α	I	$I\omega$	τ	$I\alpha$	$\tau\theta$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	$\tau\omega$
Rectilíneo	s	v	a	m	mv	F	ma	Fs	$\frac{1}{2}mv^2$	Fv

- El ángulo en radianes es la razón entre la longitud de arco s y el radio R del arco. Simbólicamente podemos escribir:

$$\theta = \frac{s}{R} \qquad s = \theta R$$

El radián no tiene unidades y es la razón entre dos longitudes.

- La velocidad angular, que es la relación de desplazamiento angular, se puede calcular a partir de θ o de la frecuencia de rotación:

$$\overline{\omega} = \frac{\theta}{t} \qquad \overline{\omega} = 2\pi f \qquad \textit{Velocidad angular media}$$

- La aceleración angular es la tasa de cambio de la rapidez angular en el tiempo:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \qquad \textit{Aceleración angular}$$

- Al comparar θ con s, ω con v y α con a, podemos usar las siguientes ecuaciones en problemas de aceleración angular:

$$\theta = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)t$$

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$$

Cuando se conocen tres cualesquiera de los cinco parámetros θ, α, t, ω_f y ω_0, los otros dos se pueden hallar a partir de una de estas ecuaciones. Elija la dirección de rotación que va a considerar positiva en todos sus cálculos.

- Las siguientes ecuaciones son útiles cuando se compara el movimiento rectilíneo con el movimiento rotacional:

$$v = \omega R \qquad a_T = \alpha R$$

- Otras relaciones útiles:

$$I = \sum mR^2 \qquad \textit{Momento de inercia}$$

$$I = mk^2 \qquad \textit{Radio de giro}$$

$$\text{Trabajo} = \tau\theta \qquad \textit{Trabajo}$$

$$L = I\omega \qquad \textit{Cantidad de movimiento angular}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \textit{Energía cinética rotacional}$$

$$\tau = I\alpha \qquad \textit{Ley de Newton}$$

$$P = \tau\omega \qquad \textit{Potencia}$$

$$I_f\omega_f = I_0\omega_0 \qquad \textit{Conservación de la cantidad de movimiento}$$

Conceptos clave

aceleración angular 226
aceleración tangencial 227
cantidad de movimiento angular L 235
conservación de la cantidad de movimiento angular 236
desplazamiento angular 221
eje de rotación 226
energía cinética rotacional 228
momento de inercia 228
movimiento traslacional 221
radián 221
radio de giro k 229
trabajo rotacional 232
velocidad angular 223

Preguntas de repaso

11.1. Elabore una lista de las unidades del SI y el SUEU correspondientes a: velocidad angular, aceleración angular, momento de inercia, momento de torsión y energía cinética rotacional.

11.2. Señale las analogías angulares para las siguientes ecuaciones para el movimiento de traslación:

a. $v_f = v_0 + at$

b. $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

c. $F = ma$

d. $K = \frac{1}{2}mv^2$

e. Trabajo $= Fs$

f. Potencia $=$ trabajo$/t = Fv$

11.3. Una esfera, un cilindro, un disco y un aro hueco tienen todos la misma masa y giran con velocidad angular constante en torno del mismo eje. Compare sus respectivas energías cinéticas rotacionales, suponga que sus diámetros exteriores son iguales.

11.4. Explique cómo controla sus movimientos una clavadista para determinar si va a tocar primero el agua con los pies o con la cabeza.

11.5. Si sujetamos a un gato con las patas hacia arriba y lo soltamos hacia el suelo, siempre dará la vuelta y caerá sobre sus patas; ¿cómo lo logra?

11.6. Cuando se suministra energía a un cuerpo y se producen resultados en términos de traslación y rotación, su energía cinética total está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Lo que determina la forma en que se divide la energía entre efectos rotacionales y traslacionales es la distribución de la masa (el momento de inercia). A partir de estas declaraciones, ¿cuál de los siguientes objetos llegará primero rodando hasta la parte inferior de un plano inclinado?

a. Un disco sólido de masa M

b. Un aro circular de masa M

11.7. Use como referencia la pregunta 11.6. Si una esfera sólida, un disco sólido, un cilindro sólido y un cilindro hueco, todos con el mismo radio, se sueltan al mismo tiempo desde la parte superior de un plano inclinado, ¿en qué orden llegarán al punto más bajo del plano?

11.8. Un disco cuyo momento de inercia es I_1 y cuya velocidad angular es ω_1 se combina con un disco cuyo momento de inercia es I_2 y cuya velocidad angular es ω_2. Escriba la ecuación de la conservación simbolizando con ω su velocidad angular combinada.

11.9. Tome como referencia la pregunta 11.8. Suponga que $\omega_1 = \omega_2$ y $I_1 = 2I_2$. ¿Cómo son sus velocidades combinadas en comparación con su velocidad inicial? Suponga que $\omega_1 = 3\omega_2$ e $I_1 = I_2$.

Problemas

Sección 11.3 Aceleración angular y Sección 11.4 Relación entre movimiento rotacional y lineal

11.1. Un cable está enrollado en torno de un carrete de 80 cm de diámetro. ¿Cuántas revoluciones de este carrete se requieren para que un objeto atado al cable recorra una distancia rectilínea de 2 m? ¿Cuál es el desplazamiento angular? Resp. 0.796 rev, 5 rad

11.2. La rueda de una bicicleta tiene 26 in de diámetro. Si esa rueda describe 60 revoluciones, ¿qué distancia rectilínea recorrerá?

11.3. Un punto localizado en el borde de una gran rueda cuyo radio es 3 m se mueve en un ángulo de 37°. Halle la longitud del arco descrito por ese punto.

Resp. 1.94 m

11.4. Una persona sentada en el borde de una plataforma de 6 ft de diámetro recorre una distancia de 2 ft. Exprese el desplazamiento angular de esa persona en radianes, grados y revoluciones.

11.5. Un motor eléctrico gira a 600 rpm. ¿Cuál es su velocidad angular? ¿Cuál es el desplazamiento angular después de 6 s?

Resp. 62.8 rad/s, 377 rad

11.6. Una polea giratoria completa 12 revoluciones en 4 s. Calcule la velocidad angular media en revoluciones por segundo, revoluciones por minuto y radianes por segundo.

11.7. Un cubo cuelga de una cuerda enrollada con varias vueltas en un carrete circular cuyo radio es de 60 cm. El cubo parte del reposo y asciende hasta una altura de 20 m en 5 s. (a) ¿Cuántas revoluciones giró el carrete? (b) ¿Cuál fue la rapidez angular media del carrete al girar?

Resp. (a) 5.31 rev; (b) 6.67 rad/s

11.8. Una rueda de 15.0 cm de radio parte del reposo y completa 2.00 revoluciones en 3.00 s. (a) ¿Cuál es la velocidad angular *media* en radianes por segundo? (b) ¿Cuál es la velocidad *tangencial* final de un punto situado en el borde de la rueda?

11.9. Un trozo cilíndrico de material de 6 in de diámetro gira en un torno a 800 rev/min. ¿Cuál es la velocidad tangencial en la superficie del cilindro?

Resp. 20.9 ft/s

11.10. La velocidad tangencial adecuada para fabricar material de acero es de 70 cm/s aproximadamente. ¿A cuántas revoluciones por minuto deberá girar en un torno un cilindro de acero cuyo diámetro es de 8 cm?

11.11. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda descrita en el problema 11.8? ¿Cuál es la aceleración tangencial de un punto localizado en el borde de esa rueda? Resp. 2.79 rad/s^2, 0.419 m/s^2

11.12. Un carrete circular de 40 cm de radio gira inicialmente a 400 rev/min. Luego se detiene por completo después de 50 revoluciones. ¿Cuáles fueron la aceleración angular y el tiempo de detención?

11.13. Una correa pasa por la ranura de una polea cuyo diámetro es de 40 cm. La polea gira con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2. La rapidez rotacional es de 2 rad/s en el $t = 0$. ¿Cuáles son el desplazamiento angular y la velocidad angular de la polea 2 s más tarde?

Resp. 11.0 rad, 9.00 rad/s

11.14. En el problema 11.13, ¿cuáles son la rapidez lineal y la aceleración tangencial final de la correa cuando se mueve sobre la ranura de la polea?

11.15. Una rueda gira inicialmente a 6 rev/s y después se somete a una aceleración angular constante de 4 rad/s^2. ¿Cuál es su velocidad angular después de 5 s? ¿Cuántas revoluciones completará la rueda?

Resp. 57.7 rad/s, 38.0 rev

11.16. Un disco rectificador detiene su movimiento en 40 revoluciones. Si la aceleración de frenado fue de -6 rad/s^2, ¿cuál fue la frecuencia inicial de giro en revoluciones por segundo?

11.17. Una polea de 320 mm de diámetro gira inicialmente a 4 rev/s y luego recibe una aceleración angular constante de 2 rad/s^2. ¿Cuál es la velocidad tangencial de una correa montada en dicha polea, al cabo de 8 s? ¿Cuál es la aceleración tangencial de la correa?

Resp. 6.58 m/s, 0.320 m/s^2

***11.18.** Una persona que inicialmente se encontraba en reposo, colocada a 4 m del centro de una plataforma giratoria, recorre una distancia de 100 m en 20 s. ¿Cuál es la aceleración angular de la plataforma? ¿Cuál es la velocidad angular al cabo de 4 s?

Sección 11.5 Energía cinética rotacional: momento de inercia

11.19. Una masa de 2 kg y una masa de 6 kg están unidas por una barra ligera de 30 cm. Se hace girar el sistema horizontalmente a 300 rpm en torno a un eje localizado a 10 cm de la masa de 6 kg. ¿Cuál es el momento de inercia en torno de este eje? ¿Cuál es la energía cinética rotacional?

Resp. 0.140 kg m^2, 69.1 J

11.20. La rueda de una bicicleta pesa 1.2 kg y tiene 70 cm de radio; además, tiene rayos cuyo peso es insignificante. Si parte del estado de reposo y recibe una aceleración angular de 3 rad/s^2, ¿cuál será su energía cinética rotacional después de 4 s?

11.21. Un disco esmeril de 16 lb gira a 400 rev/min. ¿Cuál es el radio del disco si su energía cinética es de 54.8 ft · lb? ¿Cuál es el momento de inercia?

Resp. 6.00 in, 0.0625 slug ft^2

11.22. ¿Cuál deberá ser el radio de un disco circular de 4 kg si se requiere que su momento de inercia sea igual al de una varilla de 1 kg de peso y 1 m de longitud que oscila apoyada en su punto medio?

***11.23.** La rueda de una carreta mide 60 cm de diámetro y está montada en un eje central sobre el cual gira a 200 rev/min. Se puede considerar que la rueda es un aro circular de 2 kg de masa y cada uno de sus 12 rayos de madera de 500 g puede considerarse como una varilla delgada que gira sobre sus extremos. Calcule el momento de inercia de toda la rueda. ¿Cuál es su energía cinética rotacional?

Resp. 0.360 kg m^2, 78.9 J

11.24. Compare la energía cinética rotacional de tres objetos que tienen radios y masas iguales: un aro circular, un disco circular y una esfera sólida.

Sección 11.6 Segunda ley de Newton y rotación

11.25. Una cuerda que está enrollada en un carrete circular de 5 kg permite arrastrar objetos con una tensión de 400 N. Si el radio del carrete es de 20 cm y puede girar libremente sobre su eje central, ¿cuál es la aceleración angular? Resp. 800 rad/s^2

11.26. El volante de un motor tiene un momento de inercia de 24 slug · ft^2. ¿Qué momento de torsión se requiere para acelerar el volante desde el reposo hasta una velocidad angular de 400 rpm en 10 s?

11.27. Una varilla delgada de 3 kg tiene 40 cm de longitud y oscila sobre su punto medio. ¿Qué momento de torsión se requiere para que la varilla describa 20 revoluciones al tiempo que su rapidez de rotación se incrementa de 200 a 600 rev/min?

Resp. 0.558 N · m

11.28. Una rueda grande de turbina pesa 120 kg y tiene un radio de giro de 1 m. Un momento de torsión friccio-

nal de 80 N · m se opone a la rotación del eje. ¿Qué momento de torsión se deberá aplicar para acelerar la rueda desde el reposo hasta 300 rev/min en 10 s?

11.29. Una masa de 2 kg se balancea en el extremo de una varilla ligera, describiendo un círculo de 50 cm de radio. ¿Qué momento de torsión resultante se requiere para impartir a esa masa una aceleración angular de 2.5 rad/s^2? Resp. 1.25 N · m

11.30. Una cuerda está enrollada con varias vueltas en un cilindro de 0.2 m de radio y 30 kg de masa. ¿Cuál es la aceleración angular del cilindro si la cuerda tiene una tensión de 40 N y gira sin fricción alguna?

11.31. Un disco rectificador de 8 kg tiene 60 cm de diámetro y gira a 600 rev/min. ¿Qué fuerza de frenado se deberá aplicar tangencialmente al disco para detener su movimiento de rotación en 5 s?
Resp. 15.1 N

11.32. Un momento de torsión no balanceado de 150 N · m le imparte una aceleración angular de 12 rad/s^2 al rotor de un generador. ¿Cuál es el momento de inercia?

Sección 11.7 Trabajo rotacional y potencia

11.33. Una cuerda enrollada en un disco de 3 kg y 20 cm de diámetro recibe una fuerza de tracción de 40 N que la desplaza una distancia lineal de 5 m. ¿Cuál es el trabajo lineal realizado por la fuerza de 40 N? ¿Cuál es el trabajo rotacional realizado sobre el disco?
Resp. 200 J, 200 J

11.34. Aplique el teorema del trabajo y la energía para calcular la velocidad angular final del disco, si éste parte del estado de reposo en el problema 11.33.

11.35. Un motor de 1.2 kW impulsa durante 8 s una rueda cuyo momento de inercia es 2 kg · m^2. Suponiendo que la rueda estaba inicialmente en reposo, ¿cuál es su rapidez angular final?
Resp. 98.0 rad/s

11.36. Un cordón está enrollado en el borde de un cilindro que tiene 10 kg de masa y 30 cm de radio. Si se tira del cordón con una fuerza de 60 N, ¿cuál es la aceleración angular del cilindro? ¿Cuál es la aceleración lineal del cordón?

11.37. Un motor de 600 W impulsa una polea con una velocidad angular media de 20 rad/s. ¿Cuál es el momento de torsión así obtenido? Resp. 30 N · m

11.38. El cigüeñal de un automóvil desarrolla un momento de torsión de 350 lb · ft a 1 800 rpm. ¿Cuál es la potencia resultante en caballos de fuerza?

Sección 11.8 Rotación y traslación combinadas

11.39. Un cilindro de 2 kg tiene un radio de 20 cm. Rueda sin deslizarse a lo largo de una superficie horizontal a una velocidad de 112 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética trasnacional? (b) ¿Cuál es su energía cinética rotacional? (c) ¿Cuál es la energía cinética total?
Resp. (a) 144 J; (b) 72 J; (c) 216 J

11.40. Un aro circular tiene la misma masa y radio que el cilindro del problema 11.39. ¿Cuál es la energía cinética total si rueda con la misma velocidad horizontal?

11.41. Considere un plano inclinado de 16 m de altura. Cuatro objetos de diferentes materiales tienen la misma masa de 3 kg: Un aro circular, un disco, una esfera y una caja. Suponga que la fricción es insignificante para la caja, pero hay suficiente fricción para que los objetos rodantes rueden sin deslizarse. Al calcular las velocidades finales en cada caso, determine el orden en el cual llegan al punto más bajo del plano.
Resp. v_c = 17.7 m/s; v_e = 14.97~15.0 m/s; v_d = 14.46 m/s; v_a = 12.5 m/s

***11.42.** ¿Qué altura debe tener un plano inclinado para que un disco circular ruede desde una posición en reposo hasta el punto más bajo del plano con una velocidad final de 20 m/s?

Sección 11.9 Momento angular y Sección 11.10 Conservación de la cantidad de movimiento angular

11.43. Una varilla de acero de 500 g y 30 cm de longitud oscila sobre su centro y gira a 300 rev/min. ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular?
Resp. 0.118 kg m/s^2

11.44. En el problema 11.39, ¿qué momento de torsión promedio deberá aplicarse para detener totalmente la rotación en 2 s?

11.45. Un momento de torsión de 400 N · m se aplica repentinamente en el borde de un disco inicialmente en reposo. Si la inercia rotacional del disco es de 4 kg · m^2 y el momento de torsión actúa durante 0.02 s, ¿cuál será el cambio en la cantidad de movimiento angular? ¿Cuál será la rapidez angular final?
Resp. 8.00 kg · m^2/s, 2.00 rad/s

11.46. En la figura 11.14, un disco A de 6 kg, que gira en el sentido de las manecillas del reloj a 400 rev/min,

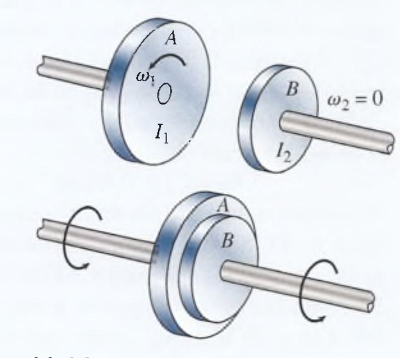


Figura 11.14

se acopla a un disco B de 3 kg que inicialmente estaba en reposo. El radio del disco A es de 0.4 m, y el radio del disco B es de 0.2 m. ¿Cuál es la rapidez angular combinada después de que los dos discos se acoplan?

11.47. Suponga que el disco B del problema 11.46 gira inicialmente en el sentido de las manecillas del reloj a 200 rev/min, en la misma dirección que el disco A. ¿Cuál sería entonces la rapidez angular común después de su acoplamiento? Resp. 378 rev/min

11.48. Suponga que existen las mismas condiciones descritas en el problema 11.46, con excepción de que el disco B gira en contrasentido al avance de las manecillas del reloj y A gira en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Cuál es la velocidad angular combinada después del acoplamiento de los discos?

11.49. La varilla que conecta los dos pesos de la figura 11.15 tiene un peso insignificante, pero está configurada para permitir que los pesos resbalen hacia afuera. En el instante en que la rapidez angular llega a 600 rev/min, las masas de 2 kg están separadas 10 cm. ¿Cuál será la rapidez rotacional cuando las masas estén a 34 cm de distancia una de otra?

Resp. 51.9 rpm

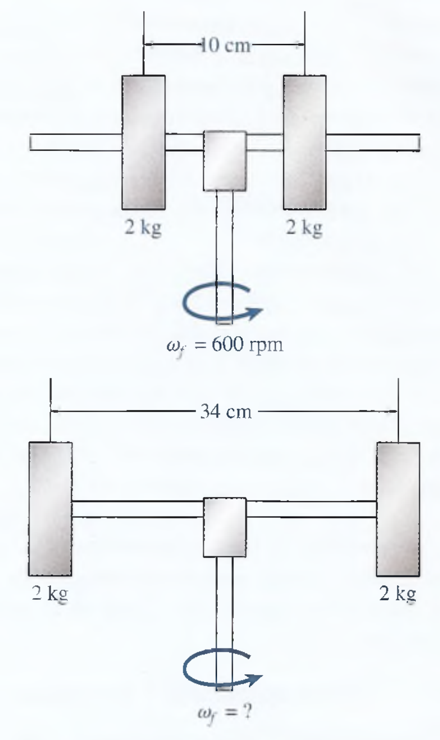


Figura 11.15

Problemas adicionales

11.50. Un disco rectificador circular de 6 kg gira inicialmente a 500 rev/min. El radio del disco es de 40 cm. ¿Cuál es la aceleración angular del disco si el eje ejerce una fuerza tangencial de 120 N en el borde? ¿Cuántas revoluciones describirá el disco antes de detenerse? ¿Qué trabajo se realiza y cuánta potencia se pierde en el proceso?

11.51. Una rueda de 3 kg, con rayos de masa insignificante, gira libremente sobre su centro sin fricción alguna. El borde de la rueda, de 40 cm de radio, es golpeado repentinamente con una fuerza tangencial media de 600 N durante 0.002 s. (a) ¿Qué impulso angular se le imparte a la rueda? (b) Si la rueda estaba inicialmente en reposo, ¿cuál era su rapidez angular al final del intervalo de 0.002 s?

Resp. (a) 0.48 N · m · s; (b) 1 rad/s

11.52. El disco A tiene el triple de la inercia rotacional del disco B. El disco A gira inicialmente en el sentido de las manecillas del reloj a 200 rev/min y el disco B gira en la dirección opuesta a 800 rev/min. Si los dos discos se acoplan, ¿cuál será la velocidad común de rotación de los discos combinados?

11.53. Si los discos del problema 11.52 giran inicialmente en la misma dirección, ¿cuál será su rapidez angular común después del acoplamiento?

Resp. 350 rev/min en el sentido de las manecillas del reloj

11.54. El radio de giro de una rueda de 8 kg es de 50 cm. Halle su momento de inercia y su energía cinética cuando está girando a 400 rev/min.

11.55. ¿Cuánto trabajo se requiere para reducir la rotación de la rueda del problema 11.50 a 100 rev/min?

Resp. −1645.9 J

11.56. Una rueda de 2 ft de radio tiene un momento de inercia de 8.2 slug ft^2. Una fuerza constante de 12 lb actúa tangencialmente en el borde de la rueda, la cual está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la aceleración angular?

11.57. En el problema 11.56 la rueda se detuvo por completo en 5 s. ¿Cuánto trabajo se realizó? ¿Qué potencia se desarrolló en caballos de fuerza?

Resp. 879 ft · lb, 0.319 hp

11.58. Una máquina funciona a 1800 rev/min y desarrolla 200 hp. ¿Qué momento de torsión desarrolla?

11.59. Una fuerza constante de 200 N actúa sobre el borde de una rueda de 36 cm de diámetro y la impulsa a 20 revoluciones en 5 s. ¿Qué potencia se desarrolla? Resp. 905 W

***11.60.** Un aro circular de 2 kg desciende rodando por un plano inclinado desde una altura inicial de 20 m. La energía cinética que desarrolla se comparte entre la rotación y la traslación. ¿Cuál será la rapidez cuando llegue al punto más bajo del plano inclinado?

11.61. Suponga que un disco circular desciende rodando por el mismo plano inclinado del problema 11.60. ¿Cuál será su rapidez cuando llegue al punto más bajo del plano inclinado? Resp. 16.2 m/s

Preguntas para la reflexión crítica

11.62. Un aro circular con 2 kg de masa y 60 cm de radio gira libremente sobre su centro, al cual está conectado por medio de rayos centrales ligeros. Una fuerza de 50 N actúa tangencialmente sobre el borde de la rueda durante un lapso de 0.02 s. (a) ¿Cuál es el impulso angular? (b) ¿Qué cambio se registra en la cantidad de movimiento angular? (c) Si el aro estaba inicialmente en reposo, ¿cuál fue la rapidez angular final? (d) Aplique el teorema del trabajo y la energía para calcular el desplazamiento angular.
Resp. (a) 0.60 N · ms; (b) 0.60 kg · m^2/s, (c) 0.833 rad/s, (d) 0.00693 rad

11.63. El ciclo de exprimido de una máquina lavadora disminuye de 900 a 300 rev/min en 4 s. Calcule la aceleración angular. ¿Actúa una fuerza para extraer el agua de la ropa o la ausencia de dicha fuerza produce este efecto? Cuando el ciclo opera a 900 rev/min, la potencia resultante es de 4 kW. ¿Qué momento de torsión se desarrolla? Si el radio de la tina es de 30 cm, ¿cuál es la rapidez lineal de la ropa que se encuentra cerca del borde inferior?

11.64. Un bloque está unido a un cordón que pasa por la ranura de una polea a través de un orificio en la cubierta horizontal de una mesa como muestra la figura 11.16. Inicialmente, el bloque gira a 4 rad/s a una distancia r del centro del orificio. Si se tira del cordón desde abajo hasta que su radio es $r/4$, ¿cuál es la nueva velocidad angular? Resp. 64 rad/s

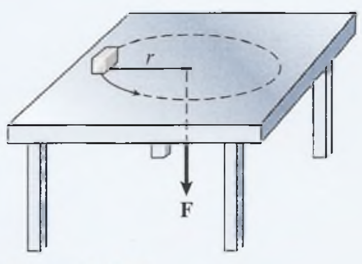


Figura 11.16

11.65. Suponga que el bloque de la figura 11.16 tiene una masa de 2 kg y gira a 3 rad/s cuando $r = 1$ m. ¿A qué distancia r la tensión del cordón será de 25 N?

***11.66.** Considere la figura 11.17 en la cual $m = 2$ kg, $M = 8$ kg, $R = 60$ cm y $h = 6$ m. Escriba la segunda ley de Newton para el caso del disco, en función de la tensión sobre la cuerda, el momento de inercia del disco y la aceleración angular. A continuación, escriba la segunda ley de Newton para masas en caída libre, en función de la tensión sobre la cuerda, la masa y la aceleración lineal. Elimine T de estas dos ecuaciones. Halle la aceleración tangencial de la masa de 2 kg, para ello recuerde que $v = \omega R$, $a = \alpha R$ y $I = \frac{1}{2}mR^2$. Resp. 3.27 m/s^2

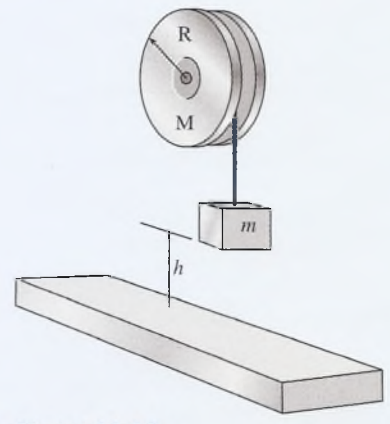


Figura 11.17

11.67. Aplique la conservación de la energía para hallar la velocidad de la masa de 2 kg en la figura 11.17 justo antes de que toque el suelo, que se encuentra 6 m más abajo. Use los datos correspondientes al problema 11.66.

11.68. Un estudiante está de pie sobre una plataforma, con los brazos extendidos, sosteniendo una pesa en cada mano, de manera que su inercia rotacional es de 6.0 kg · m^2. La plataforma inicia un movimiento constante de rotación a 90 rev/min sin fricción alguna. Ahora el estudiante puede reducir la inercia rotacional a 2 kg · m^2 si retrae las pesas acercándolas a su cuerpo. (a) ¿Cuál será la nueva velocidad de rotación si no existe momento de torsión externo? (b) ¿Cuál es la razón entre la energía cinética final y la

energía cinética inicial? (c) Explique el incremento en la energía.

Resp. (a) 270 rev/min; (b) 3; (c) el trabajo realizado sobre las masas

***11.69.** Considere el aparato que muestra la figura 11.18. Suponga que la polea grande es un disco de 6 kg y 50 cm de radio. La masa de la derecha es de 4 kg y la masa de la izquierda es de 2 kg. Considere tanto la energía de rotación como la de traslación y calcule la velocidad inmediatamente antes que la masa de 4 kg toque el piso.

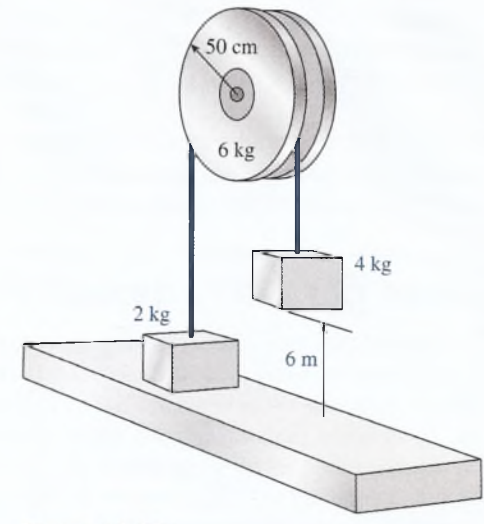
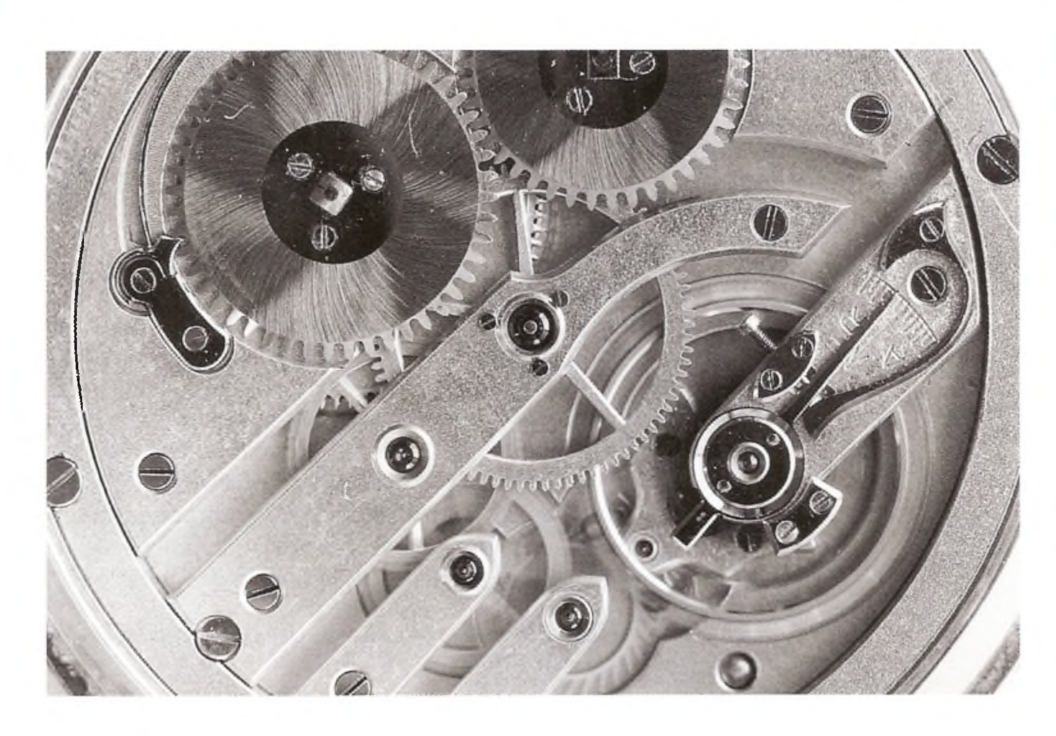


Figura 11.18

12 Máquinas simples



Las máquinas simples sirven para realizar numerosas tareas con eficiencia notable. En este ejemplo, un sistema de engranes, poleas y palancas funciona para producir mediciones exactas del tiempo. (*Fotografía © vol. 1 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Describirá una máquina simple y su funcionamiento en términos generales, hasta un nivel que le permita explicar la *eficiencia* y la *conservación de la energía.*
2. Escribirá y aplicará fórmulas para calcular la eficiencia de una máquina simple en términos de trabajo o potencia.
3. Distinguirá, por medio de definiciones y ejemplos, la diferencia entre una ventaja mecánica *ideal* y una ventaja mecánica *real.*
4. Trazará un diagrama de cada una de las máquinas simples siguientes y anexará a cada diagrama la fórmula que permite calcular la ventaja mecánica ideal: (a) palanca, (b) plano inclinado, (c) cuña, (d) engranes, (e) sistema de poleas, (f) rueda y eje o cabria, (g) gato de tornillo, (h) transmisión por banda.
5. Calculará la ventaja mecánica y la eficiencia de cada una de las máquinas simples mencionadas en el objetivo anterior.

Una ***máquina simple*** es un aparato que transforma la aplicación de una fuerza en trabajo útil. Por medio de un malacate o cabestrante podemos convertir una pequeña fuerza, dirigida hacia abajo, en una gran fuerza que se dirige hacia arriba y nos permite elevar una carga. En la industria se manipulan muestras de material radiactivo muy delicado mediante máquinas

con las que la fuerza aplicada se reduce en forma considerable. Las poleas simples sirven para cambiar la dirección de una fuerza aplicada sin afectar su magnitud. El estudio sobre las máquinas y su eficiencia es fundamental para la aplicación productiva de la energía. En este capítulo estudiará las palancas, los engranes, los sistemas de poleas, los planos inclinados y otras máquinas usadas rutinariamente en diversas aplicaciones industriales.

12.1 Máquinas simples y eficiencia

En una máquina simple, el trabajo de entrada se realiza mediante la aplicación de una sola fuerza, y la máquina realiza el trabajo de salida a través de otra fuerza única. Durante una operación de este tipo (véase la figura 12.1) ocurren tres procesos:

1. Se suministra trabajo a la máquina.
2. El trabajo se realiza contra la fricción.
3. La máquina realiza trabajo útil o de salida.

De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, estos procesos se relacionan de la forma siguiente:

Trabajo de entrada = trabajo contra la fricción + trabajo de salida

La cantidad de trabajo útil producido por una máquina nunca puede ser mayor que el trabajo que se le ha suministrado. Siempre habrá alguna pérdida debido a la fricción o a la acción de otras fuerzas disipadoras. Por ejemplo, cuando se introduce aire en un neumático de bicicleta por medio de una pequeña bomba manual, se ejerce una fuerza descendente sobre el émbolo, forzando el aire a ir hacia el neumático. Parte de este trabajo de entrada se pierde a causa de la fricción, lo cual puede comprobarse fácilmente sintiendo cómo se calienta el cilindro de la bomba manual. Cuanto más se reduzca la pérdida por fricción en una máquina, tanto más provecho se obtendrá del esfuerzo realizado. Dicho de otro modo, la eficiencia de una máquina puede medirse comparando su trabajo de salida con el trabajo que se le suministró.

La eficiencia e de una máquina se define como la relación del trabajo de salida entre el trabajo de entrada.

$$e = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \tag{12.1}$$

La ***eficiencia***, tal como se define en la ecuación (12.1), siempre será un número entre 0 y 1. Por costumbre se expresa este número decimal como un porcentaje que se obtiene multiplicando por 100 la cantidad obtenida. Por ejemplo, una máquina que realiza un trabajo de 40 J cuando se le suministran 80 J, tiene una eficiencia de 50%.

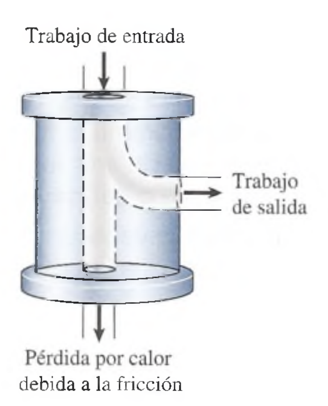


Figura 12.1 Durante el funcionamiento de una máquina ocurren tres procesos: (1) la entrada de cierta cantidad de trabajo, (2) la pérdida de energía al realizar trabajo contra la fricción, y (3) la salida de trabajo útil.

Otra expresión útil para la eficiencia puede obtenerse a partir de la definición de potencia como trabajo por unidad de tiempo. Podemos escribir

$$P = \frac{\text{trabajo}}{t} \qquad \text{o} \qquad \text{Trabajo} = Pt$$

La eficiencia en términos de potencia de entrada P_i y potencia de salida P_o está dada por

$$e = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{P_o t}{P_i t}$$

o bien

$$e = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{P_o}{P_i} \tag{12.2}$$

Ejemplo 12.1

Un motor de 45 kW arrolla un cable alrededor de un tambor mientras levanta una masa de 2000 kg a una altura de 6 m en 3 s. Determine la eficiencia del motor y cuánto trabajo se realiza contra las fuerzas de fricción.

Plan: Se conoce la potencia de entrada (45 kW); la de salida es la razón a la que se efectúa el trabajo de levantar la masa. La eficiencia del motor se calcula obteniendo la razón de la potencia de salida a la de entrada. Por último, se calcula la pérdida de potencia restando la potencia de salida de la de entrada.

Solución: La potencia de salida levanta la masa a una altura $h = 6$ m en 3 s; por tanto

$$P_o = \frac{Fh}{t} = \frac{mgh}{t}$$

$$= \frac{(2\,000 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(6 \text{ m})}{3 \text{ s}} = 39\,200 \text{ W}$$

$$= 39.2 \text{ kW}$$

Ahora se encuentra la eficiencia a partir de la ecuación (12.2):

$$e = \frac{P_o}{P_i} = \frac{39.2 \text{ kW}}{45 \text{ kW}} = 0.871$$

En consecuencia, la eficiencia del motor es 87.1%.

La pérdida de potencia debida a la fricción es la diferencia entre las potencia de salida y de entrada

$$P_i - P_o = 45 \text{ kW} - 39.2 \text{ kW} = 5.80 \text{ kW}$$

Pérdida de potencia debida a la fricción = 5.80 kW

12.2 Ventaja mecánica

Las máquinas simples como la palanca, el polipasto, el malacate, los engranes, el plano inclinado y el gato de tornillo desempeñan un papel importante en la industria moderna. Podemos ilustrar la operación de cualquiera de estas máquinas mediante el diagrama general de la figura 12.2. Una fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ actúa a lo largo de una distancia s_i realizando un trabajo $F_i s_i$.

La ventaja mecánica real (M_A) de una máquina se define como la razón que hay de la fuerza de salida (F_o) a la fuerza de entrada (F_i).

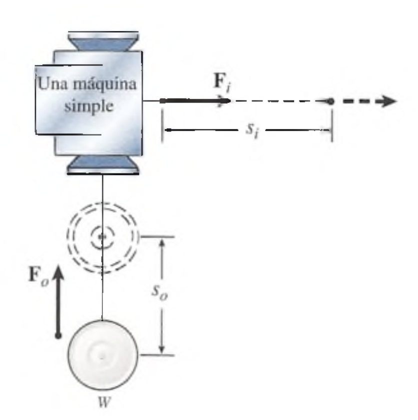


Figura 12.2 Durante el funcionamiento de cualquier máquina simple, una fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ actúa a lo largo de una distancia s_i, mientras una fuerza de salida $\mathbf{F}_o$ actúa a lo largo de una distancia s_o.

$$M_A = \frac{\text{fuerza de salida}}{\text{fuerza de entrada}} = \frac{F_o}{F_i}$$

Una ***ventaja mecánica real*** mayor que 1 indica que la fuerza de salida es mayor que la de entrada. Si bien casi todas las máquinas tienen valores de M_A mayores que 1, no siempre es así. Cuando se manejan objetos pequeños y frágiles, a veces es deseable lograr que la fuerza de salida sea más pequeña que la de entrada.

En la sección previa observamos que la eficiencia de una máquina aumenta en la medida en que los efectos de la fricción se vuelven más pequeños. Aplicando el principio de la conservación de la energía a la máquina simple de la figura 12.2 se obtiene

Trabajo de entrada = trabajo contra la fricción + trabajo de salida

$$F_i s_i = (\text{trabajo})f + F_o s_o$$

La máquina más eficiente que pudiera existir no tendría pérdidas debidas a la fricción. Podemos representar este caso ideal igualando (trabajo) $f = 0$ en la ecuación anterior. Por tanto,

$$F_o s_o = F_i s_i$$

Como esta ecuación representa un caso ideal, definimos la ***ventaja mecánica ideal*** M_I como

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{s_i}{s_o} \qquad \textbf{(12.4)}$$

La ventaja mecánica ideal de una máquina simple es igual a la razón de la distancia que recorre la fuerza de entrada a la distancia que recorre la fuerza de salida.

La eficiencia de una máquina simple es la relación del trabajo de salida entre el trabajo de entrada. Por consiguiente, para la máquina general de la figura 12.2 se tiene que

$$e = \frac{F_o s_o}{F_i s_i} = \frac{F_o/F_i}{s_i/s_o}$$

Por último, utilizando las ecuaciones (12.3) y (12.4) se obtiene

$$e = \frac{M_A}{M_I} \qquad \textbf{(12.5)}$$

Todos los conceptos anteriores se han expuesto como se aplicarían a una máquina en general. En las secciones siguientes los aplicaremos a máquinas específicas.

12.3 La palanca

Tal vez la máquina más antigua y la más comúnmente usada es la palanca simple. Una ***palanca*** consiste en cualquier barra rígida apoyada en cierto punto, al que se le llama ***fulcro***. En la figura 12.3 se ejemplifica el uso de una barra larga para levantar el peso **W**. Podemos calcular la ventaja mecánica ideal de ese tipo de dispositivos de dos formas. El primer método comporta el principio del equilibrio y el segundo utiliza el principio del trabajo, tal como se analizó en la sección previa. Puesto que el método del equilibrio es más fácil para el caso de la palanca, lo aplicaremos primero.

Debido a que no se incluye ningún movimiento traslacional durante la aplicación de una palanca, la condición de equilibrio es que el momento de torsión de entrada es igual al momento de torsión de salida:

$$F_i r_i = F_o r_o$$

La ventaja mecánica ideal se determina a partir de

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{r_i}{r_o} \quad \textbf{(12.6)}$$

La razón F_o/F_i se tiene como la *ideal* porque no se considera ninguna fuerza de fricción.

Se obtiene el mismo resultado a partir de consideraciones sobre el trabajo. Observe en la figura 12.3b que la fuerza $\mathbf{F}_i$ se desplaza a lo largo de un arco cuya distancia es s_i, mientras que la fuerza $\mathbf{F}_o$ se mueve a lo largo del arco cuya longitud es s_o. Sin embargo, los dos arcos son subtendidos por el mismo ángulo θ, por lo que podemos escribir la proporción siguiente:

$$\frac{s_i}{s_o} = \frac{r_i}{r_o}$$

Al sustituirla en la ecuación (12.4) se comprueba el resultado obtenido partiendo de las consideraciones sobre el equilibrio, es decir, $M_I = r_i/r_o$.

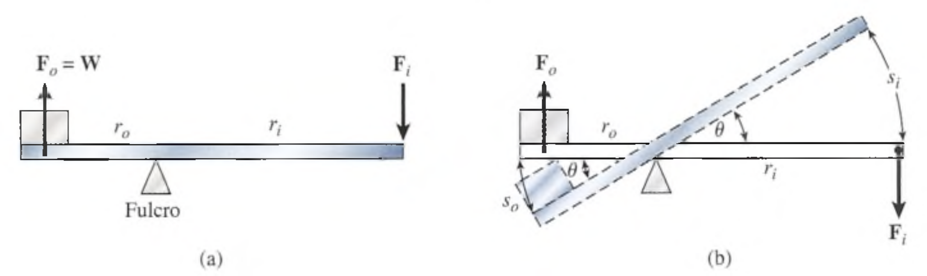


Figura 12.3 La palanca.

Ejemplo 12.2

Una barra de hierro de 1.2 m de largo se usa para levantar un contenedor de 60 kg. La barra se utiliza como palanca, tal como se muestra en la figura 12.3. El fulcro está colocado a 30 cm del contenedor. ¿Cuál es la ventaja mecánica ideal del sistema y qué fuerza de entrada se requiere?

Plan: Las distancias de entrada y salida determinarán la ventaja mecánica *ideal*, que en este caso también será la *real*. Al igualar la razón que va de la fuerza de salida y la de entrada con la ventaja mecánica ideal se calculará la fuerza de entrada que se necesita.

Solución: La distancia de salida es r_o = 0.30 m y la de entrada es r_i = 1.2 m − 0.30 m = 0.90 m. Por tanto, la ventaja mecánica ideal es

$$M_I = \frac{r_i}{r_o} = \frac{0.90 \text{ m}}{0.30 \text{ m}} = 3$$

Al sustituir este valor en la ecuación (12.6) se obtiene

$$\frac{F_o}{F_i} = 3 \qquad \text{o} \qquad F_i = \frac{F_o}{3}$$

La fuerza de salida es igual al peso mg; por ende

$$F_i = \frac{mg}{3} = \frac{(60 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{3} = 196.0 \text{ N}$$

Antes de dar por terminado el tema de la palanca, cabe observar que cierta cantidad muy pequeña de trabajo de entrada se pierde debido a las fuerzas de fricción. Con fines prácticos, la ventaja mecánica *real* de una palanca simple es igual a la ventaja mecánica *ideal*. Otros ejemplos de la palanca se ilustran en la figura 12.4.

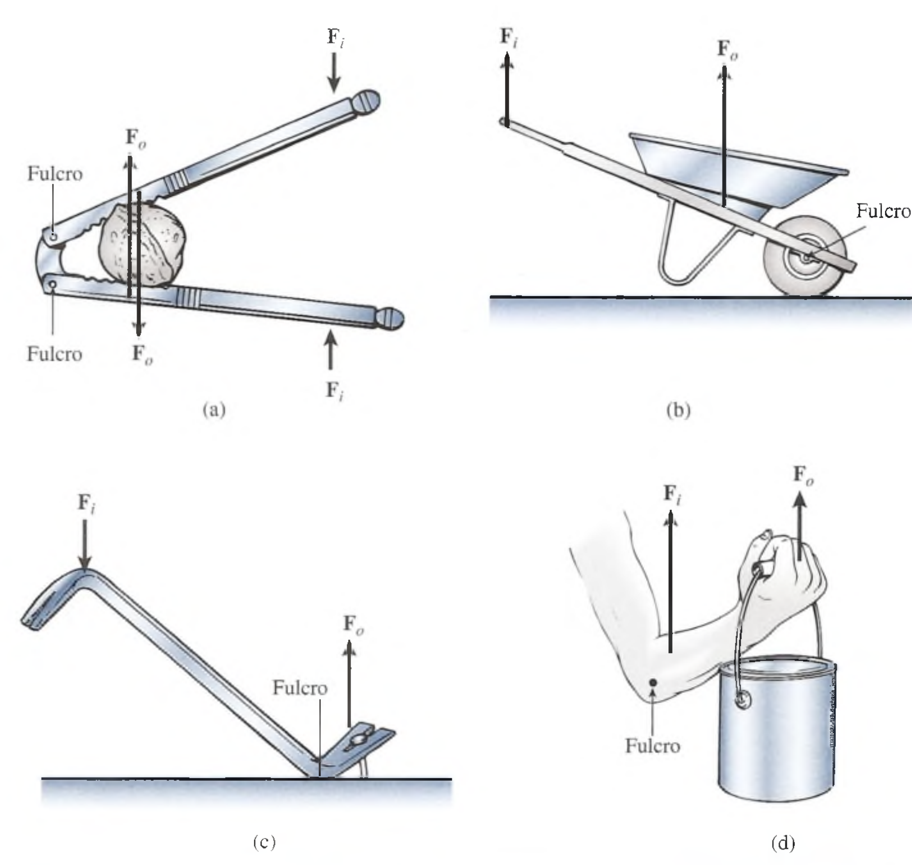


Figura 12.4 La palanca constituye el principio funcional de numerosas máquinas simples.

12.4 Aplicaciones del principio de la palanca

Una limitación seria de la palanca elemental es que funciona a través de un ángulo pequeño. Hay muchas formas de superar esta restricción permitiendo que el brazo de palanca gire continuamente. Por ejemplo, la ***rueda y eje*** (o cabria) (véase la figura 12.5) permite la acción continua de la fuerza de entrada. Si aplicamos el razonamiento seguido en la sección 12.2 para una máquina simple en general, es posible demostrar que

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{R}{r} \qquad \textbf{(12.7)}$$

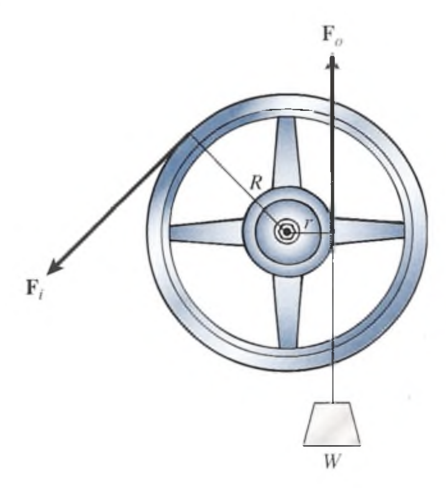


Figura 12.5 La rueda y el eje (o cabria).

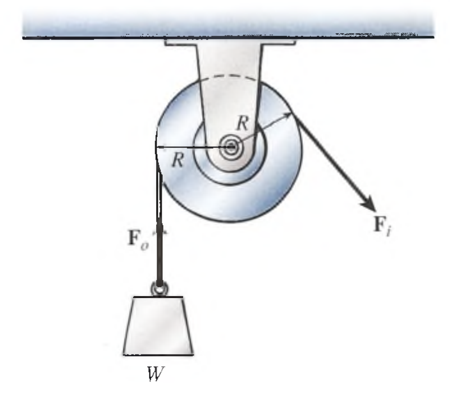


Figura 12.6 Una sola polea fija nada más sirve para cambiar de dirección la fuerza de entrada.

Por tanto, la ventaja mecánica ideal de una cabria es la razón del radio de la rueda al radio del eje.

Otra aplicación del concepto de palanca es a través del uso de poleas. Una ***polea*** simple, como se muestra en la figura 12.6, es tan sólo una palanca cuyo brazo de palanca de entrada es igual a su brazo de palanca de salida. A partir del principio de equilibrio, las fuerzas de entrada igualarán a la de salida y la ventaja mecánica ideal será

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = 1 \tag{12.8}$$

La única ventaja de este tipo de dispositivo es que ofrece la posibilidad de cambiar la dirección de la fuerza de entrada.

Por otra parte, una polea móvil simple (véase la figura 12.7) tiene una ventaja mecánica ideal de 2. Observe que las dos cuerdas de soporte deben reducirse en 1 ft para elevar la carga una distancia de 1 ft. Por consiguiente, la fuerza de entrada se mueve una distancia de 2 ft, mientras que la fuerza de salida se mueve tan sólo una distancia de 1 ft. Al aplicar el principio del trabajo se obtiene

$$F_i(2\text{ ft}) = F_o(1\text{ ft})$$

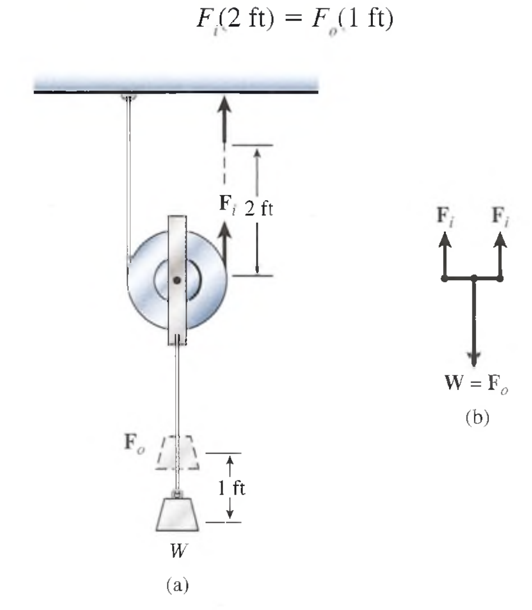


Figura 12.7 Una polea simple móvil. (a) La fuerza de entrada se mueve a lo largo de una distancia igual al doble de la distancia que recorre la fuerza de salida. (b) El diagrama de cuerpo libre muestra que $2F_i = F_o$.

de donde la ventaja mecánica ideal es

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = 2 \tag{12.9}$$

El mismo resultado se obtiene construyendo un diagrama de cuerpo libre, como en la figura 12.7b, donde es evidente que

$$2F_i = F_o \qquad \text{y} \qquad M_I = \frac{F_o}{F_i} = 2$$

El último método se aplica generalmente a problemas que suponen poleas móviles, ya que esto permite asociar M_I con el número de cordones que soportan la polea móvil.

Ejemplo 12.3

Calcule la ventaja mecánica ideal del polipasto que aparece en la figura 12.8a.

Plan: Se traza un bosquejo y se construye el diagrama de cuerpo libre (véase la figura 12.8b). La ventaja mecánica real se determina como la razón de la fuerza de salida a la de entrada.

Solución: Con base en el diagrama se advierte que

$$4F_i = F_o$$

De forma que la ventaja mecánica es

$$M_I = M_A = \frac{F_o}{F_i} = \frac{4F_i}{F_i}$$

$$M_I = 4$$

Observe que la polea más alta sirve únicamente para cambiar la dirección de la fuerza de entrada. La misma ventaja mecánica resultaría si se aplicara hacia arriba $\mathbf{F}_i$ en el punto *a*.

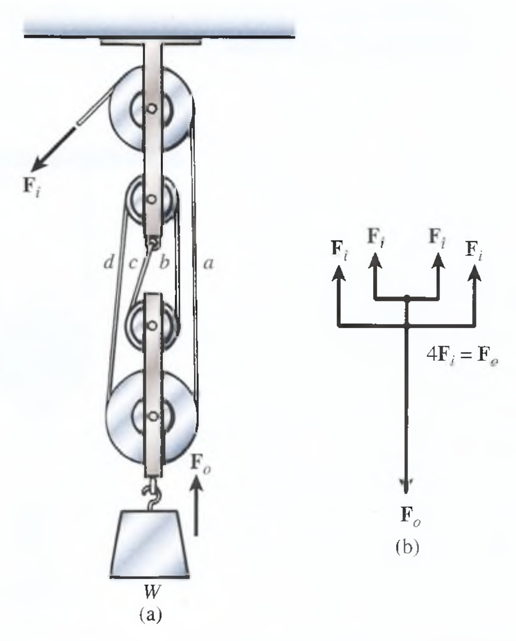


Figura 12.8 El polipasto. Este dispositivo tiene una ventaja mecánica ideal de 4, ya que cuatro cables o "cordeles" soportan el bloque móvil.

12.5 La transmisión del momento de torsión

Las máquinas simples estudiadas hasta ahora se utilizan para transmitir y aplicar fuerzas que muevan cargas. En la mayoría de las aplicaciones mecánicas, el trabajo se realiza por medio de la transmisión del momento de torsión de un mecanismo a otro. Por ejemplo, la transmisión por banda o correa (véase la figura 12.9) transmite el momento de torsión de una polea motriz a una polea de salida. La ventaja mecánica de este tipo de sistema es la razón de los momentos de torsión entre la polea de salida y la polea motriz:

$$M_I = \frac{\text{momento de torsión de salida}}{\text{momento de torsión de entrada}} = \frac{\tau_o}{\tau_i}$$

Partiendo de la definición de momento de torsión podemos escribir esta expresión en término de los radios de las poleas:

$$M_I = \frac{\tau_o}{\tau_i} = \frac{F_o r_o}{F_i r_i}$$

Si no hay deslizamientos entre la banda y las poleas, se puede decir con certeza que la fuerza tangencial de entrada $\mathbf{F}_i$ es igual a la fuerza tangencial de salida $\mathbf{F}_o$; por tanto,

$$M_I = \frac{F_o r_o}{F_i r_i} = \frac{r_o}{r_i}$$

En vista de que generalmente se especifican los diámetros de las poleas y no los radios, una expresión más práctica es

$$M_I = \frac{D_o}{D_i} \qquad \textbf{(12.10)}$$

donde D_i es el diámetro de la polea motriz y D_o es el diámetro de la polea de salida.

Suponga que aplicamos ahora el principio del trabajo a la ***transmisión por banda***. Recuerde que en el movimiento circular quedó definido el trabajo como el producto del momento de torsión τ y el desplazamiento angular θ. Para la transmisión por banda, suponiendo que las condiciones sean ideales, el trabajo de entrada sería igual al de salida; por ende

$$\tau_i\theta_i = \tau_o\theta_o$$

La potencia de entrada también debe ser igual a la potencia de salida. Si dividimos la ecuación anterior entre el tiempo t requerido para girar entre los ángulos θ_i y θ_o, obtenemos

$$\tau_i\frac{\theta_i}{t} = \tau_o\frac{\theta_o}{t} \qquad \text{o} \qquad \tau_i\omega_i = \tau_o\omega_o$$

donde ω_i y ω_o son las velocidades angulares de las poleas de entrada y salida, respectivamente. Observe que la razón τ_o/τ_i representa la ventaja mecánica ideal. Por tanto, podemos añadir otra expresión a la ecuación (12.10) para obtener

$$M_I = \frac{D_o}{D_i} = \frac{\omega_i}{\omega_o} \qquad \textbf{(12.11)}$$

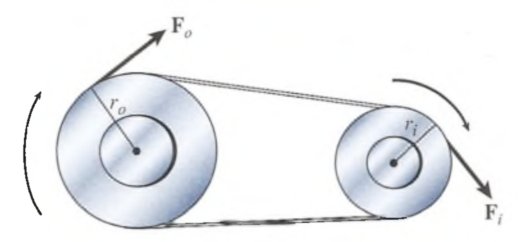


Figura 12.9 La transmisión por banda.

Este importante resultado muestra que la ventaja mecánica se logra a expensas del movimiento de rotación. Dicho de otro modo, si la ventaja mecánica es 2, el eje de rotación de entrada debe girar con una velocidad angular igual al doble de la rapidez angular del eje de rotación de salida. La razón ω_i/ω_o se conoce a veces como *razón de rapideces.*

Si la razón de rapidez es mayor que 1, la máquina produce un momento de torsión de salida mayor que el momento de torsión de entrada. Como ya hemos visto, esta proeza puede realizarse a costa de la rotación. Por otra parte, muchas máquinas se diseñan a fin de incrementar la rapidez rotacional de salida. En estos casos, la razón de rapideces es menor que 1 y el aumento en la rapidez rotacional trae consigo una reducción en el momento de torsión de salida.

Ejemplo 12.4

Considere la transmisión por banda de la figura 12.9, en la que el diámetro de la pequeña polea motriz es de 6 in y el de la polea de carga es de 18 in. Un motor de 6 hp acciona la polea de entrada a 600 rpm. Calcule las revoluciones por minuto y el momento de torsión suministrados a la polea de carga si el sistema tiene una eficiencia de 75%.

Plan: Primero calculamos la ventaja mecánica ideal (100% de eficiencia) a partir de la razón de los diámetros de las poleas. Al multiplicar este valor por el valor de la eficiencia se obtiene la ventaja mecánica *real*, que es la razón del momento de torsión de salida al de entrada. Con ello será posible despejar el momento de torsión de salida. Por último, la velocidad de rotación de salida puede obtenerse con base en la razón de los diámetros de las poleas.

Solución: La ventaja mecánica ideal se obtiene con la ecuación (12.11)

$$M_I = \frac{D_o}{D_i} = \frac{18 \text{ in}}{6 \text{ in}} = 3$$

Puesto que la eficiencia es de 75%, la ventaja mecánica real está dada por la ecuación (12.5)

$$M_A = eM_I = (0.75)(3) = 2.25$$

Ahora, la ventaja mecánica real es la simple razón del momento de torsión de salida (τ_o) al momento de torsión de entrada (τ_i). Si recordamos que la potencia en el movimiento rotacional es igual al producto del momento de torsión por la velocidad angular, podemos calcular τ_i como sigue:

$$\tau_i = \frac{P_i}{\omega_i} = \frac{(6 \text{ hp})[(550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s})/\text{hp}]}{(600 \text{ rev/min})(2\pi \text{ rad/rev})(1 \text{ min}/60 \text{ s})}$$

$$= \frac{(6)(550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s})}{20\pi \text{ rad/s}} = 52.5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Puesto que $M_A = \tau_o/\tau_i$, el momento de torsión está dado por

$$\tau_o = M_A\tau_i = (2.25)(52.5 \text{ ft} \cdot \text{lb})$$

$$= 118 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Suponiendo que la banda no se deslice, se moverá con la misma velocidad tangencial v alrededor de cada polea. Puesto que $v = \omega r$, podemos escribir la igualdad

$$\omega_i r_i = \omega_o r_o \qquad \text{o} \qquad \omega_i D_i = \omega_o D_o$$

de donde

$$\omega_o = \frac{\omega_i D_i}{D_o} = \frac{(600 \text{ rpm})(6 \text{ in})}{18 \text{ in}} = 200 \text{ rpm}$$

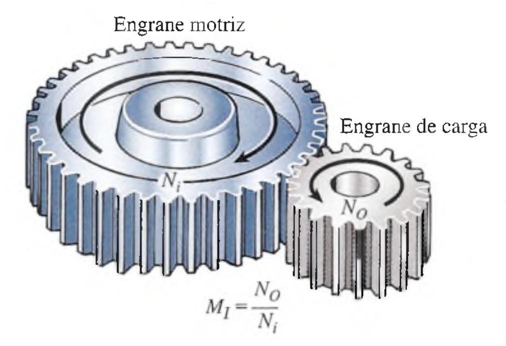


Figura 12.10 Engranes cilíndricos. La ventaja mecánica ideal es la razón del número de dientes del engrane de salida al número de dientes del engrane de entrada.

Observe que la razón de ω_i a ω_o establece la ventaja mecánica ideal, no la real. La diferencia entre M_I y M_A se debe a la fricción, tanto en la banda como en los puntos de apoyo de los ejes. Cuanto mayor sea la tensión en la banda mayores fuerzas de fricción resultarán, así que la eficiencia máxima se obtiene reduciendo la tensión de la banda hasta que casi se evite que la banda resbale sobre las poleas.

Antes de terminar el estudio de la transmisión del momento de torsión debemos considerar la aplicación de los engranes. Un ***engrane*** es simplemente una rueda dentada que puede transmitir momentos de torsión acoplándose con otra rueda dentada, como se ve en la figura 12.10. Un par de engranes acoplados difiere de la transmisión por banda tan sólo en que los engranes giran en dirección opuesta entre sí. Las mismas relaciones deducidas para la transmisión por banda son válidas para los engranes:

$$M_I = \frac{D_o}{D_i} = \frac{\omega_i}{\omega_o} \tag{12.12}$$

Una expresión más útil se basa en el hecho de que el número de dientes (N) del borde del engrane es proporcional a su diámetro (D). Debido a esta dependencia, la razón del número de dientes en el engrane de carga N_o al número de dientes del engrane motriz N_i es la misma que la razón de sus diámetros. En consecuencia, podemos escribir

$$M_I = \frac{N_o}{N_i} = \frac{D_o}{D_i} \tag{12.13}$$

El uso de engranes evita el problema de deslizamientos, que es común en las transmisiones por banda. También ahorra espacio y permite que se transmita un mayor momento de torsión.

Además de los engranes cilíndricos ilustrados en la figura 12.10, hay otros tipos de engranes. Cuatro tipos comunes son los engranes sinfín, los helicoidales, los cónicos y los planetarios. En la figura 12.11 se muestran ejemplos de cada uno de ellos, para los cuales se aplican las mismas relaciones generales.

12.6 El plano inclinado

Las máquinas que hemos estudiado hasta ahora se relacionan con la aplicación del principio de la palanca. Una segunda máquina fundamental es el ***plano inclinado.*** Suponga que debe mover una pesada carga desde el piso hasta la plataforma de un camión sin ayuda de una grúa. Probablemente usted cogería algunas tablas largas y formaría una rampa del piso a la plataforma del camión. La experiencia le ha enseñado que se requiere menos esfuerzo si se empuja la carga hacia arriba por una pequeña elevación que si la sube directamente. Debido a que con una fuerza de entrada menor se produjo la misma fuerza de salida, se ha obtenido una ventaja mecánica. Sin embargo, la fuerza de entrada menor se ha logrado a expensas de recorrer una mayor distancia.

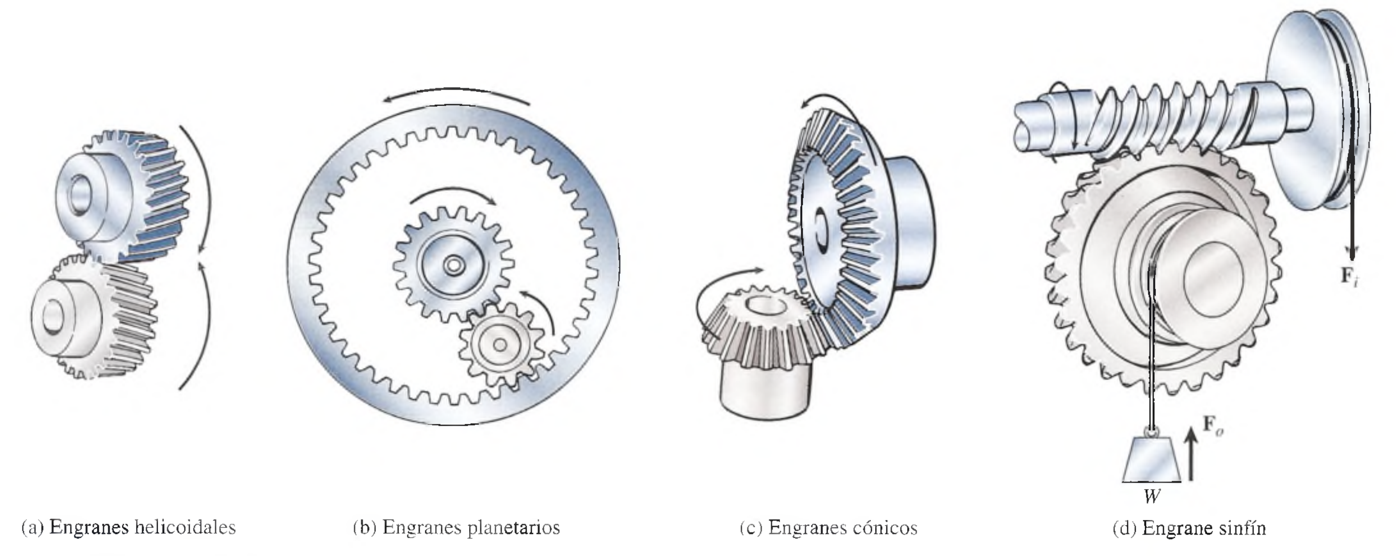


Figura 12.11 Cuatro tipos comunes de engranes: (a) helicoidal, (b) planetario, (c) cónico, (d) sinfín. (El engrane cilíndrico es el que más se usa y se muestra en la figura 12.10.)

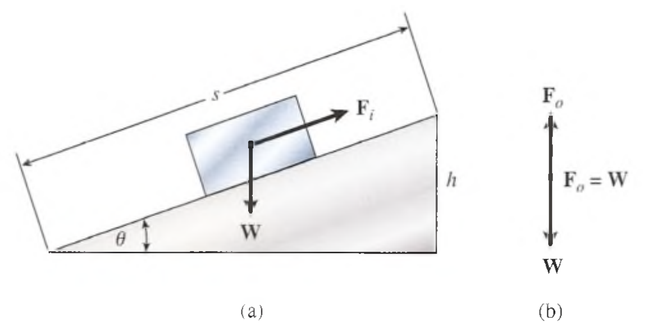


Figura 12.12 El plano inclinado. La fuerza de entrada representa el esfuerzo requerido para empujar el bloque hacia arriba por el plano; la fuerza de salida es igual al peso del bloque.

Considere el movimiento de un peso **W** hacia arriba del plano inclinado de la figura 12.12. El ángulo de inclinación θ es tal que el peso debe moverse a lo largo de una distancia s para llegar a la altura h en el punto más alto del plano inclinado. Si despreciamos la fricción, el trabajo necesario para empujar el peso hacia arriba del plano es el mismo que el trabajo requerido para levantarlo verticalmente. Podemos expresar esta igualdad como

$$\textit{Trabajo de entrada} = \textit{trabajo de salida}$$

$$F_i s = Wh$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza de entrada y **W** la de salida. Como se despreció la fricción, la ventaja mecánica ideal será la misma que la real.

$$M_I = \left(\frac{W}{F_i}\right)_{\text{ideal}} = \frac{s}{h}$$

Por tanto, en ausencia de fricción la ventaja mecánica ideal de un plano inclinado es simplemente la razón de la distancia de salida (hacia arriba de la rampa) a la distancia de entrada (la altura).

$$M_I = \frac{s}{h} \qquad \textit{Ventaja mecánica ideal del plano inclinado} \qquad \textbf{(12.14)}$$

En casi todas las aplicaciones habrá fuerzas de fricción significativas que habrán de vencerse, lo que hará que la fuerza de entrada necesaria ($\mathbf{F}_i$) sea mayor y que la ventaja mecánica real sea considerablemente menor que la razón de longitud a altura. En el ejemplo 12.5 se ilustra este aspecto.

Ejemplo 12.5

Hay que subir una caja de botellas de cerveza de 88 kg a una plataforma de carga que está a 2 m sobre el piso. La longitud de la rampa es de 4 m y el coeficiente de fricción cinética es de 0.3. ¿Cuáles son las ventajas mecánicas *ideal* y *real*?

Plan: Se traza un bosquejo y un diagrama de cuerpo libre similares a los mostrados en la figura 12.13. La ventaja mecánica ideal (M_I) se calcula sustituyendo los valores directamente en la ecuación (12.14). No obstante, la ventaja mecánica *real* es menor debido a que la fuerza de entrada debe superar la fuerza de fricción y no sólo la componente del peso hacia abajo debido a la rampa. Si suponemos movimiento constante hacia arriba por el plano, aplicaremos la primera condición del equilibrio para determinar la fuerza de entrada, que puede entonces usarse para determinar M_A.

Solución: La ventaja mecánica ideal es

$$M_I = \frac{s}{h} = \frac{4\text{ m}}{2\text{ m}}; \qquad M_I = 2$$

El ángulo de inclinación se determina a partir de la figura 12.13

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2\text{ m}}{4\text{ m}} = 0.5; \qquad \theta = 30°$$

Con este ángulo determinamos las componentes del peso perpendiculares a la rampa

$$W_y = mg\cos\theta = (88\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)\cos 30°; \qquad W_y = 747\text{ N}$$
$$W_x = mg\,\text{sen}\,\theta = (88\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)\,\text{sen}\,30°; \qquad W_x = 431\text{ N}$$

Para obtener la ventaja mecánica real, debemos hallar la mínima fuerza hacia arriba de la rampa, lo que implica considerar que las fuerzas sobre la caja están en equilibrio, y

$$\sum F_x = 0; \qquad P - W_x - f_k = 0 \qquad \text{o} \qquad P = 431\text{ N} + f_k$$
$$\sum F_y = 0; \qquad n - W_y = 0 \qquad \text{o} \qquad n = W_y = 747\text{ N}$$

La última de estas ecuaciones nos permite hallar la fuerza de fricción f_k

$$f_k = \mu_k n = (0.3)(747\text{ N}); \qquad f_k = 224\text{ N}$$

Con la primera ecuación de equilibrio se obtiene la fuerza de entrada, P

$$P = 431\text{ N} + f_k = 431\text{ N} + 224\text{ N}; \qquad P = 655\text{ N}$$

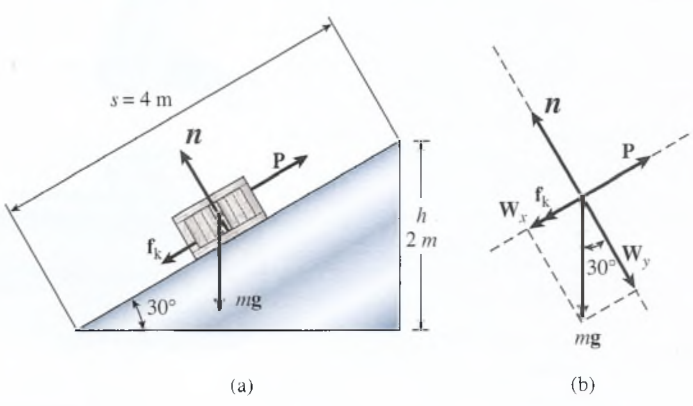


Figura 12.13

Por último, la ventaja mecánica real es la razón de la fuerza de salida W a la de entrada, P. Calculamos

$$M_A = \frac{W}{P} = \frac{mg}{P} = \frac{(88\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{655\text{ N}}$$
$$M_I = 1.32$$

Se deja como ejercicio al lector demostrar que la eficiencia de esta rampa es de sólo 57%.

12.7 Aplicaciones del plano inclinado

En gran número de máquinas se utiliza el principio del plano inclinado. La más sencilla es la ***cuña*** (véase la figura 12.14), la cual es en realidad un plano inclinado doble. En el caso ideal, la ventaja mecánica de una cuña de longitud L y grosor t está dada por

$$M_I = \frac{L}{t} \quad \textbf{(12.15)}$$

Esta ecuación es una consecuencia directa de la relación general expresada con la ecuación (12.14). La ventaja mecánica ideal siempre es mucho mayor que la real debido a las grandes fuerzas de fricción que se generan entre las superficies en contacto. La cuña se aplica en hachas, cuchillos, cinceles, cepilladoras y todas las demás herramientas cortantes. Una *leva* es una especie de cuña giratoria que se usa para levantar las válvulas de los motores de combustión interna.

Una de las aplicaciones más útiles del plano inclinado es el ***tornillo***. Este principio puede explicarse examinando una herramienta común conocida como *gato de tornillo* (véase la figura 12.15). La rosca es esencialmente un plano inclinado arrollado de forma continua alrededor de un eje cilíndrico. Cuando la fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ provoca un giro de una revolución completa ($2\pi R$), la fuerza de salida $\mathbf{F}_o$ avanzará una distancia p. Esta distancia p es en realidad la distancia entre dos roscas consecutivas y recibe el nombre de ***paso*** del tornillo. La ventaja mecánica ideal es la razón de la distancia de entrada a la distancia de salida

$$M_I = \frac{s_i}{s_o} = \frac{2\pi R}{p} \quad \textbf{(12.16)}$$

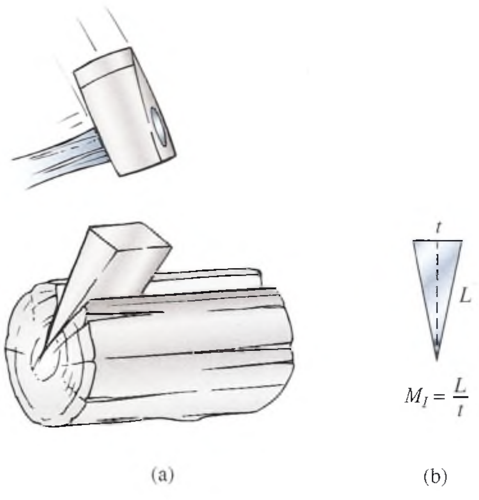


Figura 12.14 La cuña es, en realidad, un plano inclinado doble.

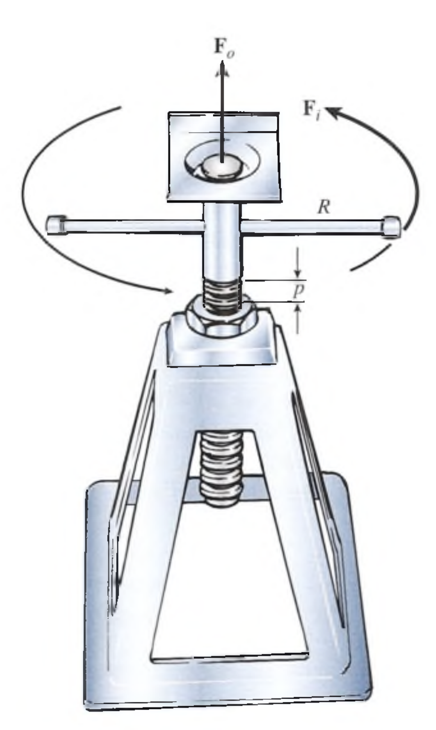


Figura 12.15 El gato de tornillo.

El tornillo es un ejemplo de una máquina muy poco eficiente, pero en este caso representa en general una ventaja, puesto que son necesarias las fuerzas de fricción para mantener la carga en su lugar mientras no se aplique una fuerza de entrada.

Resumen y repaso

Resumen

Se ha definido una máquina simple como un aparato que convierte una sola fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ en una sola fuerza de salida $\mathbf{F}_o$. En general, la fuerza de entrada se desplaza a lo largo de una distancia s_i, y la fuerza de salida se mueve en una distancia s_o. Su propósito es realizar un trabajo útil en forma adecuada para una aplicación concreta. A continuación se presentan los principales conceptos a este respecto.

- Una máquina simple es un dispositivo que convierte una sola fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ en una sola fuerza de salida $\mathbf{F}_o$. La fuerza de entrada se mueve por una distancia s_i y la fuerza de salida se mueve en una distancia s_o. Esto presenta dos ventajas mecánicas:

$$M_A = \frac{F_o}{F_i}$$ *Ventaja mecánica real (considerada la fricción)*

$$M_I = \frac{s_i}{s_o}$$ *Ventaja mecánica ideal (se supone que no hay fricción)*

- La eficiencia de una máquina es la razón entre el trabajo de salida y el trabajo de entrada. Se expresa normalmente como un porcentaje y puede calcularse con cualquiera de las relaciones siguientes:

$$e = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \qquad e = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}}$$

$$e = \frac{M_A}{M_I}$$

- Las ventajas mecánicas ideales de varias máquinas simples se presentan a continuación

$M_I = \left(\frac{F_o}{F_i}\right)_{\text{ideal}} = \frac{r_i}{r_o}$	*Palanca*
$M_I = \left(\frac{F_o}{F_i}\right)_{\text{ideal}} = \frac{R}{r}$	*Rueda y eje*
$M_I = \frac{D_o}{D_i} = \frac{\omega_i}{\omega_o}$	*Transmisión por correa*
$M_I = \frac{W}{F_i} = \frac{s}{h}$	*Plano inclinado*
$M_I = \frac{L}{t}$	*Cuña*
$M_I = \frac{N_o}{N_i} = \frac{D_o}{D_i}$	*Engranes*
$M_I = \frac{s_i}{s_o} = \frac{2\pi R}{p}$	*Gato de tornillo*

Conceptos clave

Preguntas de repaso

12.1. ¿Qué entendemos por *trabajo útil* o *trabajo de salida*? ¿Qué significa *trabajo de entrada*? Escriba la relación general entre el trabajo de entrada y el de salida.

12.2. Dos gatos funcionan en forma simultánea para levantar el extremo delantero de un automóvil. Inmediatamente después, el gato de la izquierda se siente más caliente que el de la derecha. ¿Cuál de los gatos es más eficiente? Explique su respuesta.

12.3. Una máquina puede modificar la magnitud, la dirección o ambas de una fuerza de entrada. (a) Dé varios ejemplos en los que se presenten ambos cambios. (b) Cite ejemplos en los que sólo se altere la magnitud de la fuerza de entrada. (c) Cite ejemplos en los que sólo se modifique la dirección.

12.4. Una máquina eleva una carga hasta una distancia vertical de 4 ft, mientras la fuerza de entrada la traslada hasta una distancia de 2 ft. ¿Sería útil está máquina para levantar grandes pesos? Explique su respuesta.

12.5. Una bicicleta puede funcionar en tres niveles de engranes. En el *nivel bajo*, los pedales describen dos revoluciones completas al tiempo que la rueda trasera completa una sola revolución. En *el medio*, los pedales y las ruedas giran con la misma velocidad.

En el *nivel alto*, la rueda trasera de la bicicleta realiza dos revoluciones por cada revolución completa de los pedales. Comente las ventajas y desventajas de cada nivel.

12.6. ¿Qué ocurre con la ventaja mecánica ideal si una máquina simple funciona en sentido inverso? ¿Qué sucede con su eficiencia?

12.7. Cite varios ejemplos de máquinas que tengan una ventaja mecánica real menor que 1.

12.8. ¿Por qué los autobuses y los camiones tienen a menudo volantes de dirección más grandes que el volante de los automóviles? ¿Qué principio se aplica en este caso?

12.9. Trace diagramas de sistemas de poleas que tengan ventajas mecánicas ideales de 2, 3 y 5.

12.10. Generalmente, el camino que llega hasta la cumbre de una montaña describe muchas curvas alrededor de ésta en lugar de ascender en línea recta por la pendiente. ¿Por qué? Si no se toma en cuenta la fricción, ¿se requiere más trabajo para llegar a la cumbre por esos caminos en espiral? ¿Se requiere más potencia? Si tenemos en cuenta la fricción, ¿se requeriría menos trabajo para conducir directamente hacia la cumbre de la montaña? Explique sus respuestas.

Problemas

Sección 12.1 Máquinas simples, eficiencia y Sección 12.2 Ventaja mecánica

12.1. Una máquina con 25% de eficiencia realiza un trabajo externo de 200 J. ¿Qué trabajo de entrada requiere? Resp. 800 J

12.2. ¿Cuál es el trabajo de entrada de un motor de gasolina con 30% de eficiencia si en cada uno de sus ciclos realiza 400 J de trabajo útil?

12.3. Un motor de 60 W levanta una masa de 2 kg a una altura de 4 m en 3 s. Calcule la potencia de salida. Resp. 26.1 W

12.4. ¿Cuál es la eficiencia del motor del problema 12.3? ¿Cuál es la potencia con la que se realiza el trabajo contra la fricción?

12.5. Una máquina con 60% de eficiencia levanta una masa de 10 kg con una rapidez constante de 3 m/s. ¿Cuál es la potencia de entrada requerida? Resp. 490 W

12.6. Durante la operación de un motor de 300 hp se pierde energía a causa de la fricción a razón de 200 hp. ¿Cuál es la potencia de salida útil y cuál es la eficiencia del motor?

12.7. Una máquina sin fricción levanta una carga de 200 lb hasta una altura vertical de 10 ft. La fuerza de entrada se mueve a lo largo de una distancia de 300 ft. ¿Cuál es la ventaja mecánica ideal de la máquina? ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de entrada? Resp. 30, 6.67 lb

Sección 12.3 Aplicaciones del principio de la palanca

12.8. Un extremo de una caja fuerte de 50 kg se levanta con una varilla de acero de 1.2 m. ¿Qué fuerza de entrada se requiere en el extremo de la varilla si se coloca un punto de apoyo (fulcro) a 12 cm de la caja? (*Sugerencia*: para levantar un extremo se requiere una fuerza igual a la mitad del peso de la caja fuerte.)

12.9. En el caso del cascanueces de la figura 12.4a, la nuez se halla a 2 cm del punto de apoyo y una fuerza de entrada de 20 N se aplica en los mangos, los cuales están a 10 cm de dicho punto. ¿Qué fuerza se aplica para partir la nuez? Resp. 100 N

12.10. En el caso de la carretilla de la figura 12.4b, el centro de gravedad de una carga neta de 40 kg se ubica a 50 cm de distancia de la rueda. ¿Qué empuje ascendente se tendrá que aplicar en un punto de los mangos que se encuentra a 1.4 m de la rueda?

12.11. ¿Cuál es la ventaja mecánica ideal de la carretilla descrita en el problema 12.10? Resp. 2.80

12.12. Calcule la ventaja mecánica ideal de la palanca descrita en la figura 12.4c si la fuerza de entrada se aplica a 30 cm del clavo y el punto de apoyo se localiza a 2 cm de dicho clavo.

12.13. La fuerza de entrada que ejerce un músculo del antebrazo (véase la figura 12.4d) es de 120 N y actúa a una distancia de 4 cm del codo. La longitud total del antebrazo es de 25 cm. Calcule cuánto es el peso que se ha levantado. Resp. 19.2 N

12.14. Una rueda de 20 cm de diámetro está unida a un eje cuyo diámetro es de 6 cm. Si se agrega al eje un peso de 400 N, ¿qué fuerza habrá que aplicar al borde de la rueda para levantar el peso con rapidez constante? Desprecie la fricción.

12.15. Una masa de 20 kg va a ser levantada con una varilla de 2 m de largo. Si se puede ejercer una fuerza descendente de 40 N en un extremo de la varilla, ¿dónde se deberá colocar un bloque de madera que actúe como punto de apoyo? Resp. A 33.9 cm de la masa

12.16. Calcule la fuerza **F** necesaria para levantar una carga W de 200 N por medio de la polea que se muestra en la figura 12.16a.

12.17. ¿Qué fuerza de entrada se necesita para levantar la carga de 200 N con el sistema ilustrado en la figura 12.16b? Resp. 50.0 N

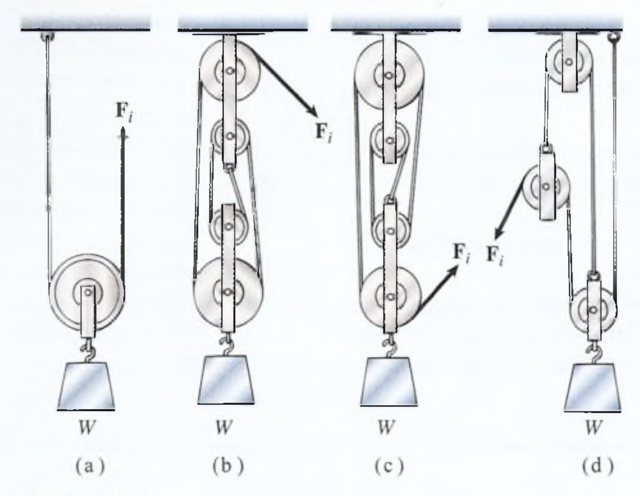


Figura 12.6

12.18. ¿Cuáles son las fuerzas de entrada necesarias para levantar la carga de 200 N con los sistemas que muestran las figuras 12.16c y d?

12.19. ¿Cuál es la ventaja mecánica de un destornillador utilizado usado como rueda y eje (cabria) si su hoja tiene 0.3 in de ancho y su mango tiene 0.8 in de largo? Resp. 2.67

12.20. El malacate de cadena de la figura 12.17 es una combinación de la rueda y eje con el aparejo de poleas. Demuestre que la ventaja mecánica ideal de este dispositivo está dada por

$$M_I = \frac{2R}{R - r}$$

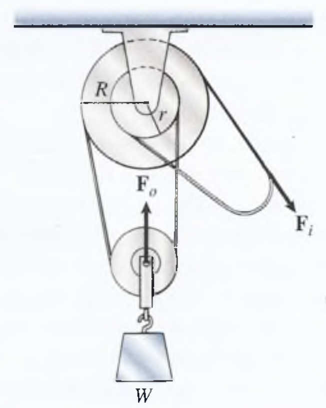


Figura 12.17

12.21. Suponga que el radio mayor de la figura 12-17 es tres veces más grande que el radio pequeño. ¿Qué fuerza de entrada se requiere para levantar una carga de 10 kg sin fricción alguna? Resp. 32.7 N

Sección 12.5 La transmisión del momento de torsión

12.22. Un motor de 1500 rev/min tiene una polea de tracción de 3 in de diámetro y la polea de arrastre tiene un diámetro de 9 in. ¿Cuál es la ventaja mecánica ideal y cuál es el número de revoluciones por minuto de la polea de salida?

12.23. Una polea de entrada de 30 cm de diámetro gira a 200 rev/min sobre una correa de transmisión conectada a una polea de salida cuyo diámetro es de 60 cm. ¿Cuál es la razón entre el momento de torsión de salida y el momento de torsión de entrada? ¿Cuántas revoluciones por minuto hay en la salida? Resp. 100 rev/min

12.24. Un sistema de poleas con correa en V tiene poleas de tracción de salida y entrada cuyos diámetros son 6 in y 4 in, respectivamente. Se aplica un momento de torsión de 200 lb · in a la tracción de entrada. ¿Cuál es el momento de torsión de la salida?

12.25. La razón entre la rapidez de salida y la de entrada de un sistema de impulsión por engranes es de dos a uno (2:1). ¿Cuál es la ventaja mecánica en este caso? Resp. $\frac{1}{2}$

12.26. Un conjunto de dos engranes cilíndricos tiene 40 y 10 dientes, respectivamente. ¿Cuáles son sus posibles ventajas mecánicas ideales?

12.27. Para los engranes cilíndricos del problema 12.26, ¿cuál es la rapidez rotacional del engrane más pequeño si la del más grande es de 200 rev/min? Resp. 800 rev/min

Sección 12.7 Aplicaciones del plano inclinado

12.28. ¿Cuál debe ser el espesor de la base si una cuña tiene 20 cm de longitud y se desea que la fuerza de entrada sea igual a la décima parte de la fuerza de salida?

12.29. ¿Cuál debe ser el ángulo de la punta de una cuña para que su ventaja mecánica sea de 10? Resp. 5.71°

12.30. Una caja de 10 kg es llevada desde el piso hasta una plataforma de carga a través de una rampa de 6 m de longitud y 2 m de altura. Supongamos que $\mu_k = 0.25$. ¿Cuáles son las ventajas mecánicas ideal y real de esa rampa?

12.31. En el caso de la rampa del problema 12.30, ¿cuál es la eficiencia de dicha rampa? Resp. 58.6%

***12.32.** Una fuerza de entrada de 20 lb se aplica al mango de 6 in de una llave de tuercas que se usa para apretar una tuerca de $\frac{1}{4}$ in de diámetro. Se produce una fuerza real de salida de 600 lb. Si el perno tiene 10 cuerdas o roscas por pulgada, ¿cuál es la ventaja mecánica ideal y cuál es la eficiencia?

12.33. La palanca de un gato de tornillo tiene 24 in de largo. Si el tornillo tiene seis cuerdas o roscas por pulgada, ¿cuál es la ventaja mecánica ideal? Resp. 904

12.34. Si el gato de tornillo del problema 12.33 tiene 15% de eficiencia, ¿qué fuerza se requiere para levantar con él 2000 lb?

Problemas adicionales

***12.35.** Un plano inclinado tiene 6 m de longitud y 1 m de altura. El coeficiente de fricción cinética es 0.2. ¿Cuánta fuerza se requiere para empujar con rapidez constante un peso de 2400 N hacia la parte alta del plano inclinado? ¿Cuál es la eficiencia del plano inclinado? Resp. 873 N, 45.8%

***12.36.** Una rueda y un eje se usan para elevar una masa de 700 kg. El radio de la rueda es de 0.50 m y el del eje de 0.04 m. Si la eficiencia real es de 60%, ¿qué fuerza de entrada deberá aplicarse a la rueda?

***12.37.** Un eje que gira a 800 rev/min imparte un momento de torsión de 240 N · m a un eje de salida que gira a 200 rev/min. Si la eficiencia de la máquina es de 70%, calcule el momento de torsión de salida. ¿Cuál es la potencia de salida? Resp. 672 N · m, 14.1 kW

***12.38.** El tornillo de un gato tiene una cuerda cuyo paso de rosca es de 0.25 in. Su manija tiene 16 in de largo y se está levantando con él una carga de 1.9 toneladas. Sin tener en cuenta la fricción, ¿qué fuerza hay que aplicar en el extremo de la manija? ¿Cuál es la ventaja mecánica?

***12.39.** Cierto compresor para refrigeración viene provisto de una polea de 250 mm de diámetro y está diseñado para funcionar a 600 rev/min. ¿Cuál deberá ser el diámetro de la polea del motor para que su velocidad sea de 2000 rev/min? Resp. 75.0 mm

***12.40.** En la correa de un ventilador, la rueda impulsora es de 20 cm de diámetro y la rueda de arrastre tiene un diámetro de 50 cm. La potencia de entrada proviene de un motor de 4 kW que hace girar a la rueda motriz a 300 rev/min. Si la eficiencia es de 80%, calcule el número de revoluciones por minuto y el momento de torsión que se imparten a la rueda impulsada.

12.41. Una cuña para partir leños mide 16 cm por lado y el ángulo de la punta es de 10°. ¿Cuál es la ventaja mecánica ideal? Resp. 5.76

12.42. Una máquina tiene una eficiencia de 72%. Una fuerza de entrada de 500 N se ejerce a través de una distancia paralela de 40 cm. ¿Cuánta energía se pierde en el proceso?

***12.43.** Un motor con 80% de eficiencia acciona un malacate con una eficiencia de 50%. Si la potencia que se imparte al motor es de 6 kW, ¿a qué altura elevará el malacate una masa de 400 kg en un tiempo de 4 s? Resp. 2.45 m

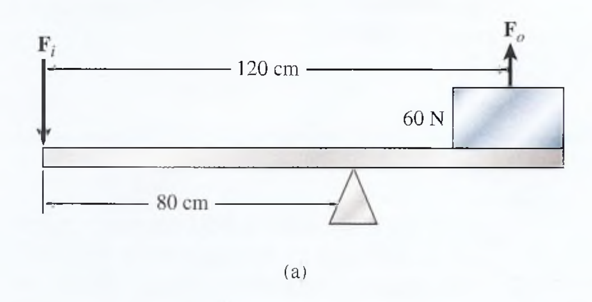
Preguntas para la reflexión crítica

12.44. Un peso de 60 N es levantado por los tres procedimientos que se ilustran en la figura 12.18. Calcule la ventaja mecánica ideal y la fuerza de entrada que se requiere para cada aplicación.
Resp. 2, 30 N; 3, 20 N; 0.33, 180 N

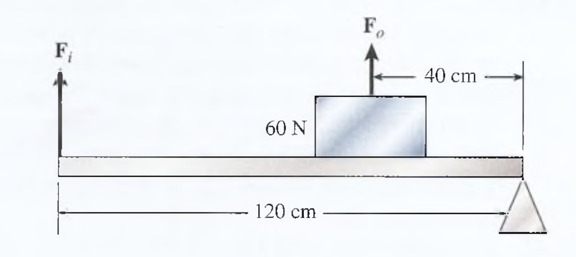
12.45. Una transmisión de tornillo sinfín similar a la que se muestra en la figura 12.11 tiene n dientes en la rueda dentada. (Si $n = 80$, una vuelta completa del tornillo sinfín hará avanzar la rueda un octavo de revolución.) Obtenga una expresión para calcular la ventaja mecánica ideal de la rueda dentada para el tornillo sinfín en función del radio de la polea de entrada R, el radio del eje motor r y el número de dientes n de la rueda dentada.

12.46. La transmisión de tornillo sinfín del problema 12.45 tiene una rueda dentada con 80 dientes. Si el radio de la rueda de entrada es de 30 cm y el radio del eje motor es de 5 cm, ¿qué fuerza de entrada se requiere para levantar una carga de 1200 kg? Suponga una eficiencia de 80%. Resp. 30.6 N

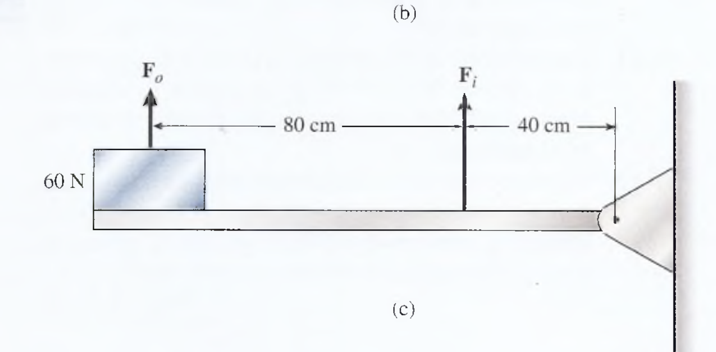
12.47. La chumacera de un remo de 3.5 m está instalada a 1 m del extremo del mango. La persona que rema en un bote aplica una fuerza de 50 N al extremo del mango. ¿Cuáles son la ventaja mecánica ideal y la fuerza de salida? ¿Aumenta o disminuye la ventaja mecánica si la chumacera se coloca más cerca del extremo del mango? ¿A qué distancia del extremo del mango se debe instalar la chumacera para obtener un incremento de 20% en la fuerza de salida?



(a)



(b)



(c)

Figura 12.18

12.48. Dibuje bosquejos que muestren las dimensiones posibles que producirá una ventaja mecánica de 5 en una palanca, una rueda y eje, y un plano inclinado.

12.49. Un motor de 60 W impulsa la polea de entrada de una transmisión por correa a 150 rev/min. Los diámetros de las poleas de entrada y de salida son 60 cm y 20 cm, respectivamente. Supongamos que en este caso la ventaja mecánica real es de 0.25. (a) ¿Cuál es el momento de torsión de salida? (b) ¿Cuál es la potencia de salida? (c) ¿Cuál es la eficiencia?

***12.50.** Un par de poleas por pasos (véase la figura 12.19) permite cambiar las rapideces de salida con una sencilla modificación de la correa. Si un motor eléctrico impulsa la polea de entrada a 2000 rev/min, halle los valores posibles de la rapidez angular del eje de salida. Los diámetros de las poleas son 4, 6 y 8 cm.

Resp. (a) Polea pequeña de entrada: 2000, 1330, 1000 rev/min; (b) polea de entrada de en medio: 3000, 2000, 1500 rev/min; (c) polea grande de entrada: 4000, 2670, 2000 rev/min.

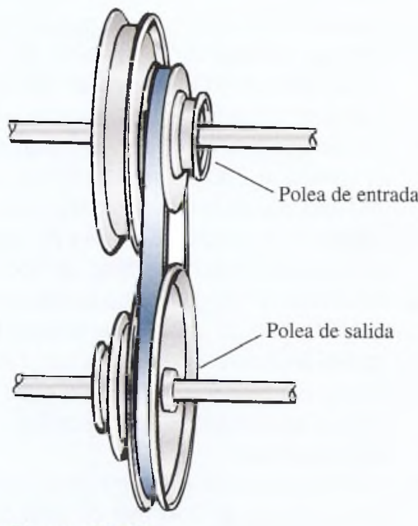


Figura 12.19

13 Elasticidad



El salto de *bungee* utiliza una correa elástica larga que se estira hasta alcanzar una longitud máxima que es proporcional al peso de la persona que salta. La elasticidad de la correa determina la amplitud resultante de las vibraciones. Si el límite elástico de la correa se excede, la cuerda se rompe. (*Foto © vol. 10 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará, por medio de ejemplos y análisis, que ha comprendido los conceptos de *elasticidad, límite elástico, esfuerzo, deformación* y *límite de ruptura.*
2. Escribirá y aplicará fórmulas para calcular el módulo de Young, el módulo de corte y el módulo volumétrico.
3. Definirá y analizará el significado de *dureza, maleabilidad* y *ductilidad* en el caso de los metales.

Hasta ahora hemos estudiado objetos en movimiento o en reposo. Se ha partido de la suposición de que los objetos son rígidos y totalmente sólidos. Sin embargo, sabemos que el alambre puede alargarse, que los neumáticos de hule se comprimen y que los pernos se rompen en algunas ocasiones. Para tener una comprensión más completa de la naturaleza, es necesario estudiar las propiedades mecánicas de la materia. En este capítulo se analizarán los conceptos de *elasticidad, tensión* y *compresión*. En la medida en que aumentan los tipos de aleaciones y la demanda de ellas es cada vez mayor, se vuelve más importante que conozcamos bien todos estos conceptos. Por ejemplo, el esfuerzo al que se someten los vehículos espaciales o los cables de los puentes modernos es de una magnitud que hace apenas unos años era inconcebible.

13.1 Propiedades elásticas de la materia

Definimos como ***cuerpo elástico*** aquel que recobra su tamaño y su forma originales cuando deja de actuar sobre él una fuerza deformante. Las bandas de hule, las pelotas de golf, los trampolines, las camas elásticas, las pelotas de fútbol y los resortes son ejemplos comunes de cuerpos elásticos. La masilla, la pasta y la arcilla son ejemplos de cuerpos inelásticos. Para todos los cuerpos elásticos, conviene establecer relaciones de causa y efecto entre la deformación y las fuerzas deformantes.

Considere el resorte de longitud l en la figura 13.1. Podemos estudiar su ***elasticidad*** añadiendo pesas sucesivamente y observando el incremento en su longitud. Una pesa de 20 N alarga el resorte en 1 cm, una pesa de 40 N alarga el resorte 2 cm, y una pesa de 60 N alarga el resorte 3 cm. Es evidente que existe una relación directa entre el estiramiento del resorte y la fuerza aplicada.

Robert Hooke fue el primero en establecer esta relación por medio de la invención de un volante de resorte para reloj. En términos generales, Hooke descubrió que cuando una fuerza **F** actúa sobre un resorte (figura 13.2) produce en él un alargamiento s que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza. La ***ley de Hooke*** se representa como

$$F = ks \qquad \textbf{(13.1)}$$

La constante de proporcionalidad k varía mucho de acuerdo con el tipo de material y recibe el nombre de ***constante elástica.*** Para el ejemplo ilustrado en la figura 13.1, la constante elástica es

$$k = \frac{F}{s} = 20 \text{ N/cm}$$

La ley de Hooke no se limita al caso de los resortes en espiral; de hecho, se aplica a la deformación de todos los cuerpos elásticos. Para que la ley se pueda aplicar de un modo más general, es conveniente definir los términos *esfuerzo* y *deformación*. El ***esfuerzo*** se refiere a la causa de una deformación elástica, mientras que la deformación se ***refiere*** a su *efecto*, en otras palabras, a la alteración de la forma en sí misma.

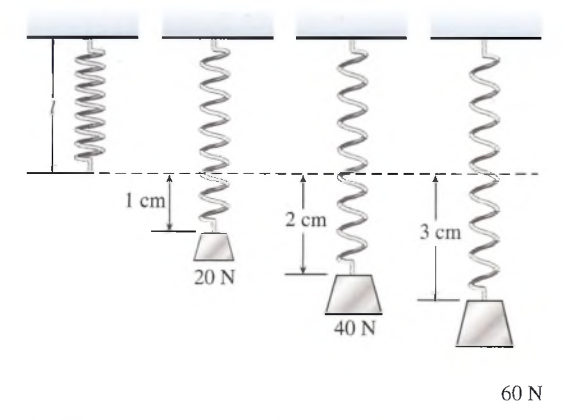


Figura 13.1 Alargamiento uniforme de un resorte.

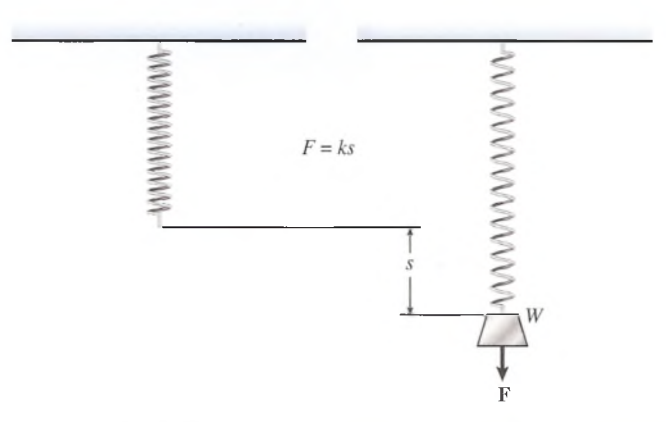
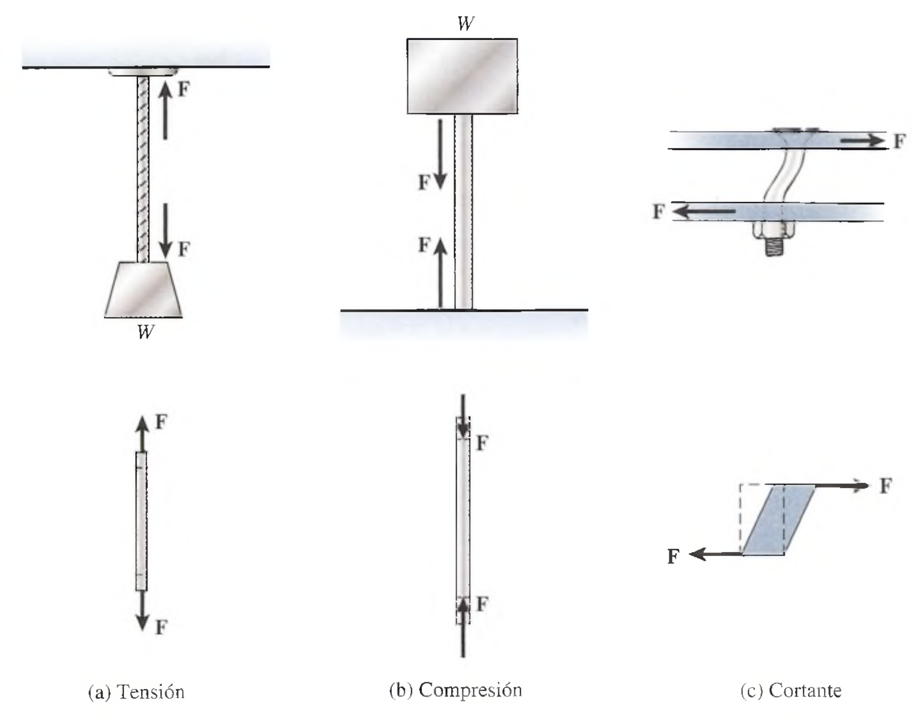


Figura 13.2 Relación entre la fuerza **F** aplicada y la elongación que produce.



(a) Tensión (b) Compresión (c) Cortante

Figura 13.3 Tres tipos comunes de esfuerzos y sus correspondientes deformaciones: (a) tensión, (b) compresión, (c) cortante.

En la figura 13.3 se muestran tres tipos comunes de esfuerzos y sus correspondientes deformaciones. Un ***esfuerzo de tensión*** se presenta cuando fuerzas iguales y opuestas se apartan entre sí. En un ***esfuerzo de compresión*** las fuerzas son iguales y opuestas y se acercan entre sí. Un ***esfuerzo cortante*** ocurre cuando fuerzas iguales y opuestas no tienen la misma línea de acción.

La eficacia de cualquier fuerza que produce un esfuerzo depende en gran medida del área sobre la que se distribuye la fuerza. Por esta razón, una definición más completa de esfuerzo se puede enunciar en la siguiente forma:

Esfuerzo es la razón de una fuerza aplicada entre el área sobre la que actúa, por ejemplo, newtons por metro cuadrado o libras por pie cuadrado.

Como se mencionó antes, el término *deformación* representa el efecto de un esfuerzo dado. La definición general de deformación es la siguiente:

Deformación es el cambio relativo en las dimensiones o en la forma de un cuerpo como resultado de la aplicación de un esfuerzo.

En el caso de un esfuerzo de tensión o de compresión, la deformación puede considerarse como un cambio en la longitud por unidad de longitud. Un esfuerzo cortante, por otra parte, puede alterar únicamente la forma de un cuerpo sin cambiar sus dimensiones. Generalmente el esfuerzo cortante se mide en función de un desplazamiento angular.

El ***límite elástico*** es el esfuerzo máximo que puede sufrir un cuerpo sin que la deformación sea permanente. Por ejemplo, una varilla de aluminio cuya área en sección transversal es de 1 in^2 se deforma permanentemente si se le aplica un esfuerzo de tensión mayor de 19000 lb. Esto no significa que la varilla de aluminio se romperá en ese punto, sino únicamente que el cable no recuperará su tamaño original. En realidad, se puede incrementar la tensión hasta casi 21 000 lb antes de que la varilla se rompa. Esta propiedad de los metales les permite ser convertidos en alambres de secciones transversales más pequeñas. El mayor esfuerzo al que se puede someter un alambre sin que se rompa recibe el nombre de ***resistencia límite.***

Si no se excede el límite elástico de un material, podemos aplicar la ley de Hooke a cualquier deformación elástica. Dentro de los límites para un material dado, se ha comprobado experimentalmente que la relación de un esfuerzo determinado entre la deformación que produce es una constante. En otras palabras, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación. La *ley de Hooke* establece:

> Siempre que no se exceda el límite elástico, una deformación elástica es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada por unidad de área (esfuerzo).

Si llamamos a la constante de proporcionalidad el ***módulo de elasticidad,*** podemos escribir la ley de Hooke en su forma más general:

$$\textit{Módulo de elasticidad} = \frac{\textit{esfuerzo}}{\textit{deformación}} \qquad \textbf{(13.2)}$$

En las siguientes secciones analizaremos las aplicaciones específicas de esta relación fundamental.

13.2 Módulo de Young

En esta sección vamos a considerar que los esfuerzos y deformaciones son longitudinales cuando se aplican a alambres, varillas o barras. Por ejemplo, en la figura 13.4 una fuerza **F** se aplica al extremo de un alambre con un área en sección transversal A. El esfuerzo longitudinal está dado por

$$\text{Esfuerzo longitudinal} = \frac{F}{A}$$

La unidad métrica para el esfuerzo es el *newton por metro cuadrado*, que es idéntico al *pascal* (Pa).

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

La unidad del SUEU para el *esfuerzo es la libra por pulgada cuadrada* (lb/in^2). Puesto que la libra por pulgada cuadrada se sigue usando, resulta útil compararla con la unidad del SI:

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6\,895 \text{ Pa} = 6.895 \text{ kPa}$$

El efecto de tal esfuerzo es el alargamiento del alambre, o sea, un incremento en su longitud. Por tanto, la deformación longitudinal puede representarse mediante el cambio de longitud por unidad de longitud. Podemos escribir

$$\text{Deformación longitudinal} = \frac{\Delta l}{l}$$

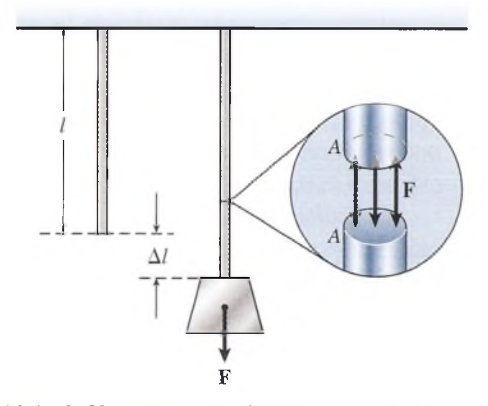


Figura 13.4 Cálculo del módulo de Young para un alambre con un área en sección transversal A. La elongación Δl se ha amplificado para mostrarla con mayor claridad.

donde l es la longitud original y Δl es la elongación (alargamiento total). Se ha demostrado experimentalmente que hay una disminución similar en la longitud como resultado de un esfuerzo de compresión. Las mismas ecuaciones se aplican ya sea que se trate de un objeto sujeto a tensión o de un objeto sujeto a compresión.

Si definimos el módulo de elasticidad longitudinal como ***módulo de Young*** Y, podemos escribir la ecuación (13.2) como

$$\textit{Módulo de Young} = \frac{\textit{esfuerzo longitudinal}}{\textit{deformación longitudinal}}$$

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l} = \frac{Fl}{A\,\Delta l} \qquad \textbf{(13.3)}$$

Las unidades del módulo de Young son las mismas que las unidades de esfuerzo: libras por pulgada cuadrada o pascales. Esto es lógico, ya que la deformación longitudinal es una cantidad que carece de unidades (adimensional). Los valores representativos correspondientes de algunos de los materiales más comunes se muestran en las tablas 13.1 y 13.2.

Tabla 13.1

Constantes elásticas de varios materiales, en unidades del SI

Material	Módulo de Young Y, MPa*	Módulo de corte S, MPa	Módulo volumétrico B, MPa	Límite elástico MPa	Resistencia límite MPa
Acero	207 000	82 700	159 000	248	489
Aluminio	68 900	23 700	68 900	131	145
Cobre	117 000	42 300	117 000	159	338
Hierro	89 600	68 900	96 500	165	324
Latón	89 600	35 300	58 600	379	455

*(1 MPa = 10^6 Pa)

Tabla 13.2

Constantes elásticas de varios materiales en unidades del SUEU

Material	Módulo de Young Y, lb/in²	Módulo de corte S, lb/in²	Módulo volumétrico B, lb/in²	Límite elástico lb/in²	Resistencia límite lb/in²
Acero	13×10^6	10×10^6	14×10^6	24 000	47 000
Aluminio	10×10^6	3.44×10^6	10×10^6	19 000	21 000
Cobre	17×10^6	6.14×10^6	17×10^6	23 000	49 000
Hierro	13×10^6	10×10^6	14×10^6	24 000	47 000
Latón	13×10^6	5.12×10^6	8.5×10^6	55 000	66 000

Ejemplo 13.1

Un cable telefónico de 120 m de largo y de 2.2 mm de diámetro se estira debido a una fuerza de 380 N a lo largo del cable. ¿Cuál es el esfuerzo longitudinal? Si la longitud después de ser estirado es de 120.10 m, ¿cuál es la deformación longitudinal? Determine el módulo de Young para el cable.

Plan: Calcularemos el área de la sección transversal del cable y determinaremos el esfuerzo como la fuerza por unidad de área. Luego, la deformación se reconoce como el cambio en la longitud por unidad de longitud inicial. Por último, el módulo de Young es la relación del esfuerzo entre la deformación.

Solución: La sección transversal de un cable de 2.2×10^{-3} m de diámetro es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(2.2 \times 10^{-3}\text{ m})^2}{4}; \qquad A = 3.80 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$\text{Esfuerzo} = \frac{F}{A} = \frac{380\text{ N}}{3.80 \times 10^{-6}\text{ m}^2}$$

$$\text{Esfuerzo} = 100 \times 10^6\text{ N/m}^2 = 100\text{ MPa}$$

El cambio en la longitud es (120.10 m − 120.00 m) o 0.100 m. Por consiguiente,

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.10\text{ m}}{120\text{ m}}; \qquad \text{Deformación} = 8.3 \times 10^{-4}$$

Por último, el módulo de Young es la razón del esfuerzo a la deformación.

$$Y = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{100\text{ MPa}}{8.3 \times 10^{-4}}; \qquad Y = 120\,000\text{ MPa}$$

Ejemplo 13.2

¿Cuál es la carga máxima que se puede colgar de un alambre de acero de 6 mm de diámetro y 2 m de longitud, sin exceder su límite elástico? Determine el incremento en la longitud bajo el efecto de esta carga.

Plan: De nuevo, necesitamos hallar el área de la sección transversal del alambre. Luego, a partir de la tabla 13.2, observamos que el límite elástico para el acero es 248 000 MPa. El peso W de la carga suspendida no debe producir un esfuerzo mayor que este límite, por tanto, podemos resolver para la carga en la ecuación del esfuerzo. El aumento en la longitud puede calcularse directamente a partir de la ecuación (13.3).

Solución: El área del cable es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(6 \times 10^{-3}\text{ m})^2}{4}; \qquad A = 2.83 \times 10^{-5}\text{ m}^2$$

El esfuerzo limitante en este caso es el peso por unidad de área, o

$$\textit{Límite elástico} = \frac{W}{A} \qquad \text{o} \qquad W = \textit{límite elástico} \times A$$

$$W = (2.48 \times 10^8\text{ Pa})(2.83 \times 10^{-5}\text{ m}^2) = 7.01 \times 10^3\text{ N}$$

La mayor carga que puede soportarse se calcula a partir de este peso:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{7.01 \times 10^3\text{ N}}{9.8\text{ m/s}^2} = 716\text{ kg}$$

El incremento de longitud bajo dicha carga se determina a partir de la ecuación (13.3), en la siguiente forma:

$$\Delta L = \frac{l}{Y}\left(\frac{F}{A}\right) = \frac{2.00\text{ m}}{2.07 \times 10^{11}\text{ Pa}}(2.48 \times 10^8\text{ Pa})$$

$$\Delta L = 2.40 \times 10^{-3}\text{ m}$$

La longitud aumenta 2.40 mm y la nueva longitud es 2.0024 m.

13.3 Módulo de corte

Los esfuerzos de compresión y de tensión producen un ligero cambio en las dimensiones lineales. Como se mencionó antes, un esfuerzo cortante altera únicamente la forma del cuerpo, sin que cambie su volumen. Por ejemplo, considere las fuerzas paralelas no concurrentes que actúan sobre el cubo que se ilustra en la figura 13.5. La fuerza aplicada provoca que cada capa sucesiva de átomos se deslice sobre la siguiente, en forma parecida a lo que les ocurre a las páginas de un libro bajo un esfuerzo similar. Las fuerzas interatómicas restituyen al cubo su forma original cuando cesa dicho esfuerzo.

El esfuerzo cortante se define como la relación de la fuerza tangencial **F** entre el área A sobre la que se aplica. La ***deformación cortante*** se define como el ángulo ϕ (en radianes), que se conoce como *ángulo de corte* (consulte la figura 13.5b). Si se aplica la ley de Hooke, podemos ahora definir el ***módulo de corte*** S en la siguiente forma:

$$S = \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Deformación cortante}} = \frac{F/A}{\phi} \quad \textbf{(13.4)}$$

El ángulo ϕ por lo general es tan pequeño que es aproximadamente igual a tan ϕ. Aprovechando este hecho, podemos volver a escribir la ecuación (13.4) en la siguiente forma:

$$S = \frac{F/A}{\tan \phi} = \frac{F/A}{d/l} \quad \textbf{(13.5)}$$

Debido a que el valor de S nos da información sobre la rigidez de un cuerpo, a veces se le conoce como ***módulo de rigidez.***

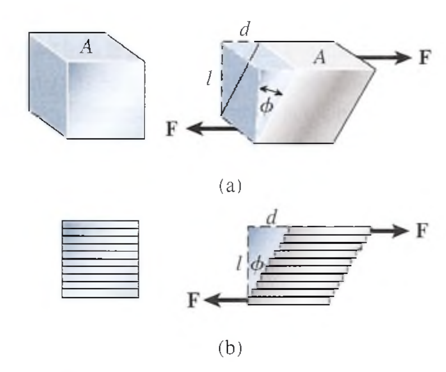


Figura 13.5 Esfuerzo cortante y deformación cortante.

Ejemplo 13.3

Un perno de acero (figura 13.6) tiene una sección transversal de 1.8×10^{-4} m^2 y sobresale 3.8 cm de la pared. Si el extremo del perno está sometido a una fuerza cortante de 35 kN, ¿cuál será la flexión hacia abajo del perno?

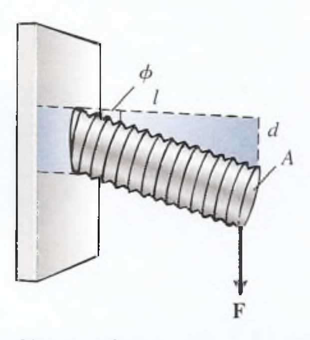


Figura 13.6

Plan: El esfuerzo cortante es la fuerza cortante **F** por unidad de área A, y la deformación cortante es la desviación d por unidad de longitud l del perno. Podemos determinar el módulo de corte para el acero a partir de la tabla 13.1 y luego calcular la desviación a partir de la ecuación (13.5). Procure usar las unidades básicas del SI para todas las cantidades sustituidas.

Solución: Resolvemos para la desviación d como sigue:

$$S = \frac{F/A}{d/l} = \frac{Fl}{Ad}$$

$$d = \frac{Fl}{AS} = \frac{(35\,000 \text{ N})(0.038 \text{ m})}{(1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(8.27 \times 10^{10} \text{ Pa})}$$

$$d = 8.94 \times 10^{-5} \text{ m}$$

El extremo del perno cuyo diámetro mide aproximadamente 1.5 cm se desvía alrededor de 0.09 mm. Las deformaciones de corte por lo general son muy pequeñas.

13.4 Elasticidad de volumen; módulo volumétrico

Hasta ahora hemos considerado los esfuerzos que causan un cambio en la forma de un objeto o que dan por resultado principalmente deformaciones en una sola dimensión. En esta sección nos ocuparemos de los cambios en el volumen. Por ejemplo, considere el cubo de la figura 13.7 en el cual las fuerzas se aplican uniformemente sobre la superficie. El volumen inicial del cubo se indica como V y el área de cada cara se representa por A. La fuerza resultante **F** que se aplica normalmente a cada una de las caras provoca un cambio en el volumen $-\Delta V$. El signo menos indica que el cambio representa una reducción de volumen. El *esfuerzo de volumen* F/A es la fuerza normal por unidad de área, mientras que la *deformación de volumen* $-\Delta V/V$ es el cambio de volumen por unidad de volumen. Al aplicar la ley de Hooke, definimos el módulo de elasticidad de volumen, o ***módulo volumétrico,*** de la manera siguiente:

$$B = \frac{\text{esfuerzo de volumen}}{\text{deformación de volumen}} = -\frac{F/A}{\Delta V/V} \tag{13.6}$$

Este tipo de deformación se aplica tanto a líquidos como a sólidos. La tabla 13.3 muestra los módulos de volumen para algunos de los líquidos más comunes. Cuando se trabaja con líquidos a veces es más conveniente representar el esfuerzo como la presión P, que se define como la fuerza por unidad de área F/A. Con esta definición podemos escribir la ecuación (13.6) como

$$B = \frac{-P}{\Delta V/V} \tag{13.7}$$

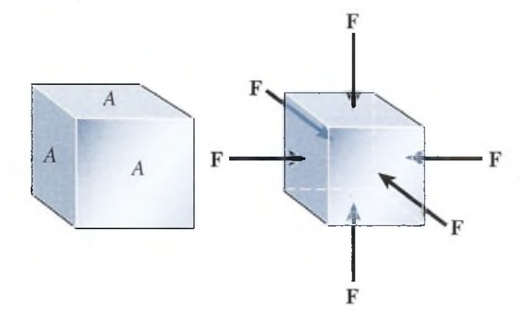


Figura 13.7 Módulo volumétrico. El volumen original se reduce por la acción de una fuerza de compresión uniforme sobre cada una de las caras.

Tabla 13.3

Módulos de volumen para líquidos

	Módulo volumétrico B	
Líquido	**MPa**	**lb/in^2**
Aceite	1700	2.5×10^5
Agua	2100	3.1×10^5
Alcohol etílico	1100	1.6×10^5
Benceno	1050	1.5×10^5
Mercurio	27000	40×10^5

Al valor recíproco del módulo volumétrico se le llama *compresibilidad k*. Con frecuencia conviene estudiar la elasticidad de los materiales midiendo sus respectivas compresibilidades. Por definición,

$$k = \frac{1}{B} = -\left(\frac{1}{P}\right)\frac{\Delta V}{V_0} \qquad \textbf{(13.8)}$$

La ecuación (13.8) indica que la compresibilidad es el cambio fraccional en volumen por unidad de incremento en la presión.

Ejemplo 13.4

Una prensa hidráulica contiene cinco litros de agua. Determine el decremento en volumen de agua cuando se ve sometida a una presión de 2000 kPa.

Solución: El decremento de volumen se obtiene al despejar ΔV de la ecuación (13.7):

$$\Delta V = -\frac{PV}{B} = \frac{(2 \times 10^6 \text{ Pa})(5 \text{ L})}{2.1 \times 10^9 \text{ Pa}}$$
$$= -0.00476 \text{ L} = -4.76 \text{ mL}$$

13.5 Otras propiedades físicas de los metales

Además de la elasticidad, el esfuerzo de tensión y el esfuerzo cortante, los materiales presentan otras propiedades importantes. Un sólido consiste en un conjunto de moléculas tan cercanas unas a otras que se atraen fuertemente entre sí. Esta atracción, llamada ***cohesión***, le imparte a un sólido una forma y un tamaño definidos. También afecta su utilidad para la industria como material de trabajo. Es preciso comprender propiedades como la dureza, la ductilidad, la maleabilidad y la conductividad antes de elegir metales para aplicaciones específicas. Tres de estas propiedades se ilustran en la figura 13.8.

Dureza es un término industrial utilizado para describir la capacidad de los metales para resistir a fuerzas que tienden a penetrarlos. Los materiales duros resisten rayaduras, desgastes, penetración o cualquier otro daño físico. Algunos metales, como el sodio y el potasio son blandos, mientras que el hierro y el acero son dos de los materiales más duros. La dureza de los metales se prueba con máquinas que presionan una punta de diamante cónica contra los materiales que se van a probar. La penetración se mide y la dureza se lee directamente en una carátula graduada.

Las otras dos propiedades especiales de los materiales son la ***ductilidad*** y la ***maleabilidad***. El significado de cada uno de estos términos se puede apreciar en la figura 13.8. La ductilidad se define como la capacidad de un metal de ser convertido en alambre. El tungsteno

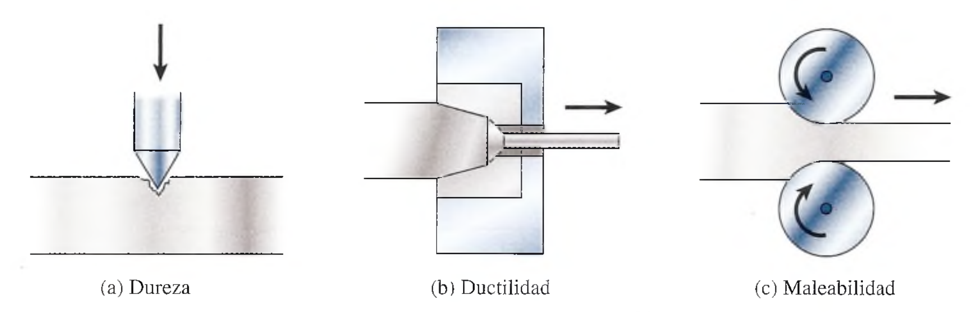


Figura 13.8 Ejemplos de las propiedades de trabajo de los metales: (a) un metal duro resiste la penetración, (b) un metal dúctil puede estirarse en forma de alambre, y (c) un metal maleable puede laminarse en hojas.

y el cobre son sumamente dúctiles. La maleabilidad es la propiedad que nos permite martillar o doblar los metales para darles la forma deseada o para laminarlos en forma de hojas. La mayoría de los metales son maleables y el oro es el más maleable de todos.

La *conductividad* se refiere a la capacidad de los metales para permitir que fluya la electricidad a través de ellos. Los mejores conductores son la plata, el cobre, el oro y el aluminio, en ese orden. Se examinará con mayor detalle esta propiedad en capítulos posteriores.

Resumen y repaso

Resumen

En la industria se deben utilizar los materiales en forma eficaz, y para las situaciones apropiadas. Si no es así, habrá fallas en los metales que darán lugar a daños costosos o lesiones graves entre los empleados. En este capítulo hemos expuesto las propiedades elásticas de la materia y algunas de las fórmulas que se emplean para predecir los efectos del esfuerzo sobre ciertos sólidos. Los siguientes puntos resumen este capítulo:

- Según la *ley de Hooke*, un cuerpo elástico se deforma o se alarga en una cantidad s cuando se le aplica una fuerza **F**. La constante de proporcionalidad k es la *constante de elasticidad:*

$$F = ks \qquad k = \frac{F}{s} \qquad \textit{Ley de Hooke}$$

- El esfuerzo es la relación entre una fuerza aplicada y el área sobre la cual actúa. La *deformación* es el cambio relativo de dimensiones resultante del esfuerzo.

  Por ejemplo,

$$\text{Esfuerzo longitudinal} = \frac{F}{A}$$

$$\text{Deformación longitudinal} = \frac{\Delta l}{l}$$

- El *módulo de elasticidad* es la relación constante entre el esfuerzo y la deformación:

$$\textit{Módulo de elasticidad} = \frac{\textit{esfuerzo}}{\textit{deformación}}$$

- El *módulo de Young Y* permite calcular deformaciones longitudinales:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l}$$

o

$$Y = \frac{Fl}{A \cdot \Delta l} \qquad \textit{Módulo de Young}$$

- El esfuerzo cortante se presenta cuando se produce una deformación angular ϕ:

$$S = \frac{F/A}{\tan \phi}$$

o

$$S = \frac{F/A}{d/l} \qquad \textit{Módulo de corte}$$

- Siempre que la aplicación de un esfuerzo provoca un cambio de volumen ΔV, es necesario aplicar el *módulo volumétrico B*, el cual se calcula con la expresión

$$B = -\frac{F/A}{\Delta V/V} \qquad \textit{Módulo volumétrico}$$

El recíproco del módulo volumétrico se conoce como compresibilidad.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

13.1. Explique con claridad la relación entre esfuerzo y deformación.

13.2. Dos alambres tienen la misma longitud y área en sección transversal, pero no son del mismo material. Ambos alambres cuelgan del techo y tienen atado un peso de 2000 lb cada uno. El alambre de la izquierda se estira dos veces más que el de la derecha, ¿cuál de ellos tiene mayor módulo de Young?

13.3. ¿El módulo de Young depende de la longitud y del área de la sección transversal? Explique su respuesta.

13.4. Dos alambres, *A* y *B*, son del mismo material y están sometidos a las mismas cargas. Comente cuáles serán sus alargamientos relativos cuando: (a) el alambre *A* tiene el doble de longitud y de diámetro que el alambre *B*, y (b) el alambre *A* tiene el doble de longitud que el alambre *B* y su diámetro es igual a la mitad del diámetro del alambre *B*.

13.5. Después de estudiar las diversas constantes elásticas que se presentan en las tablas 13.1 y 13.2, ¿qué diría usted que es más fácil: estirar un material o cortarlo? Explique su respuesta.

13.6. Una masa de 200 kg está sostenida de manera uniforme por tres alambres, uno de cobre, uno de aluminio y uno de acero. Si los alambres tienen las mismas dimensiones, ¿a cuál de ellos corresponde el mayor esfuerzo y a cuál el menor? ¿Cuál de ellos sufre la mayor deformación y cuál la menor?

13.7. Comente los diversos esfuerzos que se presentan cuando un tornillo de máquina se aprieta.

13.8. Mencione varios ejemplos prácticos de esfuerzos longitudinales, cortantes y volumétricos.

13.9. Para un metal dado, ¿esperaría usted que hubiera alguna relación entre su módulo de elasticidad y su coeficiente de restitución? Comente el tema.

13.10. ¿Qué tiene mayor compresibilidad, el acero o el agua?

Problemas

Sección 13.1 Propiedades elásticas de la materia

13.1. Cuando una masa de 500 g cuelga de un resorte, éste se alarga 3 cm. ¿Cuál es la constante elástica?
Resp. 163 N/m

13.2. ¿Cuál es el incremento del alargamiento en el resorte del problema 13.1 si se cuelga una masa adicional de 500 g debajo de la primera?

13.3. La constante elástica de un resorte resultó ser de 3000 N/m. ¿Qué fuerza se requiere para comprimir el resorte hasta una distancia de 5 cm?
Resp. 150 N

13.4. En un extremo de un resorte de 6 in se ha colgado un peso de 4 lb, por lo cual la nueva longitud del resorte es de 6.5 in. ¿Cuál es la constante elástica? ¿Cuál es la deformación?

13.5. Un resorte en espiral de 12 cm de largo se usa para sostener una masa de 1.8 kg que produce una deformación de 0.10. ¿Cuánto se alargó el resorte? ¿Cuál es la constante elástica? Resp. 1.2 cm, 1470 N/m

13.6. En el caso del resorte del problema 13.5, ¿qué masa total se deberá colgar de él si se desea provocar un alargamiento de 4 cm?

Sección 13.2 Módulo de Young

13.7. Un peso de 60 kg está suspendido de un cable cuyo diámetro es de 9 mm. ¿Cuál es el esfuerzo en este caso? Resp. 9.24 Mpa

13.8. Un trozo de alambre de 50 cm de longitud se estira hasta alcanzar la longitud de 50.01 cm. ¿Cuál es la deformación?

13.9. Una varilla de 12 m está sometida a un esfuerzo de compresión de -0.0004. ¿Cuál es la nueva longitud de la varilla? Resp. 11.995 m

13.10. El módulo de Young de una varilla es de 4×10^{11} Pa. ¿Qué deformación resultará con un esfuerzo de tensión de 420 Mpa?

13.11. Una masa de 500 kg se ha colgado del extremo de un alambre de metal cuya longitud es de 2 m, y tiene 1 mm de diámetro. Si el alambre se estira 1.40 cm, ¿cuáles han sido el esfuerzo y la deformación? ¿Cuál es el módulo de Young en el caso de este metal?
Resp. 6.24×109 Pa, 7.00×10^{-3}, 8.91×10^{11} Pa

13.12. Una viga maestra de acero de 16 ft con área de sección transversal de 10 in^2 sostiene una carga de compresión de 20 toneladas. ¿Cuál es la disminución resultante en la longitud de la viga?

13.13. ¿En qué medida se alarga un trozo de alambre de bronce, de 60 cm de longitud y 1.2 mm de diámetro, cuando se cuelga una masa de 3 kg de uno de sus extremos? Resp. 0.174 mm

13.14. Un alambre cuya sección transversal es de 4 mm^2 se alarga 0.1 mm cuando está sometido a un peso determinado. ¿En qué medida se alargará un trozo de alambre del mismo material y longitud si su área de sección transversal es de 8 mm^2 y se le somete al mismo peso?

13.15. El esfuerzo de compresión del hueso de un muslo humano de la figura 13.9 se parece al ejercido en la

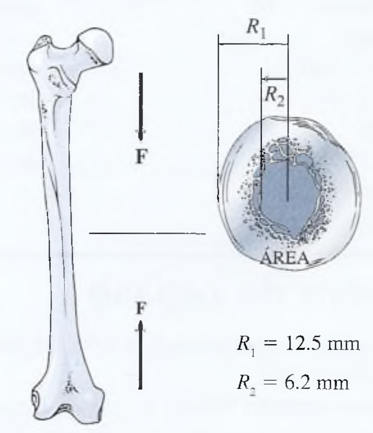


Figura 13.9 Esfuerzo de compresión en el hueso del muslo (fémur). (*Figura por Hemera, Inc.*)

sección transversal de un cilindro hueco. Si el esfuerzo máximo que puede sostenerse es 172 MPa, ¿cuál es la fuerza requerida para romper el hueso en su parte más estrecha? Use las dimensiones que se proporcionan en la figura. Resp. 63.66 kN

Sección 13.3 Módulo de corte

13.16. Una fuerza de corte de 40 000 N se aplica a la parte superior de un cubo cuyo lado mide 30 cm. ¿Cuál es el esfuerzo cortante en este caso?

13.17. Si el cubo del problema 13.16 es de cobre, ¿cuál será el desplazamiento lateral de la superficie superior del cubo? Resp. 3.15 μm

13.18. Una fuerza de corte de 26 000 N se distribuye de manera uniforme sobre la sección transversal de un alfiler de 1.3 cm de diámetro. ¿Cuál es el esfuerzo cortante?

13.19. Una varilla de aluminio cuyo diámetro es 20 mm sobresale 4.0 cm de la pared. El extremo de la varilla está sujeto a una fuerza de corte de 48 000 N. Calcule la flexión hacia abajo. Resp. 0.258 mm

13.20. Una varilla de acero sobresale 1.0 in por encima del piso y tiene 0.5 in de diámetro. La fuerza de corte **F** aplicada es de 6000 lb y el módulo de corte es 11.6 $\times$ 106 lb/in^2. ¿Cuáles son los valores del esfuerzo cortante y la flexión horizontal?

13.21. Una carga de 1500 kg está sostenida por un extremo de una viga de aluminio de 5 m, como se aprecia en la figura 13.10. El área de la sección transversal de la viga es de 26 cm^2 y el módulo de corte es 23 700 MPa. ¿Cuáles son el esfuerzo cortante y la flexión hacia abajo de la viga? Resp. 5.65 $\times$ 10^6 Pa, 1.19 mm

13.22. Una placa de acero de 0.5 in de espesor tiene una resistencia límite de corte de 50 000 lb/in^2. ¿Qué fuerza se tendrá que aplicar para hacer un orificio de 1/4 in que atraviese toda la placa?

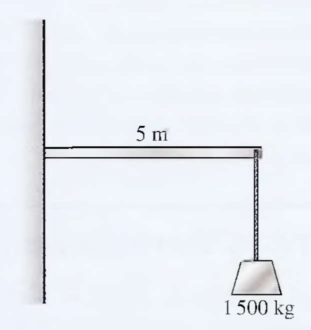


Figura 13.10

Sección 13.4 Elasticidad de volumen; Módulo volumétrico

13.23. Una presión de 3 $\times$ 10^8 Pa se aplica a un bloque cuyo volumen es 0.500 m^3. Si el volumen disminuye en 0.004 m^3, ¿cuál es el módulo volumétrico? ¿Cuál es la compresibilidad? Resp. 37 500 MPa, 2.67 $\times$ 10^{-11} m^3/Pa^{-1}

13.24. El módulo volumétrico para un determinado tipo de aceite es de 2.8 $\times$ 10^{10} Pa. ¿Cuánta presión se requiere para que su volumen disminuya de acuerdo con un factor de 1.2 por ciento?

13.25. Una esfera de latón macizo (B = 35 000 MPa) cuyo volumen es 0.8 m^3 se deja caer en el océano hasta una profundidad en la cual la presión hidrostática es 20 Mpa mayor que en la superficie. ¿Qué cambio se registrará en el volumen de la esfera? Resp. $-$4.57 $\times$ 10^{-4} m^3

13.26. Un fluido en particular se comprime 0.40 por ciento bajo una presión de 6 MPa. ¿Cuál es la compresibilidad de ese fluido?

13.27. ¿Cuál es el decremento fraccional del volumen del agua cuando está sometida a una presión de 15 MPa? Resp. $-$0.00714

Problemas adicionales

13.28. Un alambre de acero de 10 m y 2.5 mm de diámetro se estira una distancia de 0.56 mm cuando se coloca cierta carga en su extremo. ¿Cuál es la masa de esa carga?

13.29. Una fuerza de corte de 3 000 N se aplica en la superficie superior de un cubo de cobre cuyo lado mide 40 mm. Suponga que S = 4.2 $\times$ 10^{10} Pa. ¿Cuál es el ángulo de corte? Resp. 4.46 $\times$ 10^{-5} rad

13.30. Una columna sólida cilíndrica de acero mide 6 m de longitud y 8 cm de diámetro. ¿Cuál es la disminución de la longitud cuando la columna soporta una carga de 90 000 kg?

13.31. Un pistón de 8 cm de diámetro ejerce una fuerza de 2000 N sobre 1 litro de benceno. ¿Cuánto disminuye el volumen del benceno? Resp. $-$3.79 $\times$ 10^{-7} m^3

13.32. ¿Cuánto se estirará un trozo de alambre de cobre de 600 mm de longitud y 1.2 mm de diámetro cuando se cuelga una masa de 4 kg de uno de sus extremos?

13.33. Una columna cilíndrica sólida de acero mide 12 ft de altura y 6 in de diámetro. ¿Qué carga debe soportar para que su longitud disminuya $-$0.0255 in? Resp. 1.50 $\times$ 10^5 lb

13.34. Calcule la contracción del volumen de mercurio si un volumen original de 1 600 cm^3 de este elemento se somete a una presión de 400 000 Pa.

13.35. ¿Cuál es el diámetro mínimo de una varilla de bronce si tiene que soportar una tensión de 400 N sin que se exceda el límite elástico? Resp. 1.16 mm

13.36. Un bloque cúbico de metal con lados de 40 cm soporta una fuerza de corte de 400 000 N en su borde superior. ¿Cuál es el módulo de corte para este metal si el borde superior se flexiona hasta una distancia de 0.0143 mm?

13.37. Una cuerda de acero para piano tiene una resistencia límite de 35 000 lb/in^2 aproximadamente. ¿Cuál es la mayor carga que puede soportar una cuerda de acero de 0.5 in de diámetro sin romperse?
Resp. 6868.75 lb

Preguntas para la reflexión crítica

13.38. Un alambre de metal se alarga 2 mm cuando está sometido a una fuerza de tensión. ¿Qué alargamiento se puede esperar con esa misma fuerza si el diámetro del alambre se reduce a la mitad de su valor inicial? Suponga que el alambre de metal conserva su mismo diámetro, pero que su longitud se duplica. ¿Qué alargamiento se podría esperar entonces con la misma carga? Resp. 0.500 mm, 4 mm

13.39. Un cilindro de 4 cm de diámetro está lleno de aceite. ¿Qué fuerza habrá que ejercer en total sobre el aceite para obtener una disminución de 0.8 por ciento en el volumen? Compare las fuerzas necesarias si el aceite se sustituye por agua y si se sustituye por mercurio.

***13.40.** Una bola de 15 kg está unida al extremo de un alambre de acero de 6 m de largo y 1.0 mm de diámetro. El otro extremo del alambre está sujeto a un techo elevado y el conjunto constituye un péndulo. Si pasamos por alto el pequeño cambio de longitud, ¿cuál es la rapidez máxima con la cual puede pasar la bola por su punto más bajo sin que se exceda el límite elástico? ¿Cuál será el incremento de longitud del alambre bajo el esfuerzo limitador? ¿Qué efecto tendrá este cambio sobre la velocidad máxima?
Resp. 4.38 m/s, 7.19 mm, un ligero aumento en la velocidad máxima

13.41. En un cilindro de 10 in de diámetro se vierte glicerina hasta una altura de 6 in. Un pistón del mismo diámetro empuja hacia abajo el líquido con una fuerza de 800 lb. La compresibilidad de la glicerina es 1.50 $\times$ 10^{-6} in^2/lb. ¿Cuál es el esfuerzo sobre la glicerina? ¿Hasta qué distancia desciende el pistón?

***13.42.** La torsión de un eje cilíndrico (figura 13.11) hasta un ángulo θ es un ejemplo de deformación por esfuerzo cortante. Un análisis de la situación muestra que el ángulo de torsión en radianes se calcula mediante

$$\theta = \frac{2\tau l}{\pi S R^4}$$

donde τ = momento de torsión aplicado
l = longitud del cilindro
R = radio del cilindro
S = módulo de corte

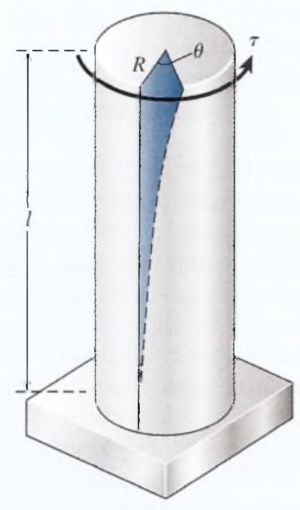


Figura 13.11 Un momento de torsión τ aplicado en un extremo de un cilindro sólido hace que éste se tuerza hasta un ángulo θ.

Si un momento de torsión de 100 lb · ft se aplica al extremo de un eje cilíndrico de acero de 10 ft de longitud y 2 in de diámetro, ¿cuál será el ángulo de torsión en radianes? Resp. 0.00764 rad

***13.43.** Un eje de aluminio de 1 cm de diámetro y 16 cm de alto está sometido a un esfuerzo cortante de torsión como se explicó en el problema anterior. ¿Qué momento de torsión ocasionará un retorcimiento de 1° según se describe en la figura 13.11?

***13.44.** Dos láminas de aluminio que forman parte del ala de un avión están unidas entre sí con remaches de aluminio cuya sección transversal tiene un área de 0.25 in^2. El esfuerzo cortante sobre cada remache no debe ser mayor de la décima parte del límite elástico del aluminio. ¿Cuántos remaches se necesitan si cada uno de ellos soporta la misma fracción de una fuerza de corte total de 25 000 lb?
Resp. 53 remaches

14 Movimiento armónico simple



Un trampolín ejerce una fuerza de restauración sobre la persona que salta directamente proporcional a la fuerza media necesaria para desplazar la colchoneta. El movimiento hacia adelante y atrás debido a las fuerzas de restitución suministra la energía necesaria para el movimiento armónico simple. (*Fotografía de Mark Tippens.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá el *movimiento armónico simple* y describirá y aplicará la ley de Hooke y la segunda ley de Newton para determinar la aceleración en función del desplazamiento.
2. Aplicará los principios de conservación de la energía mecánica para una masa que se desplaza con movimiento armónico simple.
3. Usará el círculo de referencia para describir la variación de la magnitud y dirección del desplazamiento, la velocidad y la aceleración para el movimiento armónico simple.
4. Escribirá y aplicará fórmulas para determinar el desplazamiento x, la velocidad v o la aceleración en términos del tiempo, la frecuencia y la amplitud.
5. Escribirá y aplicará la relación entre la frecuencia del movimiento y la masa de un objeto que vibra, cuando se conoce la constante del resorte.

6. Calculará la frecuencia o el periodo en el movimiento armónico simple cuando se conocen la posición y la aceleración.
7. Describirá el movimiento de un péndulo simple y calculará la longitud necesaria para producir una determinada frecuencia.

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de objetos que reciben la influencia de una fuerza constante e invariable. Describimos ese tipo de movimiento calculando la posición y velocidad en función del tiempo. Sin embargo, en el mundo real existen fuerzas variables. Ejemplos muy conocidos de ello son los péndulos oscilantes, las ruedas de compensación o balance de los relojes, los diapasones, una masa que vibra en el extremo de un resorte en espiral y las columnas de aire en vibración de los instrumentos musicales. En estos y en muchos otros casos se precisa una descripción más completa del movimiento causado por una fuerza resultante que varía de forma predecible.

14.1 Movimiento periódico

Siempre que se deforma un objeto, aparece en él una fuerza elástica de restitución proporcional a la deformación. Cuando la fuerza deja de actuar, el objeto vibra de un lado a otro respecto de su posición de equilibrio. Por ejemplo, después de que un clavadista salta del trampolín (figura 14.1), éste continúa vibrando de arriba abajo de su posición normal durante cierto tiempo.

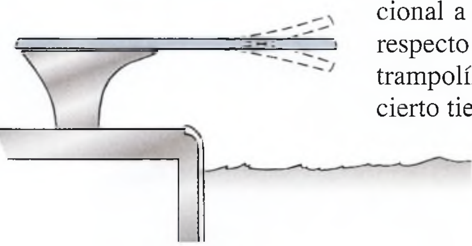


Figura 14.1. Vibración periódica de un trampolín.

Se dice que este tipo de movimiento es ***periódico*** porque la posición y la velocidad de las partículas en movimiento se repiten en función del tiempo. Puesto que la fuerza de restitución disminuye después de cada vibración, tarde o temprano el trampolín volverá al estado de reposo.

El movimiento periódico es aquel en el que un cuerpo se mueve de un lado a otro, sobre una trayectoria fija, y regresa a cada posición y velocidad después de un intervalo de tiempo definido.

Una mesa de aire es un aparato de laboratorio sobre el que los objetos se deslizan con muy poca fricción. Suponga que fijamos un extremo de un resorte ligero a la pared y el otro a un disco circular libre para deslizarse sobre esa mesa, como se muestra en la figura 14.2. Denotaremos su posición inicial de equilibrio con $x = 0$, y luego estiraremos el resorte a la derecha una distancia $x = A$. Al soltarlo, se observa que el disco oscila de un lado a otro por la posición de equilibrio con fricción despreciable. De acuerdo con la ley de Hooke (véase el capítulo anterior), la fuerza de restitución **F** es directamente proporcional al desplazamiento a

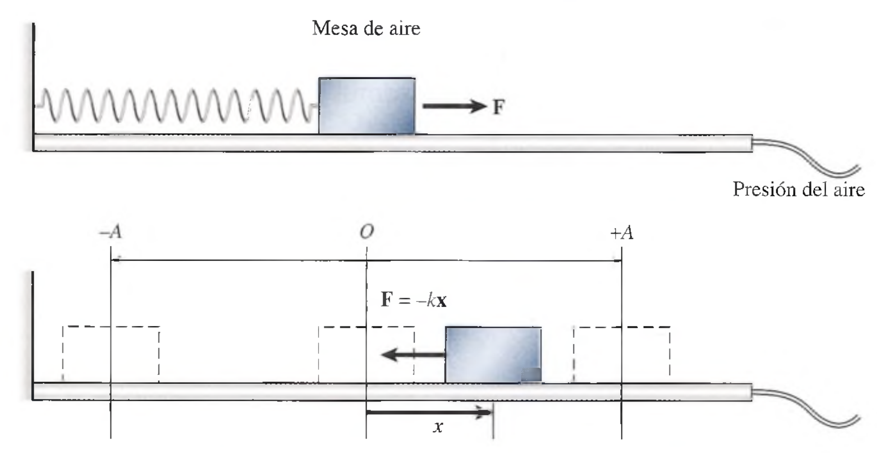


Figura 14.2. Un disco unido a un resorte oscila a un lado y otro sobre una mesa de aire, lo que ejemplifica el movimiento armónico simple.

partir de $x = 0$. Esa fuerza siempre se opone al desplazamiento, de modo que la ley de Hooke puede escribirse como

$$F = -kx \quad \textit{Ley de Hooke} \qquad \textbf{(14.1)}$$

El desplazamiento máximo a partir de la posición de equilibrio $x = \pm A$ se llama ***amplitud.*** En esta posición, el disco experimenta su fuerza máxima dirigida hacia el centro de oscilación. La fuerza disminuye a medida que el disco se aproxima al centro de oscilación; al llegar a él, se vuelve igual a cero. La cantidad de movimiento del disco lo lleva más allá del centro, pero luego la fuerza invierte esta dirección, lo que disminuye el movimiento hasta que el disco alcanza su amplitud en la otra dirección y la oscilación continúa. Sin fricción, este movimiento perduraría por siempre. Este tipo de movimiento oscilatorio sin fricción se denomina ***movimiento armónico simple (MAS).***

El movimiento armónico simple (MAS) es un movimiento periódico que ocurre en ausencia de fricción y es producido por una fuerza de restitución directamente proporcional al desplazamiento y tiene una dirección opuesta a éste.

El ***periodo T*** se define como el tiempo en el que se realiza una oscilación completa cuando el objeto se mueve con MAS. Considere, por ejemplo, la masa atada al extremo de un resorte vertical, como aparece en la figura 14.3. Si tiramos de la masa hacia abajo una distancia $y = -A$ y luego la soltamos, su movimiento se aproximará al MAS. El tiempo que va desde que se la suelta en $y = -A$ hasta que vuelve a $y = -A$ representa el lapso de una oscilación completa, es decir, el periodo. En realidad, podríamos elegir cualquier posición y durante la oscilación y el periodo sería el tiempo que demoraría la masa en volver a ese lugar *moviéndose en la misma dirección*. Cabe señalar que el tiempo requerido para moverse del centro de oscilación al máximo desplazamiento A en cualquier dirección sólo es una cuarta parte del periodo.

Suponga que la masa oscilatoria de la figura 14.3 tiene un periodo igual a 4 s. En $t = 0$, pasa el centro de oscilación en dirección ascendente. Tras un segundo, se hallará en $y = +A$. Después de 2 s, pasará otra vez por el centro de equilibrio. No obstante, irá en dirección descendente, así que el tiempo es igual a medio periodo. El periodo completo de 4 s sólo se alcanza cuando la masa vuelve a $y = 0$ y se mueve en la misma dirección que tenía cuando $t = 0$.

La ***frecuencia f*** es el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo. Puesto que el periodo es igual a la cantidad de segundos por oscilación, se deduce que la frecuencia será el recíproco del periodo o número de oscilaciones por segundo

$$f = \frac{1}{T} \qquad \textbf{(14.2)}$$

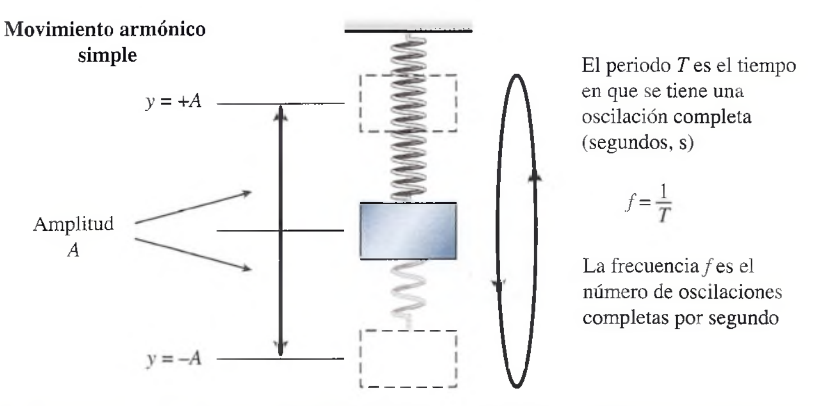


Figura 14.3 El movimiento armónico simple (MAS) es un movimiento periódico con amplitud, frecuencia y periodo constantes.

En el SI, la unidad para la frecuencia (oscilaciones/segundo) es el ***hertz*** (Hz)

$$\textit{El hertz} \qquad 1 \text{ Hz} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

Por tanto, una frecuencia de 20 oscilaciones por segundo se escribe 20 Hz.

Ejemplo 14.1

La masa suspendida de la figura 14.3 se tira hacia abajo y luego se suelta, por lo que oscila con MAS. Un estudiante determina que el tiempo transcurrido para 50 vibraciones completas es de 74.1 s. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia del movimiento?

Plan: El tiempo proporcionado es de 50 vibraciones. Sabemos que el periodo es el tiempo que se lleva *una* vibración y que la frecuencia es el recíproco del periodo.

Solución: Al dividir el tiempo total entre las vibraciones totales se obtiene

$$T = \frac{74.1 \text{ s}}{50 \text{ vib}} = 1.48 \text{ s}$$

Por último, con base en la ecuación (13.2) se determina la frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.48 \text{ s}}; \qquad f = 0.675 \text{ Hz}$$

Debe señalarse que una vibración u oscilación es una unidad adimensional tal que vibraciones/s se expresa sencillamente como s^{-1} o Hz.

Ejemplo 14.2

Se fija al techo un resorte ligero; luego se marca su posición inferior en un metro. Cuando se cuelga una masa de 3 kg del extremo inferior del resorte, éste se mueve hacia abajo una distancia vertical de 12 cm. Determine la constante del resorte.

Plan: De acuerdo con la ley de Hooke, la constante del resorte es la razón de cambio de fuerza al cambio de desplazamiento. Observe que la constante del resorte es una cantidad *absoluta*. El signo negativo de la ley de Hooke indica la dirección de la fuerza de restitución es opuesta al desplazamiento.

Solución: El cambio de la fuerza es igual al peso de la masa mg, así que $\Delta F = mg$ y $\Delta x = 0.12$ m. A partir de la ley de Hooke se obtiene

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{mg}{x}$$

$$= \frac{(3 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{0.12 \text{ m}} = 242 \text{ N/m}$$

La letra griega delta en las ecuaciones anteriores es importante, ya que denotan el *cambio* de fuerza y de desplazamiento que determinan la constante del resorte. En este ejemplo, si añadimos una segunda masa de 3 kg debajo de la primera, el resorte se moverá hacia abajo otros 12 cm.

Más adelante, en la sección 14.7 demostraremos que el periodo y la frecuencia para un sistema que oscila con MAS puede determinarse a partir de la masa y la constante del resorte.

14.2 La segunda ley de Newton y la ley de Hooke

La fuerza de restitución de un sistema oscilatorio con MAS cumple la ley de Hooke, pero cualquier fuerza resultante satisface la segunda ley de Newton; por ende, la aceleración de una masa que vibra será proporcional tanto a la fuerza resultante como al desplazamiento

$$F = ma \qquad \text{y} \qquad F = -kx$$

Al combinar estas dos relaciones se obtiene

$$ma = -kx$$

así que la aceleración de una masa m que se mueve con MAS está dada por

$$a = -\frac{k}{m}x \tag{14.3}$$

El signo negativo indica que la aceleración (y la fuerza de restitución) se dirige siempre en dirección opuesta al desplazamiento. Si éste es hacia abajo, la aceleración es hacia arriba; si el desplazamiento va a la derecha, la aceleración lo hará a la izquierda.

Ejemplo 14.3

Suponga que el disco circular de la figura 14.4 tiene una masa de 1.5 kg y que se le tira hacia fuera una distancia de 12 cm; luego se le suelta y oscila con MAS sobre una mesa de aire. La constante del resorte es de 120 N/m. (a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración? (b) ¿Cuál es la fuerza sobre la masa cuando ésta tiene los desplazamientos siguientes: (a) +12 cm, (b) +8 cm, y (c) −4 cm?

Plan: Con la ecuación (14.3) se halla la aceleración correspondiente a cada desplazamiento. La fuerza se determina entonces a partir de la ley de Hooke o de la segunda ley de Newton. Sin embargo, debemos prestar atención a los signos porque tanto la fuerza como la aceleración deben ser opuestas al desplazamiento. Elegiremos la dirección hacia la derecha como positiva.

Solución (a): Primero calculamos la aceleración y la fuerza para $x = +12\text{ cm} = 0.12\text{ m}$, que debe representar la aceleración *máxima* y la fuerza de restitución, ya que la masa se halla en la amplitud A.

$$a = -\frac{kx}{m} = -\frac{(120\text{ N/m})(+0.12\text{ m})}{1.5\text{ kg}}; \qquad a = -9.6\text{ m/s}^2$$

$$F = -kx = -(120\text{ N/m})(+0.12\text{ m}); \qquad F = -14.4\text{ N}$$

Observe que la fuerza y la aceleración correspondientes a este desplazamiento se dirigen a la izquierda.

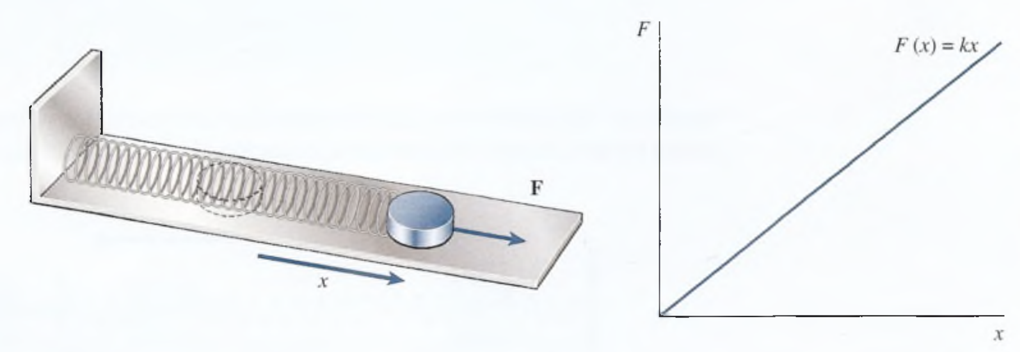


Figura 14.4 El trabajo realizado por la fuerza de extensión **F** cuando ésta desplaza la masa una distancia igual a x a partir de la posición de equilibrio.

Solución (b): Cuando $x = +8$ cm $= 0.08$ m, la aceleración y la fuerza son

$$a = -\frac{kx}{m} = -\frac{(120\text{ N/m})(+0.08\text{ m})}{1.5\text{ kg}}; \qquad a = -6.4\text{ m/s}^2$$

$$F = -kx = -(120\text{ N/m}) + (0.08\text{ m}); \qquad F = -9.6\text{ N}$$

Solución (c): Cuando $x = -4$ cm $= -0.04$ m se obtiene

$$a = -\frac{kx}{m} = -\frac{(120\text{ N/m})(-0.04\text{ m})}{1.5\text{ kg}}; \qquad a = +3.2\text{ m/s}^2$$

$$F = -kx = -(120\text{ N/m})(-0.04\text{ m}); \qquad F = +4.8\text{ N}$$

Cabe advertir en el último ejemplo que el disco se halla del lado izquierdo de la posición de equilibrio, lo que significa que el resorte está comprimido y ejerce una fuerza de restitución que va a la derecha. Los signos de las respuestas indican las direcciones.

14.3 Trabajo y energía en el movimiento armónico simple

Suponga que consideramos el trabajo hecho al extender un resorte, como el que aparece en la figura 14.5. Una fuerza externa **F** actúa a lo largo de una distancia x al comprimir el resorte. Este trabajo es positivo e igual al producto de la fuerza por la distancia, Fx. A la vez, el resorte ejerce una fuerza equivalente y en dirección opuesta (contra la fuerza que comprime) que realiza la misma cantidad de trabajo, pero *negativo*. Si trazamos una gráfica de la fuerza **F** en función del desplazamiento x, es posible demostrar que el trabajo que efectúa es igual a $\frac{1}{2}kx^2$, lo que significa que la energía potencial U almacenada en el resorte está dada por

$$\textit{Energía potencial} \qquad U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(14.4)}$$

Cuando se suelta un resorte comprimido, la energía potencial se convierte en energía cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) a medida que la masa que aquél tiene unida gana velocidad. Si suponemos que no hay fricción, la energía cinética final será igual a la energía potencial inicial. La energía potencial se guarda en el resorte sólo cuando está comprimido o extendido. Por su parte, la energía cinética sólo existe si la masa tiene velocidad.

Recuerde que la energía total ($U + K$) de un sistema no cambia. En consecuencia, en ausencia de fricción escribimos

$$\textit{Conservación de la energía} \qquad U_0 + K_0 = U_f + K_f$$

$$\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad \textbf{(14.5)}$$

donde los subíndices 0 y f se refieren a los valores inicial y final. Si hay fricción, debemos sumar en el miembro derecho de la ecuación el trabajo absoluto realizado por ella.

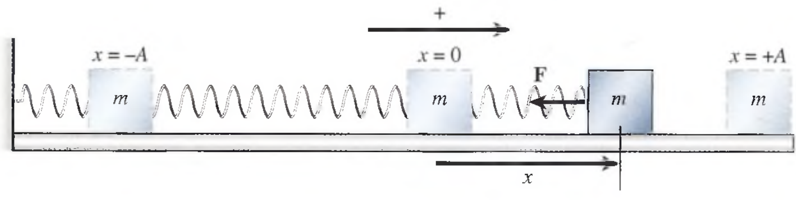


Figura 14.5 Conservación de la energía para el MAS.

Ahora estamos listos para considerar la conservación de la energía para una masa m que oscila con MAS, como se muestra en la figura 14.5. Básicamente, en cualquier punto durante la oscilación, la energía total ($E = U + K$) es

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Considere la energía total E en cada uno de los casos siguientes:

En $x = \pm A$: $\quad E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m(0)^2 \quad$ o $\quad E = \frac{1}{2}kA^2$

En $x = 0$: $\quad E = \frac{1}{2}k(0)^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 \quad$ o $\quad E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$

En $x = x$: $\quad E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

Enseguida, deduciremos una expresión para determinar la velocidad v de una masa que se mueve con MAS y sin fricción. Como la energía total en cualquier punto es la misma que se tiene al alcanzar la amplitud, podemos escribir

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Si resolvemos para la velocidad, v, hallaremos que

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \qquad \textbf{(14.6)}$$

Observe que para el caso especial en que $x = 0$, la velocidad es máxima e igual a

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad \textbf{(14.7)}$$

Las ecuaciones (14.6) y (14.7) son útiles en cálculos repetitivos, pero casi siempre es mejor aplicar solamente la ecuación de conservación (14.5) porque es más fácil recordarla. Puesto que la energía es una cantidad escalar, no se sabe la *dirección* de la velocidad a partir de estas ecuaciones. La raíz cuadrada de un número puede ser positiva o negativa.

Ejemplo 14.4

Un resorte tiene atada una masa de 0.4 kg que oscila con MAS a lo largo de una superficie sin fricción, como en la figura 14.5. La constante del resorte es de 20 N/m y la amplitud de 5 cm. (a) ¿Cuál es la velocidad máxima de la masa? (b) ¿Cuál es la velocidad cuando la masa se halla a una distancia de +3 cm a la derecha de la posición de equilibrio?

Plan: La energía total se conserva, de forma que ambas preguntas pueden responderse aplicando la ecuación (14.4) para las distancias conocidas. Reconocemos que la velocidad alcanza su máximo cuando $x = 0$, ya que la fuerza de restitución siempre ha ido en una misma dirección para el periodo más grande en ese punto. La velocidad en la posición $x = +3$ puede determinarse reconociendo que la energía total en ese punto es igual a la energía total en cualquier amplitud ($\frac{1}{2}kA^2$). Es útil organizar los datos antes de resolver para v.

Dados: $A = 0.05$ m, $x = 0$ y $+0.03$ m, $m = 0.4$ kg, $k = 20$ N/m

Solución (a): La velocidad máxima ocurre para $x = 0$, así que la conservación de la energía obliga a que

$$\frac{1}{2}k(0)^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Al despejar $v_{máx}$ se obtiene

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0.4 \text{ kg}}}(0.05 \text{ m}); \qquad v_{máx} = \pm 0.354 \text{ m/s}$$

A partir de este resultado no podemos saber si la masa se mueve a la derecha o a la izquierda cuando pasa por $x = 0$.

Solución (b): La velocidad en $x = +0.03$ se determina con la ecuación de conservación.

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}(20 \text{ N/m})(0.03 \text{ m})^2 + \frac{1}{2}(0.4 \text{ kg})v^2 = \frac{1}{2}(20 \text{ N/m})(0.05 \text{ m})^2$$

Al resolver para v se llega a

$$v = \pm 0.283 \text{ m/s}$$

La sustitución directa en la ecuación (14.6) da la misma respuesta. De nuevo, ello sólo indica la *rapidez* de la masa en este punto. Podría estarse moviendo a la derecha o a la izquierda en el instante en que se ubica 3 cm a la derecha del centro.

14.4 El círculo de referencia y el movimiento armónico simple

Las leyes del movimiento uniformemente acelerado no se aplican al MAS debido a que en éste hay una fuerza que varía. El movimiento armónico simple es producto de esa fuerza, que es proporcional al desplazamiento. Recordará de la ecuación (14.3) que

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Mientras la masa m permanezca constante, la aceleración aumentará con el desplazamiento y su dirección siempre será opuesta a éste.

A fin de determinar relaciones nuevas que nos permitan predecir la posición, la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo hemos de recurrir al cálculo. Por fortuna, esas ecuaciones pueden deducirse de una comparación del MAS con la revolución periódica de una masa en torno a cierto radio. Considere el aparato que se muestra en la figura 14.6, donde la sombra de una pelota unida a un disco giratorio se mueve hacia delante y hacia atrás con movimiento armónico simple. Este experimento indica que lo que sabemos del movimiento circular uniforme puede ser de utilidad al describir el movimiento armónico simple.

El *círculo de referencia* de la figura 14.4 sirve para comparar el movimiento de un objeto que se mueve en un círculo, con su proyección horizontal. Puesto que es el movimiento de la proyección el que deseamos estudiar, nos referiremos aquí a la posición P del objeto que se mueve en círculo como el *punto de referencia*. El radio del círculo de referencia es igual a la amplitud de la oscilación horizontal. Si la rapidez lineal v_T y la velocidad angular ω del punto de referencia son constantes, entonces la proyección Q se moverá de un lado al otro con MAS. Al tiempo se le asigna un valor de cero cuando el punto de referencia se encuentra en B en la figura 14.4. En un momento posterior t, el punto de referencia P se habrá movido a lo largo de un ángulo θ. El desplazamiento x de la proyección Q es, por tanto,

$$x = A \cos \theta$$

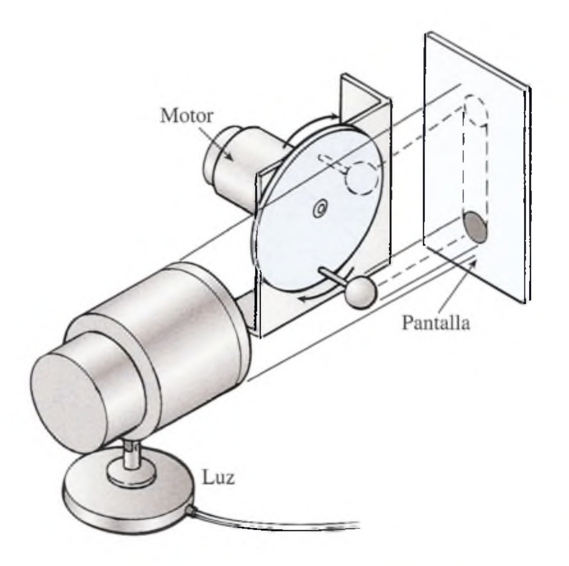


Figura 14.6. La proyección o sombra de una pelota unida a un disco que gira se mueve con movimiento armónico simple.

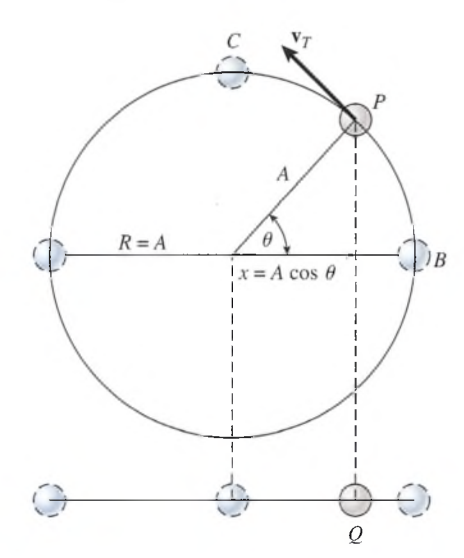


Figura 14.7. Desplazamiento en el movimiento armónico simple.

Como el ángulo $\theta = \omega t$, ahora podemos escribir el desplazamiento como una función de la velocidad angular del punto de referencia

$$x = A \cos \theta = A \cos \omega t \tag{14.8}$$

Aunque la velocidad angular ω es útil para describir el movimiento del punto de referencia P, no se aplica directamente a la proyección Q. Sin embargo, recordemos que la velocidad angular se relaciona con la frecuencia de revolución mediante

$$\omega = 2\pi f$$

donde ω se expresa en radianes por segundo y f es el número de revoluciones por segundo. También hay que reconocer que la proyección Q describirá una oscilación completa, mientras el punto de referencia describe una revolución completa. Por tanto, la frecuencia f es la misma para cada punto. Sustituyendo $\omega = 2\pi f$ en la ecuación (14.8) se obtiene

$$x = A \cos 2\pi f \tag{14.9}$$

Esta ecuación puede aplicarse para calcular el desplazamiento de un cuerpo que se mueve con un MAS de amplitud A y frecuencia f. Recuerde que el desplazamiento x siempre se mide a partir del centro de oscilación.

14.5 Velocidad en el movimiento armónico simple

Considere un cuerpo que se mueve de un lado a otro con un MAS bajo la influencia de una fuerza de restitución. Puesto que la dirección del cuerpo que oscila se invierte en los puntos extremos de su movimiento, su velocidad debe ser cero cuando su desplazamiento es máximo. Entonces se acelera hacia el centro mediante la fuerza de restitución, hasta que alcanza su rapidez máxima en el centro de la oscilación, cuando su desplazamiento es igual a cero.

En la figura 14.8 la velocidad de un cuerpo que oscila se compara en tres distintos instantes con los correspondientes puntos sobre el círculo de referencia. Se observará que la velocidad $\mathbf{v}$ del cuerpo, en cualquier instante, es la componente horizontal de la velocidad tangencial $\mathbf{v}_T$ del punto de referencia. En el punto B, el punto de referencia se mueve en dirección vertical hacia arriba y no tiene velocidad horizontal. Por tanto, este punto corresponde a la velocidad cero del cuerpo oscilante, cuando éste alcanza su amplitud A. En el punto C la componente horizontal $\mathbf{v}_T$ es igual a su magnitud total. Este punto corresponde a una posición de velocidad máxima para el cuerpo que oscila, es decir, a su centro de oscilación. En

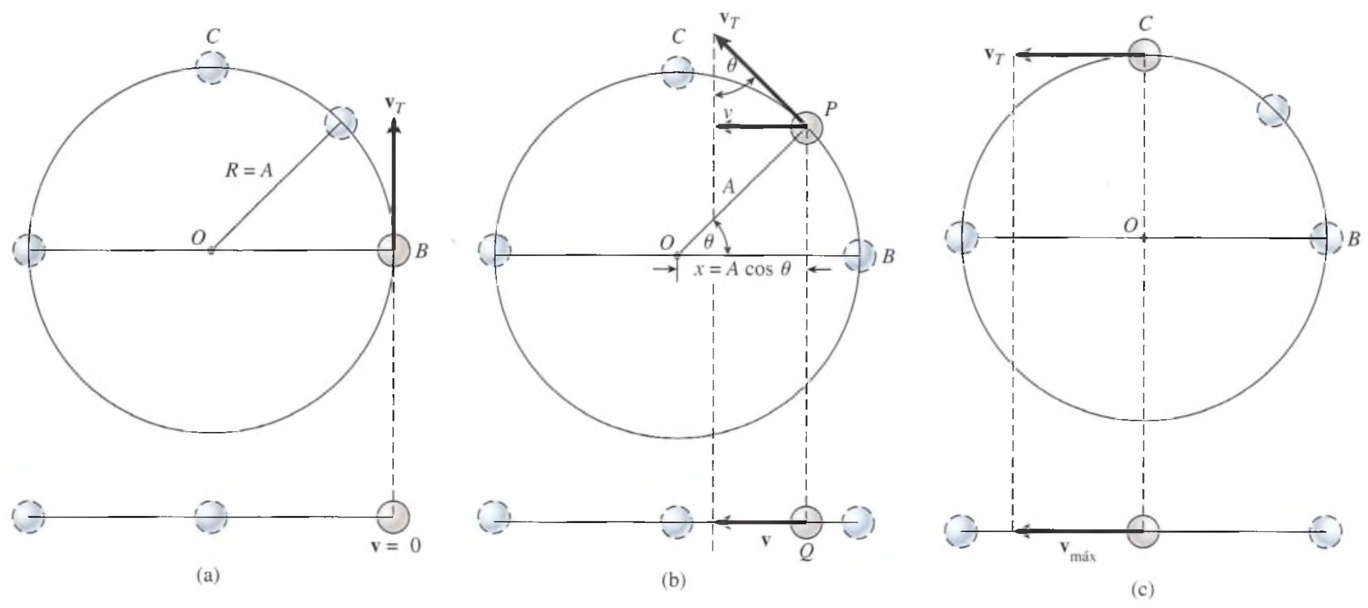


Figura 14.8 La velocidad y el círculo de referencia.

general, la velocidad de este cuerpo en cualquier punto Q se determina a partir del círculo de referencia de esta forma:

$$v = -v_T \text{ sen } \theta = -v_T \text{ sen } \omega t \tag{14.10}$$

El signo es negativo en virtud de que la dirección de la velocidad es hacia la izquierda. Podemos dar una forma más conveniente a la ecuación si recordamos la relación entre la velocidad tangencial v_T y la velocidad angular:

$$v_T = \omega A = 2\pi f A$$

Sustituyendo en la ecuación 14.5 nos queda

$$v = -2\pi f A \text{ sen } 2\pi f t \tag{14.11}$$

Con esta ecuación se obtiene la velocidad de un cuerpo que oscila en cualquier instante si se tiene presente que sen θ es negativo cuando el punto de referencia queda por debajo del diámetro del círculo de referencia.

Ejemplo 14.5

Se fija una masa m a un resorte como se muestra en la figura 14.4, y luego se tira de ella 6 cm a la derecha y entonces se la suelta. Vuelve al punto donde se le soltó en 2 s y sigue oscilando con movimiento armónico simple. (a) ¿Cuál es su velocidad máxima? (b) ¿Cuál es su posición y velocidad 5.2 s después de que se le soltó?

Plan: Primero se reconoce que 2 s para la primera oscilación completa corresponde al *periodo* del movimiento. Como la frecuencia es el recíproco del periodo, entonces f = 0.5 Hz (si una oscilación ocupa 2 s, entonces cada segundo se tiene media oscilación). Organizaremos la información proporcionada y decidiremos qué ecuaciones comprenden esas cantidades. El primer máximo para la velocidad se presenta cuando el desplazamiento es igual a cero, lo cual corresponde a 90° en el círculo de referencia. La posición y la velocidad 5.2 s después de haber soltado la masa se determinan con las ecuaciones (14.9) y (14.11). La conservación de la energía no ayuda en este caso, ya que no conocemos la constante del resorte ni la posición.

Solución (a): Sabemos que $f = 0.5$ Hz, $A = 0.06$ m y $\theta = 90°$. La velocidad máxima se determina sustituyendo estos datos en la ecuación (14.9). Recuerde que sen 90° = 1.

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= -2\pi fA \operatorname{sen} 90° = -2\pi fA \\ &= -2\pi(0.5 \text{ Hz})(0.06 \text{ m}) \\ &= -0.188 \text{ m/s} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la primera velocidad máxima es −18.8 cm/s en dirección izquierda. Si hubiéramos sustituido 270° para el ángulo θ, la velocidad máxima hubiera sido +18.8 cm/s hacia la derecha.

Solución (b): En este caso se pide determinar la posición y la velocidad en un instante determinado: 5.2 s. Cuando el ángulo de referencia θ se escribe como $2\pi ft$ es indispensable recordar que los ángulos deben expresarse en *radianes, no en grados*. Cerciórese de que su calculadora está configurada para leer los ángulos en radianes. Como un pequeño error en la medida de éstos es importante, mejor asegúrese de no redondear sus datos hasta que haya alcanzado la respuesta final. El desplazamiento en $t = 5.2$ s se halla a partir de la ecuación (14.9)

$$\begin{aligned} x &= A\cos(2\pi ft) = (0.06 \text{ m}) \cos[2\pi(0.5 \text{ Hz})(5.2 \text{ s})] \\ &= (0.06 \text{ m}) \cos(16.34 \text{ rad}) = (0.06 \text{ m})(-0.809) \\ &= -0.0485 \text{ m} = -4.85 \text{ cm} \end{aligned}$$

La velocidad se encuentra con la ecuación (14.11) usando el mismo ángulo, en radianes

$$\begin{aligned} v &= -2\pi fA \operatorname{sen}(16.34 \text{ rad}) \\ &= -2\pi(0.5 \text{ Hz})(0.06 \text{ m})(-0.588) \\ &= +0.111 \text{ m/s} = +11.1 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

Cabe observar que la velocidad después de 5.2 s es positiva, lo que indica que la masa se mueve a la derecha en ese instante.

14.6 Aceleración en el movimiento armónico simple

La velocidad de un cuerpo que oscila jamás es constante. Por tanto, la aceleración tiene suma relevancia en las ecuaciones obtenidas para la posición y la velocidad en la sección anterior. Ya contamos con una expresión para predecir la aceleración en función de la distancia; ahora deduciremos la relación con el tiempo.

En la posición de desplazamiento máximo ($\pm A$), la velocidad de una masa que oscila es igual a cero. Es en ese instante cuando la masa está sometida a la máxima fuerza de restitución. Por consiguiente, su aceleración es máxima cuando su velocidad es cero. Cuando la masa se aproxima a su posición de equilibrio, la fuerza de restitución (y, por tanto, la aceleración) se reduce hasta llegar a cero en el centro de la oscilación. En la posición de equilibrio, la aceleración es igual a cero y la velocidad alcanza su valor máximo.

Miremos el círculo de referencia de la figura 14.9, trazado para estudiar la aceleración a de una partícula que se mueve con movimiento armónico simple (MAS). Note que la aceleración centrípeta a_c de una masa que se mueve en un círculo de radio $R = A$ se compara con la aceleración de su propia sombra. La aceleración a de la sombra representa el MAS y es igual a la componente horizontal de la aceleración centrípeta a_c de la masa. Con base en la figura,

$$a = -a_c \cos\theta = -a_c \cos\omega t \qquad \textbf{(14.12)}$$

donde $\omega = 2\pi f$. El signo menos indica que la aceleración es opuesta al desplazamiento pero igual a la dirección de la velocidad.

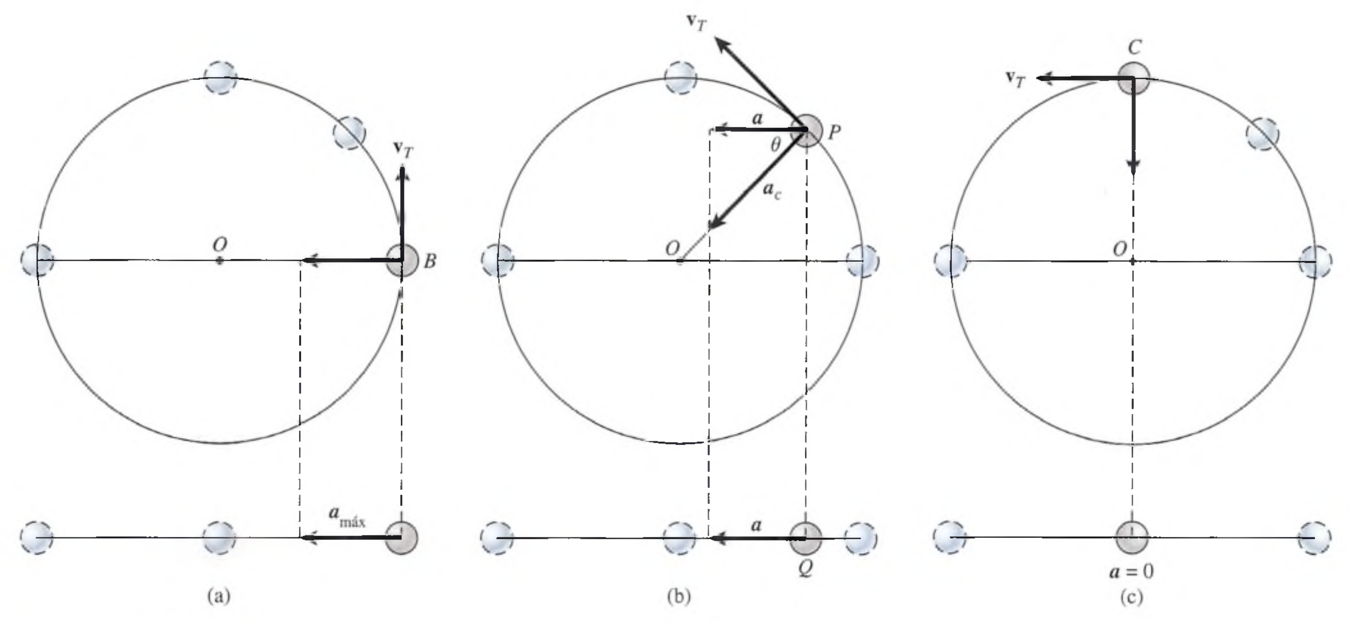


Figura 14.9 Aceleración y el círculo de referencia.

De nuestra explicación sobre la rotación y el movimiento circular recordemos que

$$v = \omega R \qquad \text{y} \qquad a_c = \frac{v^2}{R}$$

Si combinamos ambas relaciones se obtiene

$$a_c = \frac{(\omega R)^2}{R} \qquad \text{o} \qquad a_c = \omega^2 R$$

Como $a_c = \omega^2 R$ y $R = A$, es posible rescribir la ecuación (14.12) como sigue

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t$$

Esta relación expresa la aceleración de un cuerpo que se mueve con MAS con amplitud igual a A y frecuencia angular igual a ω (en rad/s). Es posible hallar la misma ecuación expresada en términos de la frecuencia f (en Hz) sustituyendo $\omega = 2\pi f$ para obtener

$$a = -4\pi^2 f^2 A \cos (2\pi f t) \qquad \textbf{(14.13)}$$

Si observamos la ecuación (14.9) podemos simplificar esta ecuación como sigue

$$\cos \theta = \cos(2\pi f t) = \frac{x}{A}$$

Por tanto, la ecuación (14.13) se convierte en

$$a = -4\pi^2 f^2 A \frac{x}{A}$$

o bien

$$a = -4\pi^2 f^2 x \qquad \textbf{(14.9)}$$

Se advierte que la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento, a cuya dirección se opone, como debe suceder de conformidad con la ley de Hooke.

14.7 El periodo y la frecuencia

A partir de la información establecida acerca del desplazamiento, la velocidad y la aceleración de cuerpos que oscilan podemos deducir algunas fórmulas útiles para calcular el periodo o la frecuencia de la oscilación. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación (14.9) para la frecuencia f se obtiene

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}} \qquad \textbf{(14.5)}$$

FÍSICA HOY

Los balcones y los puentes para caminar requieren una ingeniería precisa respecto de su frecuencia de resonancia. La gente que zapatea o marcha puede ocasionar que esas estructuras resuenen y se sacudan. La altura total de la onda puede ser mayor de la que resultaría únicamente del peso de las personas sumado al de la estructura.

Puesto que el ***desplazamiento*** x y la aceleración son siempre de signos opuestos, el término $-a/x$ siempre es positivo.

El periodo T es el recíproco de la frecuencia. Recurriendo a este hecho en la ecuación (14.15) definimos el periodo como

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a}} \qquad \textbf{(14.16)}$$

Por consiguiente, si se conoce la aceleración correspondiente a un determinado desplazamiento es posible calcular el periodo de oscilación.

Cuando se analiza el movimiento de cuerpos bajo la influencia de una ***fuerza de restitución*** elástica, es más conveniente expresar el periodo en función de la constante del resorte y de la masa del cuerpo que oscila, lo cual se logra comparando las ecuaciones (14.3) y (14.14):

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad a = -4\pi^2 f^2 x$$

Combinando estas relaciones obtenemos

$$4\pi^2 f^2 = \frac{k}{m}$$

de donde resulta que la frecuencia es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(14.17)}$$

Finalmente, el periodo T está dado por el recíproco de la frecuencia, es decir,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(14.18)}$$

Observe que ni el periodo ni la frecuencia dependen de la amplitud (desplazamiento máximo) del cuerpo oscilatorio; sólo dependen de la constante del resorte y de la masa del cuerpo mismo.

Ejemplo 14.6

Una bola de acero de 0.2 kg está unida al extremo de una tira plana de metal que está sujeta en su base, como muestra la figura 14.10. Si se requiere una fuerza de 5 N para desplazar la bola 3 cm, ¿cuál será su periodo de oscilación después de soltarla? ¿Cuál será su aceleración máxima?

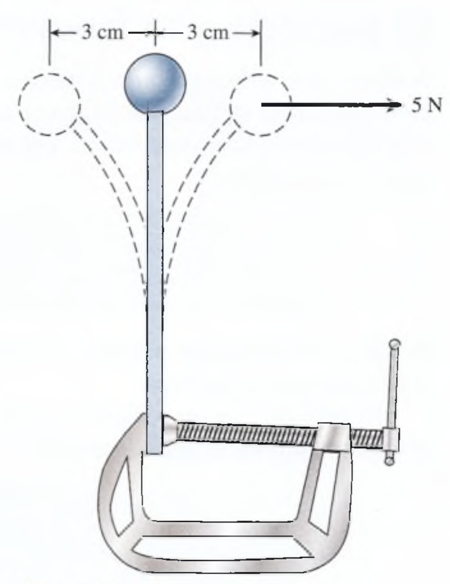


Figura 14.10

Plan: Primero determinaremos la constante del resorte k a partir de la ley de Hooke y del hecho de que una fuerza de 5 N desplaza la masa 3 cm. La aceleración máxima se presenta cuando el desplazamiento es un máximo (en $x = 3$ cm).

Solución: De la ley de Hooke se tiene que

$$k = \frac{F}{x} = \frac{5 \text{ N}}{0.03 \text{ m}}; \qquad k = 167 \text{ N/m}$$

Ahora sustituimos $k = 167$ N/m y $m = 0.2$ kg en la ecuación (14.18) para hallar el periodo T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2 \text{ kg}}{167 \text{ N/m}}}$$

$$T = 0.218 \text{ s}$$

Recuerde que la frecuencia f es el recíproco del periodo, es decir, equivale a $1/T$, y la aceleración máxima se determina sustituyendo $x = \pm A = \pm 0.03$ m en la ecuación (14.14)

$$a = -4\pi^2 f^2 x = -\frac{4\pi^2 A}{T^2}$$

$$a = -\frac{4\pi^2(0.03 \text{ m})}{(0.218 \text{ s})^2}; \qquad a = -25.0 \text{ m/s}^2$$

Observe que el signo negativo resulta de que usamos el signo positivo para la amplitud. Cuando la bola llega al lado izquierdo, $x = -0.03$ m y la aceleración es de $+25$ m/s^2.

14.8 El péndulo simple

Cuando una lenteja de un péndulo oscila unida al extremo de una cuerda o varilla ligera, como se muestra en la figura 14.11, lo hace con algo próximo al movimiento armónico simple (MAS). Si suponemos que toda la masa se concentra en el centro de gravedad de la lenteja y que la fuerza de restitución actúa en un solo punto, denominamos a este aparato ***péndulo simple.*** Aunque esta suposición no es estrictamente cierta, se obtiene una aproximación haciendo que la masa de la cuerda o varilla de sostén sea pequeña en comparación con la lenteja del péndulo.

Observe que el desplazamiento x de la lenteja no se produce a lo largo de una línea recta sino que sigue un arco subtendido por el ángulo θ. De acuerdo con los métodos estudiados en el capítulo 11, la longitud del desplazamiento es simplemente el producto del ángulo θ y la longitud de la cuerda, por lo que

$$x = L\theta$$

Si el movimiento de la lenteja corresponde al MAS, la fuerza de restitución estará dada por

$$F = -kx = -kL\theta \tag{14.19}$$

lo que significa que la fuerza de restitución debiera ser proporcional a θ, puesto que la longitud L es constante. Examinemos la fuerza de restitución para ver si esto es cierto. En el movimiento de un lado a otro de la lenteja, la fuerza de restitución necesaria la proporciona la componente tangencial del peso. Con base en la figura 14.11 podemos escribir

$$F = -mg \operatorname{sen} \theta \tag{14.20}$$

Por consiguiente, la fuerza de restitución es proporcional a sen θ y no a θ. La conclusión es que la lenteja no oscila con MAS. Sin embargo, si estipulamos que el ángulo θ es pequeño, sen θ será aproximadamente igual al ángulo θ en radianes. Compruébelo considerando varios ángulos pequeños:

sen θ	**θ (rad)**
sen 6° = 0.1045	6° = 0.1047
sen 12° = 0.208	12° = 0.209
sen 27° = 0.454	27° = 0.471

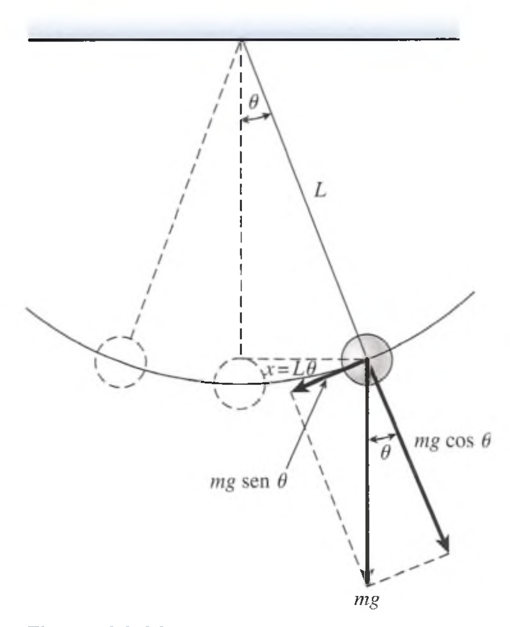


Figura 14.11

Cuando se utiliza la aproximación sen $\theta \approx \theta$, la ecuación (14.20) se vuelve

$$F = -mg \text{ sen } \theta = -mg\theta$$

Comparando esta relación con la ecuación (14.19) se obtiene

$$\text{F} = -kL\theta = -mg\theta$$

de donde

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{g}$$

Sustituyendo esta proporción en la ecuación (14.18) resulta una expresión para el periodo de un *péndulo simple*:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \textbf{(14.21)}$$

Observe que para amplitudes pequeñas el periodo del péndulo simple no está en función de la masa de la lenteja ni de la amplitud de la oscilación. En realidad, puesto que la aceleración de la gravedad es constante, el periodo depende exclusivamente de la longitud de la cuerda o varilla.

Ejemplo 14.7

En un experimento de laboratorio un estudiante recibe un cronómetro, una lenteja de madera y un trozo de cuerda. Para determinar la aceleración debida a la gravedad (g), construye un péndulo simple de 1 m de longitud. Se ata la lenteja de madera a un extremo y se hace oscilar el péndulo con MAS. Si el tiempo de 20 oscilaciones completas es igual a 40 s, ¿cuál será el valor obtenido para g?

Plan: El periodo es el tiempo de una oscilación o, en este caso, 2 s (40 s/20 osc = 2 s/osc). Para determinar la aceleración debida a la gravedad debemos resolver la ecuación (14.21) explícitamente para g y luego sustituir las valores para T y para L.

Solución: Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación (14.21) se obtiene

$$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

de donde

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1\text{ m})}{(2\text{ s})^2}$$
$$= 9.87\text{ m/s}^2$$

14.9 El péndulo de torsión

Otro ejemplo de MAS es el péndulo de torsión (figura 14.12), que consta de un disco o cilindro sólido apoyado en el extremo de una barra delgada. Si el disco se hace girar recorriendo un ángulo θ, el momento de torsión τ es directamente proporcional al desplazamiento angular. Por tanto,

$$\tau = -k'\theta \qquad \textbf{(14.22)}$$

donde k' es una constante que depende del material de que está hecha la varilla (véase el problema 13.42).

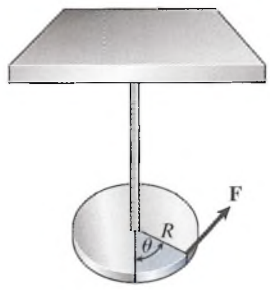


Figura 14.12

Cuando el disco se suelta, el par de restitución produce una aceleración angular que es directamente proporcional al desplazamiento angular. El periodo del movimiento armónico simple angular producido en esta forma está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}} \tag{14.23}$$

donde I es el momento de inercia del sistema que oscila y k' es la ***constante de torsión*** definida por la ecuación (14.17).

Ejemplo 14.8

Un disco sólido de masa igual a 0.40 kg y radio a 0.12 m está sostenido por el centro por una varilla delgada y rígida que, a su vez, se ha fijado al techo. Se gira la varilla en un ángulo de 1 rad y luego se le suelta para que oscile. Si la constante de torsión es de 0.025 N · m/rad, ¿cuál será la aceleración máxima y el periodo de oscilación?

Plan: Primero calcularemos el momento de inercia del disco ($\frac{1}{2}mR^2$). Para determinar la aceleración angular en función del desplazamiento angular debemos combinar las leyes de Newton y de Hooke para la rotación, de un modo semejante al usado para la oscilación lineal. El periodo se halla mediante la sustitución directa de los datos en la ecuación (14.23).

Solución: El momento de inercia del disco es

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(0.40 \text{ kg})(0.12 \text{ m})^2; \qquad I = 2.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

A partir de la ley de Newton, el momento de torsión es igual a $I\alpha$ y, con base en la ley de Hooke, a $-k'\alpha$, así que

$$I\alpha = -k'\theta \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{-k'\theta}{I}$$

$$\alpha = \frac{-(0.025 \text{ N} \cdot \text{m/rad})(1 \text{ rad})}{2.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = -8.62 \text{ rad/s}^2$$

Después, el periodo T se halla con sustitución directa, de este modo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{0.025 \text{ N} \cdot \text{m/rad}}}$$

$$T = 2.14 \text{ s}$$

Observe que el periodo no es función del desplazamiento angular.

Resumen y repaso

Resumen

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico en el que la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento. Ese movimiento oscilatorio sin fricción produce variaciones predecibles en términos de desplazamiento y velocidad. A continuación se resumen los principales conceptos expuestos en este capítulo.

- El movimiento armónico simple es producido por una *fuerza de restitución* **F** que se calcula mediante:

$$F = -kx \qquad \textit{Fuerza de restitución}$$

- Puesto que $F = ma = -kx$, la aceleración producida por una fuerza de restitución es

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad \textit{Aceleración}$$

- La energía se conserva durante el MAS sin fricción. Hemos determinado que para una masa m que oscila en un extremo de un resorte la energía total E es constante

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = \frac{1}{2}kA^2$$

En esta relación, k es la constante del resorte, v la velocidad, x el desplazamiento, A la amplitud y m la masa.

- Una forma práctica de estudiar el movimiento armónico simple consiste en usar el *círculo de referencia*. Las variaciones del desplazamiento x, la velocidad v y la aceleración a pueden observarse tomando como referencia las figuras 14.7, 14.8 y 14.9, respectivamente.
- En el MAS, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración se pueden expresar en función de la amplitud A, el tiempo t y la frecuencia de vibración f:

$$x = A\cos 2\pi ft \qquad \textit{Desplazamiento}$$

$$v = -2\pi fA \operatorname{sen} 2\pi ft \qquad \textit{Velocidad}$$

$$a = -4\pi^2f^2x \qquad \textit{Aceleración}$$

- El periodo T y la frecuencia f en el movimiento armónico simple se calculan a partir de

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}}$$

o

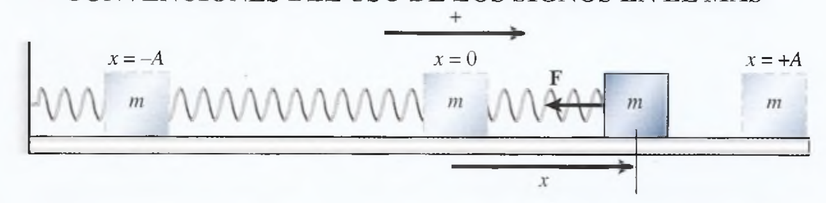
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textit{Frecuencia}$$

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a}}$$

o

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textit{Periodo}$$

CONVENCIONES DEL USO DE LOS SIGNOS EN EL MAS



- El *desplazamiento* x es positivo cuando la masa se ubica a la derecha de $x = 0$ y negativo cuando se halla a la izquierda del cero. No queda determinado por la dirección de la velocidad ni de la aceleración.
- La *velocidad* v es positiva cuando el movimiento va a la derecha y negativo cuando va a la izquierda. La dirección de la aceleración o de la velocidad no es un factor. La velocidad es máxima en el punto medio y cero en cada extremo.
- La *aceleración* a y la fuerza de restitución **F** son positivas cuando el desplazamiento es negativo y negativas cuando éste es positivo. La aceleración y la fuerza son un máximo en los extremos e iguales a cero en el punto medio.

- En el caso de un péndulo simple de longitud L, el periodo se calcula mediante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \textit{Periodo del péndulo simple}$$

- El péndulo de torsión consiste en un disco o cilindro sólido cuyo momento de inercia es I, suspendido del extremo de una varilla delgada. Si la constante de torsión k' es conocida, el periodo se calcula mediante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}} \quad \textit{Periodo del péndulo de torsión}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

14.1. Exponga varios ejemplos de movimiento que correspondan al MAS.

14.2. Si se duplica la amplitud A de un cuerpo que se mueve con MAS, ¿qué efecto tendrá en (a) el periodo, (b) la velocidad máxima y (c) la aceleración máxima?

14.3. Una masa m_1 de 2 kg se mueve en MAS con una frecuencia f_1. ¿Qué masa m_2 hará que el sistema oscile al doble de esa frecuencia?

14.4. Explique por medio de diagramas por qué la velocidad en el MAS es máxima cuando la aceleración es mínima.

14.5. Un disco unido a un resorte de fuerza constante k y configurado para oscilar con amplitud A, como se muestra en la figura 14.2. Después, el resorte se sustituye por otro cuya fuerza constante es igual a $4k$ y se le configura para una oscilación de la misma amplitud que antes. Compare sus periodos y frecuencias de oscilación.

14.6. Un reloj de péndulo funciona demasiado lentamente y se atrasa. ¿Qué ajuste requiere?

14.7. Si tiene un resorte con una constante de fuerza conocida, una regla graduada y un cronómetro, ¿cómo se puede halla el valor de una masa desconocida?

14.8. ¿Cómo se puede aplicar el principio del péndulo para calcular (a) la longitud, (b) la masa y (c) el tiempo?

14.9. Explique con claridad por qué el movimiento de un péndulo no es armónico simple cuando la amplitud es grande. ¿El periodo es mayor o menor de lo que debería ser si el movimiento fuera estrictamente un movimiento armónico simple?

Problemas

Sección 14.1 Movimiento periódico y Sección 14.2 Segunda ley de Newton y ley de Hooke

14.1. Una piedra oscila en círculos a rapidez constante en el extremo de una cuerda, describiendo 50 revoluciones en 30 s. ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de este movimiento? Resp. 1.67 rev/s, 0.600 s

14.2. Un niño está sentado en el borde de una plataforma que gira a 30 rev/min. La plataforma tiene 10 m de diámetro. ¿Cuál es el periodo del movimiento y cuál es la rapidez del niño?

14.3. Una pelota de caucho oscila en un círculo horizontal de 2 m de diámetro y describe 20 revoluciones en 1 min. Una luz distante proyecta la sombra de la pelota sobre una pared. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia y el periodo del movimiento de la sombra? Resp. 1.00 m, 0.333 Hz, 3.00 s

14.4. Suponga que una pelota se mueve en un círculo de 12 cm de radio a 300 rev/min. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia y el periodo de la sombra de la pelota proyectada en una pared?

14.5. Una masa oscila a la frecuencia de 3 Hz y con una amplitud de 6 cm. ¿Cuáles serán sus posiciones en los tiempos $t = 0$ y $t = 3.22$ s? Resp. 6 cm, −3.22 cm

14.6. Una masa de 50 g oscila con un MAS cuya frecuencia es de 0.25 Hz. Suponga que $t = 0$ cuando la masa se halla en su desplazamiento máximo. ¿En qué momento será el desplazamiento igual a cero? ¿En qué momento se encontrará la masa a la mitad de su amplitud?

14.7. Cuando una masa de 200 g cuelga de un resorte, la altura de éste desciende una distancia de 1.5 cm. ¿Cuál es la constante k del resorte? Resp. 131 N/m

14.8. Una masa adicional de 400 kg se añade a la masa inicial de 200 g del problema 14.7. ¿Cuál será el incremento del desplazamiento hacia abajo?

14.9. Una masa de 1.5 kg oscila en el extremo de un resorte con MAS. La amplitud de la vibración es de 0.15 m y la constante del resorte es de 80 N/m. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración y de la fuerza sobre la masa se ubica en los desplazamientos siguientes: (a) 0.15 m, (b) −0.09 m, y (c) +0.05 m?

Resp. (a) -8 m/s^2, -12 N; (b) $+4.8$ m/s^2, $+7.2$ N; (c) -2.67 m/s^2, -4 N

14.10. Un resorte ligero y un bloque de 0.65 kg se hallan en una superficie horizontal sin fricción. El resorte se comprime una distancia de 6 cm y se suelta para que vibre con MAS. Si la constante del resorte es de 9 N/m, ¿cuál es la aceleración inicial del bloque y cuál es la fuerza inicial sobre el bloque?

Sección 14.3. Trabajo y energía en el movimiento armónico simple

14.11. Se comprime un resorte una distancia de 4 cm. Si su constate es de 200 N/m, ¿cuánto trabajo realiza la fuerza de compresión? ¿Cuál es la energía potencial? Resp. 0.16 J, 0.16 J

14.12. Una pistola de juguete funciona empujando una bola de plástico contra un resorte, al que se comprime una distancia de 8 cm. La constante del resorte es de 400 N/m. Si se suelta la bola, ¿cuál será la velocidad cuando se aparta del extremo del resorte?

14.13. Una masa de 0.5 kg está unida a un resorte ligero cuya constante es de 25 N/m. La masa es desplazada una distancia de 6 cm y luego se le suelta para que oscile con MAS sobre una superficie horizontal sin fricción. (a) ¿Cuál es la energía total del sistema? (b) ¿Cuál es la velocidad máxima? (c) ¿Cuál es la aceleración máxima?

Resp. (a) 45 mJ, (b) 0.424 m/s, (c) 3 m/s^2

14.14. Se tienen las mismas condiciones del problema 14.13. ¿Cuál será la velocidad de una masa de 0.5 kg cuando su posición es $x = +5$ cm y cuál será su velocidad cuando $x = -3$ cm?

Sección 14.5 Velocidad en el movimiento armónico simple

14.15. Un cuerpo vibra con una frecuencia de 1.4 Hz y una amplitud de 4 cm. ¿Cuál es la velocidad máxima? ¿Cuál es su posición cuando la velocidad es cero?

Resp. ±0.351 m/s, $x = \pm 4$ cm

14.16. Un objeto oscila con una frecuencia de 5 Hz y una amplitud de 6 cm. ¿Cuál es la velocidad máxima?

14.17. Un bloque liso colocado sobre una superficie sin fricción está unido a un resorte, del que se tira a la derecha una distancia de 4 cm y luego se suelta. Tres segundos después regresa al punto de partida. ¿Cuál es su frecuencia y cuál es su rapidez máxima?

Resp. 0.333 Hz, 8.38 cm/s

14.18. En el problema 14.17, ¿cuáles son la posición y la velocidad 2.55 s después de soltar el bloque?

***14.19.** Una masa unida al extremo de un resorte oscila hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia de 0.600 Hz y una amplitud de 5 cm. ¿Cuál será su desplazamiento 2.56 s luego de soltar desde $A = +5$ cm?

Resp. −4.87 cm

***14.20.** Un objeto vibra con MAS de amplitud igual a 6 cm y frecuencia de 0.490 Hz. En $t = 0$, el desplazamiento es $x = +6$ cm. ¿En qué instante posterior su desplazamiento primero será $x = +2$ cm?

14.21. Demuestre que la velocidad de un objeto en MAS puede escribirse como una función de su amplitud y desplazamiento

$$v = \pm 2\pi f \sqrt{A^2 - x^2}$$

***14.22.** Use la relación derivada en el problema 14.21 para comprobar las respuestas obtenidas para la posición y la velocidad en el problema 14.18.

14.23. Una masa que vibra a una frecuencia de 0.5 Hz tiene una velocidad e 5 cm/s cuando pasa por el centro de oscilación. ¿Cuáles serán la amplitud y el periodo de oscilación? Resp. 1.59 cm, 2 s.

***14.24.** Un cuerpo vibra con una frecuencia de 8 Hz y una amplitud de 5 cm. ¿En qué instante después de que se le suelta de $x = +5$ su velocidad será igual a +2.00 m/s?

Sección 14.6. La aceleración en el movimiento armónico simple

14.25. Una masa de 400 g está unida a un resorte y hace que éste se alargue hasta una distancia vertical de 2 cm. A continuación, se tira de la masa hacia abajo hasta una distancia de 4 cm y se suelta para que vibre con MAS como se muestra en la figura 14.13. ¿Cuál es la constante del resorte? ¿Cuáles son la

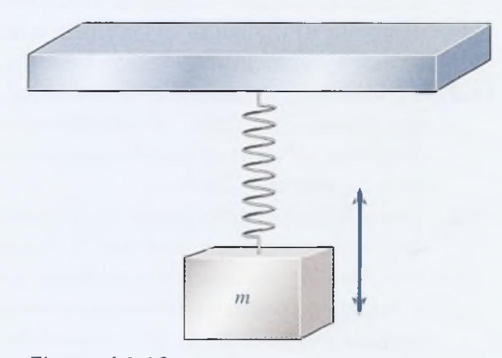


Figura 14.13

magnitud y la dirección de la aceleración cuando la masa se halla 2 cm por debajo de su posición de equilibrio? Resp. 196 N/m, 9.8 m/s² hacia arriba

14.26. ¿Cuál es la aceleración máxima para el sistema descrito en el problema 14.25 y cuál es su aceleración cuando se halla 3 cm arriba de su posición de equilibrio?

14.27. Un cuerpo describe una oscilación completa en 0.5 s. ¿Cuál es su aceleración cuando se desplaza a una distancia de $x = +2$ cm de su posición de equilibrio? Resp. −3.16 m/s²

14.28. Halle la velocidad y la aceleración máximas de un objeto que se mueve con MAS con una amplitud de 16 cm y una frecuencia de 2 Hz.

***14.29.** Un objeto que oscila con un periodo de 2 s es desviado hasta una distancia de $x = +6$ cm y luego se suelta. ¿Cuáles son su velocidad y su aceleración 3.20 s después de ser soltado? Resp. +11.1 cm/s, 0.479 m/s²

***14.30.** Un cuerpo vibra con MAS y su periodo es de 1.5 s y su amplitud es de 6 in. ¿Cuáles son su velocidad y su aceleración máximas?

***14.31.** En el caso del cuerpo descrito en el problema 14.30, ¿cuáles son su velocidad y su aceleración después de 7 s? Resp. 1.81 ft/s, 4.39 ft/s²

Sección 14.7 El periodo y la frecuencia

14.32. Las puntas de un diapasón vibran con una frecuencia de 330 Hz y una amplitud de 2 mm. ¿Cuál es la velocidad cuando el desplazamiento es de 1.5 mm?

***14.33.** Una masa de 400 g produce que un resorte se estire 20 cm. A continuación, la masa de 400 g es removida y sustituida por una masa m desconocida. Cuando se tira de la masa desconocida para que descienda 5 cm y luego se suelta, vibra con un periodo de 0.1 s. Calcule la masa del objeto. Resp. 4.96 g

***14.34.** Un largo trozo de metal delgado está sujeto por su extremo inferior y tiene una bola de 2 kg unida a su extremo superior. Cuando se tira de la bola hacia un lado y luego se suelta, ésta vibra con un periodo de 1.5 s ¿Cuál es la constante del resorte de este dispositivo?

***14.35.** Un automóvil y sus pasajeros tienen una masa total de 1 600 kg. El armazón del vehículo está sostenido por cuatro resortes, cada uno con una fuerza constante de 20 000 N/m. Calcule la frecuencia de vibración del automóvil cuando pasa sobre un promontorio del camino. Resp. 1.13 Hz

Sección 14.8 El péndulo simple

14.36. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia de un péndulo simple de 2 m de longitud?

***14.37.** Un reloj de péndulo simple marca los segundos cada vez que su lenteja llega a su amplitud máxima en cualquiera de los lados. ¿Cuál es el periodo de este movimiento? ¿Cuál debe ser la longitud del péndulo en el punto en que $g = 9.80$ m/s²? Resp. 2.00 s, 0.993 m

14.38. Un trozo de cuerda de 10 m de longitud está unido a un peso de acero que cuelga del techo. ¿Cuál es el periodo de su oscilación natural?

***14.39.** En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es de sólo 1.67 m/s2. Un reloj de péndulo ajustado para la Tierra es colocado en la Luna. ¿Qué fracción de su longitud en la Tierra deberá ser su nueva longitud en ese satélite? Resp. 0.17

***14.40.** Un estudiante construye un péndulo de 3 m de longitud y determina que completa 50 vibraciones en 2 min 54 s. ¿Cuál es la aceleración de acuerdo con la gravedad en el lugar donde está este estudiante?

Sección 14.9 El péndulo de torsión

***14.41.** Un péndulo de torsión oscila con una frecuencia de 0.55 Hz. ¿Cuál es el periodo de su vibración? ¿Cuál es la aceleración angular cuando su desplazamiento angular es de 60°? Resp. −12.5 rad/s²

***14.42.** La aceleración angular máxima de un péndulo de torsión es de 20 rad/s² cuando el desplazamiento angular es de 70°. ¿Cuál es la frecuencia de vibración?

***14.43.** Un disco de 20 cm de diámetro constituye la base de un péndulo de torsión. Una fuerza de 20 N, aplicada al borde, hace que éste gire en un ángulo de 12°. Si el periodo de la vibración angular después de soltar el borde es de 0.5 s, ¿cuál es el momento de inercia del disco? Resp. 0.0605 kg m²

***14.44.** Un objeto irregular está suspendido de un cable como un péndulo de torsión. Un momento de torsión de 40 lb · ft hace que gire hasta un ángulo de 15°. Cuando el objeto queda libre, oscila con una frecuencia de 3 Hz. ¿Cuál es el momento de inercia de ese cuerpo irregular?

Problemas adicionales

14.45. La constante de un resorte de metal es de 2000 N/m. ¿Qué masa hará que este resorte se estire hasta una distancia de 4 cm? Resp. 8.16 kg

14.46. Una masa de 4 kg cuelga de un resorte cuya constante k es de 400 N/m. Se tira de la masa haciéndola descender una distancia de 6 cm y luego se suelta. ¿Cuál es la aceleración en el instante en que se suelta?

14.47. ¿Cuál es la frecuencia natural de vibración del sistema descrito en el problema 14.46? ¿Cuál es la velocidad máxima? Resp. 1.59 Hz, ±59.9 cm/s

***14.48.** Una masa de 50 g, colocada en el extremo de un resorte (k = 20 N/m) se mueve con una rapidez de 120 cm/s cuando se coloca a una distancia de 10 cm de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la amplitud de la vibración?

***14.49.** Una masa de 40 g está unida a un resorte (k = 10 N/m) y después de desviarla de su posición de equilibrio se suelta, con una amplitud de 20 cm. ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando está a la mitad del camino hacia la posición de equilibrio? Resp. 2.74 m/s

14.50. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento para la masa del problema 14.49?

14.51. Una masa de 2 kg cuelga de un resorte ligero. La masa se mueve de su posición de equilibrio y se suelta, describe 20 oscilaciones en 25 s. Halle el periodo y la constante del resorte. Resp. 1.25 s, 50.5 N/m.

14.52. ¿Qué longitud debe tener el péndulo para que el periodo sea de 1.6 s en un punto donde g = 9.80 m/s^2?

***14.53.** Un objeto se mueve con un MAS de 20 cm de amplitud y 1.5 Hz de frecuencia. ¿Cuáles son la aceleración y la velocidad máximas? Resp. ±17.8 m/s^2, ±188 cm/s

***14.54.** En el caso del objeto presentado en el problema 14.53, ¿cuáles son la posición, la velocidad y la aceleración 1.4 s después de que el objeto llega a su desplazamiento máximo?

Preguntas para la reflexión crítica

***14.55.** Una masa m unida al extremo de un resorte oscila con una frecuencia f = 2 Hz y una amplitud A. Si la masa m se duplica, ¿cuál será la nueva frecuencia para la misma amplitud? Si la masa no cambia y la amplitud se duplica, ¿cuál será la frecuencia? Resp. 1.41 Hz, 2.00 Hz

***14.56.** Considere una masa de 2 kg unida a un resorte cuya constante es de 400 N/m. ¿Cuál es la frecuencia de vibración natural? Si el sistema se estira +8 cm y luego se suelta, ¿en qué puntos se maximizarán su velocidad y su aceleración? ¿Llegará a la mitad de su velocidad máxima cuando la amplitud llegue a la mitad? Calcule la velocidad máxima y la velocidad en x = 4 cm para comprobar su respuesta.

***14.57.** Una masa de 200 g está suspendida de un largo resorte en espiral. Cuando la masa se desplaza hacia abajo 10 cm, se observa que vibra con un periodo de 2 s. ¿Cuál es la constante elástica? ¿Cuáles son su velocidad y su aceleración cuando pasa *hacia arriba* por el punto que se ubica +5 cm por arriba de su posición de equilibrio? Resp. 1.97 N/m, 27.2 cm/s, −49.3 cm/s^2

***14.58.** Un reloj de péndulo marca los segundos cada vez que la lenteja pasa por su punto más bajo. ¿Cuál deberá ser la longitud del péndulo en un lugar donde g = 32.0 ft/s? Si el reloj se lleva a un sitio donde g = 31.0 ft/s^2, ¿cuánto tiempo se retrasará en un día?

***14.59.** Una masa de 500 g está unida a un dispositivo cuya constante del resorte es de 6 N/m. La masa se desplaza a la derecha hasta una distancia x = +5 cm a partir de su posición de equilibrio y luego se suelta. ¿Cuáles son su velocidad y su aceleración cuando x = +3 cm y cuando x = −3 cm? Resp. ±0.139 m/s, −0.360 m/s^2; ±0.139 m/s, +0.360 m/s^2

15 Fluidos



Los globos aerostáticos usan aire caliente, que es menos denso que el aire que lo rodea, para crear una fuerza de flotación. De acuerdo con el principio de Arquímedes, la fuerza de flotación es igual al peso del aire desplazado por el globo. (*Foto por Paul E. Tippens.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá y aplicará los conceptos de presión de fluidos y empuje vertical hacia arriba (fuerza de flotación) para resolver problemas físicos similares a los que se presentan como ejemplos en el texto.
2. Escribirá e ilustrará con dibujos los cuatro principios básicos de la presión de fluidos como se resumen en la sección 15.3 para demostrar que los ha comprendido.
3. Definirá *presión absoluta, presión manométrica* y *presión atmosférica*, y demostrará mediante ejemplos su comprensión de la relación entre estos términos.
4. Escribirá y aplicará fórmulas para calcular la ventaja mecánica de una prensa hidráulica en términos de las fuerzas o de las áreas de entrada y de salida.
5. Definirá la razón de flujo (gasto) de un fluido y resolverá problemas que relacionen la razón de flujo con la velocidad y el área transversal.
6. Escribirá la ecuación de Bernoulli en su forma general y describirá la ecuación cuando se aplica a (a) un fluido en reposo, (b) un flujo de fluido a presión constante y (c) el flujo a través de un tubo horizontal.
7. Aplicará la ecuación de Bernoulli para resolver problemas que incluyan presión absoluta P, densidad ρ, elevación del fluido h, y velocidad de flujo v.

Los líquidos y los gases se conocen como fluidos porque fluyen libremente y tienden a llenar los recipientes que los contienen. En este capítulo aprenderemos que los fluidos ejercen fuerzas sobre las paredes de los recipientes donde están contenidos. Esas fuerzas actúan sobre áreas definidas y originan una condición de presión. En la prensa hidráulica se utiliza la presión del fluido para elevar cargas pesadas. La estructura de los depósitos de agua, las presas y los grandes tanques de aceite se diseñan, en gran parte, tomando en cuenta la presión. En el diseño de barcos, submarinos y globos meteorológicos se debe tomar en cuenta la presión y la densidad del fluido circundante. Estudiaremos también los aspectos fundamentales del flujo de fluidos y las leyes de Bernoulli que gobiernan dicho movimiento.

15.1 Densidad

Antes de estudiar la estática y la dinámica de fluidos, es importante entender la relación entre la masa de un cuerpo y su volumen. Podría decirse que un bloque de plomo es *más pesado* que un bloque de madera. Lo que en realidad queremos expresar es que un bloque de plomo es más pesado que un bloque de madera de *tamaño similar*. Los términos *ligero* y *pesado* son de carácter comparativo. Como se ilustra en la figura 15.1, un bloque de plomo de 1 cm^3 tiene una masa de 11.3 g, mientras que un bloque de roble de 1 cm^3 tiene una masa de sólo 0.81 g. El volumen de la madera debe ser 14 veces el volumen del plomo si éstos tienen la misma masa.

La ***densidad*** o masa específica ρ de un cuerpo se define como la relación de su masa m con respecto a su volumen V.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad m = \rho V \tag{15.1}$$

La unidad del SI para la densidad es *kilogramos por metro cúbico* (kg/m^3). Por tanto, si un objeto tiene una masa de 4 kg y un volumen de 0.002 m^3, tiene una densidad de 2000 kg/m^3. Cuando trabajamos con volúmenes pequeños la densidad se expresa en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

Aun cuando no se recomienda el uso de unidades del SUEU, las unidades más viejas se siguen usando en Estados Unidos, por lo que es conveniente mencionar cuando menos el concepto de ***peso específico D***. El peso específico se usa con frecuencia para las unidades más viejas de peso (lb) y longitud (ft).

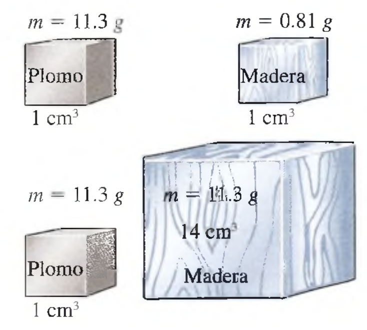


Figura 15.1 Comparación de la masa y el volumen para bloques de plomo y madera. El volumen de la madera debe ser 14 veces el del plomo si tienen la misma masa.

El peso específico D de un cuerpo se define como la relación entre su peso W y su volumen V. La *unidad común* es la libra por pie cúbico (lb/ft³).

$$D = \frac{W}{V} \qquad W = DV \tag{15.2}$$

Por ejemplo, el peso específico del agua es 62.4 lb/ft³.

La relación entre peso específico y densidad se determina recordando que $W = mg$. Por consiguiente,

$$D = \frac{mg}{V} = \rho g \tag{15.3}$$

Las densidades para los sólidos, líquidos y gases comunes se proporcionan en la tabla 15.1.

Tabla 15.1

Densidad y peso específico

Sustancia	ρ kg/m³	ρ g/cm³	D, lb/ft³
Sólidos:			
Acero	7 800	7.8	487
Aluminio	2 700	2.7	169
Cobre	8 890	8.89	555
Hielo	920	0.92	57
Hierro	7 850	7.85	490
Latón	8 700	8.7	540
Oro	19 300	19.3	1 204
Plata	10 500	10.5	654
Plomo	11 300	11.3	705
Roble	810	0.81	51
Vidrio	2 600	2.6	162
Líquidos:			
Agua	1 000	1.0	62.4
Alcohol	790	0.79	49
Benceno	880	0.88	54.7
Gasolina	680	0.68	42
Mercurio	13 600	13.6	850
Gases (0°C):			
Aire	1.29	0.00129	0.0807
Helio	0.178	0.000178	0.0110
Hidrógeno	0.090	0.000090	0.0058
Nitrógeno	1.25	0.00126	0.0782
Oxígeno	1.43	0.00143	0.00892

Ejemplo 15.1 Un tanque cilíndrico de gasolina tiene 3 m de altura y 1.2 m de diámetro. ¿Cuántos kilogramos de gasolina es capaz de almacenar el tanque?

Plan: Para calcular la masa, primero debemos determinar el volumen del cilindro circular derecho ($V = \pi r^2 h$), donde $r = \frac{1}{2}D = 0.60$ m. Por tanto, la masa se determina a partir de la ecuación (15.1).

Solución: El volumen es

$$V = \pi r^2 h = \pi(0.6 \text{ m})^2(3 \text{ m}); \qquad V = 3.39 \text{ m}^3$$

Al resolver la ecuación de la densidad para m tenemos

$$m = \rho V = (680 \text{ kg/m}^3)(3.39 \text{ m}^3); \qquad m = 2310 \text{ kg}$$

Otro método para indicar las densidades de las sustancias es la comparación su densidad con la densidad del agua. La relación de la densidad de la sustancia con respecto a la del agua se vuelve entonces la ***gravedad específica***, la cual es una cantidad sin dimensiones. Si un objeto tiene el doble de densidad que el agua, su gravedad específica es 2; un objeto que tiene una tercera parte de densidad que el agua tiene una densidad relativa de 1/3.

La gravedad específica de una sustancia se define como la razón de su densidad con respecto a la densidad del agua a 4°C (1 000 kg/m^3).

Un mejor nombre para esta cantidad es *densidad relativa*, pero el término *gravedad específica* se usa más ampliamente.

15.2 Presión

La eficiencia de una cierta fuerza a menudo depende del área sobre la que actúa. Por ejemplo, una mujer que usa tacones puntiagudos daña más los pisos que si usara tacones anchos. Aun cuando la dama ejerce la misma fuerza hacia abajo en ambos casos, con los tacones agudos su peso se reparte sobre un área mucho menor. A la *fuerza normal por unidad de área* se le llama ***presión.*** Simbólicamente, la presión P está dada por

$$P = \frac{F}{A} \tag{15.4}$$

donde A es el área donde se aplica la fuerza perpendicular F. La unidad de presión resulta de la relación entre cualquier unidad de fuerza y la unidad de área. Por ejemplo, *newtons por metro cuadrado* y *libras por pulgada cuadrada*. En el sistema SI de unidades, al N/m^2 se le llama pascal (Pa).

1 pascal (Pa) = 1 newton por metro cuadrado (N/m^2)

Cuando se informa la presión, el *kilopascal* (kPa) es la unidad de medida más apropiada para la mayoría de las aplicaciones. Sin embargo, sólo el Pa debe sustituirse en las fórmulas.

$$1 \text{ kPa} = 1\,000 \text{ N/m}^2 = 0.145 \text{ lb/in}^2$$

Ejemplo 15.2 Un zapato de golf tiene 10 tacos, cada uno con un área de 6.5×10^{-6} m^2 en contacto con el piso. Suponga que, al caminar, hay un instante en que los 10 tacos soportan el peso completo de una persona de 80 kg. ¿Cuál es la presión ejercida por los tacos sobre el suelo?

Plan: Calcularemos la fuerza total sobre el suelo al determinar el peso de una masa de 80 kg. Luego, dividiremos esa fuerza entre el área de 10 tacos para obtener la presión total.

Solución: El área total es 10 (6.5×10^{-6} m²) o 65×10^{-6} m². Por tanto, la presión es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$$

$$= \frac{(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{65.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.21 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

Recuerde que un N/m² es un pascal (Pa), podemos escribir la presión total como

$$P = 1.21 \times 10^7 \text{ Pa} = 12.1 \text{ MPa}$$

Cuando el área de un zapato en contacto con el suelo disminuye (como sucede con algunos zapatos de tacón), la presión aumenta. Es fácil ver por qué deben considerarse estos factores en la construcción de suelos.

15.3 Presión del fluido

Es importante la diferencia entre cómo actúa la fuerza sobre un fluido y cómo lo hace sobre un sólido. Puesto que el sólido es un cuerpo rígido, puede soportar que se le aplique una fuerza sin que cambie apreciablemente su forma. Por otra parte, un líquido puede soportar una fuerza únicamente en una superficie o frontera cerrada. Si el fluido no está restringido en su movimiento, empezará a fluir bajo el efecto del esfuerzo cortante, en lugar de deformarse elásticamente.

La fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene siempre actúa en forma perpendicular a esas paredes.

Ésta es una característica propia de los fluidos que hace que el concepto de presión sea muy útil. Si se perforan agujeros a los lados y al fondo de un barril con agua (véase la figura 15.2), se demuestra que la fuerza ejercida por el agua es en cualquier parte perpendicular a la superficie del barril.

Al reflexionar un momento se deduce que el líquido también ejerce una presión hacia arriba. Cualquier persona que haya tratado de mantener una balsa por debajo de la superficie del agua se convence de inmediato de la existencia de una presión hacia arriba. En realidad nos damos cuenta de que

Los fluidos ejercen presión en todas direcciones.

La figura 15.3 muestra un líquido bajo presión. Las fuerzas actúan sobre la cara del émbolo, sobre las paredes del recipiente y sobre las superficies del objeto suspendido, como se aprecia en la figura.

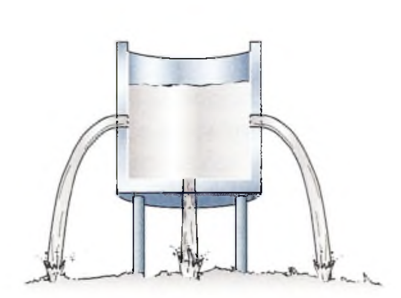


Figura 15.2 Las fuerzas ejercidas por un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene son perpendiculares en todos los puntos.

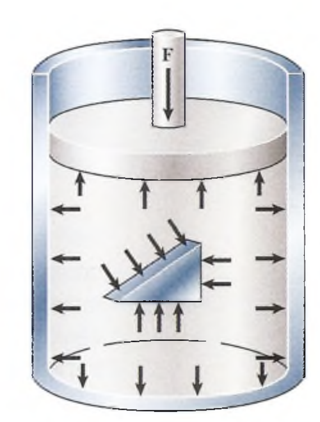


Figura 15.3 Los fluidos ejercen presión en todas direcciones.

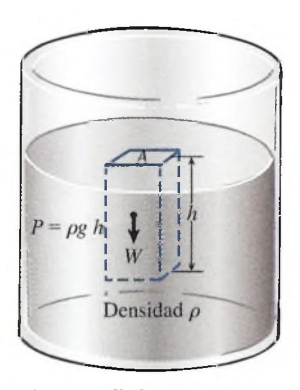


Figura 15.4 Relación entre presión, densidad y profundidad.

De igual manera que los volúmenes más grandes de objetos sólidos ejercen fuerzas mayores contra el lugar que los soporta, los fluidos ejercen mayor presión al aumentar la profundidad. El fluido en el fondo de un recipiente siempre está sometido a una presión mayor que la que experimenta cerca de la superficie. Esto se debe al peso del líquido que se encuentra arriba. Sin embargo, es preciso señalar una diferencia entre la presión ejercida por los sólidos y la que se produce en el caso de los líquidos. Un objeto sólido puede ejercer únicamente una fuerza *hacia abajo* debido a su peso. A cualquier profundidad en un fluido la presión es la misma en todas direcciones. Si esto no fuera cierto, el fluido podría fluir bajo la influencia de una presión resultante hasta que se alcanzara una nueva condición de equilibrio.

Puesto que el peso del fluido que está por arriba de un punto en cuestión es proporcional a su densidad, la presión a cualquier profundidad es también proporcional a la densidad del fluido. Esto puede visualizarse considerando una columna rectangular de agua cuyas dimensiones van desde la superficie hasta la profundidad h, como se muestra en la figura 15.4. El peso de la columna completa actúa sobre el área A en el fondo de la columna.

Partiendo de la ecuación (15.1), podemos escribir el peso de la columna como

$$W = DV = DAh$$

donde D es el peso específico del fluido. La presión (peso por unidad de área) a la profundidad h está dada por

$$P = \frac{W}{A} = Dh$$

o bien, en términos de densidad,

$$P = Dh = \rho g h \qquad \textbf{(15.5)}$$

La presión del fluido en cualquier punto es directamente proporcional a la densidad del fluido y a la profundidad bajo la superficie del fluido.

FÍSICA HOY

La pasta de dientes que sale cuando se aprieta el tubo, la maniobra de Heimlich (en la cual se ejerce una presión hacia arriba sobre el abdomen de una persona para extraer un cuerpo extraño atorado en la tráquea) y un elevador hidráulico son todos ejemplos de la ley de Pascal.

Ejemplo 15.3

La presión del agua en una casa es de 160 lb/in² ¿A qué altura debe estar el nivel del agua del recipiente de almacenamiento por encima de la toma de agua de la casa?

Plan: A partir de las tablas calculamos que el peso específico D del agua es 62.4 lb/ft³. La presión dada en la casa es 160 lb/in², por tanto debemos convertir a lb/ft² para obtener las unidades correspondientes. Luego aplicamos la ecuación (15.5) para resolver la altura h.

Solución: Al convertir las unidades tenemos

$$P = \left(160\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\right)\left(\frac{144\ \text{in}^2}{1\ \text{ft}^2}\right) = 23\,040\ \text{lb/ft}^2$$

Ahora al resolver para h en la ecuación (15.5) obtenemos

$$h = \frac{P}{D} = \frac{23\,040\ \text{lb/ft}^2}{62.4\ \text{lb/ft}^3}; \qquad h = 369\ \text{ft}$$

En el ejemplo anterior no se mencionó la forma o el tamaño del tanque de almacenamiento del agua. Tampoco se dio información acerca de la trayectoria que sigue el agua o el tamaño de las tuberías que conectan el tanque con la toma de la casa. ¿Debemos suponer que nuestra respuesta es correcta cuando se fundamenta tan sólo en la diferencia de niveles del agua? ¿No tienen algún efecto la forma o el área del depósito sobre la presión del líquido? Para responder estas preguntas, debemos recordar algunas de las características ya estudiadas acerca de los fluidos.

Considere una serie de recipientes que se comunican entre sí y que tienen diferentes áreas y formas interconectadas, como muestra la figura 15.5. Parecería a primera vista que el mayor volumen contenido en el recipiente A ejercería mayor presión en el fondo que el recipiente D.

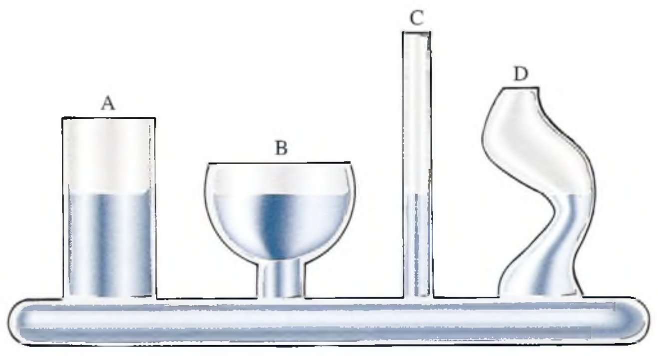


Figura 15.5 El agua siempre busca su propio nivel, lo cual indica que la presión es independiente del área o de la forma del recipiente.

El efecto de tal diferencia de presión forzaría al líquido a elevarse más en el recipiente *D*. Sin embargo, si se llenan los recipientes con líquido se demuestra que los niveles son iguales en todos los recipientes.

Parte del problema de entender esta paradoja proviene de la confusión de los términos *presión* y *fuerza total*. Como la presión se mide en términos de la unidad de área, no consideramos el área total cuando se resuelven problemas que incluyen a la presión. Por ejemplo, en el recipiente *A* el área del líquido en el fondo del recipiente es mucho mayor que el área del fondo del recipiente *D*. Esto significa que el líquido en el recipiente *A* ejercerá una ***fuerza total*** mayor en el fondo que el líquido del recipiente *D*. Pero la fuerza más grande se aplica sobre un área mayor, por lo que la presión es la misma en ambos recipientes.

Si el fondo de los recipientes *B*, *C* y *D* tuvieran la misma área podríamos decir que las fuerzas totales también son iguales en el fondo de estos recipientes. (Por supuesto, las presiones son iguales a cualquier profundidad.) Se puede preguntar por qué las fuerzas totales pueden ser iguales cuando los recipientes *B* y *C* contienen un mayor volumen de agua. El agua adicional en cada caso se apoya mediante componentes verticales de las fuerzas ejercidas por las paredes del recipiente sobre el fluido (véase la figura 15.6). Cuando las paredes del recipiente son verticales, las fuerzas que actúan sobre los lados no tienen componentes hacia arriba. Por tanto, la fuerza total al fondo de un recipiente es igual al peso de una columna recta de agua sobre el área de la base.

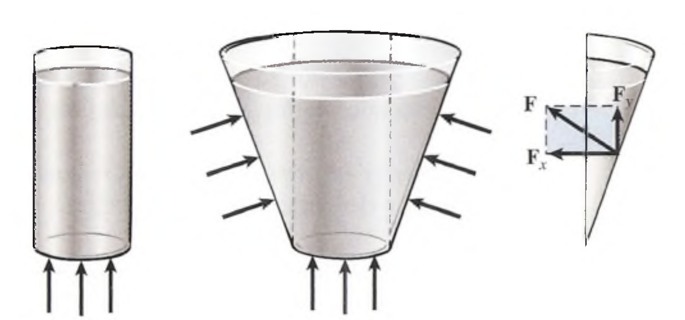


Figura 15.6 La presión en el fondo de cada recipiente sólo es función de la profundidad del líquido y es la misma en todas direcciones. Puesto que el área en el fondo es la misma en ambos recipientes, la fuerza total ejercida sobre el fondo de cada uno de ellos es también igual.

Ejemplo 15.4

Suponga que los recipientes de la figura 15.5 se llenan con gasolina hasta que el nivel del fluido es de 20 cm por arriba de la base de cada recipiente. Las áreas de las bases de los recipientes *A* y *B* son de 20 cm^2 y de 10 cm^2, respectivamente. Compare la presión y la fuerza total sobre la base de cada recipiente.

Plan: La densidad de la gasolina se proporciona en la tabla 15.1. La presión es la misma en la base para cualquier contenedor y está dada por ρgh. No obstante, la fuerza total no es la misma ya que el peso del agua por encima de la base es diferente. La fuerza total se define como el producto de la presión por el área.

Solución: La presión de la base de cualquier contenedor es

$$P = \rho gh = (680 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.20 \text{ m}); \qquad P = 1\,330 \text{ Pa}$$

Necesitamos convertir las áreas de cm² a m², recuerde que $1 \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Por tanto, la presión de determina al resolver para la fuerza en la ecuación (15.4)

$$F = PA = (1\,330 \text{ Pa})(20 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 2.66 \text{ N}$$
$$F = PA = (1\,330 \text{ Pa})(10 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1.33 \text{ N}$$

Estrategia para resolver problemas

Antes de considerar otras aplicaciones de la presión del fluido, vamos a resumir los principios estudiados en esta sección para los fluidos en reposo.

1. Las fuerzas ejercidas por un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene son siempre perpendiculares a dichas paredes.
2. La presión del fluido es directamente proporcional a la profundidad del fluido y a su densidad.
3. A cualquier profundidad, la presión del fluido es la misma en todas direcciones.
4. La presión del fluido es independiente de la forma o del área del recipiente que lo contiene.

15.4 Medición de la presión

La presión que se estudió en la sección previa se debe únicamente al propio fluido y puede calcularse a partir de la ecuación (15.5). Desafortunadamente, este caso no es el más frecuente. Cualquier líquido en un recipiente abierto, por ejemplo, está sujeto a la presión atmosférica además de la presión debida a su propio peso. Puesto que el líquido es relativamente incompresible, la presión externa de la atmósfera se trasmite por igual a todo el volumen del líquido. El primero en enunciar este hecho fue el matemático francés Blas Pascal (1623-1662), y se conoce como ***ley de Pascal.*** En general, se enuncia como sigue:

> Una presión externa aplicada a un fluido confinado se transmite uniformemente a través del volumen del líquido.

La mayoría de los dispositivos que permiten medir la presión directamente miden en realidad la diferencia entre la ***presión absoluta*** y la ***presión atmosférica.*** El resultado obtenido se conoce como la ***presión manométrica.***

Presión absoluta = presión manométrica + presión atmosférica

La presión atmosférica al nivel del mar es 101.3 kPa, o 14.7 lb/in². Debido a que la presión atmosférica participa en gran número de cálculos, con frecuencia se usa una unidad de presión de 1 ***atmósfera*** (atm), definida como la presión media que la atmósfera ejerce al nivel del mar, es decir, 101.3 kPa.

Un aparato muy común para medir la presión ***manométrica*** es el manómetro de tubo abierto, mostrado en la figura 15.7. El manómetro consiste en un tubo en forma de U que contiene un líquido, que generalmente es mercurio. Cuando ambos extremos del tubo están abiertos, el mercurio busca su propio nivel ya que se ejerce 1 atm de presión en cada uno de

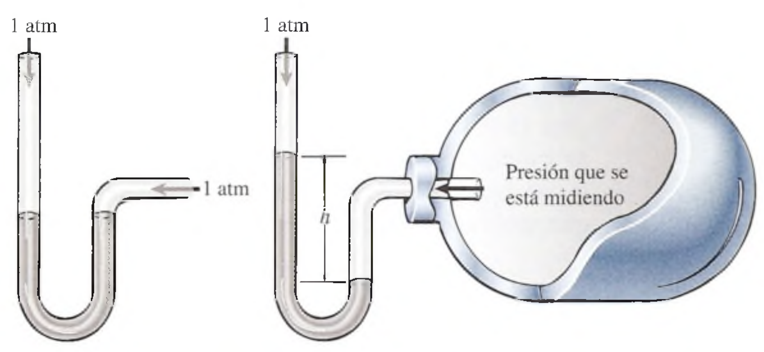


Figura 15.7 Manómetro de tubo abierto. La presión se mide por la altura h de la columna de mercurio.

los extremos abiertos. Cuando uno de los extremos se conecta a una cámara presurizada, el mercurio se eleva en el tubo abierto hasta que las presiones se igualan. La diferencia entre los dos niveles de mercurio es una medida de la presión manométrica: la diferencia entre la presión absoluta en la cámara y la presión atmosférica en el extremo abierto. El manómetro se usa con tanta frecuencia en situaciones de laboratorio que la presión atmosférica y otras presiones se expresan a menudo en *centímetros de mercurio* o *pulgadas de mercurio*.

Por lo general, la presión atmosférica se mide en el laboratorio con un barómetro de mercurio. El principio de su operación se muestra en la figura 15.8. Un tubo de vidrio, cerrado en un extremo, se llena de mercurio. El extremo abierto se tapa y el tubo se invierte en una cubeta de mercurio. Si no se tapa el extremo abierto, el mercurio fluye hacia afuera del tubo hasta que la presión ejercida por la columna de mercurio equilibra exactamente la presión atmosférica que actúa sobre el mercurio de la cubeta. Puesto que la presión en el tubo sobre la columna de mercurio es cero, la altura de la columna por arriba del nivel del mercurio en la cubeta indica la presión atmosférica. Al nivel del mar, una presión atmosférica de 14.7 lb/in^2 hará que el nivel del mercurio en el tubo se estabilice a una altura de 76 cm, o 30 in.

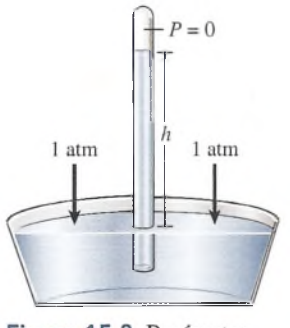


Figura 15.8 Barómetro.

En resumen, podemos escribir las siguientes medidas equivalentes de la presión atmosférica:

$$1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} = 14.7 \text{ lb/in}^2 = 76 \text{ cm de mercurio}$$
$$= 30 \text{ in de mercurio} = 2\,116 \text{ lb/ft}^2$$

Ejemplo 15.5

El manómetro de mercurio se usa para medir la presión de un gas dentro de un tanque (consulte la figura 15.7). Si la diferencia entre los dos niveles de mercurio es de 36 cm, ¿cuál es la presión absoluta dentro del tanque?

Plan: Recuerde que la presión absoluta es la suma de la presión manométrica y la presión atmosférica. El manómetro lee 36 cm, lo cual registra la *diferencia* entre la presión fuera del tanque (1 atm) y la presión dentro del mismo. Una atmósfera de presión es equivalente a una columna de 76 cm de mercurio. La presión *absoluta* en el tanque es, por tanto, la suma de 36 cm más 76 cm, o 112 cm de mercurio. La presión absoluta en el tanque es la presión debida a una columna de mercurio de 112 cm de altura.

Solución: La densidad del mercurio es 1.36×10^4 kg/m^3 y 112 cm es 1.12 m, así que la presión absoluta dentro del tanque se determina a partir de la ecuación (15.5)

$$P = \rho g h = (1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(1.12 \text{ m})$$
$$P = 1.49 \times 10^5 \text{ Pa} \qquad \text{o} \qquad P = 149 \text{ kPa}$$

Verifique que esta presión absoluta también se puede expresar como 1.47 atm.

15.5 La prensa hidráulica

La aplicación más frecuente de la ley de Pascal es la prensa hidráulica, que se ilustra en la figura 15.9. De acuerdo con el principio de Pascal, una presión aplicada al líquido en la columna izquierda se transmitirá íntegramente al líquido de la columna de la derecha. Por lo tanto, si una fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ actúa sobre un émbolo de área A_i, causará una fuerza de salida $\mathbf{F}_o$ que actúa sobre un émbolo de área A_o de modo que

$$\textit{Presión de entrada} = \textit{presión de salida}$$

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o} \tag{15.6}$$

La ventaja mecánica ideal de tal dispositivo es igual a la relación de la fuerza de salida con respecto a la fuerza de entrada. Simbólicamente escribimos

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{A_o}{A_i} \tag{15.7}$$

Una pequeña fuerza de entrada puede ser multiplicada para producir una fuerza de salida mucho mayor utilizando simplemente un émbolo de salida con una área mucho mayor que la del émbolo de entrada. La fuerza de salida está dada por

$$F_o = F_i \frac{A_o}{A_i} \tag{15.8}$$

De acuerdo con los métodos desarrollados en el capítulo 12 para las máquinas simples, el trabajo de entrada debe ser igual al trabajo de salida si despreciamos la fricción. Si la fuerza de entrada $\mathbf{F}_i$ recorre una distancia si mientras la fuerza de salida $\mathbf{F}_o$ viaja una distancia s_o, podemos escribir

$$\textit{Trabajo de entrada} = \textit{trabajo de salida}$$

$$F_i s_i = F_o s_o$$

Esta relación conduce a otra expresión útil para la ventaja mecánica ideal de una prensa hidráulica:

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{s_i}{s_o} \tag{15.9}$$

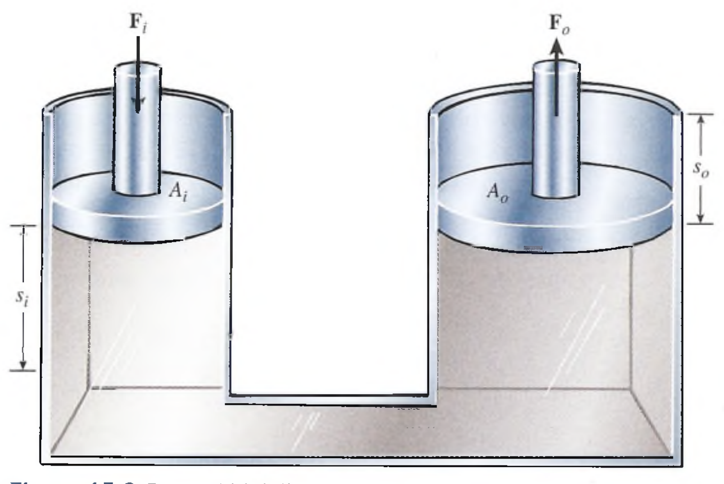


Figura 15.9 Prensa hidráulica.

Observe que la ventaja mecánica se gana a expensas de la distancia de entrada. Por esta razón, la mayoría de las aplicaciones utilizan un sistema de válvulas para permitir que el pistón de salida se eleve por una serie de impulsos cortos del pistón de entrada.

Ejemplo 15.6

Una prensa hidráulica tiene un émbolo de entrada de 5 cm de diámetro y un émbolo de salida de 60 cm de diámetro. ¿Qué fuerza de entrada se requiere para proporcionar una fuerza total de salida capaz de levantar un automóvil de 950 kg?

Plan: Para calcular la fuerza de entrada, primero se usan los diámetros de los émbolos con el fin de determinar la ventaja mecánica ideal de la ecuación (15.7). Suponga que la fricción es insignificante y recuerde que el área de cada émbolo es $\pi d^2/4$. La fuerza de entrada necesaria puede determinarse a partir del valor calculado de M_I.

Solución: La ventaja mecánica ideal es

$$M_I = \frac{A_o}{A_i} = \frac{\pi d_o^2/4}{\pi d_i^2/4} = \frac{d_o^2}{d_i^2}; \qquad M_I = \left(\frac{d_o}{d_i}\right)^2$$

$$M_I = \left(\frac{60 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}\right)^2 = 144$$

La fuerza de salida necesaria es $F_o = W = mg$, por tanto al resolver la ecuación (15.7) para F_i obtenemos

$$M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{mg}{F_i} \qquad \text{o} \qquad F_i = \frac{mg}{M_I}$$

$$F_i = \frac{(950 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{144} = 64.7 \text{ N}$$

El principio de la prensa hidráulica se aprovecha en múltiples dispositivos mecánicos y de ingeniería. Entre los ejemplos más comunes están: la dirección hidráulica de vehículos (servodirección), el gato hidráulico, los amortiguadores y el sistema de frenos de los automóviles.

15.6 Principio de Arquímedes

FÍSICA HOY

Puede probar el principio de Arquímedes al sumergir un objeto en un fluido como el agua. Si el objeto no es tan denso como el fluido, se sumergirá sólo hasta el punto en el cual se ha desplazado suficiente agua para igualar el peso del objeto. El volumen del agua desplazada y el peso del objeto serán iguales.

Cualquier persona familiarizada con la natación y otros deportes acuáticos ha observado que los objetos parecen perder peso cuando se sumergen en agua. En realidad, el objeto puede incluso flotar en la superficie debido a la presión hacia arriba ejercida por el agua. Un antiguo matemático griego, Arquímedes (287-212 a. C.), fue el primero que estudió el empuje vertical hacia arriba ejercido por los fluidos. El ***principio de Arquímedes*** se enuncia en la siguiente forma:

> Un objeto que se encuentra parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascendente (empuje) igual al peso del fluido desalojado.

El principio de Arquímedes se puede demostrar estudiando las fuerzas que ejerce el fluido sobre un cuerpo que se encuentra suspendido en él. Considere un disco de área A y de altura H que está totalmente sumergido en un fluido, como se muestra en la figura 15.10. Recuerde que la presión a cualquier profundidad h en el fluido está dada por

$$P = \rho g h$$

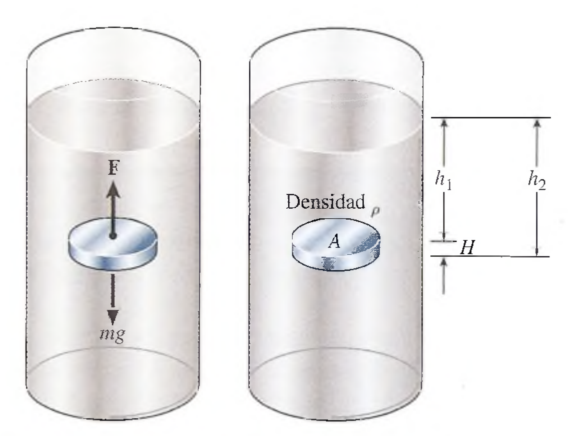


Figura 15.10 El empuje que se ejerce sobre el disco es igual al peso del fluido que se desplaza.

FÍSICA HOY

El tornillo de Arquímedes

Una invención de Arquímedes puede ponerse en práctica a gran escala en los parques acuáticos futuros. El tornillo de Arquímedes es un tornillo helicoidal que gira y lleva agua cuesta arriba. El Aquavator, un tubo de tornillo helicoidal de 40 ft de altura, se sumerge en un depósito de agua en el cual las personas esperan a que el agua llegue a la cima de una resbaladilla de agua. Las personas flotan en el tubo en el fondo. El tubo gira y las personas suben lentamente en el agua capturada flotando hasta la parte superior donde se les suelta directamente en la resbaladilla de agua.

donde ρ es la densidad de masa del fluido y g es la aceleración debida a la gravedad. Por supuesto, si deseamos representar la presión absoluta dentro del fluido, tenemos que sumar también la presión externa ejercida por la atmósfera. La presión total hacia abajo P_1 ejercida sobre la parte superior del disco, según la figura 15.10, es, por lo tanto:

$$P_1 = P_a + \rho g h_1 \qquad \text{(hacia abajo)}$$

donde P_a es la presión atmosférica y h_1 es la profundidad en la parte superior del disco. En forma similar, la presión hacia arriba P_2 en la parte inferior del disco es

$$P_2 = P_a + \rho g h_2 \qquad \text{(hacia arriba)}$$

donde h_2 es la profundidad medida en la parte inferior del disco. Puesto que h_2 es mayor que h_1, la presión registrada en la parte inferior del disco es mayor que la presión en su parte superior, lo cual da por resultado una fuerza neta hacia arriba. Si representamos la fuerza hacia abajo como F_1 y la fuerza hacia arriba como F_2, podemos escribir

$$F_1 = P_1 A \qquad F_2 = P_2 A$$

La fuerza neta hacia arriba ejercida *por* el fluido *sobre* el disco se llama ***empuje*** está dada por

$$\begin{aligned} F_B &= F_2 - F_1 = A(P_2 - P_1) \\ &= A(P_a + \rho g h_2 - P_a - \rho g h_1) \\ &= A\rho g(h_2 - h_1) = A\rho g H \end{aligned}$$

donde $H = h_2 - h_1$ es la altura del disco. Finalmente, si recordamos que el volumen del disco es $V = AH$, obtenemos este importante resultado:

$$F_B = \rho g V = mg \qquad \textbf{(15.10)}$$

empuje = peso del fluido desalojado

que es el principio de Arquímedes.

Al aplicar este resultado debemos recordar que la ecuación (15.10) nos permite calcular únicamente el *empuje ocasionado* por la diferencia de presiones. No representa en realidad la fuerza resultante. Un cuerpo se sumergirá si el peso del fluido que desaloja (el empuje) es menor que el peso de dicho cuerpo. Si el peso del fluido desalojado es exactamente igual al peso del cuerpo sumergido, éste ni se hunde ni se va hasta arriba. En este caso, el cuerpo estará en equilibrio. Si el peso del fluido desalojado excede al peso del cuerpo sumergido, el cuerpo se elevará hasta la superficie y flotará. Cuando el cuerpo flota y alcanza el equilibrio en la superficie, desplazará su propio peso de líquido. La figura 15.11 demuestra esto mediante el uso de un recipiente cilíndrico con vertedero y un vaso para recibir el fluido desalojado por un bloque de madera.

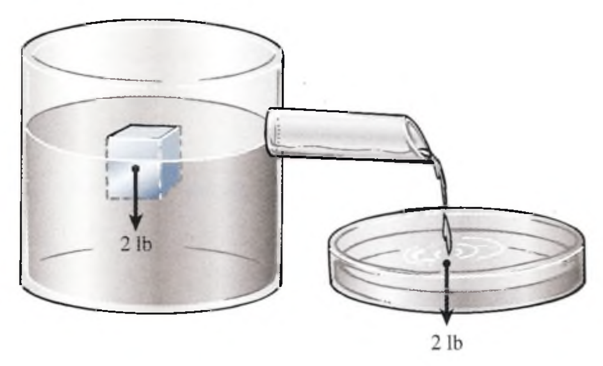


Figura 15.11 Un cuerpo que flota desaloja su propio peso de fluido.

Ejemplo 15.7

Un corcho tiene un volumen de 4 cm^3 y una densidad de 207 kg/m^3. (a) ¿Qué volumen del corcho se encuentra bajo la superficie cuando el corcho flota en agua? (b) ¿Qué fuerza hacia abajo es necesaria para sumergir el corcho por completo?

Plan: El corcho desplaza un volumen de agua igual a su propio peso. Usaremos la densidad y el volumen del corcho para calcular su peso. Luego aplicaremos el principio de Arquímedes para hallar el volumen de agua requerido para proporcionar un volumen igual al peso del corcho. Ese volumen de agua también es igual al volumen del corcho bajo la superficie. En la parte (a), el empuje debe ser igual a la suma del peso del bloque y la fuerza descendente que sumerge el bloque en la superficie. Por tanto, necesitamos determinar el empuje sobre el corcho completamente sumergido y luego restar el peso del corcho para calcular la fuerza adicional necesaria para mantenerlo sumergido.

Solución (a): La densidad del corcho es 207 kg/m^3, y su volumen es 4 cm^3. Recuerde que 1 $cm^3 = 1 \times 10^{-6}$ m^3, calcularemos el peso de 4×10^{-6} m^3 del corcho.

$$\rho = \frac{m}{V}; \qquad m = \frac{W}{g} \qquad \text{por tanto} \qquad \rho = \frac{W}{gV}$$

$$W = \rho g V = (207\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(4 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)$$
$$= 8.11 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

Ahora bien, como el mismo peso de agua se desplaza, $W = \rho_w gV$, vemos que

$$V_w = \frac{W}{\rho g} = \frac{8.11 \times 10^{-3}\ \text{N}}{(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)}$$
$$= 8.28 \times 10^{-7}\ \text{m}^3 \qquad \text{o} \qquad 0.828\ \text{cm}^3$$

Por tanto, el volumen del corcho bajo el agua es también 0.828 cm^3.

Si el área de la superficie flotante fuera conocida, se podría calcular a qué profundidad se sumergiría el corcho en el agua. Observe que aproximadamente el 21 por ciento del corcho se encuentra bajo el agua. Como ejercicio, demuestre usted que la fracción de volumen sumergida es igual a la gravedad específica de un objeto.

Solución (b): Cuando el corcho se sumerge, el equilibrio exige que las fuerzas estén balanceadas.

La suma de estas fuerzas descendentes es igual al empuje F_B. Por tanto

$$F + W = F_B$$

La fuerza descendente necesaria F es por lo tanto igual a la diferencia entre el empuje y el peso del corcho.

$$F = F_B - W$$

Por el principio de Arquímedes tenemos que el empuje es el peso de 4 cm^3 de agua.

$$F_B = \rho g V = (1000\text{ kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)(4 \times 10^{-6}\text{ m}^3)$$
$$= 39.2 \times 10^{-3}\text{ N}$$

La fuerza requerida F para sumergir al corcho es

$$F = 39.2 \times 10^{-3}\text{ N} - 8.11 \times 10^{-3}\text{ N}$$
$$= 31.1 \times 10^{-3}\text{ N}$$

Ejemplo 15.8

Un globo meteorológico requiere operar a una altitud donde la densidad del aire es 0.9 kg/m^3. A esa altitud, el globo tiene un volumen de 20 m^3 y está lleno de helio (ρ_{He} = 0.178 kg/m^3). Si la bolsa del globo pesa 88 N, ¿qué carga es capaz de soportar a este nivel?

Plan: El globo entrará en equilibrio y se volverá estable cuando la fuerza ascendente ejercida en el globo sea igual a las fuerzas descendentes debida a los pesos de la carga, la bolsa del globo y el helio dentro del globo. Primero calcularemos el empuje debido al desalojo de aire, luego calcularemos el peso del helio dentro del globo.

La carga que puede soportarse se determina según el peso requerido para producir el equilibrio.

Solución: El empuje es igual al peso del aire desalojado. Por lo tanto,

$$F_B = \rho_{\text{aire}} g V = (0.9\text{ kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m}^3)$$
$$= 176\text{ N}$$

El peso del helio contenido es

$$W_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} g V_{\text{He}} = (0.178\text{ kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m}^3)$$
$$= 34.9\text{ N}$$

Las fuerzas verticales se equilibran, por lo que

$$F_B = W_L + W_{\text{He}} + W_{\text{globo}}$$

Al resolver para W_L tenemos

$$W_L = F_B - W_{\text{He}} - W_{\text{globo}}$$
$$= 176\text{ N} - 34.9\text{ N} - 88\text{ N}$$
$$= 53.1\text{ N}$$

Los globos grandes pueden conservar una condición de equilibrio a cualquier altitud mediante el ajuste de su peso o del empuje. El peso puede aligerarse al soltar lastre que sirve para ese propósito. El empuje puede disminuir, dejando salir gas del globo, o aumentar insuflando gas al globo flexible. Los globos de aire caliente usan la baja densidad del aire caliente para poder flotar.

Estrategia para resolver problemas

Fluidos en reposo

1. Dibuje una figura y márquela con las cantidades proporcionadas y las que deben calcularse. Use unidades congruentes para el área, volumen, densidad y presión.
2. No confunda presión *absoluta* con presión *manométrica* o densidad con *peso* específico. Debe usar la presión absoluta a menos que el problema incluya una *diferencia* de presión. Tenga cuidado con las unidades si intenta usar peso específico, que es *fuerza* por unidad de volumen.
3. La diferencia de presión entre dos puntos es proporcional a la densidad del fluido y a la profundidad en el fluido:
$$P_2 - P_1 = \rho g h \qquad \rho = \frac{m}{V} \qquad P = \frac{F}{A}$$
4. El principio de Arquímedes establece que un objeto total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza hacia arriba (empuje), igual al peso del fluido desalojado:
$$F_B = mg = \rho g V \qquad (empuje)$$
5. Recuerde que el empuje depende tanto de la densidad del *fluido desalojado* como del volumen del mismo. No tiene ninguna relación con la masa o la densidad del objeto sumergido en el fluido. Si el objeto se encuentra *totalmente* sumergido, el volumen del objeto y el fluido desplazados son iguales. Este hecho puede aprovecharse para determinar empuje en esos casos.
6. Para un objeto que está *flotando* en el fluido, el empuje debe ser igual al peso del objeto. Esto significa que el peso del objeto debe ser igual al peso del *fluido desalojado*. Por consiguiente, podemos escribir:
$$m_x g = m_f g \qquad \text{o} \qquad \rho_x V_x = \rho_f V_f$$
El subíndice x se refiere al objeto que flota y el subíndice f se refiere al fluido desalojado. Por ejemplo, si un objeto con un volumen de 3 m^3 flota con dos tercios de su volumen sumergido, entonces $V_x = 3$ m^3 y $V_f = 2$ m^3.

15.7 Flujo de fluidos

Hasta ahora, nuestro estudio de los fluidos se ha restringido a condiciones de reposo, que son considerablemente más sencillas que el estudio de fluidos en movimiento. Las dificultades matemáticas a las que hay que enfrentarse cuando se intenta describir el movimiento de un fluido son formidables. La tarea se facilitará si establecemos ciertas suposiciones. Ante todo, consideraremos que todos los fluidos en movimiento muestran una corriente laminar o ***flujo aerodinámico.***

El flujo aerodinámico es el movimiento de un fluido en el cual cada partícula en el fluido sigue la misma trayectoria (pasa por un punto particular) que siguió la partícula anterior.

La figura 15.12 muestra las *líneas de corriente* de flujo de aire que pasan por dos obstáculos estacionarios. Observe que las líneas de corriente se rompen cuando el aire pasa sobre el segundo obstáculo, generando corriente turbulenta y remolinos. Estos pequeños remolinos representan el ***flujo turbulento*** y absorben gran parte de la energía del fluido, incrementando el arrastre por fricción a través del fluido.

Vamos a considerar, además, que los fluidos son incompresibles y que no presentan una fricción interna apreciable. En estas condiciones, se pueden hacer algunas predicciones acerca de la *razón de flujo del fluido* (gasto) a lo largo de una tubería o de otro recipiente.

El flujo del fluido (gasto) se define como el volumen de fluido que pasa a través de cierta sección transversal en una unidad de tiempo.

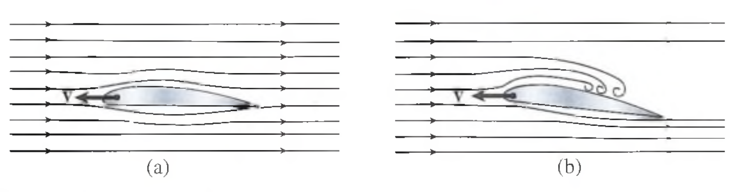


Figura 15.12 Flujos laminar y turbulento en la trayectoria de un fluido.

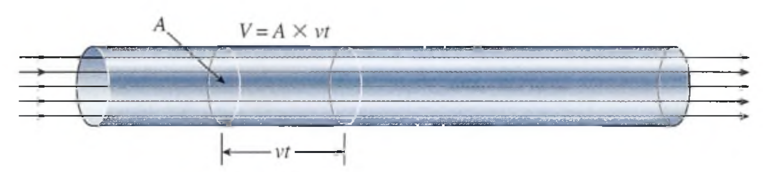


Figura 15.13 Cálculo de la velocidad de un fluido que circula por un tubo.

FÍSICA HOY

¿Bats de beisbol con hoyuelos?
Tal vez haya visto o incluso probado un nuevo tipo de bat de beisbol que tiene hoyuelos a lo largo del mismo parecidos a los de una pelota de golf. Estos hoyuelos en realidad ayudan al bat a balancearse más rápido por el aire debido a la dinámica de fluidos. Los hoyuelos provocan una turbulencia microscópica que a su vez genera un flujo aerodinámico más global.

Para expresar esta razón en forma cuantitativa, consideraremos el caso de un líquido que fluye a lo largo de una tubería como la que se ilustra en la figura 15.13, con una velocidad media v. En un espacio de tiempo t, cada partícula en la corriente se mueve a través de una distancia vt. El volumen V que fluye a través de la sección transversal A está dado por

$$V = Avt$$

Por lo tanto, ***el gasto*** (volumen por unidad de tiempo) se puede calcular partiendo de

$$R = \frac{Avt}{t} = vA \qquad \textbf{(15.11)}$$

Gasto = velocidad × sección transversal

Las unidades de R expresan la relación de una unidad de volumen entre una unidad de tiempo. Ejemplos frecuentes de esto son: pies cúbicos por segundo, metros cúbicos por segundo, litros por segundo y galones por minuto.

Si el fluido es incompresible y no tomamos en cuenta los efectos de la fricción interna, el gasto R permanecerá constante. Esto significa que una variación en la sección transversal en la tubería, como se muestra en la figura 15.14, da por resultado un cambio en la rapidez del líquido, de tal modo que el producto vA permanece constante. Simbólicamente escribimos

$$R = v_1A_1 = v_2A_2 \qquad \textbf{(15.12)}$$

Un líquido fluye con más rapidez a través de una sección estrecha de tubería y más lentamente a través de secciones más amplias. Este principio es la causa de que el agua fluya más rápido en las partes de un arroyo donde las orillas del mismo están más cercanas entre sí.

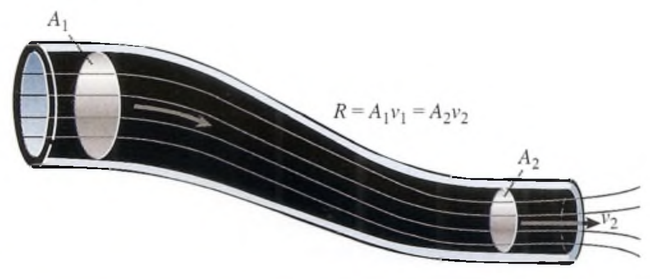


Figura 15.14 En el flujo laminar, el producto de la velocidad del fluido por el área de la sección transversal del tubo es constante en cualquier punto.

Ejemplo 2.10

El agua fluye a través de una manguera de hule de 2 cm de diámetro a una velocidad de 4 m/s. (a) ¿Qué diámetro debe tener el chorro si el agua sale a 20 m/s? (b) ¿Cuál es el gasto en metros cúbicos por minuto?

Plan: El gasto debe ser el mismo tanto en la manguera como a través del chorro, así que $A_1v_1 = A_2v_2$. A partir de esto, determinamos la velocidad a través del chorro. Después de determinar el área de cualquier abertura, podemos multiplicar por la velocidad para hallar el gasto.

Solución (a): Como el área A es proporcional al cuadrado del diámetro, podemos escribir

$$d_1^2v_1 = d_2^2v_2 \qquad \text{o} \qquad d_2^2 = \frac{v_1d_1^2}{v_2}$$

A partir de lo cual

$$d_2 = \sqrt{\frac{v_1 d_1^2}{v_2}} = \sqrt{\frac{(4 \text{ m/s})(2 \text{ cm})^2}{(20 \text{ m/s})}}$$

$$= \sqrt{0.80 \text{ cm}^2} = 0.894 \text{ cm}$$

Solución (b): Para calcular el gasto, primero debemos determinar el área de la manguera de 2 cm de diámetro.

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi (2 \text{ cm})^2}{4} = 3.14 \text{ cm}^2$$

$$= 3.14 \text{ cm}^2 \left(\frac{1 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \text{ cm}^2}\right) = 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

El gasto es $R = A_1 v_1$, así que

$$R = (3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(4 \text{ m/s}) = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$= (1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})(60 \text{ s/min}) = 0.0754 \text{ m}^3/\text{min}$$

El mismo valor debe obtenerse considerando el producto $A_2 v_2$.

Estrategia para resolver problemas

Problemas sobre gasto

1. Lea el problema cuidadosamente, y, después de dibujar un esquema, elabore una lista con la información proporcionada.
2. Recuerde que el gasto R representa el volumen del fluido que pasa por una determinada sección transversal por unidad de tiempo.
3. Cuando un volumen de fluido pasa de una sección transversal A_1 a otra A_2, el gasto no cambia.

$$R = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Asegúrese de utilizar unidades congruentes para el volumen y el área.

4. Puesto que el área A de una tubería es proporcional al cuadrado de su diámetro d, una forma más útil de expresar la ecuación anterior puede ser:

$$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$$

5. Las unidades elegidas para la velocidad o el diámetro en una sección de la tubería deben ser las mismas que se usen en la segunda sección de la tubería.

15.8 Presión y velocidad

Hemos observado que la velocidad de un fluido aumenta cuando fluye a través de un angostamiento. Un incremento en la velocidad únicamente se puede deber a la presencia de una fuerza de aceleración. Para acelerar un líquido que entra al angostamiento, la fuerza de empuje proveniente de la sección transversal amplia debe ser mayor que la fuerza de resistencia del angostamiento. En otras palabras, la presión en los puntos A y C, en la figura 15.15 debe ser mayor que la presión en B. Los tubos insertados en la tubería sobre dichos puntos indican claramente la diferencia de presión. El nivel del fluido en el tubo situado sobre la parte angosta es más bajo que el nivel en las áreas adyacentes. Si h es la diferencia de altura, la diferencia de presión está dada por

$$P_A - P_B = \rho g h \tag{15.13}$$

Esto es cierto si se supone que la tubería está en posición horizontal y que no se producen cambios de presión debido al cambio de energía potencial.

El ejemplo anterior, como se muestra en la figura 15.15, muestra el principio del *medidor venturi*. Partiendo de la determinación de la diferencia de la presión, este dispositivo hace posible el cálculo de la velocidad del agua en una tubería horizontal.

FÍSICA HOY

Las válvulas de corazón son una de las maravillosas proezas de la ingeniería. En la actualidad, las válvulas dañadas o mal formadas pueden ser reemplazadas por una válvula de corazón artificial. Los distintos diseños reflejan los problemas que enfrenta flujo de fluidos en el cuerpo. La válvula de pivote abierto utiliza dos ejes de medio círculo hechos de carbón pirolítico dentro un recubrimiento de teflón con un disco endurecedor de titanio. El objetivo es reducir la turbulencia al abrir más la válvula que si se tuviera una sola puerta circular. La turbulencia en el flujo sanguíneo significa energía desperdiciada y también provoca la ruptura de las células sanguíneas y puede debilitar a la válvula en forma prematura al mover partículas como resultado de los latidos. Otro diseño es el disco individual, que el cirujano puede rotar para reducir la turbulencia al mínimo. Con solo un punto de pivote y una parte en movimiento (caso contrario al pivote abierto), esta válvula de corazón podría ser más duradera. Una cosa es cierta: ¡nadie quiere una válvula que falle bajo la carga de presión de un corazón que palpita!

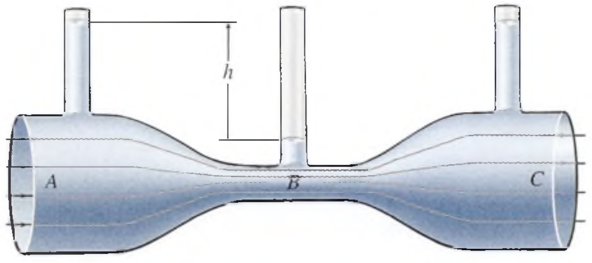


Figura 15.15 El incremento de la velocidad de un fluido que se desplaza a través de una sección más estrecha de un tubo provoca una caída en la presión.

El *efecto venturi* tiene muchas otras aplicaciones tanto para líquidos como para gases. El carburador de un automóvil utiliza el principio venturi para mezclar vapor de gasolina y aire. El aire que pasa a través de un angostamiento en su camino hacia los cilindros, origina un área de baja presión a medida que aumenta su velocidad. La disminución en la presión se usa para enviar combustible a la columna de aire, donde se vaporiza rápidamente.

La figura 15.16 muestra dos métodos que se pueden usar para demostrar la disminución de la presión debida al aumento de velocidad. Un ejemplo más sencillo consiste en soplar aire por encima de la superficie de una hoja de papel, como se puede ver en la figura 15.16a. La presión en la corriente de aire por encima del papel se reducirá. Esto permite que el exceso de presión en la parte inferior empuje al papel hacia arriba.

Una segunda demostración requiere de un carrete, un disco de cartulina y un alfiler (figura 15.16b). El alfiler se clava a través del disco de cartulina y se coloca en uno de los extremos del carrete, como muestra la figura. Si se sopla a través del extremo abierto, descubrirá que el disco se adhiere más al otro extremo. Uno esperaría que el disco de cartulina se despegara de inmediato. La explicación es que el aire que fue soplado en el carrete debe escapar a través del estrecho espacio entre el disco y el extremo del carrete. Esta acción crea un área de baja presión, lo que permite que la presión atmosférica externa empuje al disco contra el carrete.

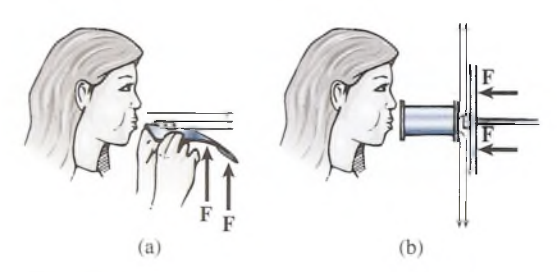


Figura 15.16 Demostraciones de la disminución de presión que resulta de un incremento en las rapideces del aire.

15.9 Ecuación de Bernoulli

En nuestro estudio sobre fluidos, hemos destacado cuatro parámetros: la presión P, la densidad ρ, la velocidad v, y la altura h sobre algún nivel de referencia. El primero en establecer la relación entre estas cantidades y su capacidad para describir fluidos en movimiento fue el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700-1782). Los pasos que condujeron al desarrollo de esta relación fundamental se pueden comprender considerando la figura 15.17.

Puesto que un fluido tiene masa, debe obedecer a las mismas leyes de la conservación establecidas para los sólidos. En consecuencia, el trabajo necesario para mover cierto volumen de fluido a lo largo de la tubería debe ser igual al cambio total en energía potencial y cinética. Consideremos el trabajo requerido para mover el fluido del punto a al punto b en la figura 15.17a. El trabajo neto debe ser la suma del trabajo realizado por la fuerza de entrada $\mathbf{F}_1$ y el trabajo negativo efectuado por la fuerza de resistencia $\mathbf{F}_2$.

$$\text{Trabajo neto} = F_1 s_1 - F_2 s_2$$

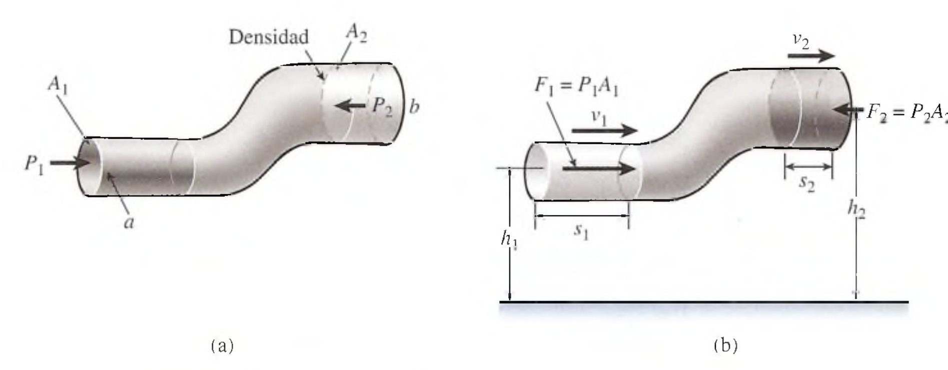


Figura 15.17 Deducción de la ecuación de Bernoulli.

FÍSICA HOY

Un bumerang vuela en círculo debido a la forma y curvatura de sus brazos. El borde exterior del brazo superior y el borde interior del brazo inferior crean un plano aerodinámico. Cuando se lanza el bumerang, la presión del aire empuja hacia la izquierda, formando un momento de torsión. Como la presión del aire está dirigida hasta un lado, la aceleración centrípeta impulsa al bumerang en su trayectoria circular.

Pero $F_1 = P_1A_1$ y $F_2 = P_2A_2$, de modo que

$$\text{Trabajo neto} = P_1A_1s_1 - P_2A_2s_2$$

El producto del área y la distancia representa el volumen V del fluido que se mueve a través de la tubería. Puesto que este volumen es el mismo en la parte inferior que en la parte superior de la tubería, podemos sustituir

$$V = A_1s_1 = A_2s_2$$

y obtener

$$\text{Trabajo neto} = P_1V - P_2V = (P_1 - P_2)V$$

La energía cinética E_k de un fluido se define como $\frac{1}{2}mv^2$, donde m es la masa del fluido y v es su velocidad. Puesto que la masa permanece constante, únicamente hay un cambio en la energía cinética ΔE_k debido a la diferencia de velocidad del fluido. En nuestro ejemplo, el cambio en la energía cinética es

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

La energía potencial de un fluido a una altura h sobre algún punto de referencia se define como mgh, donde mg representa el peso del fluido. El volumen del fluido que se mueve a lo largo de la tubería es constante. Por consiguiente, el cambio en la energía potencial ΔE_p es el resultado del incremento de altura del fluido de h_1 a h_2:

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1$$

Ahora estamos preparados para aplicar el principio de la conservación de la energía. El trabajo neto realizado sobre el sistema debe ser igual a la suma de los incrementos en energía cinética y energía potencial. Por tanto,

$$\text{Trabajo neto} = \Delta K + \Delta U$$

$$(P_1 - P_2)V = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgh_2 - mgh_1)$$

Si la densidad del fluido es ρ, podemos sustituir $V = m/\rho$, lo que nos da

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

Si se multiplica por ρ/m y se reordenan los términos se obtiene la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \textbf{(15.14)}$$

En vista de que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera, la ***ecuación de Bernoulli*** se puede enunciar en una forma más simple como

$$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \qquad \textit{Ecuación de Bernoulli} \qquad \textbf{(15.15)}$$

La ecuación de Bernoulli se aplica en casi todos los aspectos del flujo de fluidos. La presión P debe reconocerse como la presión *absoluta* y no la presión *manométrica*. Recuerde que ρ es la densidad y no el peso específico del fluido. Observe que las unidades de cada término de la ecuación de Bernoulli son unidades de presión.

15.10 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

En gran número de situaciones físicas, la velocidad, la altura o la presión de un fluido son constantes. En tales casos, la ecuación de Bernoulli adquiere una forma más simple. Por ejemplo, cuando un líquido es estacionario, tanto v_1 como v_2 valen cero. La ecuación de Bernoulli nos mostrará que la diferencia de presiones es

$$P_2 - P_1 = \rho g(h_1 - h_2) \tag{15.16}$$

Esta ecuación es idéntica a la relación estudiada para fluidos en reposo.

Otro resultado importante se presenta cuando no hay cambio en la presión ($P_1 = P_2$). En la figura 15.18 un líquido sale de un orificio situado cerca del fondo de un tanque abierto. Su velocidad cuando sale del orificio puede determinarse a partir de la ecuación de Bernoulli. Debemos suponer que el nivel del líquido en el tanque desciende lentamente en comparación con la velocidad de salida, de tal modo que la velocidad v_2 en la parte superior puede considerarse cero. Además, debe tomarse en cuenta que la presión del líquido tanto en la parte superior como en el orificio es igual a la presión atmosférica. Entonces, $P_1 = P_2$ y $v_2 = 0$, lo que reduce la ecuación de Bernoulli a

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2$$

o bien

$$v_1^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh$$

Esta relación se conoce como ***teorema de Torricelli:***

$$v = \sqrt{2gh} \tag{15.17}$$

Note que la velocidad de salida de un líquido a la profundidad h es la misma que la de un objeto que se dejara caer del reposo desde una altura h.

El gasto al cual un líquido fluye desde un orificio está dada por vA según la ecuación (15.11). La relación de Torricelli nos permite expresar el gasto en términos de la altura del líquido sobre el orificio. Por tanto,

$$R = vA = A\sqrt{2gh} \tag{15.18}$$

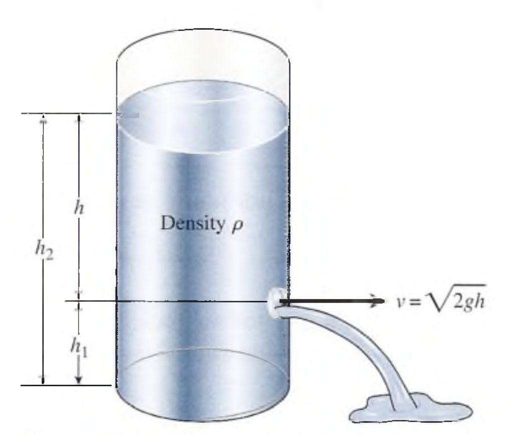


Figura 15.18 Teorema de Torricelli.

FÍSICA HOY

Delfines eléctricos

Los delfines logran una eficiencia de propulsión sorprendente mientras nadan. Los científicos estudiosos de la dinámica de fluidos han creído durante mucho tiempo que los delfines controlan la turbulencia al mover su piel. Al aplicar esta teoría a los aviones, la fuerza aérea de Estados Unidos usa micromáquinas para circuitos integrados y microsensores que convierten las alas de los aviones en una sensible piel electrónica que podría reducir el arrastre de la turbulencia.

Ejemplo 15.10 Una fisura en un tanque de agua tiene un área de sección transversal de 1 cm^2. ¿A qué rapidez sale el agua del tanque si el nivel del agua en éste es de 4 m sobre la abertura?

Solución: El área $A = 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$ y la altura $h = 4$ m. Sustituyendo estos valores directamente en la ecuación (15.18) se tiene

$$R = A\sqrt{2gh} = (10^{-4}\ m^2)\sqrt{(2)(9.8\ m/s^2)(4\ m)}$$
$$= (10^{-4}\ m^2)(8.85\ m/s) = 8.85 \times 10^{-4}\ m^3/s$$

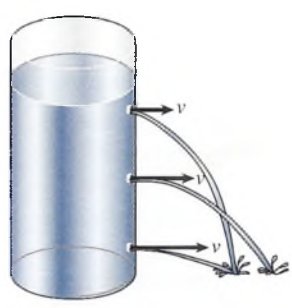


Figura 15.19 La velocidad de descarga aumenta con la profundidad por debajo de la superficie, pero el alcance es máximo en el punto medio.

Un ejemplo interesante para demostrar el principio de Torricelli se muestra en la figura 15.19. La velocidad de descarga aumenta con la profundidad. Observe que el alcance máximo se logra cuando la abertura se encuentra a la mitad de la columna de agua. Aunque la velocidad de descarga aumenta por debajo del punto medio, el agua golpea el piso más cerca. Esto ocurre porque llega al piso más pronto. Las perforaciones equidistantes por encima y por abajo del punto medio tendrán el mismo alcance horizontal.

Como una aplicación final, considere el efecto venturi que describe el movimiento de un fluido a lo largo de un angostamiento. Si la tubería de la figura 15.20 es horizontal, podemos establecer que $h_1 = h_2$ en la ecuación de Bernoulli, lo que nos da

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{15.19}$$

Puesto que v_1 es mayor que v_2, se deduce que la presión P_1 debe ser menor que la presión P_2 para que se satisfaga la ecuación (15.19). Esta relación entre la velocidad y la presión ya se ha estudiado.

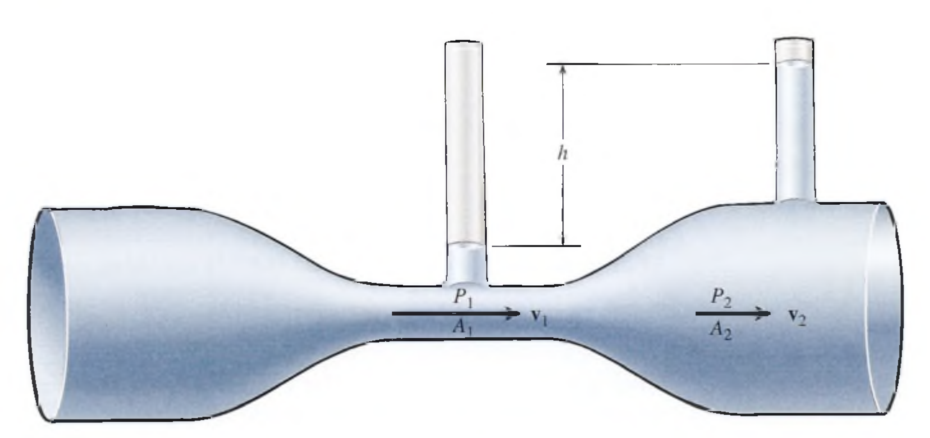


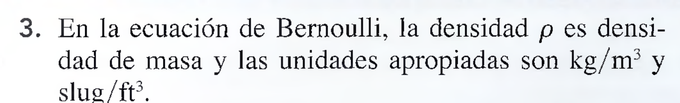
Figura 15.20 Flujo de un fluido a lo largo de un estrechamiento en una tubería horizontal.

Estrategia para resolver problemas

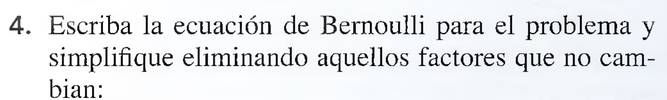
Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

1. Lea el problema detalladamente y dibuje después un esquema indicando en él la información proporcionada como datos. Asegúrese de que las unidades sean congruentes en el caso de la presión, la altura y la densidad.
2. La altura h de un fluido se mide partiendo de un punto de referencia común al centro de masa del fluido. Por ejemplo, un angostamiento en una tubería horizontal como en la figura (15.20) *no* representa un cambio en altura ($h_1 = h_2$).

Estrategia para resolver problemas



3. En la ecuación de Bernoulli, la densidad ρ es densidad de masa y las unidades apropiadas son kg/m^3 y slug/ft^3.



4. Escriba la ecuación de Bernoulli para el problema y simplifique eliminando aquellos factores que no cambian:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

5. Para un fluido estacionario $v_1 = v_2$ y el tercer término de cada lado se elimina; los términos de en medio desaparecen para una tubería horizontal ($h_1 = h_2$), y, si no hay cambio en la presión ($P_1 = P_2$), los primeros términos no aparecen y el resultado es el teorema de Torricelli (ecuación 15.17). Consulte las ecuaciones que aparecen en el resumen.
6. Sustituya las cantidades proporcionadas como datos y despeje la que no se conoce.

Ejemplo 15.11

Por un tubo venturi como el de la figura 15.20 fluye agua a una velocidad de $v_1 = 4$ m/s. Si $h = 8$ cm, ¿cuál será la velocidad de salida v_2 cuando fluye hacia el tubo más grande?

Plan: Primero calcularemos la diferencia de presión entre las regiones más estrecha y más amplia con base en la diferencia de alturas h del líquido. Luego, aplicaremos la ecuación de Bernoulli para el flujo de fluido horizontal con el fin de hallar otra expresión para la diferencia en la presión. Al usar las otras ecuaciones, podemos eliminar la necesidad de conocer la presión y resolver para la velocidad de salida.

Solución: La diferencia de presión, a partir de la ecuación (15.13), es

$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

Usando la ecuación de Bernoulli donde el centro del flujo de fluido no cambia, tenemos

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Al combinar estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Multiplicando por 2 y dividiendo entre la densidad ρ, se puede simplificar ésta expresión:

$$2gh = v_1^2 - v_2^2$$

Note que esta relación es similar a la de la caída libre de un cuerpo. Ahora se puede resolver ésta ecuación para la velocidad de salida v_2.

$$v_2^2 = v_1^2 - 2gh \qquad \text{o} \qquad v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh}$$

$$v_2 = \sqrt{(4\text{ m/s})^2 - 2(9.8\text{ m/s}^2)(0.08\text{ m})} = \sqrt{14.4\text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$v_2 = 3.80\text{ m/s}$$

La velocidad es menor en la tubería que tiene una sección transversal más grande.

En el ejemplo anterior, la densidad ρ del fluido no participó en nuestros cálculos debido a que la densidad del fluido en el angostamiento fue la misma que en la sección transversal más grande. En éste tipo de aplicaciones se debe recordar que la densidad ρ en la ecuación de Bernoulli es la *densidad de masa* y no el peso específico.

Resumen y repaso

Resumen

Hemos presentado aquí los conceptos de fluidos en reposo y en movimiento. Se definieron y aplicaron la densidad, los empujes y otras cantidades a muchos ejemplos físicos. Se estableció la relación entre el gasto de fluidos y la velocidad de los mismos, así como las áreas de sección transversal de los tubos, y se presentó la ecuación de Bernoulli para abordar una descripción más completa de la dinámica de fluidos. Los conceptos esenciales se resumen a continuación:

- Una propiedad física importante de la materia es la *densidad*. El peso específico D y la densidad ρ se definen en la siguiente forma:

$$\textit{Peso específico} = \frac{\textit{peso}}{\textit{volumen}} \qquad \boxed{D = \frac{w}{V}}$$

N/m^3 o bien lb/ft^3

$$\textit{Densidad} = \frac{\textit{masa}}{\textit{volumen}} \qquad \boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

kg/m^3 o bien slug/ft^3

- Dado que $W = mg$, la relación entre D y ρ es:

$$\boxed{D = \rho g}$$

Peso específico = densidad × gravedad

- Puntos importantes que conviene recordar acerca de la presión de fluidos:
  a. Las fuerzas ejercidas por un fluido sobre las paredes de su recipiente que lo contiene siempre son perpendiculares a dichas paredes.
  b. La presión de un fluido es directamente proporcional a la profundidad del fluido y a su densidad.

$$\boxed{P = \frac{F}{A} \qquad P = Dh \qquad P = \rho gh}$$

  c. A cualquier profundidad particular, la presión del fluido es la misma en todas las direcciones.
  d. La presión de un fluido es independiente de la forma o el área del recipiente que lo contiene.

- La ley de Pascal establece que *una presión externa aplicada a un fluido confinado se transmite uniformemente a través del volumen del líquido.*
- Cuando mida presiones de fluidos, asegúrese de distinguir entre la presión *absoluta* y la presión *manométrica*:

Presión absoluta
= presión manométrica + presión atmosférica

Presión atmosférica
$= 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
$= 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14.7 \text{ lb/in}^2$
$= 76$ cm de mercurio

- Al aplicar la ley de Pascal a la prensa hidráulica se obtiene la siguiente expresión para la ventaja mecánica ideal:

$$\boxed{M_I = \frac{F_o}{F_i} = \frac{s_i}{s_o} \qquad \textit{Ventaja mecánica ideal de la prensa hidráulica}}$$

- Principio de Arquímedes: *Un objeto que está sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta una fuerza ascendente (empuje) igual al peso del fluido desalojado.*

$$\boxed{F_B = mg} \quad \text{o} \quad \boxed{F_B = V\rho g \qquad \textit{Empuje}}$$

- El *gasto* se define como el volumen de fluido que pasa a través de cierta sección transversal A por unidad de tiempo t. En función de la velocidad del fluido v, escribimos

$$\boxed{R = \frac{V}{t} = vA \qquad \textit{Gasto = velocidad × área de la sección transversal}}$$

- Para un fluido incompresible que fluye a través de tubos cuyas secciones transversales varían, el gasto es constante:

$$\boxed{v_1A_1 = v_2A_2} \qquad \boxed{d_1^2v_1 = d_2^2v_2}$$

donde v es la velocidad del fluido, A es el área de la sección transversal del tubo y d es el diámetro del tubo.
- El trabajo neto realizado sobre un fluido es igual a los cambios de la energía cinética y potencial de dicho fluido. La ecuación de Bernoulli expresa este hecho en términos de la presión P, la densidad ρ, la altura del fluido h y su velocidad v.

$$\boxed{P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \qquad \textit{Ecuación de Bernoulli}}$$

Si un volumen de fluido cambia de un estado 1 a un estado 2, como muestra la figura 15.17, podemos escribir:

$$\boxed{P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

- Las aplicaciones especiales de la ecuación de Bernoulli se presentan cuando uno de los parámetros no cambia:

  Para un líquido estacionario, ($v_1 = v_2$)

$$P_2 - P_1 = \rho g(h_1 - h_2)$$

Si la presión es constante, ($P_1 = P_2$)

$$v = \sqrt{2gh}$$

Para un tubo horizontal, ($h_1 = h_2$)

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

15.1. Elabore una lista de las unidades que corresponden al peso específico y las unidades similares para la densidad.

15.2. ¿Qué es numéricamente mayor: al peso específico de un objeto o su densidad?

15.3. En la tabla 15.1 se indica que la densidad del agua es 62.4 lb/ft^3. Al realizar un experimento con agua en la superficie de la Luna, ¿tendría usted confianza en este valor? Explique por qué.

15.4. ¿Qué pesa más, 870 kilogramos de latón o 3.5 pies cúbicos de cobre?

15.5. ¿Por qué las represas son mucho más anchas en la parte inferior que en la parte alta? ¿Acaso la presión que se ejerce sobre la represa depende de la longitud del embalse perpendicular a la represa?

15.6. Un trozo de hielo grande flota en una cubeta de agua, de modo que el nivel de ésta queda hasta el borde de la cubeta. ¿Se derramará el agua cuando el hielo se derrita? Explique su respuesta.

15.7. Una tina llena de agua está colocada sobre una balanza que indica 40 lb de peso total. ¿Se incrementará el peso total cuando un pez de 5 lb flote sobre la superficie del agua? Comente.

15.8. Suponga que un bloque de hierro, sostenido por una cuerda, se sumerge totalmente en la tina de la pregunta 15.7. ¿Cómo se afectará la lectura en la balanza?

15.9. Un muchacho que está aprendiendo a nadar descubre que puede flotar con más facilidad sobre la superficie cuando inhala aire. Observa también que puede acelerar su descenso al fondo de la piscina si exhala el aire durante el descenso. Explique sus observaciones.

15.10. Un velero de juguete lleno de monedas de un centavo flota en una pequeña tina de agua. Si las monedas se arrojan al agua, ¿qué pasa con el nivel del agua en la tina?

15.11. ¿Es más difícil sostener un corcho cuando apenas flota bajo la superficie, que cuando se encuentra a una profundidad de 5 ft? Explique su respuesta.

15.12. ¿Es posible construir un barómetro usando agua en lugar de mercurio? ¿A qué altura llegará la columna de agua si la presión externa es de 1 atm?

15.13. Comente el funcionamiento de un submarino y el de un globo meteorológico. ¿Por qué se eleva el globo hasta una altura definida y allí se detiene? ¿Un submarino se hundirá hasta una profundidad determinada y allí se detendrá si no se realizan cambios en él después de sumergirlo?

15.14. ¿Qué suposiciones y generalizaciones se hacen en relación con el estudio de la dinámica de fluidos?

15.15. ¿Por qué disminuye el flujo de agua de una llave cuando alguien abre otra llave en el mismo edificio?

15.16. Dos botes de remos que avanzan paralelamente entre sí, en la misma dirección, se atraen mutuamente. Explique la causa.

15.17. Explique qué pasaría en un jet moderno que volara a gran rapidez si un secuestrador disparara una bala a través de la ventana o si abriera por la fuerza una escotilla de escape.

15.18. Durante los ventarrones de alta velocidad o los huracanes, los techos de las casas se desprenden en algunas ocasiones; sin embargo, éstas no sufren ningún otro daño. Explique la causa por medio de diagramas.

15.19. Un niño pequeño golpea con un globo sobre el ducto de calefacción de su casa y se sorprende al ver que el globo se mantiene suspendido arriba del conducto, balanceándose de un lado a otro. Explique la causa.

15.20. ¿Qué condiciones determinarán la capacidad máxima de sustentación del ala de un avión aerodinámico? Justifique su respuesta con dibujos.

15.21. Explique por medio de diagramas cómo logra un lanzador de beisbol arrojar una bola rápida ascendente, una curva hacia fuera y una rápida descendente. ¿Cree que él preferiría lanzar en favor o en contra del viento para producir los tres efectos descritos con anterioridad?

15.22. Dos recipientes idénticos están colocados sobre el piso uno junto a otro. Uno está lleno de mercurio y el otro está lleno de agua. Se hace un orificio en cada recipiente, a la misma profundidad por debajo de la superficie. Compare el alcance de los dos fluidos al salir.

Problemas

Sección 15.1 Densidad

15.1. ¿Qué volumen ocupan 0.4 kg de alcohol? ¿Cuál es el peso de este volumen?
Resp. 5.06×10^{-4} m^3, 3.92 N

15.2. Una sustancia desconocida tiene un volumen de 20 ft^3 y pesa 3 370 lb. ¿Cuáles son el peso específico y la densidad?

15.3. ¿Qué volumen de agua tiene la misma masa que 100 cm^3 de plomo? ¿Cuál es el peso específico del plomo?
Resp. 1130 cm^3, 1.11×10^5 N/m^3

***15.4.** Un matraz de 200 mL (1 L = 1 000 cm^3) está lleno de un líquido desconocido. Una balanza electrónica indica que el líquido en cuestión tiene una masa de 176 g. ¿Cuál es la gravedad específica del líquido? ¿Puede usted adivinar qué es ese líquido?

Sección 15.3 Presión de fluidos

15.5. Halle la presión en kilopascales producida por una columna de mercurio de 60 cm de alto. ¿Cuál es esa presión en lb/in^2 y en atmósferas?
Resp. 80.0 kPa, 11.6 lb/in^2, 0.79 atm

15.6. Un tubo contiene agua bajo una presión manométrica de 400 kPa. Si se cubre un orificio de 4 mm de diámetro en el tubo, con un trozo de cinta adhesiva, ¿qué fuerza tendrá que ser capaz de resistir la cinta?

***15.7.** Un submarino se sumerge a una profundidad de 120 ft y se nivela. El interior del submarino se mantiene a la presión atmosférica. ¿Cuáles son la presión y la fuerza total aplicadas a una escotilla de 2 ft de ancho y 3 ft de largo? El peso específico del agua del mar es de 64 lb/ft^3 aproximadamente.
Resp. 53.3 lb/in^2, 46 080 lb

15.8. Si usted construye un barómetro usando agua en lugar de mercurio, ¿qué altura del agua indicará una presión de una atmósfera?

15.9. Un pistón de 20 kg descansa sobre una muestra de gas en un cilindro de 8 cm de diámetro. ¿Cuál es la presión manométrica sobre el gas? ¿Cuál es la presión absoluta? Resp. 39.0 kPa, 140.3 kPa

***15.10.** Un tubo abierto en forma de U como el que muestra la figura 15.21 tiene 1 cm^2 de sección transversal. ¿Qué volumen de agua deberá verterse en el tubo de la derecha para que el mercurio del tubo de la izquierda se eleve 1 cm por encima de su posición original?

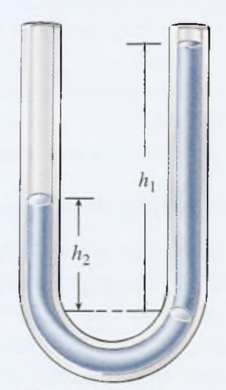


Figura 15.21

15.11. La presión manométrica en un neumático de automóvil es de 28 lb/in^2. Si la rueda soporta 1000 lb, ¿cuál es el área del neumático que está en contacto con el suelo? Resp. 35.7 in^2

***15.12.** Dos líquidos que no reaccionen químicamente se encuentran en un tubo doblado como el que aparece en la figura 15.21. Demuestre que las alturas de los líquidos por encima de su superficie de separación son inversamente proporcionales a sus densidades:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

***15.13.** Suponga que los dos líquidos contenidos en el tubo en forma de U de la figura 15.21 son agua y aceite. Calcule la densidad del aceite si el agua se mantiene 19 cm por encima de la interfaz y el aceite perma-

nece a 24 cm por encima de la interfaz. Use como referencia el problema 15.12. Resp. 792 kg/m^3

*15.14. Un manómetro de presión de agua indica una presión de 50 lb/in^2 al pie de un edificio. ¿Cuál es la máxima altura a la cual subirá el agua en el edificio?

Sección 15.5 La prensa hidráulica

15.15. Las áreas de los pistones grande y pequeño de una prensa hidráulica son 0.5 y 25 in^2 respectivamente. ¿Cuál es la ventaja mecánica ideal de la prensa? ¿Qué fuerza se tendrá que ejercer para levantar una carga de 1 tonelada (2000 lb)? ¿A través de qué distancia deberá actuar la fuerza de entrada para levantar esta carga hasta una distancia de 1 in? Resp. 50, 40 lb, 50 in

15.16. Una fuerza de 400 N se aplica al pistón pequeño de una prensa hidráulica cuyo diámetro es 4 cm. ¿Cuál deberá ser el diámetro del pistón grande para que pueda levantar una carga de 200 kg?

15.17. El tubo de entrada que suministra presión de aire para operar un gato hidráulico tiene 2 cm de diámetro. El pistón de salida es de 32 cm de diámetro. ¿Qué presión de aire (presión manométrica) se tendrá que usar para levantar un automóvil de 1800 kg? Resp. 219 kPa

15.18. El área de un pistón en una bomba de fuerza es de 10 in^2. ¿Qué fuerza se requiere para elevar el agua con el pistón hasta una altura de 100 ft?

Sección 15.6 Principio de Arquímedes

15.19. Un cubo de 100 g que mide 2 cm por lado se ata al extremo de una cuerda y se sumerge totalmente en agua. ¿Cuál es el empuje y cuál es la tensión en la cuerda? Resp. 0.0784 N, 0.902 N

*15.20. Un objeto sólido pesa 8 N en el aire. Cuando este objeto se cuelga de una balanza de resorte y se sumerge en agua, su peso aparente es de sólo 6.5 N. ¿Cuál es la densidad del objeto?

*15.21. Un cubo de madera cuyas aristas miden 5.0 cm cada una, flota en agua con tres cuartas partes de su volumen sumergidas. (a) ¿Cuál es el peso del cubo? (b) ¿Cuál es la masa del cubo? (c) ¿Cuál es la gravedad específica del cubo? Resp. (a) 0.919 N, (b) 93.8 g, c) 0.75

*15.22. Un trozo de metal de 20 g tiene una densidad de 4000 kg/m^3. Está atada a un hilo delgado y se sumerge en un recipiente de aceite (1500 kg/m^3) hasta que se sumerge por completo. ¿Cuál es la tensión en el hilo?

*15.23. Se ha observado que la masa de un fragmento de cierta roca es de 9.17 g en el aire. Cuando el trozo se sumerge en un fluido de 873 kg/m^3 de densidad, su masa aparente es de sólo 7.26 g. ¿Cuál es la densidad de esa roca? Resp. 4191 kg/m^3

*15.24. Un globo de 40 m de diámetro está lleno de helio. La masa del globo, y la canastilla que lleva adjunta, es de 18 kg. ¿Qué masa adicional puede levantar consigo este globo?

Sección 15.7 Flujo de fluidos

15.25. A través de una manguera de 1 in de diámetro fluye gasolina con una velocidad media de 5 ft/s. ¿Cuál es el gasto en galones por minuto (1 ft^3 = 7.48 gal)? ¿Cuánto tiempo tardaría en llenar un tanque de 20 gal? Resp. 12.2 gal/min, 1.63 min

15.26. A partir de un depósito terminal de 3 cm de diámetro, fluye agua con una velocidad promedio de 2 m/s. ¿Cuál es el gasto en litros por minuto (1 L = 0.001 m^3)? ¿Cuánto tardará en llenarse un recipiente de 40 L?

15.27. ¿Cuál tendrá que ser el diámetro de una manguera para que pueda conducir 8 L de petróleo en 1 min con una velocidad de salida de 3 m/s? Resp. 7.52 mm

*15.28. El agua que fluye de un tubo de 2 in sale horizontalmente a razón de 8 gal/min. ¿Cuál es la velocidad de salida? ¿Cuál es el alcance horizontal del chorro de agua si el tubo está a 4 ft del suelo?

15.29. El agua que fluye a 6 m/s por un tubo de 6 cm pasa a otro tubo de 3 cm conectado al primero. ¿Cuál es su velocidad en el tubo pequeño? ¿Es mayor el gasto en el tubo más pequeño? Resp. 24 m/s, no

Sección 15.10 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

15.30. Considere la situación descrita en el problema 15.29. Si los centros de ambos tubos están sobre la misma recta horizontal, ¿cuál es la diferencia de presión entre los dos tubos conectados?

15.31. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua a través de una grieta del recipiente localizada 6 m por debajo de la superficie del agua? Si el área de la grieta es 1.3 cm^2, ¿con qué gasto sale el agua del recipiente? Resp. 10.8 m/s, 1.41×10^{-3} m^3/s

15.32. En el costado de un depósito de agua hay un orificio de 2 cm de diámetro, localizado 5 m por debajo del nivel del agua que contiene el depósito. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua por el orificio? ¿Qué volumen de agua escapará por ese orificio en 1 min?

*15.33. A través de un tubo horizontal fluye agua a razón de 82 ft^3/min. Un manómetro de presión, colocado en una sección transversal de 6 in de diámetro de este tubo, presenta la lectura 16 lb/in^2. ¿Cuál es la presión manométrica en una sección del tubo donde el diámetro es de 3 in? Resp. 11.1 lb/in^2

*15.34. El agua fluye a razón de 6 gal/min a través de una abertura que se localiza en el fondo de un depósito cilíndrico. El agua del depósito tiene 16 ft de pro-

fundidad. ¿Cuál sería el gasto de salida si se aplicara una presión adicional de 9 lb/in^2 a la fuente de suministro del agua?

***15.35.** El agua circula a través de un tubo a 4 m/s bajo una presión absoluta de 200 kPa. El tubo se estrecha después hasta la mitad de su diámetro original. ¿Cuál es la presión absoluta en la parte angosta del tubo? Resp. 80.0 kPa

***15.36.** El agua fluye continuamente por un tubo horizontal. En un punto donde la presión absoluta es de 300 kPa, la velocidad es de 2 m/s. Más adelante, el tubo se estrecha bruscamente, haciendo que la presión absoluta descienda a 100 kPa. ¿Cuál será la velocidad del agua en esta zona angosta?

Problemas adicionales

***15.37.** A una persona se le administra sangre con una densidad de 1050 kg/m^3, desde un recipiente colocado a una distancia de 60 cm por encima de su brazo. ¿Cuánto más alta es la presión en esta posición que si el recipiente se mantuviera al mismo nivel del brazo? Resp. 6.17 kPa

***15.38.** Un depósito cilíndrico de 50 ft de altura y 20 ft de diámetro está lleno de agua. (a) ¿Cuál es la presión del agua en el fondo del depósito? (b) ¿Cuál es la fuerza total en el fondo? (c) ¿Cuál es la presión en un tubo para agua colocado 90 ft por debajo del nivel del agua del depósito?

***15.39.** Un bloque de madera pesa 16 lb en el aire. Un lastre de plomo, que tiene un peso aparente de 28 lb en el agua, se ata a la madera y ambos se sumergen en agua. Si su peso aparente combinado en el agua es de 18 lb, calcule la densidad del bloque de madera. Resp. 38.4 lb/ft^3

***15.40.** Un bloque de madera de 100 g tiene un volumen de 120 cm^3. ¿Podrá flotar en el agua? ¿Y en gasolina?

***15.41.** Un tubo de ensayo vertical contiene 3 cm de aceite (0.8 g/cm^3) que flotan sobre 9 cm de agua. ¿Cuál es la presión en el fondo del tubo? Resp. 1.12 kPa

15.42. ¿Qué porcentaje de un iceberg suele permanecer por debajo de la superficie del agua del mar (1 030 kg/m^3)?

***15.43.** ¿Cuál es el área más pequeña de una capa de hielo de 30 cm de espesor que es capaz de sostener a un hombre de 90 kg? El hielo está flotando en agua dulce. Resp. 3.75 m^2

15.44. Una balanza de resorte marca un peso de 40 N cuando un objeto se cuelga de ella en el aire. Cuando el mismo objeto se sumerge en agua, el peso registrado se reduce a sólo 30 N. ¿Cuál es la densidad del objeto?

15.45. Una taza de metal con paredes delgadas tiene una masa de 100 g y un volumen total de 250 cm^3. ¿Cuál es el número máximo de monedas de un centavo que se puede colocar dentro de la taza sin que ésta se hunda en agua? La masa de cada moneda es de 3.11 g. Resp. 48

15.46. ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo de un lago de 30 m de profundidad?

15.47. Un fluido se extrae a presión de un tubo de 6 mm de diámetro, de manera que 200 mL brotan de él en 32 s. ¿Cuál es la velocidad promedio del fluido dentro del tubo? Resp. 0.221 m/s

***15.48.** Una bomba cuya potencia de salida es de 2 kW extrae agua de un sótano hasta la calle situada 6 m más arriba. ¿Cuánto es mayor la presión en esta posición de lo que sería si el brazo estuviera al mismo nivel? ¿A razón de cuántos litros por segundo se vaciará el sótano?

15.49. Un tubo horizontal de 120 mm de diámetro tiene un angostamiento de 40 mm de diámetro. La velocidad del agua en el tubo es de 60 cm/s y la presión es de 150 kPa. (a) ¿Cuál es la velocidad en la zona más angosta? (b) ¿Cuál es la presión en dicha zona? Resp. (a) 540 cm/s, (b) 135.6 kPa

***15.50.** La columna de agua dentro del recipiente que ilustra la figura 15.20 se sostiene a una altura H por encima de la base del recipiente. Demuestre que la profundidad h necesaria para lograr un alcance horizontal de x está dado por

$$h = \frac{H}{2} \pm \frac{\sqrt{H^2 - x^2}}{2}$$

¿En qué forma muestra esta ecuación que los orificios equidistantes arriba y abajo del punto medio tendrán el mismo alcance horizontal?

***15.51.** Una columna de agua se eleva 16 ft por encima de la base de su recipiente. ¿Cuáles son las dos profundidades a las cuales el agua saldrá por un orificio con un alcance horizontal de 8 ft? Resp. 1.07 ft, 14.9 ft

***15.52.** Tome como referencia la figura 15.20 y el problema 15.50. Demuestre que el alcance horizontal está dado por

$$x = 2\sqrt{h(H - h)}$$

Use esta relación para mostrar que el alcance máximo es igual a la altura H de la columna de agua.

***15.53.** El agua fluye por un tubo horizontal con una rapidez de 60 gal/min (1 ft^3 = 7.48 gal). ¿Cuál es la

velocidad en una sección estrecha del tubo, donde el diámetro de éste se reduce de 6 a 1 in?

Resp. 24.5 ft/s

15.54. ¿Cuál tendrá que ser la presión manométrica en una manguera contra incendios si la boquilla expulsa el agua hasta una altura de 20 m?

***15.55.** El agua fluye a través del tubo que muestra la figura 15.22 a razón de 30 libras por segundo. La presión absoluta en el punto A es de 200 kPa y el punto B está 8 m más arriba que el punto A. La sección inferior del tubo tiene un diámetro de 16 cm y la sección superior se estrecha hasta un diámetro de 10 cm. (a) Calcule las velocidades de la corriente en los puntos A y B. (b) ¿Cuál es la presión absoluta en el punto B?

Resp. (a) 1.49 m/s, 3.82 m/s; (b) 115 kPa

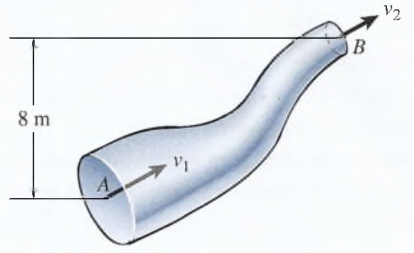


Figura 15.22

Problemas para la reflexión crítica

15.56. Una sala tiene las siguientes dimensiones: el piso 4.50 m × 3.20 m, y su altura es de 2.40 m. La densidad del aire es de 1.29 kg/m^3. ¿Cuánto pesa el aire contenido en el salón? ¿Qué fuerza ejerce la atmósfera sobre el piso del salón?

Resp. 437 N, 1.46×10^6 N

15.57. Una lata de estaño para café que está flotando en agua (1.00 g/cm^3) tiene un volumen interno de 180 cm^3 y una masa de 112 g. ¿Cuántos gramos de metal se pueden agregar a la lata sin que ésta se hunda en el agua?

***15.58.** Un bloque de madera flota en agua con dos tercios de su volumen sumergidos. El mismo bloque flota en aceite con nueve décimos de su volumen sumergidos. ¿Cuál es la razón de la densidad del aceite a la densidad del agua (la gravedad específica)?

Resp. 0.741

***15.59.** El ala de un avión mide 25 ft de largo y 5 ft de ancho y experimenta una fuerza de sustentación de 800 lb. ¿Cuál es la diferencia entre las presiones en la superficie superior e inferior del ala?

***15.60.** Suponga que el aire (ρ = 1.29 kg/m^3) fluye hacia atrás por la superficie superior del ala de un avión a 36 m/s. El aire en movimiento que pasa por la superficie inferior del ala tiene una velocidad de 27 m/s. Si el ala tiene un peso de 2700 N y un área de 3.5 m^2, ¿cuál es la fuerza de empuje sobre el ala?

Resp. 1280 N

***15.61.** El agua de mar tiene un peso específico de 64 lb/ft^3. Dicha agua se bombea a través de un sistema de tubos (véase la figura 15.23) a razón de 4 ft^3/min. Los diámetros de los tubos en los extremos superior e inferior son de 4 in y 2 in, respectivamente. El agua se descarga en la atmósfera en el extremo superior a una distancia de 6 in por arriba de la sección inferior. ¿Cuáles son las velocidades de flujo en los tubos superior e inferior? ¿Cuáles son las presiones en las secciones superior e inferior?

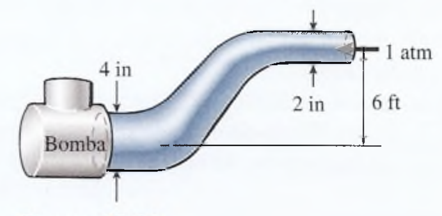
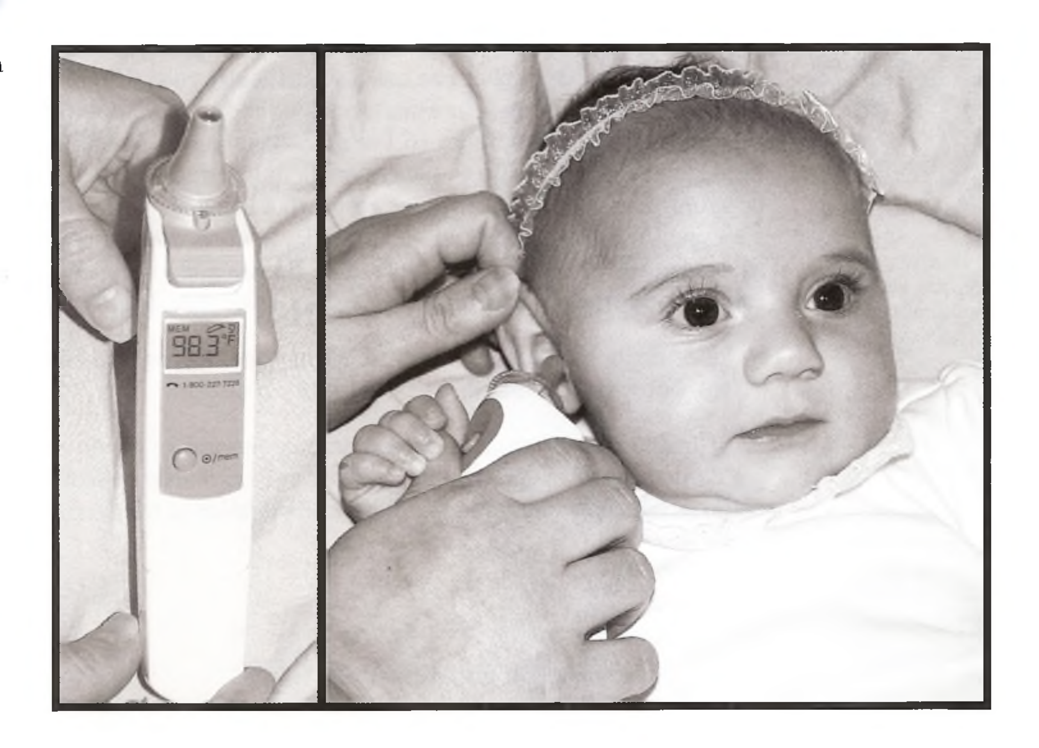


Figura 15.23

PARTE II Termodinámica, ondas mecánicas y sonido

16 Temperatura y dilatación



La temperatura es la medida de la energía cinética media por molécula. Un termómetro infrarrojo capta la energía infrarroja invisible que emiten naturalmente todos los objetos. La radiación infrarroja que proviene del canal de aire del oído pasa por el sistema óptico del termómetro y es convertida en una señal eléctrica proporcional a la energía radiada por esa área. Al calibrar esa señal con temperaturas conocidas puede mostrarse en una pantalla una cantidad digital. (*Fotografía de Blake Tippens.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará que ha comprendido las escalas de temperatura Celsius, Fahrenheit, Kelvin y Rankine, convirtiendo temperaturas específicas de una escala a sus temperaturas correspondientes en otra.
2. Distinguirá entre temperaturas específicas e intervalos de temperatura, y podrá convertir un intervalo en una escala en su equivalente en otra.
3. Escribirá las fórmulas para la dilatación lineal, la dilatación de área y la dilatación de volumen, y será capaz de aplicarlas para la resolución de problemas de tipo similar a los que se ofrecen en este capítulo.

Hemos estudiado el comportamiento de sistemas en reposo y en movimiento. Se expusieron las cantidades fundamentales de masa, longitud y tiempo para describir el estado de un sistema mecánico determinado.

Considere, por ejemplo, un bloque de 10 kg que se mueve con una velocidad constante de 20 m/s. Los parámetros masa, longitud y tiempo están presentes y son suficientes para describir el movimiento. Podemos hablar del peso del bloque, de su energía cinética o de su momento o cantidad de movimiento, pero una descripción completa de un sistema requiere algo más que una simple enunciación de esas cantidades.

Esto se torna patente cuando nuestro bloque de 10 kg encuentra fuerzas de fricción. Mientras el bloque se desliza hasta frenarse, su energía parece desaparecer, pero el bloque y la superficie que lo soporta están ligeramente más calientes. Si la energía se conserva, debemos suponer que la que se ha perdido reaparece en alguna forma que no hemos considerado aún. Cuando la energía desaparece a partir del movimiento visible de los objetos y no vuelve a presentarse en forma de energía potencial visible, con frecuencia notamos que la temperatura se eleva. En este capítulo expondremos el concepto de temperatura como la cuarta cantidad fundamental.

16.1 Temperatura y energía térmica

Hasta ahora nos han interesado únicamente las causas y los efectos del movimiento *externo*. Un bloque en reposo sobre una mesa se encuentra en equilibrio traslacional y rotacional respecto a sus alrededores. Un estudio más a fondo del bloque revela, sin embargo, que tiene actividad interna. En la figura 16.1 se muestra un modelo sencillo de un sólido. Las moléculas individuales se encuentran unidas por medio de fuerza elásticas análogas a los resortes de la figura. Estas moléculas oscilan respecto a sus posiciones de equilibrio, con una frecuencia específica y una amplitud A. Por ende, tanto la energía potencial como la cinética están asociadas con el movimiento molecular. Puesto que esta energía interna se relaciona con lo caliente o lo frío que está un cuerpo recibe el nombre de ***energía térmica***.

La energía térmica representa la energía interna total de un objeto: la suma de sus energías moleculares potencial y cinética.

Cuando dos objetos con diferentes temperaturas se ponen en contacto, se transfiere energía de uno a otro. Suponga que se dejan caer carbones calientes en un recipiente con agua, como se indica en la figura 16.2. La energía térmica se transferirá de los carbones al agua has-

FÍSICA HOY

Los dispositivos electrónicos de su computadora generan grandes cantidades de energía térmica. Esa energía térmica —calor— puede dañar las partes electrónicas. Los disipadores de calor son piezas de metal con aletas que pueden ayudar a extraer la energía térmica residual antes que ésta dañe las partes electrónicas. Sin embargo, los disipadores térmicos están hechos de metal, el cual —por supuesto— conduce tanto la electricidad como la energía térmica. Generalmente, las aletas disipadoras térmicas no están unidas directamente a las partes electrónicas que producen calor, porque estas partes son muy sensibles a las corrientes y a las descargas eléctricas. Ahora empiezan a estar disponibles nuevos productos que son eléctricamente aislantes, pero que conducen muy bien el calor. Uno de esos productos se conoce como Gap Pad y se usa para rellenar las ranuras de aire entre las tarjetas de circuitos de las computadoras personales (PC) y los disipadores térmicos o la caja metálica. El Gap Pad está fabricado a base de un polímero de silicio impregnado internamente con alúmina y es lo bastante flexible para

Continúa

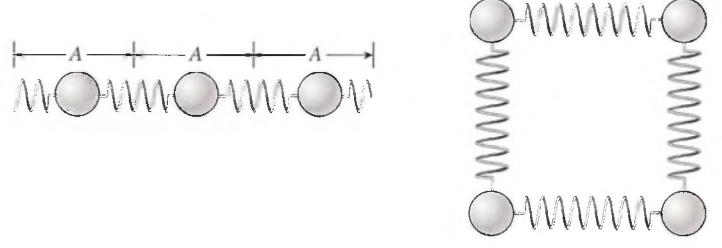


Figura 16.1 Modelo simplificado de un sólido en el que las moléculas se mantienen unidas entre sí mediante fuerzas elásticas.

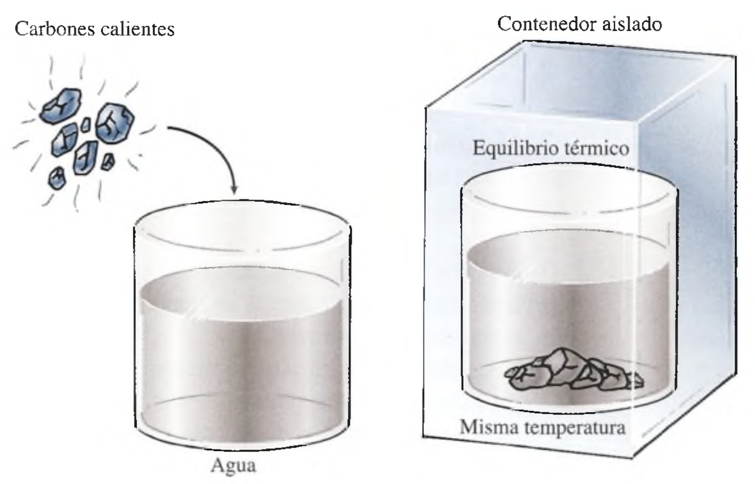


Figura 16.2 Equilibrio térmico.

FÍSICA HOY

Continuación

ser instalado en el fondo de superficies irregulares, razón por la cual es tan prometedor para el enfriamiento de tarjetas de circuitos de computadora. Otro producto, el Thermal Clad Bond Ply, es una capa dieléctrica laminada directamente en la tarjeta madre de la PC para lograr una mejor disipación térmica.

ta que el sistema alcance una condición estable llamada ***equilibrio térmico***. Si los tocamos, tanto el carbón como el agua nos producen sensaciones similares y ya no hay más transferencia de energía térmica.

Tales cambios en los estados de energía térmica no pueden explicarse satisfactoriamente en simples términos de la mecánica clásica. Por tanto, todos los objetos deben tener una nueva propiedad fundamental que determina si estarán en equilibrio térmico con otros objetos. Esa propiedad se llama ***temperatura***. En nuestro ejemplo, se dice que los carbones y el agua tienen la misma temperatura cuando la transferencia de energía entre ellos es igual a cero.

Se dice que dos objetos se encuentran en equilibrio térmico si y sólo si tienen la misma temperatura.

Una vez que se establece un medio para medir la temperatura, tenemos una condición necesaria y suficiente para el equilibrio térmico. La transferencia de energía térmica que se debe tan sólo a una diferencia de temperatura se define como ***calor***.

El calor se define como la transferencia de energía térmica debida a una diferencia de temperatura.

Antes de estudiar cómo se mide la temperatura debemos distinguir claramente temperatura de energía térmica. Es posible que dos objetos se hallen en equilibrio térmico (igual temperatura) y que tengan diferente energía térmica. Considere una jarra de agua y una pequeña taza de agua, cada una a 90°C de temperatura. Si se mezclan, no habrá transferencia de energía, pero la energía térmica es mucho mayor en la jarra debido a que contiene mucho mayor número de moléculas. Recuerde que la energía térmica representa la *suma* de las energías potencial y cinética de todas las moléculas. Si vaciamos el agua de cada recipiente sobre dos bloques de hielo por separado, como se muestra en la figura 16.3, se fundirá más hielo donde se vació el volumen más grande, lo que indica que tenía más energía térmica.

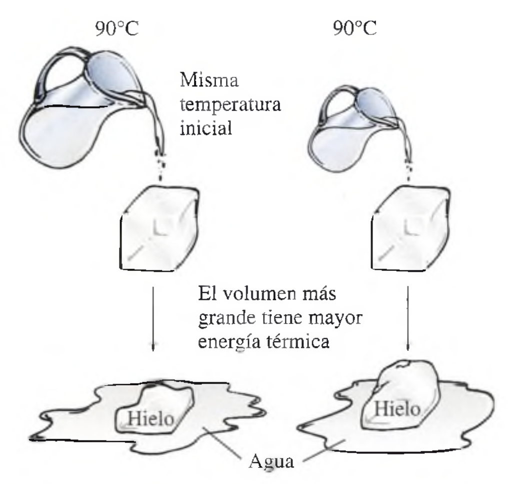


Figura 16.3 Distinción entre energía térmica y temperatura.

16.2 La medición de la temperatura

En general, la temperatura se determina midiendo cierta cantidad mecánica, óptica o eléctrica que varía con la temperatura. Por ejemplo, la mayor parte de las sustancias se dilatan cuando aumenta su temperatura. Si hay un cambio en cualquier dimensión que demuestre tener correspondencia unívoca con los cambios de temperatura, la variación puede emplearse como calibración para medir la temperatura. Un dispositivo calibrado de esta forma se llama ***termómetro***. La temperatura de otro objeto puede entonces medirse colocando el termómetro

en estrecho contacto con el objeto y permitiendo que los dos alcancen el equilibrio térmico. La temperatura indicada por un número en el termómetro graduado corresponde también a la temperatura de los objetos circundantes.

Un termómetro es un dispositivo que, mediante una escala graduada, indica su propia temperatura.

Son necesarios dos requisitos para construir un termómetro. El primero es que debe haber una certeza de que alguna propiedad termométrica X varía con la temperatura t. Si la variación es lineal, podemos escribir

$$t = kX$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La propiedad termométrica debe ser tal que se pueda medir fácilmente, por ejemplo, la dilatación de un líquido, la presión de un gas o la resistencia de un circuito eléctrico. Otras cantidades que varían con la temperatura son la energía de radiación, el color de la luz emitida, la presión de vapor y la susceptibilidad magnética. Se han construido termómetros para cada una de estas propiedades termométricas. La selección depende de los límites de temperatura en las que el termómetro es lineal y además de la mecánica de su uso.

El segundo requisito para construir un termómetro es establecer una escala de temperaturas. Las primeras escalas de temperatura se basaron en la selección de *puntos fijos* superiores e inferiores correspondientes a temperaturas adecuadas para medidas de laboratorio. Dos temperaturas convenientes y fácilmente reproducibles se eligen como el ***punto fijo inferior*** y ***superior***.

El punto fijo inferior (punto de congelación) es la temperatura a la cual el agua y el hielo coexisten en equilibrio térmico bajo una presión de 1 atm.

El punto fijo superior (punto de ebullición) es la temperatura a la cual el agua y el vapor coexisten en equilibrio bajo una presión de 1 atm.

Una forma de medir la temperatura, que se usa muy a menudo en el trabajo científico, se originó a partir de una escala desarrollada por el astrónomo sueco Anders Celsius (1701-1744). En la ***escala Celsius*** se asignó de forma arbitraria el número 0 al punto de congelación y el número 100 al de ebullición. Así, a la presión atmosférica, hay 100 divisiones entre el punto de congelación y el punto de ebullición del agua. Cada división o unidad de la escala recibe el nombre de ***grado*** (°); por ejemplo, con frecuencia se considera que la temperatura ambiente es de 20°C, lo cual se lee como *veinte grados Celsius*.

Otra escala para medir la temperatura fue creada en 1714 por Gabriel Daniel Fahrenheit. El desarrollo de esta escala se basó en la elección de otros puntos fijos: Fahrenheit escogió la temperatura de congelación de una solución de agua salada como su punto fijo inferior y le asignó el número y unidad de 0°F. Para el punto fijo superior eligió la temperatura del cuerpo humano. Por alguna razón inexplicable, él designó el número y la unidad 96°F para la temperatura del cuerpo. El hecho de que la temperatura del cuerpo humano sea en realidad de 98.6°F indica que se cometió un error experimental al establecer la escala. Si relacionamos la ***escala Fahrenheit*** con los puntos fijos que fueron aceptados universalmente para la escala Celsius, observamos que 0 y 100°C corresponden a 32 y 212°F respectivamente.

Es posible comparar las dos escalas calibrando termómetros comunes de mercurio contenido en vidrio. En este tipo de termómetro se aprovecha el hecho de que el mercurio líquido se dilata al aumentar la temperatura. El instrumento consta de un tubo capilar de vidrio al vacío, con un depósito de mercurio en su base y cerrado en su extremo superior. Puesto que el mercurio se dilata más que el tubo de vidrio, la columna de mercurio se eleva en el tubo hasta que el mercurio, el vidrio y sus alrededores están en equilibrio.

Suponga que fabricamos dos termómetros sin graduar y los colocamos en una mezcla de hielo y agua, como se indica en la figura 16.4. Después de permitir que las columnas de mercurio se estabilicen, marcamos 0°C en uno de los termómetros y 32°F en el otro. A continuación, colocamos los dos termómetros directamente sobre agua hirviendo, permitiendo que las columnas de mercurio se estabilicen en el punto de vapor. Nuevamente marcamos los

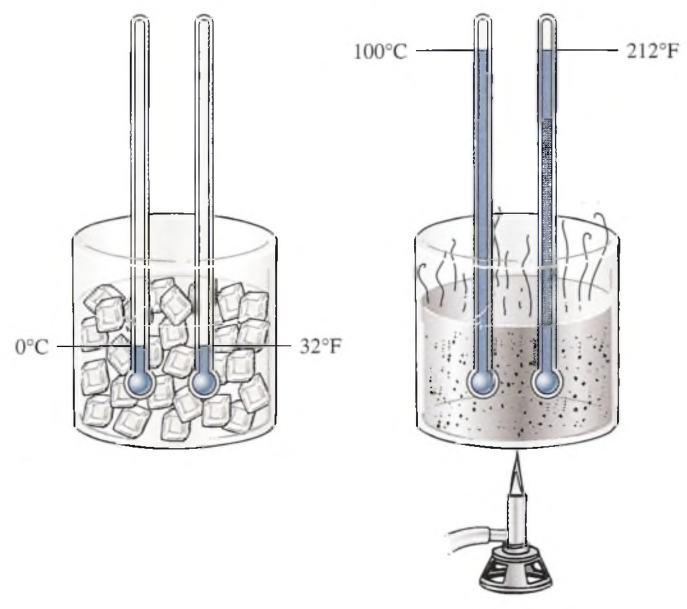


Figura 16.4 Calibración de dos termómetros, uno Celsius y otro Fahrenheit.

dos termómetros, inscribiendo 100°C y 212°F junto al nivel del mercurio por arriba de las marcas correspondientes al punto de congelación. El nivel del mercurio es igual en ambos termómetros. Por tanto, la única diferencia entre los dos termómetros es la forma en que están graduados. Hay 100 divisiones, o grados Celsius (°C), entre el punto de congelación y el punto de vapor en el termómetro Celsius, y hay 180 divisiones, o grados Fahrenheit (°F), en el termómetro Fahrenheit. Por consiguiente, 100 grados Celsius representan el mismo intervalo de temperatura que 180 grados Fahrenheit. Simbólicamente,

$$100°\text{C} = 180°\text{F} \qquad \text{o} \qquad 5°\text{C} = 9°\text{F} \tag{16.1}$$

El símbolo de grado (°) se coloca después de la C o la F para hacer énfasis en que los números corresponden a intervalos de temperatura y no a temperaturas específicas. En otras palabras, 20°F se lee "veinte grados Fahrenheit" y corresponde a una *diferencia* entre dos temperaturas en la escala Fahrenheit. El símbolo 20°F, por otra parte, se refiere a una marca específica del termómetro Fahrenheit. Suponga que una sartén con comida caliente se enfría de 98 a 76°F. Estos números corresponden a temperaturas específicas, como lo indica la altura de una columna de mercurio. Sin embargo, representan un intervalo de temperatura de

$$\Delta t = 98°\text{F} - 76°\text{F} = 22°\text{F}$$

Δt se usa para denotar un cambio en la temperatura.

La física que se ocupa de la transferencia de energía térmica casi siempre se interesa en los cambios de temperatura. Por consiguiente, con frecuencia es necesario convertir un intervalo de temperatura de una escala en un intervalo correspondiente en otra escala, lo que se logra más eficazmente recordando, a partir de la ecuación (16.1), que un intervalo de 5°C equivale a un intervalo de 9°F. Los factores de conversión apropiados pueden escribirse como

$$\frac{5°\text{C}}{9°\text{F}} = 1 = \frac{9°\text{F}}{5°\text{C}} \tag{16.2}$$

Cuando se convierten °F en °C hay que usar el factor de la izquierda; y cuando se convierten °C en °F, hay que usar el de la derecha.

Cabe recordar que la ecuación (16.2) se emplea para intervalos de temperatura, así que sólo puede usarse cuando se trabaja con *diferencias* en ella. Es, por tanto, una cuestión muy diferente hallar la temperatura en la escala Fahrenheit que corresponda a la misma temperatura en la escala Celsius. A partir de razones y proporciones es posible llegar a una ecuación para convertir temperaturas específicas. Suponga que colocamos dos termómetros en un vaso

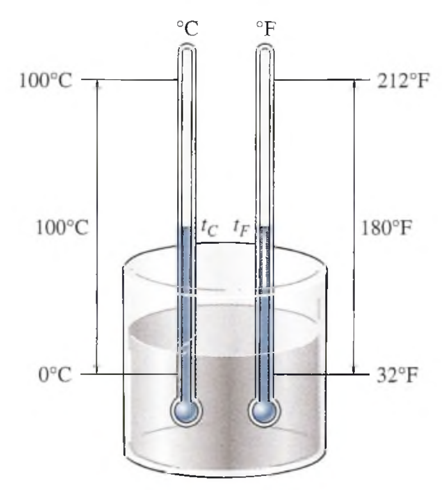


Figura 16.5 Comparación de las escalas Fahrenheit y Celsius.

de precipitado como se muestra en la figura 16.5. Uno de los termómetros está graduado en grados Fahrenheit y el otro en grados Celsius. Los símbolos t_C y t_F denotan la misma temperatura (la del agua), pero están en escalas distintas. Con base en la figura es patente que la diferencia entre t_C y 0°C corresponde al mismo intervalo que la diferencia entre t_F y 32°F. La razón de la primera a las 100 divisiones debe ser la misma que la razón de la segunda a las 180 divisiones; por consiguiente

$$\frac{t_C - 0}{100} = \frac{t_F - 32}{180}$$

Al simplificar y resolver para t_C se obtiene

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32) \tag{16.3}$$

o bien, al despejar t_F,

$$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32 \tag{16.4}$$

Las dos ecuaciones anteriores no son verdaderas igualdades, ya que resultan en un cambio de unidades. En vez de decir que 20°C es igual a 68°F debemos decir que una temperatura de 20°C *corresponde* a una de 68°F.

Ejemplo 16.1

Durante un periodo de 24 h, un riel de acero cambia de temperatura de 20°F por la noche a 70°F al mediodía. Exprese estos límites de temperatura en grados Celsius.

Plan: Primero se reconoce que tales límites constituyen un *intervalo* de temperatura, no una *temperatura específica*. Luego se determinan esos límites en °F y luego se convierte en °C tras reconocer que un *intervalo* de 5°C es el mismo *intervalo* que 9°F.

Solución: El intervalo de temperatura en °F es

$$\Delta t = 70°F - 20°F = 50°F$$

Para convertir el intervalo a grados Celsius, elegimos el factor de conversión que permite cancelar las unidades Fahrenheit. O sea,

$$\Delta t = 50°\text{F}\left(\frac{5°\text{C}}{9°\text{F}}\right); \qquad \Delta t = 27.8°\text{C}$$

Ejemplo 16.2 El punto de fusión del plomo es de 330°C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

Plan: En este caso se tiene una *temperatura específica* en la escala Celsius, y debemos convertirla en la temperatura *correspondiente* en la escala Fahrenheit. Primero hallaremos la diferencia de intervalos y luego sumaremos 32°F para compensar la diferencia entre los puntos cero.

Solución: Al sustituir los valores en la ecuación (16.4) se obtiene

$$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32 = \frac{9}{5}(330) + 32$$
$$= 594 + 32 = 626°\text{F}$$

Es importante reconocer que t_F y t_C en las ecuaciones (16.3) y (16.4) representan las temperaturas correspondientes. Los números son diferentes ya que el origen de cada escala era un punto diferente y los grados eran de diferente tamaño. Lo que estas ecuaciones nos dicen es la relación entre los *números* que están asignados a temperaturas específicas en dos escalas *diferentes*.

16.3 El termómetro de gas

Aunque el termómetro de mercurio en vidrio es el más conocido y usado, no es tan preciso como otros. Además, el mercurio se congela a aproximadamente −40°C, lo que restringe el intervalo en que puede ser usado. Un termómetro muy exacto con un extenso rango de medición se puede construir utilizando las propiedades de un gas. Todos los gases sujetos a calentamiento se dilatan casi de la misma forma. Si la dilatación se evita manteniendo constante el volumen, la presión aumentará proporcionalmente con la temperatura.

En general, hay dos tipos de termómetros de gas. Uno de ellos mantiene la presión constante y utiliza el incremento de volumen como indicador. Este tipo se denomina ***termómetro a presión constante***. El otro tipo, llamado ***termómetro a volumen constante***, mide el incremento de presión en función de la temperatura. El termómetro a volumen constante se ilustra en la figura 16.6. El bulbo *B* contiene gas, y la presión que éste ejerce se mide por medio de un manómetro de mercurio. A medida que aumenta la temperatura del gas, éste se dilata, forzando al mercurio a desplazarse hacia abajo en el extremo cerrado del tubo y a subir en el extremo abierto. Para mantener constante el volumen de gas, el mercurio en el extremo abierto del tubo debe elevarse hasta que el nivel de mercurio en la parte cerrada del tubo coincida con la marca de referencia *R*. La diferencia entre los dos niveles de mercurio es entonces una indicación de la presión del gas a volumen constante. El instrumento puede calibrarse para realizar mediciones de temperatura con puntos fijos, como ya se explicó en la sección anterior.

El mismo aparato puede usarse como un termómetro a presión constante (véase figura 16.7). En este caso, se permite que el volumen del gas en el bulbo *B* aumenta a presión constante. La presión ejercida sobre el gas se mantiene constante a 1 atm, ya sea bajando o subiendo el mercurio del tubo abierto hasta que los niveles del metal coincidan en ambos tubos. El cambio de volumen a causa de la temperatura puede indicarse por medio del nivel

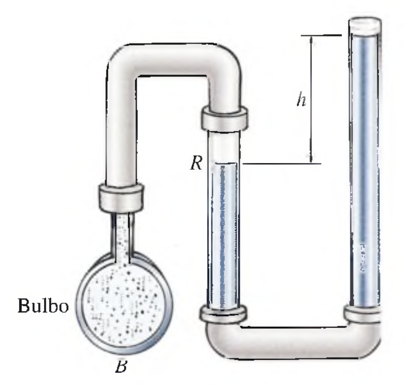


Figura 16.6 Termómetro a volumen constante.

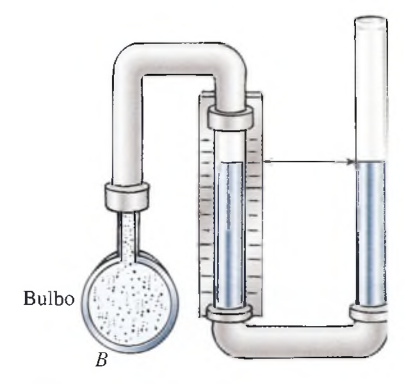


Figura 16.7 Termómetro a presión constante.

de mercurio en el tubo cerrado. La calibración consiste en marcar el nivel del mercurio en el punto de congelación y hacer otra marca de su nivel en el punto de vapor.

Los termómetros de gas son útiles gracias a que sus límites prácticamente no existen. Por ello, aunado a su precisión, se usan de manera generalizada en laboratorios y en oficinas de normas. Sin embargo, son grandes y estorbosos, lo que los hace inadecuados para gran número de mediciones técnicas delicadas.

16.4 La escala de temperatura absoluta

Tal vez se le ha ocurrido que las escalas Celsius y Fahrenheit tienen una seria limitación. Ni 0°C ni 0°F representan realmente una temperatura de 0. En consecuencia, para temperaturas mucho más bajas que el punto de congelación resulta una temperatura negativa. Más grave aún es el hecho de que una fórmula que incluya la temperatura como variable no funcione con las escalas existentes. Por ejemplo, ya hemos estudiado la dilatación de un gas al aumentar su temperatura. Podemos establecer esta proporcionalidad como

$$V = kt$$

donde k es la constante de proporcionalidad y t es la temperatura. Ciertamente, el volumen de un gas no es cero a 0°C o negativo a temperaturas negativas, conclusiones que pueden deducirse de las relaciones anteriores.

Este ejemplo proporciona una clave para establecer una *escala absoluta*. Si podemos determinar la temperatura a la que el volumen de un gas bajo presión constante se vuelve cero, podemos determinar el verdadero cero de temperatura. Suponga que usamos un termómetro de gas a presión constante, como el de la figura 16.7. El volumen del gas en el bulbo se puede medir cuidadosamente, primero en el punto de congelación y luego en el punto de ebullición. Estos dos puntos pueden marcarse en una gráfica, como en la figura 16.8, con el volumen en la ordenada y la temperatura en la abscisa. Los puntos A y B corresponden al volumen del gas a las temperaturas de 0 y 100°C, respectivamente. Una línea recta que una estos dos puntos y se extienda a izquierda y derecha proporciona una descripción matemática del cambio de volumen en función de la temperatura. Observe que la recta puede prolongarse indefinidamente a la derecha, lo que indica que no hay límite superior para la temperatura. Sin embargo, no podemos extender la recta indefinidamente a la izquierda, porque finalmente intersecará el eje de la temperatura. En este punto teórico, el gas tendría un volumen de cero. Extender la recta aún más indicaría un volumen negativo, lo cual no tiene sentido. Por tanto, el punto en el que la recta corta el eje de la temperatura se llama el ***cero absoluto*** de temperatura. (En realidad, cualquier gas real se licua antes de alcanzar ese punto.)

Si el experimento anterior se realiza con diferentes gases, la pendiente de las curvas variará ligeramente, pero la intersección en el eje de la temperatura siempre será el mismo, próximo a −273°C. Por medio de procedimientos teóricos y experimentales muy ingeniosos se ha establecido que el cero absoluto de temperatura es −273.15°C. En este texto supondre-

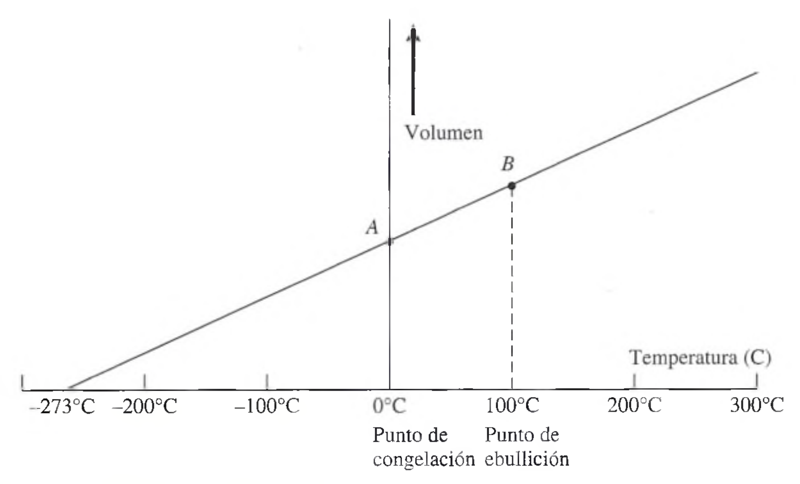


Figura 16.8 La variación del volumen de un gas en función de la temperatura. El cero absoluto se define con una extrapolación del volumen igual a cero.

mos que es −273°C sin temer algún error significativo. La conversión en grados Fahrenheit demuestra que el cero absoluto es igual a −460°F en esa escala.

Una escala de temperatura absoluta tiene el cero absoluto de temperatura como su punto cero. Una escala de ese tipo fue propuesta por lord Kelvin (1824-1907). El intervalo en esta escala, el *kelvin*, ha sido adoptado por el sistema métrico internacional (SI) como la unidad básica para medir la temperatura. El intervalo sobre la ***escala Kelvin*** representa el mismo cambio de temperatura que el grado Celsius. Por tanto, un intervalo de 5 K (se lee “cinco kelvins”) es exactamente igual que 5°C.

La escala Kelvin se relaciona con la escala Celsius mediante la fórmula

$$T_K = t_C + 273 \tag{16.5}$$

Por ejemplo 0°C corresponderán a 273 K, y 100°C corresponderán a 373 K (véase en la figura 16.9). De ahora en adelante, se reservará el símbolo T para la temperatura absoluta y el símbolo t para otras temperaturas.

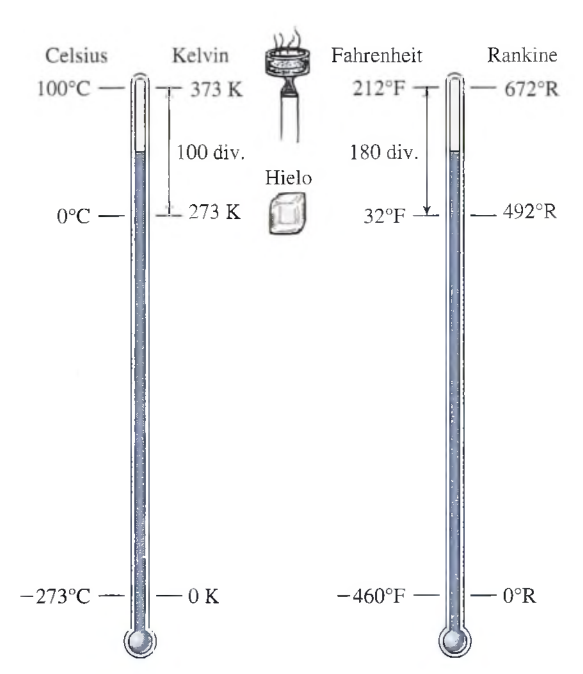


Figura 16.9 Comparación de las cuatro escalas de temperatura más comunes.

Debido a problemas de reproducibilidad para medir exactamente los puntos de congelación y de ebullición del agua, la Oficina Internacional de Pesos y Medidas estableció una nueva norma en 1954, la cual se basa en el ***punto triple del agua***, que es la única temperatura y presión en la que el agua, el vapor de agua y el hielo coexisten en equilibrio térmico. Este hecho tan útil ocurre a una temperatura de aproximadamente 0.01°C y a una presión de 4.58 mm de mercurio. Para conservar la congruencia con las medidas anteriores, la temperatura del punto triple del agua quedó establecida exactamente en 273.16 K. Por tanto, el ***kelvin*** se define actualmente como la fracción 1/273.16 de la temperatura del punto triple del agua. La temperatura en el SI ahora se fija por esta definición, y todas las demás escalas deben redefinirse tomando como base únicamente esta temperatura como patrón.

Una segunda escala absoluta, denominada la *escala Rankine*, sigue empleándose muy limitadamente pese a los esfuerzos de varias organizaciones para eliminarla totalmente. El grado Rankine se incluye en este texto sólo para tener el panorama de este tema. Tiene su punto de cero absoluto a −460°F, y los intervalos de grado son idénticos al intervalo de grado Fahrenheit. La relación entre la temperatura en grados Rankine (°R) y la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit es

$$T_R = t_F + 460 \qquad \textbf{(16.6)}$$

Recuerde que las ecuaciones (16.5) y (16.6) se aplican para temperaturas específicas. Si nos interesa un cambio de temperatura o una diferencia en temperatura, el cambio absoluto o la diferencia es la misma en kelvins que en grados Celsius. Es útil recordar que

$$1\text{ K} = 1°\text{C} \qquad 1°\text{R} = 1°\text{F} \qquad \textbf{(16.7)}$$

Ejemplo 16.3

Un termómetro de mercurio y vidrio no puede usarse a temperaturas por debajo de −40°C, ya que ese metal se congela a tal temperatura. (a) ¿Cuál es el punto de congelación del mercurio en la escala Kelvin? (b) ¿Cuál es la diferencia entre esta temperatura y el punto de congelación del agua? Exprese su respuesta en kelvins.

Solución (a): Sustituyendo directamente −40°C en la ecuación (16.5) nos queda

$$T_K = -40°\text{C} + 273 = 233\text{ K}$$

Solución (b): La diferencia en los puntos de congelación es

$$\text{Dt} = 0°\text{C} - (-40°\text{C}) = 40°\text{C}$$

Puesto que la magnitud del kelvin es idéntica a la del grado Celsius, la diferencia es también de 40 kelvins.

En este punto se preguntará por qué se siguen conservando las escalas Celsius y Fahrenheit. Cuando se trabaja con calor, casi siempre lo que interesa son diferencias de temperatura. En realidad, una diferencia en temperatura es necesaria para que haya transferencia de calor. Si no fuera así, el sistema estaría en equilibrio térmico. Puesto que las escalas Kelvin y Rankine se basan en los mismos intervalos que las escalas Celsius y Fahrenheit, no hay diferencia en la escala que se use para intervalos de temperatura. Por otra parte, si una fórmula requiere una temperatura específica más que una diferencia de temperatura, se debe usar la escala absoluta.

16.5 Dilatación lineal

El efecto más frecuente producido por cambios de temperatura es un cambio en el tamaño. Con pocas excepciones, todas las sustancias incrementan su tamaño cuando se eleva la temperatura. Los átomos en un sólido se mantienen juntos en un arreglo regular debido a la acción de fuerzas eléctricas. A cualquier temperatura los átomos vibran con cierta frecuencia y amplitud. A

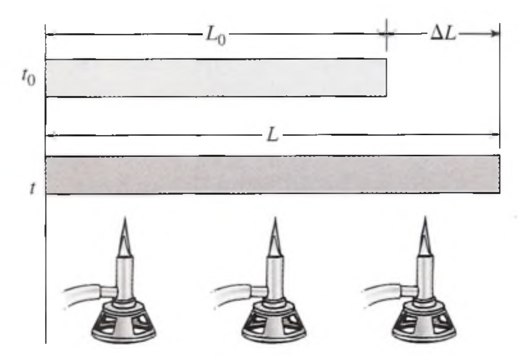


Figura 16.10 Dilatación lineal.

medida que la temperatura aumenta, se incrementa la amplitud (desplazamiento máximo) de las vibraciones atómicas, lo que da por resultado un cambio total en las dimensiones del sólido.

Un cambio de un sólido en *una* dimensión se llama ***dilatación lineal***. Experimentalmente se ha encontrado que un incremento en una sola dimensión, por ejemplo, la longitud de una barra, depende de la dimensión original y del cambio de temperatura. Por ejemplo, considere la barra de la figura 16.10. La longitud original es L_0 y la temperatura inicial es t_0. Cuando se calienta a una temperatura t, la nueva longitud de la barra se indica como L. Por tanto, un cambio en la temperatura, $\Delta t = t - t_0$, produce un cambio de longitud, $\Delta L = L - L_0$. El cambio de longitud proporcional está dado por

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta t \tag{16.8}$$

donde α es la constante de proporcionalidad llamada el ***coeficiente de dilatación lineal***. Como un incremento en la temperatura no produce el mismo aumento en la longitud en todos los materiales, el coeficiente α es una propiedad del material. Tras despejar α de la ecuación (16.8) se obtiene

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta t} \tag{16.9}$$

El coeficiente de dilatación lineal de una sustancia puede definirse como el cambio de longitud por unidad de longitud por cada grado que cambia la temperatura. Como la razón $\Delta L/L_0$ no tiene dimensiones, las unidades de α se dan como el inverso de grados o sea, 1/°C o 1/°F. En la tabla 16.1 se presentan los coeficientes de dilatación de muchos materiales.

Tabla 16.1

Coeficientes de dilatación lineal

	α	
Sustancia	**10^{-5}/°C**	**10^{-5}/°F**
Acero	1.2	0.66
Aluminio	2.4	1.3
Cinc	2.6	1.44
Cobre	1.7	0.94
Concreto	0.7–1.2	0.4–0.7
Hierro	1.2	0.66
Latón	1.8	1.0
Plata	2.0	1.1
Plomo	3.0	1.7
Vidrio, Pirex	0.3	0.17

Ejemplo 16.4

Una tubería de hierro tiene 60 m de longitud a temperatura ambiente (20°C). Si se la va a utilizar para conducir vapor, ¿cuál será la tolerancia a la dilatación y qué nueva longitud tendrá la tubería luego de que el vapor haya fluido por ella cierto tiempo?

Plan: La temperatura del vapor es de 100°C, de modo que la temperatura de la tubería cambiará de 20 a 100°C, un intervalo de 80°C. El aumento de longitud se determina con la ecuación (16.7). Al sumar la cantidad obtenida a la longitud inicial determinaremos la nueva longitud de la tubería después de que el vapor haya pasado por ella.

Solución: A partir de la tabla 16.1, sustituimos $\alpha_{\text{hierro}} = 1.2 \times 10^{-5}/°\text{C}$ para determinar el incremento en longitud

$$\Delta L = \alpha_{\text{hierro}} L_0 \Delta t = (1.2 \times 10^{-5}/°\text{C})(60 \text{ m})(80°\text{C}); \qquad \Delta L = 0.0576 \text{ m}$$

La nueva longitud de la tubería será $L_0 + \Delta L$, o bien

$$L = 60 \text{ m} + 0.0576 \text{ m} = 60.0576 \text{ m}$$

Se necesita una tolerancia de 5.76 cm para dar cabida a la dilatación.

Por el ejemplo 16.4 se advierte que la nueva longitud puede calcularse mediante la relación siguiente:

$$L = L_0 + \alpha L_0 \Delta t \tag{16.10}$$

Recuerde, cuando calcula ΔL, que las unidades de α deben ser congruentes con las de Δt.

La dilatación lineal tiene propiedades tanto útiles como destructivas cuando se aplica a situaciones físicas. Los efectos destructivos hacen que los ingenieros empleen juntas de dilatación o rodamientos para brindar tolerancia a la dilatación y a la contracción. Por otra parte, la dilatación predecible de algunos materiales se utiliza para abrir o cerrar interruptores a ciertas temperaturas. Tales dispositivos se llaman *termostatos*.

Quizá la aplicación más frecuente del principio de dilatación lineal es la banda bimetálica. Este dispositivo, mostrado en la figura 16.11, consiste en dos tiras planas de metales diferentes soldadas o remachadas entre sí. Las tiras se funden juntas de tal modo que tengan la misma longitud a una temperatura elegida t_0. Si calentamos la banda se origina una elevación en la temperatura, y el material con mayor coeficiente de dilatación se alargará más. Por ejemplo, una tira de latón-hierro formará un arco hacia el lado del hierro. Cuando se retira la fuente de calor, la banda gradualmente retornará a su posición original. Si se enfría la tira por debajo de su temperatura inicial se provocará que la tira se haga arco en la otra dirección. El material con el más alto coeficiente de dilatación también *disminuye* su longitud más rápido. La tira bimetálica tiene muchas aplicaciones útiles, desde sistemas de control termostático

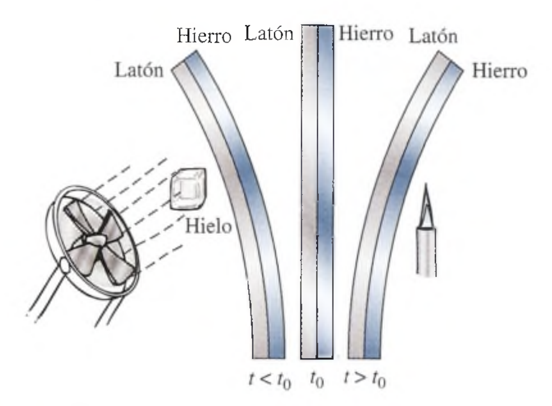


Figura 16.11 La banda bimetálica.

hasta luces intermitentes. Puesto que la dilatación está en proporción directa al aumento de temperatura, la banda bimetálica se puede usar también como termómetro.

16.6 Dilatación superficial

La dilatación lineal no se restringe a la longitud de un sólido. Cualquier recta trazada a través de éste aumenta su longitud por unidad de longitud con una razón dada por su coeficiente de dilatación α. Por ejemplo, en un cilindro sólido, la longitud, el diámetro y la diagonal trazada a través del sólido aumentarán sus dimensiones en la misma proporción. En realidad, la dilatación de una superficie es exactamente análoga a una ampliación fotográfica, como se ilustra en la figura 16.12. Observe también que si el material tiene un agujero, el área de éste se dilata en la misma razón que si estuviera relleno de material.

Consideremos el área de dilatación de la superficie rectangular de la figura 16.13. Tanto la longitud como el ancho del material se dilatarán en una proporción dada por la ecuación. (16.10). Por tanto, la nueva longitud y el ancho están dados, en forma de factores por

$$L = L_0(1 + \alpha\,\Delta t)$$
$$W = W_0(1 + \alpha\,\Delta t)$$

Ahora podemos deducir una expresión para la dilatación del área determinando el producto de esas dos ecuaciones.

$$LW = L_0W_0(1 + \alpha\,\Delta t)^2$$
$$= L_0W_0(1 + 2\alpha\,\Delta t + \alpha^2\,\Delta t^2)$$

Puesto que la magnitud de α es del orden de 10^{-5}, con toda certeza podemos despreciar el término que contiene a α^2. Luego, podemos escribir

$$LW = L_0W_0(1 + 2\alpha\,\Delta t)$$

o bien

$$A = A_0(1 + 2\alpha\,\Delta t)$$

donde $A = LW$ representa la nueva área y $A_0 = L_0W_0$ el área original. Al reordenar los términos se obtiene

$$A - A_0 = 2\alpha A_0\,\Delta t$$

o bien

$$\Delta A = 2\alpha A_0\,\Delta t \qquad \textbf{(16.11)}$$

El ***coeficiente de dilatación superficial*** γ (gama) es aproximadamente el doble del coeficiente de dilatación lineal. Simbólicamente,

$$\gamma = 2\alpha \qquad \textbf{(16.12)}$$

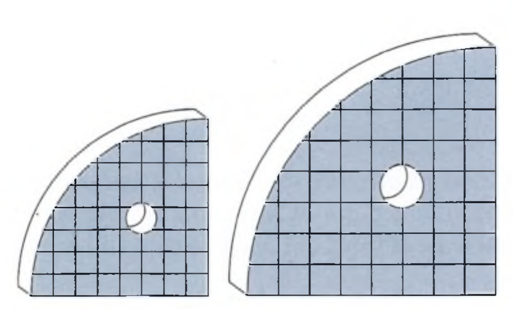


Figura 16.12 La dilatación térmica es análoga a una ampliación fotográfica. Observe que el agujero se agranda en la misma proporción que el material.

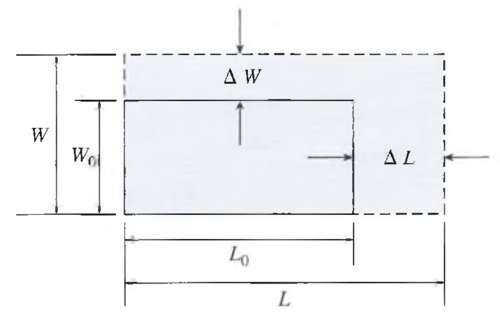


Figura 16.13 Dilatación superficial.

donde γ es el cambio en área por unidad inicial de área por cada grado que cambia la temperatura. Con esta definición podemos escribir las fórmulas siguientes para la dilatación superficial.

$$\Delta A = \gamma A_0 \, \Delta t \quad (16.13)$$

$$A = A_0 + \gamma A_0 \, \Delta t \quad (16.14)$$

Ejemplo 16.5

Un disco de latón tiene un agujero de 80 mm de diámetro en su centro. Luego, el disco, que tiene 23°C, se coloca en agua hirviente durante algunos minutos. ¿Cuál será el área nueva del agujero?

Plan: Primero se calcula el área del agujero a 23°C. Luego se determina el aumento del área debido al cambio de temperatura. Recuerde que el coeficiente de dilatación superficial es el doble del valor lineal dado en la tabla 16.1. Expresaremos el área nueva también en mm^2, así que será necesario cambiar las unidades del área.

Solución: El área a 23°C está dada por

$$A_0 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (80 \text{ mm})^2}{4}; \qquad A_0 = 5027 \text{ mm}^2$$

El coeficiente de dilatación del latón es

$$\gamma = 2\alpha = 2(1.8 \times 10^{-5}/°\text{C}) = 3.6 \times 10^{-5} \, °\text{C}$$

El aumento del área se determina con la ecuación (16.13)

$$\Delta A = \gamma A_0 \, \Delta t = (3.6 \times 10^{-5}/°\text{C})(5027 \text{ mm}^2)(100°\text{C} - 23°\text{C})$$

$$\Delta A = 13.9 \text{ mm}^2$$

El área nueva se establece sumando el cambio al área original

$$A = A_0 + \Delta A = 5027 \text{ mm}^2 + 13.9 \text{ mm}^2; \qquad A = 5040.9 \text{ mm}^2$$

Otro método para resolver el ejemplo 16.5 sería emplear la fórmula de la dilatación lineal para determinar el aumento del diámetro y luego calcular el área nueva a partir del diámetro nuevo. Este método, en realidad, será más exacto, ya que $\gamma = 2\alpha$ es una *aproximación* en la fórmula de la dilatación superficial.

16.7 Dilatación volumétrica

La dilatación del material calentado es la misma en todas direcciones; por tanto, el volumen de un líquido, gas o sólido tendrá un incremento en volumen predecible al aumentar la temperatura. Razonando de forma semejante a como se hizo en las secciones previas, obtendremos las fórmulas siguientes para la dilatación volumétrica.

$$\Delta V = \beta V_0 \, \Delta t \quad (16.15)$$

$$V = V_0 + \beta V_0 \, \Delta t \quad (16.16)$$

El símbolo β (beta) es el ***coeficiente de dilatación volumétrica***. Representa el cambio en volumen por unidad de volumen por cada grado que cambia la temperatura. Para materiales sólidos es aproximadamente el triple del coeficiente de dilatación lineal.

$$\beta = 3\alpha \quad (16.17)$$

Cuando se trabaja con sólidos, podemos obtener β a partir de la tabla de coeficientes de dilatación lineal (tabla 16.1). Los coeficientes de dilatación correspondientes a diferentes líquidos

Tabla 16.2

Coeficientes de dilatación volumétrica

	β	
Líquido	**$10^{-4}/°C$**	**$10^{-4}/°F$**
Agua	2.1	1.2
Alcohol etílico	11	6.1
Benceno	12.4	6.9
Glicerina	5.1	2.8
Mercurio	1.8	1.0

aparecen en la tabla 16.2. La separación molecular en el caso de los gases es tan grande que todos ellos se dilatan más o menos en la misma proporción. La expansión volumétrica de los gases se estudiará en el capítulo 19.

Ejemplo 16.6

Un matraz de vidrio Pyrex se llena con 50 cm^3 de mercurio a 20°C. ¿Qué volumen se derramará si el sistema se calienta de forma uniforme a una temperatura de 60°C? Consulte la figura 16.14.

Plan: El volumen interior del matraz es el mismo que el volumen del fluido que contiene (50 cm^3). El mercurio tiene un coeficiente de dilatación volumétrica más grande, lo que significa que el derrame equivaldrá a la diferencia entre la dilatación del mercurio ΔV_m y la del vidrio ΔV_v. Recuerde que $\beta_v = 3\alpha_v$.

Solución: primero se calcula el cambio de volumen del mercurio

$$\Delta V_m = \beta_m V_{0m}\,\Delta t = (1.8 \times 10^{-4}/°C)(50\ cm^3)(60°C - 20°C)$$

$$\Delta V_m = 0.360\ cm^3 \qquad \text{(Aumento del volumen del mercurio)}$$

Ahora, el cambio de volumen del interior del matraz de vidrio

$$\Delta V_v = 3\alpha_v V_{0v}\,\Delta t = 3(0.3 \times 10^{-5}/°C)(50\ cm^3)(40°C)$$

$$\Delta V_v = 0.0180\ cm^3 \qquad \text{(Aumento del volumen del vidrio)}$$

El volumen que se derrama resulta de la diferencia entre las dos dilataciones

$$V_{\text{derramado}} = \Delta V_m - \Delta V_v = 0.360\ cm^3 - 0.018\ cm^3$$

$$V_{\text{derramado}} = 0.342\ cm^3$$

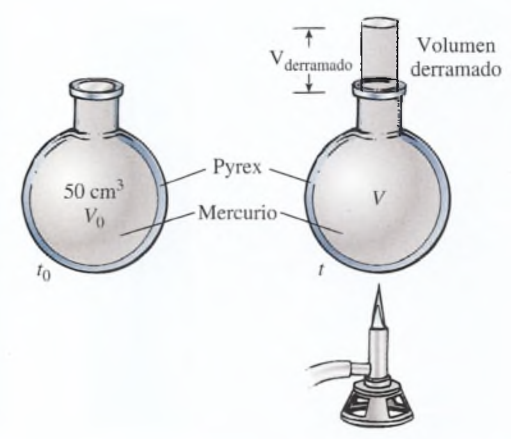


Figura 16.14 El volumen que se derrama se determina restando el cambio de volumen del vidrio del cambio de volumen del mercurio.

Estrategia para resolver problemas

Temperatura y dilatación

1. Lea el problema detenidamente y después trace un bosquejo, marcando la información proporcionada. Use subíndices cero para distinguir entre los valores iniciales y finales de longitud, área, volumen y temperatura.
2. No confunda temperaturas *específicas* t con *intervalos* de temperatura Δt. La práctica de usar la marca de grado antes y después del símbolo es útil, por ejemplo, 55°C − 22°C = 33°C.
3. Para problemas de dilatación asegúrese de incluir la unidad de temperatura con la constante para evitar multiplicar por el intervalo de temperatura incorrecto. Si el coeficiente es 1/°C, entonces el intervalo Δt debe estar en grados Celsius.
4. Los coeficientes de dilatación de área y volumen para sólidos pueden determinarse multiplicando por dos o por tres, respectivamente, los valores lineales dados en la tabla 16.1.
5. Cuando se le pida determinar un valor *inicial* o *final* de longitud, área, volumen o temperatura, generalmente es más fácil calcular primero el *cambio* en ese parámetro y luego resolver el valor inicial o final. Por ejemplo, puede determinar la temperatura final t_f calculando primero Δt y luego sumando o restando para encontrar t_f.
6. La dilatación simultánea de diferentes materiales debe ajustarse teniendo en cuenta los diferentes grados de dilatación de cada uno de ellos. Para un líquido que se encuentra dentro de un recipiente sólido, el incremento o decremento neto en volumen es igual a la diferencia en los cambios experimentados por cada material. Véase el ejemplo 16.6.

16.8 La dilatación anómala del agua

Suponga que se llena el bulbo del tubo de la figura 16.15 con agua a 0°C de modo que el estrecho cuello se llene parcialmente. La dilatación o contracción del agua se puede medir fácilmente observando el nivel del agua en el tubo. A medida que se incrementa la temperatura del agua, el agua contenida en el tubo baja gradualmente indicando una contracción. La contracción continúa hasta que la temperatura del bulbo y la del agua son de 4°C. Cuando la temperatura aumenta por arriba de 4°C, el agua cambia de dirección y se eleva en forma continua, indicando la dilatación normal con un incremento de temperatura. Esto significa que el agua tiene su volumen mínimo y su densidad máxima a 4°C.

La variación en la densidad del agua con la temperatura se muestra gráficamente en la figura 16.16. Si estudiamos la gráfica en la zona de las altas temperaturas, notamos que la densidad aumenta gradualmente hasta un máximo de 1.0 g/cm^3 a 4°C. Luego, la densidad decrece de forma gradual hasta que el agua alcanza el punto de congelación. El hielo ocupa un volumen mayor que el agua y a veces, cuando se forma, puede causar que se rompan las tuberías de agua si no se toman las debidas precauciones.

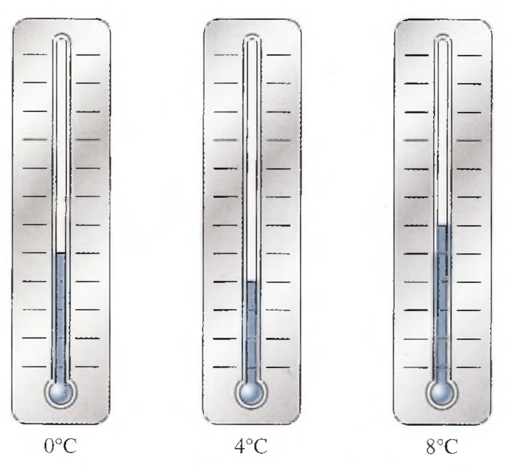


Figura 16.15 La dilatación irregular del agua. A medida que se aumenta la temperatura del vital líquido de 0 a 8°C, primero se contrae y después se dilata.

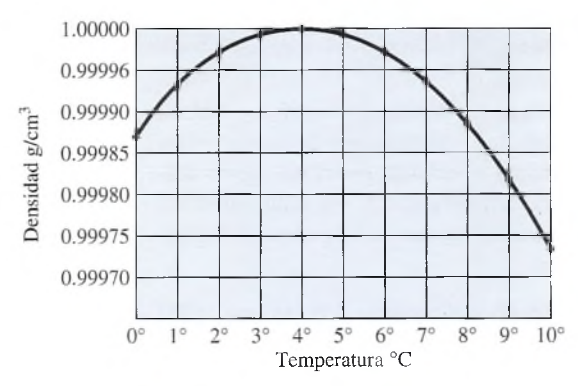


Figura 16.16 Variación de la densidad del agua cerca de los 4°C.

El mayor volumen del hielo se debe a la forma en que se unen los grupos de moléculas en una estructura cristalina. A medida que se funde el hielo, el agua formada aún contiene grupos de moléculas enlazadas en esa estructura cristalina abierta. Cuando estas estructuras empiezan a romperse, las moléculas se mueven muy juntas, aumentando la densidad. Este es el proceso dominante hasta que el agua alcanza una temperatura de 4°C. Desde ese punto hasta altas temperaturas, se produce un aumento en la amplitud de las vibraciones moleculares y el agua se dilata.

Una vez más, el alumno principiante puede maravillarse ante el hecho de que la ciencia pueda ser tan exacta. El hecho de que la densidad del agua a 4°C "resulte ser exactamente de 1.00 g/cm^3" debe ser en verdad una coincidencia sorprendente. Sin embargo, al igual que las temperaturas del punto de congelación y del punto de ebullición, este resultado es también la consecuencia de una definición. Los científicos que establecieron el sistema métrico definieron el *kilogramo* como la masa de 1000 cm^3 de agua a 4°C. Posteriormente el kilogramo fue redefinido en términos de un cilindro de platino iridiado, que sirve como patrón.

Resumen y repaso

Hemos visto que, debido a la existencia de cuatro escalas de temperatura de uso común, las conversiones de temperatura son importantes. También ha estudiado usted un efecto importante de los cambios de temperatura de los materiales: un cambio en sus dimensiones físicas. Los principales conceptos se resumen a continuación.

- Existen cuatro escalas de temperatura con las que usted debe estar muy familiarizado. Una comparación de ellas aparece en la figura 16.9, donde se presentan sus valores para el punto de ebullición, el punto de congelación y el cero absoluto en cada escala. Es importante que distinga entre un intervalo de temperatura Δt y una temperatura específica t. Ésta es una guía para intervalos de temperatura:

$$\frac{5°C}{9°F} = 1 = \frac{9°F}{5°C} \qquad 1\ K = 1°C \qquad 1°R = 1°F$$

Intervalos de temperatura

- Para temperaturas específicas, es necesario corregir la diferencia del intervalo, pero también hay que hacer una corrección por el hecho de que se asignan números distintos a las mismas temperaturas:

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32) \qquad t_F = \frac{9}{5}t_C + 32$$

Temperaturas específicas

$$T_K = t_C + 273 \qquad T_R = t_F + 460$$

Temperaturas absolutas

- Las relaciones siguientes se aplican a la dilatación térmica de sólidos:

$$\Delta L = \alpha L_0\, \Delta t \qquad L = L_0 + \alpha L_0\, \Delta t$$

Dilatación lineal

$$\Delta A = \gamma A_0\, \Delta t \qquad A = A_0 + \gamma A_0\, \Delta t \qquad \gamma = 2\alpha$$

Dilatación superficial

$$\Delta V = \beta V_0\, \Delta t \qquad V = V_0 + \beta V_0\, \Delta t \qquad \beta = 3\alpha$$

Dilatación volumétrica

- En la dilatación volumétrica de un líquido se usa la misma relación que para un sólido salvo, desde luego, que para el líquido no hay coeficiente de dilatación lineal α. Sólo se necesita β.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

16.1. Dos trozos de mineral de hierro caliente se dejan caer en un recipiente de agua. El sistema queda aislado y se deja que alcance el equilibrio térmico. ¿Es realmente cierto que el mineral de hierro y el agua tienen la misma energía térmica? ¿Es necesariamente cierto que ambos tienen la misma temperatura? Explique la repuesta.

16.2. Señale con claridad la diferencia entre energía térmica y temperatura.

16.3. Si se coloca una flama debajo de un termómetro de mercurio en cristal, la columna de mercurio primero cae y luego se eleva. Explique ese hecho.

16.4. ¿Qué factores es necesario tomar en cuenta en el diseño de un termómetro sensible?

16.5. ¿Hasta qué punto es eficaz nuestro sentido del tacto como un medio para juzgar la temperatura? ¿El objeto "más caliente" siempre es el que tiene la temperatura más alta?

16.6. Si tuviera usted un termómetro sin graduaciones, ¿cómo haría para marcarlo en grados Celsius?

16.7. Una regla de 6 in se dilata 0.0014 in cuando la temperatura se eleva 1°C. ¿Cuánto se dilataría una regla de 6 cm hecha del mismo material, a causa del mismo intervalo de cambio de temperatura?

16.8. Una varilla de bronce une los lados opuestos de un aro del mismo material. Si el sistema se calienta uniformemente, ¿conservará el aro su forma circular?

16.9. Una tuerca de bronce se usa con un perno de acero. ¿Cómo resultará afectado el ajuste entre ambos cuando solamente se caliente el perno, si sólo se calienta la tuerca o si los dos se calientan por igual?

16.10. Una tapa de aluminio se enrosca firmemente en la boca de un frasco de pepinillos a la temperatura ambiente. Después de dejar el frasco de pepinillos uno o dos días dentro de un refrigerador, la tapa no puede quitarse con facilidad. Explique la situación. Sugiera la forma de quitar la tapa con facilidad. ¿Cómo podría haber resuelto el fabricante ese problema?

16.11. Describa la dilatación del agua cuando se acerca a 4°C. ¿Por qué la superficie es lo primero que se congela en un lago? ¿Cuál es la temperatura probable en el fondo del lago cuando la superficie está congelada?

16.12. Aplique un razonamiento similar al de la dilatación superficial y obtenga las ecuaciones (16.15) y (16.17). En el texto se dijo que γ es sólo aproximadamente igual al doble de α. ¿Por qué su valor no es exactamente el doble de α? ¿Es mayor el error en la ecuación (16.13) o en la ecuación (16.15)?

Problemas

Sección 16.2 La medición de la temperatura

16.1. La temperatura normal del cuerpo humano es de 98.6°F ¿Cuál es la temperatura correspondiente en la escala Celsius? Resp. 37.0°C

16.2. El punto de ebullición del azufre es de 444.5°C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en la escala Fahrenheit?

16.3. Un riel de acero se enfría de 70 a 30°C en 1 h. ¿Cuál es la variación de temperatura en grados Fahrenheit en ese mismo lapso? Resp. 72°F

*16.4. ¿A qué temperatura la escala Celsius y la escala Fahrenheit coinciden en una misma lectura numérica?

16.5. Un trozo de carbón vegetal que estaba inicialmente a 180°F experimenta una disminución de temperatura de 120°F. Exprese este cambio de temperatura en grados Celsius. ¿Cuál es la temperatura final en la escala Celsius? Resp. 66.7°C, 15.6°C

16.6. La acetona hierve a 56.5°C y el nitrógeno líquido hierve a −196°C. Exprese estas temperaturas específicas en la escala Kelvin. ¿Cuál es la diferencia entre esas temperaturas en la escala Celsius?

16.7. El punto de ebullición del oxígeno es −297.35°F. Exprese esta temperatura en kelvins y en grados Celsius. Resp. 90.0 K, −183°C

16.8. Si el oxígeno se enfría de 120 a 70°F, ¿cuál es la variación de temperatura en kelvins?

16.9. Una pared de ladrillo refractario tiene una temperatura interna de 313°F y una temperatura exterior de 73°F. Exprese la diferencia de temperaturas en kelvins. Resp. 133 K

16.10. El oro se funde a 1336 K. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Celsius y en grados Fahrenheit?

16.11. Una muestra de gas se enfría de −120 a −180°C. Exprese la variación de temperatura en kelvins y en grados Fahrenheit. Resp. −60 K, −108°F

Sección 16.5 Dilatación lineal, Sección 16.6 Dilatación superficial y Sección 16.7 Dilatación volumétrica

16.12. Una losa de concreto tiene 20 m de largo. ¿Cuál será el incremento en su longitud si la temperatura cambia de 12 a 30°C? Suponga que $\alpha = 9 \times 10^{-6}/°C$.

16.13. Un trozo de tubo de cobre tiene 6 m de longitud a 20°C. ¿Qué incremento de longitud tendrá cuando se caliente a 80°C? Resp. 6.12 mm

16.14. Una barra de plata tiene 1 ft de longitud a 70°F. ¿Cuánto se incrementará su longitud cuando se introduzca en agua hirviendo (212°F)?

16.15. El diámetro de un orificio en una placa de acero es de 9 cm cuando la temperatura es de 20°C. ¿Cuál será el diámetro del orificio a 200°C? Resp. 9.02 cm

*16.16. Una varilla de bronce tiene 2.00 m de longitud a 15°C. ¿A qué temperatura se tendrá que calentar la varilla para que su nueva longitud sea de 2.01 m?

16.17. Una placa cuadrada de cobre que mide 4 cm por lado a 20°C se calienta hasta 120°C. ¿Cuál es el incremento del área de la placa de cobre? Resp. 0.0544 cm²

***16.18.** Un orificio circular en una placa de acero tiene un diámetro de 20.0 cm a 27°C. ¿A qué temperatura se tendrá que calentar la placa para que el área del orificio sea de 314 cm^2?

16.19. ¿Cuál es el incremento de volumen en 16.0 litros de alcohol etílico cuando la temperatura se incrementa en 30°C? Resp. 0.528 L

16.20. Un matraz Pyrex tiene un volumen interior de 600 ml a 20°C. ¿A qué temperatura el volumen interior será de 603 ml?

16.21. Si 200 cm^3 de benceno llenan exactamente una taza de aluminio a 40°C y el sistema se enfría a 18°C, ¿cuánto benceno (a 18°C) puede agregarse a la taza sin que se derrame? Resp. 5.14 cm^3

16.22. Un vaso de laboratorio Pyrex se llena hasta el borde con 200 cm^3 de mercurio a 20°C. ¿Cuánto mercurio se derramará si la temperatura del sistema se eleva a 68°C?

Problemas adicionales

***16.23.** El diámetro de un orificio en una placa de cobre a 20°C es de 3.00 mm. ¿A qué temperatura se deberá enfriar el cobre para que ese diámetro sea de 2.99 mm? Resp. −176°C

16.24. Una hoja rectangular de aluminio mide 6 × 9 cm a 28°C. ¿Cuál es su área a 0°C?

***16.25.** La longitud de una varilla de aluminio, medida con una cinta de acero, fue de 60 cm cuando ambas estaban a 8°C. ¿Cuál será la lectura de la longitud de la varilla en la cinta si ambas están a 38°C? Resp. 60.022 cm

16.26. Un cubo de cobre mide 40 cm por lado a 20°C. ¿Cuál es el volumen del cubo cuando la temperatura llega a 150°C?

16.27. Un matraz Pyrex ($\alpha = 0.3 \times 10^{-5}$/°C) está lleno hasta el borde con 200 ml de glicerina ($\beta = 5.1 \times 10^{-4}$/°C). ¿Cuánta glicerina se derramará por el borde si el sistema se calienta de 20 a 100°C? Resp. 8.02 ml

16.28. Un horno se ajusta a 450°F. Si la temperatura desciende 50 kelvins, ¿cuál es la nueva temperatura en grados Celsius?

***16.29.** Una cinta de acero de 100 ft mide correctamente la distancia cuando la temperatura es de 20°C. ¿Cuál es la medición verdadera si esta cinta indica una distancia de 94.62 ft un día en el que la temperatura es de 36°C? Resp. 94.64 ft

***16.30.** El diámetro de una varilla de acero es de 3.000 mm cuando la temperatura es de 20°C. El diámetro de una argolla de bronce es 2.995 mm, también a 20°C. ¿A qué temperatura en común la argolla de bronce se ensartará deslizándose suavemente sobre la varilla de acero?

***16.31.** El volumen de un cubo de metal se incrementa en 0.50% cuando la temperatura del cubo se eleva en 100°C. ¿Cuál es el coeficiente de dilatación lineal de este metal? Resp. 1.67 × 10^{-5}/°C

16.32. ¿En qué porcentaje se incrementa el volumen de un cubo de bronce cuando se calienta de 20 a 100°C?

16.33. Un tapón de bronce redondo tiene un diámetro de 8.001 cm a 28°C. ¿A qué temperatura deberá enfriarse el tapón para que ajuste correctamente en un orificio de 8.000 cm? Resp. 21.1°C

***16.34.** Un matraz Pyrex se llena por completo con 500 cm^3 de alcohol etílico. Si la temperatura del sistema se eleva 70°C, ¿qué volumen de alcohol se derramará?

Preguntas para la reflexión crítica

16.35. Un aparato de laboratorio que permite medir el coeficiente de dilatación lineal se ilustra en la figura 16.17. La temperatura de una varilla de metal se eleva haciendo pasar vapor a través de una cubierta metálica cerrada. El incremento de longitud resultante se mide con un tornillo micrométrico en uno de sus extremos. En virtud de que la longitud original y la temperatura son conocidas, el coeficiente de dilatación se puede calcular a partir de la ecuación (16.8). Los datos siguientes fueron obtenidos en el curso de un experimento realizado con una varilla de metal desconocido:

$$L_0 = 600 \text{ mm} \qquad t_0 = 23°\text{C}$$
$$\Delta L = 1.04 \text{ mm} \qquad t_f = 98°\text{C}$$

¿Cuál es el coeficiente de dilatación lineal de este metal? ¿Sabe usted de qué metal se trata?

Resp. 2.3 × 10^{-5}/°C, Al

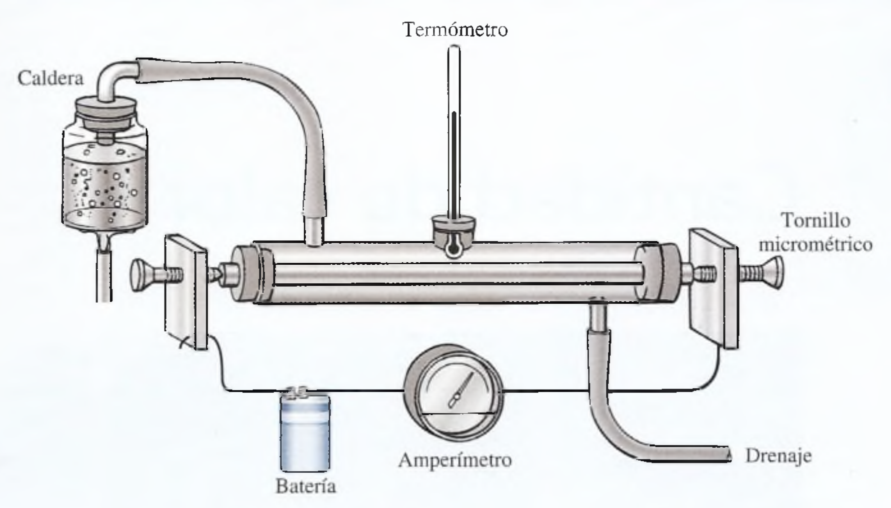


Figura 16.17 Aparato para medir el coeficiente de dilatación lineal.

***16.36.** Suponga que los extremos de una varilla están firmemente sujetos entre dos paredes para impedir la dilatación cuando la temperatura se eleva. A partir de las definiciones del módulo de Young (capítulo 13) y sus conocimientos de la dilatación lineal, demuestre que la fuerza de compresión F que ejercen las paredes está dada por

$$F = \alpha A Y \, \Delta t$$

donde A = área de la sección transversal de la varilla
Y = módulo de Young
Δt = aumento de la temperatura de la varilla

***16.37.** Demuestre que la densidad de un material cambia junto con la temperatura, de manera que la nueva densidad se calcula mediante

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta t}$$

donde ρ_0 = densidad original
β = coeficiente de dilatación del volumen
Δt = cambio de temperatura

16.38. La densidad del mercurio a 0°C es 13.6 g/cm^3. Aplique la relación del ejemplo anterior para hallar la densidad del mercurio a 60°C.

16.39. Un anillo de acero tiene un diámetro interior de 4.000 cm a 20°C. El anillo tiene que encajar en un eje de cobre cuyo diámetro es de 4.003 cm a 20°C. ¿A qué temperatura deberá ser calentado el anillo? Si el anillo y el eje se enfrían uniformemente, ¿a qué temperatura se empezará a deslizar el anillo sobre el eje? Resp. 82.5°C, −150°C

17 Cantidad de calor



Fundición: Los trabajadores observan el procesamiento del acero fundido en una fundición. Se requiere alrededor de 286 joules de calor para fundir 1 gramo de acero. En este capítulo definiremos la cantidad de calor para aumentar la temperatura de una sustancia y cambiar la fase de sólido a líquido o líquido a gas. (*Foto © vol. 5 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá cuantitativamente el calor en términos de la *caloría*, la *kilocaloría*, el *joule* y la *unidad térmica británica* (Btu).
2. Escribirá una fórmula para expresar la *capacidad de calor específico* de un material y la aplicará para resolver problemas en los que intervengan la pérdida y ganancia de calor.
3. Escribirá fórmulas para calcular los *calores latentes de fusión* y *de vaporización* y las aplicará a la resolución de problemas en los cuales el calor produce un cambio de fase de una sustancia.
4. Definirá el *calor de combustión* y lo aplicará a problemas que impliquen la producción de calor.

La energía térmica es la energía asociada con el movimiento molecular al azar, pero no es posible medir la posición y la velocidad de cada molécula de una sustancia para determinar su energía térmica. Sin embargo, podemos medir *cambios* de energía térmica relacionándolos con cambios de temperatura.

Por ejemplo, cuando dos sistemas a diferentes temperaturas se colocan juntos, finalmente alcanzarán una temperatura intermedia. A partir de esta observación, se puede decir con seguridad que el sistema de mayor temperatura ha cedido energía térmica al sistema de menor

temperatura. La energía térmica perdida o ganada por los objetos se llama ***calor***. Este capítulo se ocupa de la medición cuantitativa del calor.

17.1 El significado del calor

En el pasado se creía que dos sistemas alcanzaban su equilibrio térmico por medio de la transferencia de una sustancia llamada *calórico*. Se había postulado que todos los cuerpos contenían una cantidad de calórico proporcional a su temperatura. De este modo, cuando dos objetos estaban en contacto, el objeto de mayor temperatura transfería calórico al objeto de menor temperatura hasta que sus temperaturas se igualaban. La idea de que una sustancia se transfiere conlleva la implicación de que hay un límite para la cantidad de energía calorífica que es posible obtener de un cuerpo. Esta última idea fue la que, a la postre, condujo a la caída de la teoría del calórico.

El conde Rumford de Baviera fue el primero que puso en duda la teoría del calórico. Él realizó su descubrimiento en 1798 cuando supervisaba la perforación de un cañón. Toda la superficie de éste se mantenía llena de agua, durante la operación, para evitar el sobrecalentamiento. A medida que el agua hervía y se evaporaba, los operarios la reponían. De acuerdo con la teoría existente, se tenía que suministrar calórico para que el agua hirviera. La aparente producción de calórico se explicaba con la suposición de que cuando la materia se dividía extremadamente, perdía parte de su capacidad para retener el calórico. Rumford diseñó un experimento con el fin de demostrar que aun cuando una herramienta para taladrar no cortaba totalmente el metal del cañón, se producía el suficiente calórico para que el agua hirviera. En realidad, parecía que mientras se suministrara trabajo mecánico, la herramienta era una inagotable fuente de calórico. Rumford acabó con la teoría del calórico basándose en sus experimentos y sugirió que la explicación tenía que estar relacionada con el movimiento. Por consiguiente, surgió la idea de que el trabajo mecánico era responsable de la generación de calor. Posteriormente, sir James Prescott Joule estableció la equivalencia de calor y trabajo como dos formas de energía.

17.2 La cantidad de calor

La idea del calor como una sustancia se debe descartar. No se trata de algo que el objeto *posea*, sino de algo que él mismo *cede* o *absorbe*. El calor es simplemente otra forma de energía que puede medirse únicamente en términos del efecto que produce. La unidad de energía del SI, el *joule*, es también la unidad preferida para medir el calor, puesto que éste es una forma de energía. Sin embargo, hay tres antiguas unidades que aún se conservan, y de ellas se hablará también en este texto. Estas primeras unidades se basaron en la energía térmica requerida para producir un cambio patrón. Son la ***caloría***, la ***kilocaloría*** y la ***unidad térmica británica*** (*British thermal unit*) o Btu.

> Una caloría (cal) es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celsius.
>
> Una kilocaloría (kcal) es la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un kilogramo de agua en un grado Celsius (1 kcal = 1 000 cal).
>
> Una unidad térmica británica (Btu) es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una libra patrón (lb) de agua en un grado Fahrenheit.

Además del hecho de que estas viejas unidades implican que la energía térmica no se puede relacionar con otras formas de energía, existen otros problemas con su uso. El calor requerido para cambiar la temperatura del agua de 92 a 93°C no es exactamente el mismo que el que se necesita para elevar la temperatura de ese líquido de 8 a 9°C. Por tanto, es necesario especificar el intervalo de temperatura para la caloría y para la unidad térmica británica en aplicaciones de precisión. Los intervalos elegidos fueron 14.5 a 15.5°C y 63 a 64°F. Además, la unidad libra que aparece en la definición del Btu debe ser reconocida como la *masa de la libra patrón*. Esto representa el abandono de las unidades del SUEU, ya que en ese sistema la libra quedó reservada para expresar el peso. Por tanto, en este capítulo, cuando

se mencione 1 lb de agua, nos estaremos refiriendo a la *masa* de agua equivalente a 1/32 slug. Esta distinción es necesaria debido a que la libra de agua debe representar una cantidad constante de materia, independientemente del lugar geográfico. Por definición, la libra masa se relaciona con el gramo y el kilogramo en la siguiente forma:

$$1 \text{ lb} = 454 \text{ g} = 0.454 \text{ kg}$$

La diferencia entre estas antiguas unidades para el calor resulta de la diferencia que existe entre las masas y de la diferencia entre las escalas de temperatura. Como ejercicio demuestre que:

$$1 \text{ Btu} = 252 \text{ cal} = 0.252 \text{ kcal} \tag{17.1}$$

La primera relación cuantitativa entre estas unidades antiguas y las unidades tradicionales para la energía mecánica fue establecida por Joule en 1843. Aunque Joule diseñó gran número de experimentos para demostrar la equivalencia de las unidades del calor y las unidades de energía, el aparato que se recuerda con más frecuencia es el que aparece en la figura 17.1. La energía mecánica se obtenía al hacer descender pesas, las cuales hacían girar un juego de aspas dentro de un recipiente con agua. La cantidad de calor absorbido por el agua se medía partiendo de la masa conocida y de la medición del incremento de temperatura del agua.

En la actualidad, el ***equivalente mecánico del calor*** ya se ha establecido con un alto grado de precisión mediante varias técnicas. Los resultados aceptados son

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$
$$1 \text{ kcal} = 4\,186 \text{ J}$$
$$1 \text{ Btu} = 778 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Por tanto, son necesarios 4.186 J de calor para elevar la temperatura de un gramo de agua de 14.5 a 15.5°C. Por el hecho de que cada una de las unidades anteriores se sigue usando, con frecuencia es necesario comparar unidades o hacer conversiones de una unidad a otra.

Ahora que se han definido las unidades para la medición cuantitativa del calor, la diferencia entre cantidad de calor y temperatura debe ser muy clara. Por ejemplo, suponga que vaciamos 200 g de agua en un vaso de precipitado y 800 g de agua en otro vaso, como muestra la figura 17.2. La temperatura inicial del agua en cada vaso es de 20°C. Se coloca una flama

FÍSICA HOY

El calor produce electricidad

La técnica llamada *generación termoeléctrica* utiliza la misma tecnología que las naves espaciales que no pueden generar electricidad a partir del Sol. El sistema funciona usando un arreglo de pares termoeléctricos semiconductores de una aleación de telurio de bismuto. Una tira bimetálica se dobla cuando se expone al calor, esta flexión completa un circuito que contiene un transistor tipo *n* y un transistor tipo *p*, que generan electricidad. Este proceso no es muy eficiente: sólo 5 por ciento de la energía calorífica se convierte en electricidad. Pero si el calor es un calor que se va a desperdiciar, ese 5 por ciento está dispuesto a obtener energía libre. Una compañía que estudia esta tecnología espera usarla para producir toda la electricidad necesaria para manejar las porciones eléctricas de un sistema de calefacción para el hogar, el cual manejaría, por tanto, sólo gas.

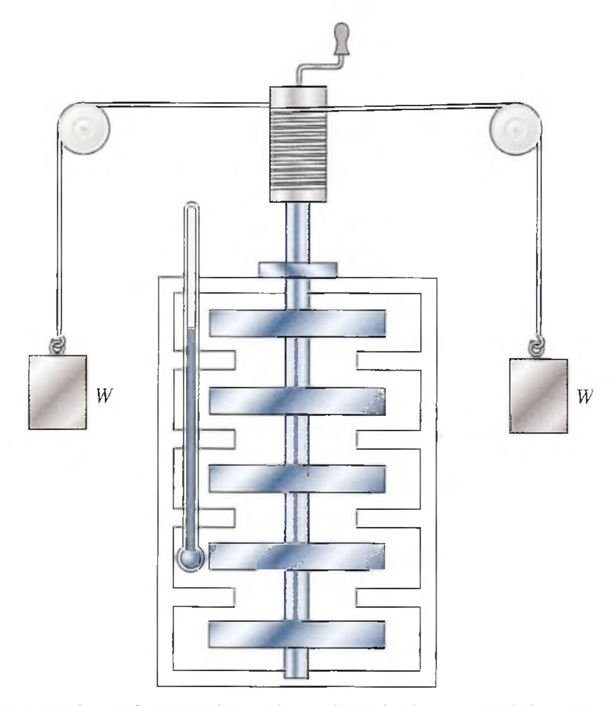


Figura 17.1 Experimento de Joule para determinar el equivalente mecánico del calor. Al descender las pesas realizan trabajo al agitar el agua y elevar su temperatura.

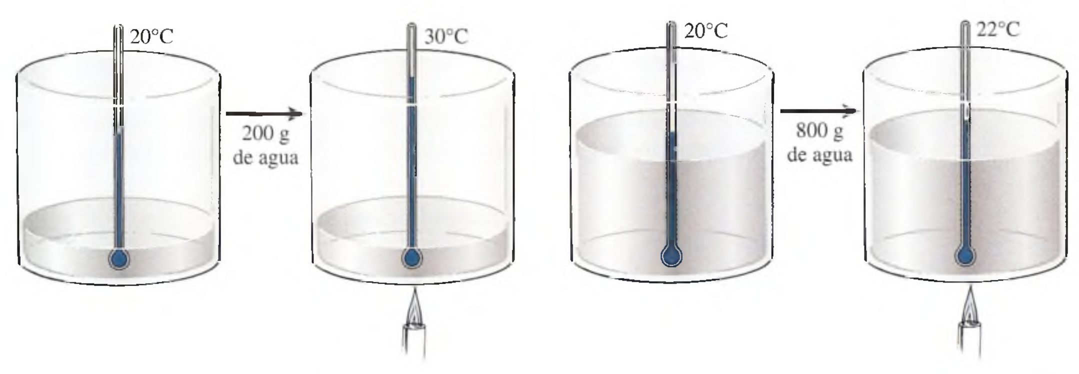


Figura 17.2 La misma cantidad de calor se aplica a diferentes masas de agua. La masa mayor experimenta una menor elevación de temperatura.

bajo cada vaso durante el mismo periodo, suministrando 8000 J de energía calorífica al agua de cada vaso. La temperatura de los 800 g de agua se incrementa un poco más de 2°C, pero la temperatura de los 200 g aumenta casi 10°C. Sin embargo, se suministró la misma cantidad de calor en cada vaso.

17.3 Capacidad de calor específico

Hemos definido la cantidad de calor como la energía térmica necesaria para elevar la temperatura de una masa dada. Sin embargo, la cantidad de energía térmica requerida para elevar la temperatura de una sustancia, varía para diferentes materiales. Por ejemplo, suponga que aplicamos calor a cinco esferas, todas del mismo tamaño pero de material diferente, como muestra la figura 17.3a. Si deseamos elevar la temperatura de cada esfera a 100°C, descubriremos que algunas de las esferas deben calentarse más tiempo que otras. Para ilustrar esto, supongamos que cada esfera tiene un volumen de 1 cm^3 y una temperatura inicial de 0°C. Cada una se calienta con un mechero capaz de suministrar energía térmica a razón de 1 cal/s. El tiempo necesario para que cada esfera alcance los 100°C aparece en la figura 17.3. Observe que la esfera de plomo alcanza la temperatura final en sólo 37 s, mientras que la esfera de hierro requiere 90 s de calentamiento continuo. Las esferas de vidrio, aluminio y cobre necesitan tiempos intermedios entre esos valores.

Puesto que las esferas de hierro y de cobre absorben más calor, se esperaría que liberaran más calor al enfriarse. Esto puede demostrarse colocando las cinco esferas (a 100°C) simultáneamente sobre una barra delgada de parafina, como se ve en la figura 17.3b. Las esferas de hierro y de cobre llegarán a fundir la parafina y a caer en el recipiente. Las esferas de plomo y de vidrio jamás la atravesarán. Es obvio que cada material debe tener alguna propiedad que se

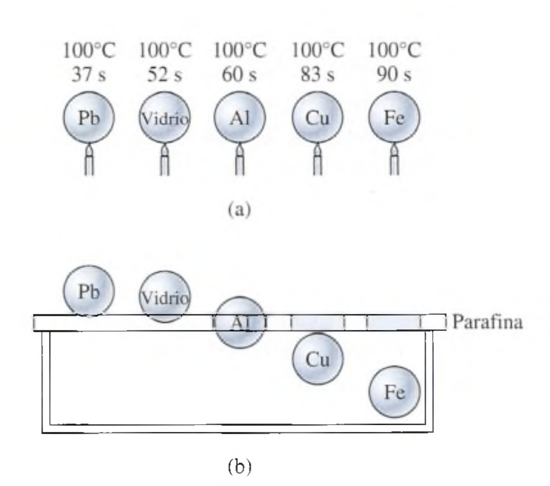


Figura 17.3 Comparación entre las capacidades caloríficas de cinco esferas de materiales diferentes.

relacione con la cantidad de calor absorbido o liberado durante un cambio en la temperatura. Como un paso para establecer esta propiedad, vamos a definir primero la ***capacidad calorífica***.

La capacidad calorífica de un cuerpo es la relación del calor suministrado respecto al correspondiente incremento de temperatura del cuerpo.

$$\text{Capacidad calorífica} = \frac{Q}{\Delta t} \qquad \textbf{(17.2)}$$

Las unidades del SI para la capacidad calorífica son *joules por kelvin* (J/K), pero puesto que el intervalo Celsius es el mismo que el kelvin y se usa con más frecuencia, en este texto se usará el *joule por grado Celsius* (J/°C). Otras unidades son las *calorías por grado Celsius* (cal/°C), *kilocalorías por grado Celsius* (kcal/°C), y los *Btu por grado Fahrenheit* (Btu/°F). En los ejemplos anteriores se requirieron 89.4 cal de calor para elevar la temperatura de la esfera de hierro en 100°C. Por consiguiente, la capacidad calorífica de esta esfera de hierro específica es de 0.894 cal/°C.

La masa de un objeto no se incluye en la definición de capacidad calorífica. Por tanto, la capacidad calorífica es una propiedad del objeto. Para que sea una propiedad del material, se define la *capacidad calorífica por unidad de masa*. A esta propiedad se le llama ***calor específico*** (o ***capacidad calorífica específica***) y se simboliza por *c*.

El calor específico de un material es la cantidad de calor necesario para elevar un grado la temperatura de una unidad de masa.

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta t} \qquad Q = mc\,\Delta t \qquad \textbf{(17.3)}$$

La unidad del SI para el calor específico designa al *joule* para el calor, al *kilogramo* para la masa, y al *kelvin* para la temperatura. Si nuevamente reemplazamos el kelvin con el grado Celsius, las unidades de *c* son J/(kg · °C). En la industria, la mayor parte de las mediciones de temperatura se hacen en °C o °F, y la caloría y el Btu se siguen usando aún con más frecuencia que las unidades del SI. Por tanto, continuaremos mencionando el calor específico en unidades cal/(g · °C) y Btu/(lb · °F), pero también usaremos las unidades del SI en algunos casos. En el ejemplo de la esfera de hierro, se determinó que su masa era de 7.85 g. El calor específico del hierro es, por tanto,

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta t} = \frac{89.4\text{ cal}}{(7.85\text{ g})(100°\text{C})} = 0.114\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)}$$

Observe que nos referimos a capacidad calorífica de la *esfera* y al calor *específico* del *hierro*. La primera se refiere al objeto en sí mismo, mientras que el último se refiere al material del que está hecho el objeto. En nuestro experimento de las esferas, observamos tan sólo la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura 100°C. No se tomó en cuenta la densidad de los materiales. Si el tamaño de las esferas se ajustara de tal manera que todas tuvieran la misma masa, observaríamos diferentes resultados. En vista de que el calor específico del aluminio es el mayor, se requerirá más calor para la esfera de aluminio que para las demás. En forma similar, la esfera de aluminio podrá liberar más calor al enfriarse.

Para la mayoría de las aplicaciones prácticas, el calor específico del agua puede considerarse como

$$4\,186\text{ J/(kg}\cdot°\text{C)} \qquad 4.186\text{ J/(g}\cdot°\text{C)}$$
$$1\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)} \qquad \text{o} \qquad 1\text{ Btu/(lb}\cdot°\text{F)}$$

Observe que los valores numéricos son los mismos para el calor específico expresado en cal/g · °Cy en Btu/lb · °F. Ésta es una consecuencia de sus definiciones y puede demostrarse mediante la conversión de unidades:

$$1\frac{\text{Btu}}{\text{lb}\cdot°\text{F}} \times \frac{9°\text{F}}{5°\text{C}} \times \frac{1\text{ lb}}{454\text{ g}} \times \frac{252\text{ cal}}{1\text{ Btu}} = 1\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)}$$

Los calores específicos para la mayoría de las sustancias de uso común aparecen en la tabla 17.1.

Tabla 17.1

Calores específicos

Sustancia	J/(kg · °C)	cal/(g · °C) o Btu/(lb · °F)
Acero	480	0.114
Agua	4 186	1.00
Alcohol etílico	2 500	0.60
Aluminio	920	0.22
Cobre	390	0.093
Hielo	2 090	0.5
Hierro	470	0.113
Latón	390	0.094
Mercurio	140	0.033
Oro	130	0.03
Plata	230	0.056
Plomo	130	0.031
Trementina	1 800	0.42
Vapor	2 000	0.48
Vidrio	840	0.20
Zinc	390	0.092

Una vez que se han establecido los calores específicos de gran número de materiales, la energía térmica liberada o absorbida se puede determinar debido a múltiples experimentos. Por ejemplo, la cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de una masa m en un intervalo t, partiendo de la ecuación (17.3), es

$$Q = mc\,\Delta t \tag{17.4}$$

donde c es el calor específico de la masa.

Ejemplo 17.1 ¿Cuánto calor se necesita para elevar la temperatura de 200 g de mercurio de 20 a 100°C?

Solución: La sustitución en la ecuación (17.4), da

$$Q = mc\,\Delta t = (0.2\text{ kg})[140\text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}](80\text{°C})$$
$$= 2\,200\text{ J}$$

17.4 La medición del calor

Con frecuencia hemos destacado la importancia de distinguir entre energía térmica y temperatura. El término *calor* se ha presentado como la energía térmica *absorbida* o *liberada* durante un cambio de temperatura. La relación cuantitativa entre calor y temperatura se describe mejor por medio del concepto de calor específico tal como aparece en la ecuación (17.4). Las relaciones físicas entre todos estos términos ahora están tomando su lugar.

El principio del equilibrio térmico nos dice que siempre que los objetos se coloquen juntos en un ambiente aislado, finalmente alcanzarán la misma temperatura. Esto es el resultado de una transferencia de energía térmica de los cuerpos más calientes a los cuerpos más fríos.

Si la energía debe conservarse, decimos que *el calor perdido por los cuerpos calientes debe ser igual al calor ganado por los cuerpos fríos*. O sea,

$$\textit{Calor perdido} = \textit{calor ganado} \tag{17.5}$$

Esta ecuación expresa el resultado neto de la transferencia de calor dentro de un sistema.

El calor perdido o ganado por un objeto no se relaciona de manera sencilla con las energías moleculares de los objetos. Siempre que se suministra energía térmica a un objeto, éste puede absorber la energía de muy diversas maneras. El concepto de calor específico es necesario para medir las capacidades de diferentes materiales y utilizar la energía térmica para aumentar sus temperaturas. La misma cantidad de energía térmica suministrada no produce el mismo aumento de temperatura en todos los materiales. Por esta razón, decimos que la temperatura es una cantidad *fundamental*. Su medición es necesaria para determinar la cantidad de calor perdido o ganado durante un proceso específico.

Al aplicar la ecuación general para la conservación de la energía térmica, ecuación (17.5), la cantidad de calor *ganado* o *perdido* por cada objeto se calcula a partir de la ecuación

$$Q = mc\,\Delta t$$

El término Δt representa el cambio *absoluto* en la temperatura cuando se aplica a las *ganancias* y *pérdidas*. Esto significa que debemos pensar en *temperatura alta* menos *temperatura baja* en vez de *temperatura final* menos *temperatura inicial*. Por ejemplo, suponga que un perno calentado, inicialmente a 80°C se deja caer en un recipiente de agua cuya temperatura inicial es 20°. Suponga que la temperatura de equilibrio final es 30°C. Para determinar la *pérdida* de calor que sufrió el perno, Δt es +50°C y para el cálculo del calor *ganado* por el agua, Δt es +10°C.

Ejemplo 17.2

Se calientan balas de cobre a 90°C y luego se dejan caer en 160 g de agua a 20°C. La temperatura final de la mezcla es 25°C. ¿Cuál era la masa de las balas?

Plan: Para calcular la masa de las balas de cobre, consideramos que la pérdida de calor de las balas debe ser igual al calor ganado por el agua. Como no se menciona al contenedor suponemos que no hay un intercambio de calor considerable en ninguna otra parte. Establecemos la pérdida del calor igual al calor obtenido y resolvemos para hallar la masa desconocida.

Solución: Recuerde que $Q = mc\,\Delta t$ para las balas y para el agua, escribimos

$$\textit{Calor perdido} = \textit{calor ganado}$$

$$m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}}\Delta t_{\text{Cu}} = m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}\Delta t_{\text{agua}}$$

$$m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}}(t_{\text{Cu}} - t_e) = m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}(t_e - t_{\text{agua}})$$

A partir de la tabla 17.1 determinamos que para el cobre, $c = 0.093$ cal/g · °C, y para el agua, $c = 1$ cal/g · °C. Al sustituir las otras cantidades conocidas tenemos

$$m_{\text{Fe}}[0.093\text{ cal/(g}\cdot\text{°C)}](98° - 25\text{°C}) = (160\text{ g})[1\text{ cal/(g}\cdot\text{°C)}](25\text{°C} - 20\text{°C})$$

$$m_{\text{Fe}}(6.79\text{ cal/g}) = 800\text{ cal}$$

$$m_{\text{Fe}} = 118\text{ g}$$

En este sencillo ejemplo no hemos tomado en cuenta dos hechos importantes: (1) el agua se encuentra en un recipiente, el cual también absorbe calor del cobre; (2) el sistema completo debe aislarse de las temperaturas externas. De otro modo, el equilibrio de temperatura siempre se alcanzaría a temperatura ambiente. Un dispositivo de laboratorio llamado ***calorímetro*** (véase la figura 17.4) se usa para tener bajo control este tipo de dificultades. El calorímetro consiste en un recipiente metálico delgado K, generalmente de aluminio, sostenido en su parte central y colocado dentro de una camisa externa A por medio de un soporte de hule no conductor H. La pérdida de calor se minimiza de tres maneras: (1) el empaque de hule evita pérdidas

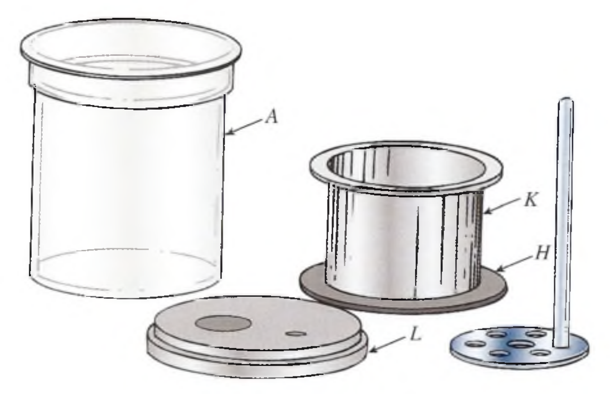


Figura 17.4 El calorímetro de laboratorio. (Central Scientific Co.)

por conducción, (2) el espacio cerrado entre las paredes del recipiente impide la pérdida de calor por corrientes de aire, y (3) un recipiente de metal muy bien pulido reduce la pérdida de calor por radiación. Estos tres métodos de transferencia de calor se estudiarán en el siguiente capítulo. La tapa de madera L tiene orificios en su parte superior para poder introducir un termómetro y un agitador de aluminio.

Ejemplo 17.3

En un experimento de laboratorio, se utiliza un calorímetro para determinar el calor específico del hierro. Se colocan 80 g de balines de hierro seco en la taza y se calienta a 95°C. La masa de la taza interior de aluminio con un agitador del mismo material es de 60 g. El calorímetro se llena parcialmente con 150 g de agua a 18°C. Los balines calientes se vacían rápidamente en la taza y se sella el calorímetro, como muestra la figura 17.5. Después que el sistema ha alcanzado el equilibrio térmico, la temperatura final es 22°C. Calcule el calor específico del hierro.

Plan: La pérdida de calor del hierro debe ser igual al calor ganado por el agua más el calor ganado por la taza y el agitador de aluminio. Supondremos que la temperatura inicial de la taza es la misma que la del agua y del agitador (18°C). Cuando escribimos la ecuación de la conservación, el calor específico del hierro queda como el único valor desconocido.

Solución: Al organizar los datos conocidos tenemos

Dados: $m_{Fe} = 80$ g, $m_{Al} = 60$ g, $m_{agua} = 150$ g, $t_{agua} = t_{Al} = 18°C$, $t_{Fe} = 95°C$, $t_e = 22°C$

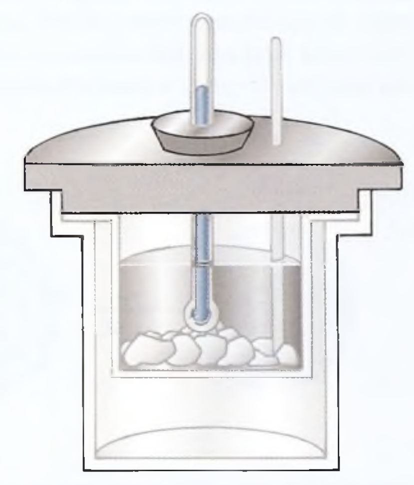


Figura 17.5 Un calorímetro puede utilizarse para determinar el calor específico de una sustancia.

Calcularemos el calor ganado por el agua y el aluminio por separado.

$$Q_{agua} = mc\,\Delta t = (150\text{ g})(1\text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(22^\circ\text{C} - 18^\circ\text{C})$$
$$= (150\text{ g})[1\text{ cal/(g}\cdot{}^\circ\text{C)}](4\text{ C}^\circ) = 600\text{ cal}$$
$$Q_{Al} = mc\,\Delta t = (60\text{ g})[0.22\text{ cal/(g}\cdot{}^\circ\text{C)}](22^\circ\text{C} - 18^\circ\text{C})$$
$$= (60\text{ g})(0.22\text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(4^\circ\text{C}) = 52.8\text{ cal}$$

Ahora, el calor total ganado es la suma de estos valores.

$$\text{Calor ganado} = 600\text{ cal} + 52.8\text{ cal} = 652.8\text{ cal}$$

Esta cantidad debe ser igual que el calor perdido por el hierro:

$$\text{Calor perdido} = Q_{Fe} = mc_{Fe}\,\Delta t = (80\text{ g})c_{Fe}(95^\circ\text{C} - 22^\circ\text{C})$$

Al establecer que el calor perdido es igual que el calor ganado nos queda

$$(80\text{ g})c_{Fe}(73^\circ\text{C}) = 652.8\text{ cal}$$

Despejando c_{Fe}, obtenemos

$$c_{Fe} = \frac{652.8\text{ cal}}{(80\text{ g})(73^\circ\text{C})} = 0.11\text{ cal/(g}\cdot{}^\circ\text{C)}$$

En este experimento el calor ganado por el termómetro no se considera por ser insignificante. En un experimento real, la porción del termómetro que queda dentro del calorímetro absorbería aproximadamente la misma cantidad de calor que 0.5 g de agua. Esta cantidad, llamada el ***equivalente del agua*** del termómetro, debe sumarse a la masa de agua en un experimento de precisión.

17.5 Cambio de fase

Cuando una sustancia absorbe una cierta cantidad de calor, la rapidez de sus moléculas aumenta y su temperatura se eleva. Dependiendo del calor específico de la sustancia, la elevación de temperatura es directamente proporcional a la cantidad de calor suministrado e inversamente proporcional a la masa de la sustancia. Sin embargo, cuando un sólido se funde o cuando un líquido hierve ocurre algo curioso. En estos casos, la temperatura permanece constante hasta que todo el sólido se funde o hasta que todo el líquido hierve.

Para comprender lo que le sucede a la energía aplicada, consideremos un modelo simple, como el que se ilustra en la Fig. 17.6. En las condiciones apropiadas de temperatura y presión, todas las sustancias pueden existir en tres *fases*, sólida, líquida o gaseosa. En la fase sólida, las moléculas se mantienen unidas en una estructura cristalina rígida, de tal modo que la sustancia tiene una forma y volumen definidos. A medida que se suministra calor, las energías de las

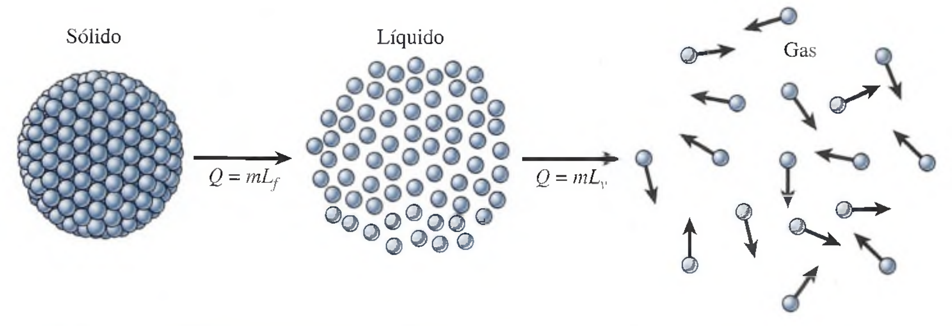


Figura 17.6 Un modelo simplificado muestra las separaciones moleculares relativas en las fases sólida, líquida y gaseosa. Durante un cambio de fase, la temperatura permanece constante.

partículas del sólido aumentan gradualmente y su temperatura se eleva. Al cabo del tiempo, la energía cinética se vuelve tan grande que algunas de las partículas rebasan las fuerzas elásticas que las mantenían en posiciones fijas. La mayor separación entre ellas les da la libertad de movimiento que asociamos con la fase líquida. En este punto, la energía absorbida por la sustancia se usa para separar más las moléculas que en la fase sólida. La temperatura no aumenta durante tal cambio de fase. El cambio de fase de sólido a líquido se llama ***fusión***, y la temperatura a la cual se produce ese cambio se conoce como el ***punto de fusión***.

La cantidad de calor requerido para fundir una unidad de masa de una sustancia en su punto de fusión se llama el ***calor latente de fusión*** de esa sustancia.

El calor latente de fusión L_f de una sustancia es el calor por unidad de masa necesario para cambiar la sustancia de la fase sólida a la líquida a su temperatura de fusión.

$$L_f = \frac{Q}{m} \qquad Q = mL_f \tag{17.6}$$

El calor latente de fusión L_f se expresa en *joules por kilogramo* (J/kg), *calorías por gramo* (cal/g), o *Btu por libra* (Btu/lb). A 0°C, 1 kg de hielo absorberá aproximadamente 334 000 J de calor en la formación de 1 kg de agua a 0°C. Por tanto, el calor latente de fusión para el agua es de 334 000 J/kg. El término *latente* surge del hecho de que la temperatura permanece constante durante el proceso de fusión. El calor de fusión en el caso del agua es cualquiera de los siguientes:

$$3.34 \times 10^5 \text{ J/kg} \qquad 334 \text{ J/g}$$
$$80 \text{ cal/g} \qquad \text{o} \qquad 144 \text{ Btu/lb}$$

Después de que todo el sólido se funde, la energía cinética de las partículas del líquido resultante aumenta de acuerdo a su calor específico, y la temperatura se incrementa de nuevo. Finalmente, la temperatura llegará a un nivel en el que la energía térmica se usa para cambiar la estructura molecular, formándose un gas o vapor. El cambio de fase de un líquido a vapor se llama ***vaporización***, y la temperatura asociada con este cambio se llama el ***punto de ebullición*** de la sustancia.

La cantidad de calor necesaria para evaporar una unidad de masa se llama ***calor latente de vaporización***.

El calor latente de vaporización L_v de una sustancia es el calor por unidad de masa necesario para cambiar la sustancia de líquido a vapor a su temperatura de ebullición.

$$L_v = \frac{Q}{m} \qquad Q = mL_v \tag{17.7}$$

El calor latente de vaporización L_v se expresa en unidades de *joule por kilogramo, calorías por gramo,* o *Btu por libra.* Se ha encontrado que 1 kg de agua a 100°C absorbe 2 260 000 J de calor en la formación de 1 kg de vapor a la misma temperatura. El calor de vaporización para el agua es

$$2.26 \times 10^6 \text{ J/kg} \qquad 2260 \text{ J/g}$$
$$540 \text{ cal/g} \qquad \text{o bien} \qquad 970 \text{ Btu/lb}$$

Los valores correspondientes al calor de fusión y al calor de vaporización de muchas sustancias se muestran en la tabla 17.2. Están dados en unidades del SI y en calorías por gramo. Debe observarse que los equivalentes de Btu por libra (Btu/lb) se pueden obtener multiplicando el valor en cal/g por (9/5). Estos valores difieren únicamente debido a la diferencia en las escalas de temperatura. Se ha dado un gran apoyo al uso industrial de las unidades del SI de J/kg tanto para el L_f como el L_v; sin embargo, pocas empresas de los Estados Unidos han hecho estas conversiones.

Tabla 17.2

Calores de fusión y calores de vaporización de diversas sustancias

Sustancia	Punto de fusión °C	Calor de fusión J/kg	Calor de fusión cal/g	Punto de ebullición °C	Calor de vaporización J/kg	Calor de vaporización cal/g
Alcohol etílico	−117.3	104×10^3	24.9	78.5	854×10^3	204
Amoniaco	−75	452×10^3	108.1	−33.3	1370×10^3	327
Cobre	1080	134×10^3	32	2870	4730×10^3	1130
Helio	−269.6	5.23×10^3	1.25	−268.9	20.9×10^3	5
Plomo	327.3	24.5×10^3	5.86	1620	871×10^3	208
Mercurio	−39	11.5×10^3	2.8	358	296×10^3	71
Oxígeno	−218.8	13.9×10^3	3.3	−183	213×10^3	51
Plata	960.8	88.3×10^3	21	2193	2340×10^3	558
Agua	0	334×10^3	80	100	2256×10^3	540
Cinc	420	100×10^3	24	918	1990×10^3	475

Cuando se estudian los cambios de fase de una sustancia, con frecuencia es útil trazar un gráfico que muestre cómo varía la temperatura de la sustancia a medida que se le aplica energía térmica. Tal tipo de gráfica se muestra en la figura 17.7 para el caso del agua. Si se toma del congelador a −20°C una cierta cantidad de hielo y se calienta, su temperatura se incrementará gradualmente hasta que el hielo empiece a fundirse a 0°C. Por cada grado que se eleva la temperatura, cada gramo de hielo absorberá 0.5 cal de energía calorífica. Durante el proceso de fusión, la temperatura permanecerá constante, y cada gramo de hielo absorberá 80 cal de energía calorífica en la formación de 1 g de agua.

Una vez que se ha fundido todo el hielo, la temperatura empieza a elevarse de nuevo con una rapidez uniforme hasta que el agua empieza a hervir a 100°C. Por cada grado de incremento en la temperatura, cada gramo absorberá 1 cal de energía térmica. Durante el proceso de vaporización, la temperatura permanece constante. Cada gramo de agua absorbe 540 cal de energía térmica en la formación de 1 g de vapor de agua a 100°C. Si el vapor de agua que resulta se almacena y continúa el calentamiento hasta que toda el agua se evapore, la temperatura de nuevo comenzará a elevarse. El calor específico del vapor es 0.48 cal/g · °C.

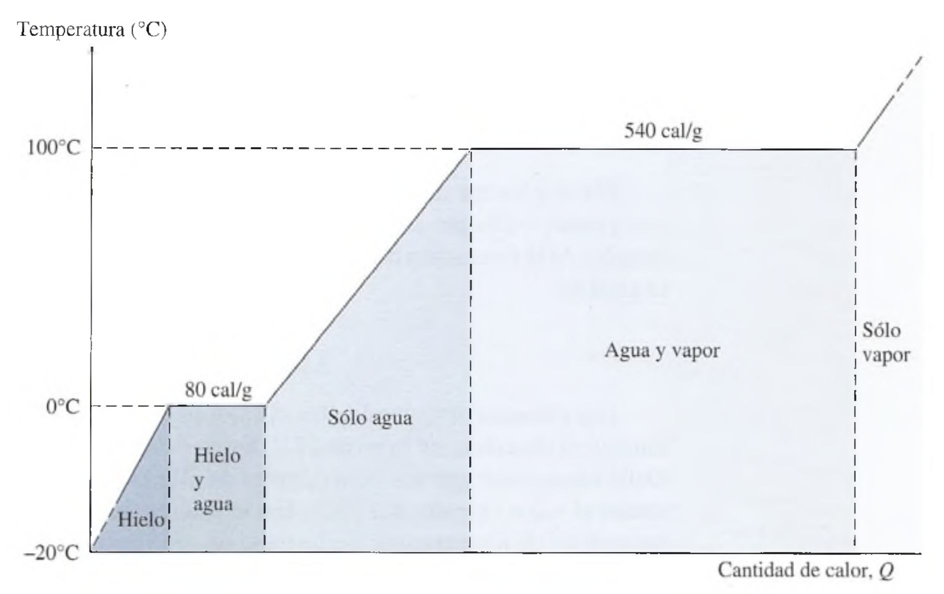


Figura 17.7 Variación de temperatura debida a un cambio de la energía térmica del agua.

Ejemplo 17.4 ¿Qué cantidad de calor se necesita para transformar 20 g de hielo a $-25°C$ en vapor a $120°C$? Use unidades del SI y tome las constantes de las tablas.

Plan: Necesitaremos separar en cinco partes este problema: (1) el calor requerido para llevar el hielo de $-25°C$ a la temperatura de fusión (0°C), (2) el calor requerido para fundir todo este hielo, (3) el calor para llevar el agua resultante de 0°C al punto de evaporación (100°C), (4) el calor para evaporar toda el agua y (5) el calor para aumentar la temperatura del vapor resultante a 120°C. A lo largo de todo el proceso, la masa (20 g) no cambia. El calor total requerido será la suma de estas cantidades. Con excepción de la temperatura, en este ejemplo usaremos las unidades del SI para todas las cantidades.

Solución: La masa se convierte en kilogramos, $m = 0.020$ kg, y las constantes necesarias se toman de las tablas:

$$c_{\text{agua}} = 4186 \text{ J/(kg} \cdot °\text{C)},\ c_{\text{hielo}} = 2090 \text{ J/(kg} \cdot °\text{C)},\ c_{\text{vapor}} = 2000 \text{ J/(kg} \cdot °\text{C)},$$
$$L_f = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg};\ L_v = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

El calor necesario para elevar la temperatura del hielo de $-25°C$ a 0°C es

$$Q_1 = mc_{\text{hielo}}\,\Delta t = (0.020 \text{ kg})[2090 \text{ J/(kg} \cdot °\text{C)}](25°\text{C}) = 1045 \text{ J}$$

El calor requerido para fundir los 20 g de hielo es

$$Q_2 = mL_f = (0.020 \text{ kg})(3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}) = 6680 \text{ J}$$

El calor para elevar la temperatura de 20 g de agua a 100°C es

$$Q_3 = mc_{\text{agua}}\,\Delta t = (0.020 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg} \cdot °\text{C})(100°\text{C} - 0°\text{C}) = 8372 \text{ J}$$

El calor para evaporar los 20 g de agua es

$$Q_4 = mL_v = (0.020 \text{ kg})(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 45{,}200 \text{ J}$$

Finalmente, debemos aumentar la temperatura del vapor a 120°C. Supondremos que el vapor está contenido de alguna manera ya que está en forma de vapor y debe ser posible sobrecalentarlo.

$$Q_5 = mc_{\text{vapor}}\,\Delta t = (0.020 \text{ kg})[2000 \text{ J/(kg} \cdot °\text{C)}](120°\text{C} - 100°\text{C})$$
$$= (0.020 \text{ kg})[2000 \text{ J/(kg} \cdot °\text{C)}](20°\text{C}) = 800 \text{ J}$$

El calor total requerido es la suma de estos cinco procesos:

$$Q_T = \sum Q = 1045 \text{ J} + 6680 \text{ J} + 8372 \text{ J} + 45{,}200 \text{ J} + 800 \text{ J}$$
$$Q_T = 62{,}097 \text{ J} \quad \text{o} \quad Q_T = 62.1 \text{ kJ}$$

Cuando se extrae calor de un gas, su temperatura cae hasta que alcanza la temperatura a la cual hirvió. Si se sigue extrayendo calor, el vapor retorna a la fase líquida. Este proceso se conoce como ***condensación***. Al condensarse, un vapor libera una cantidad de calor equivalente al calor requerido para evaporarlo. Por tanto, el *calor de condensación* es equivalente al calor de vaporización. La diferencia radica únicamente en la dirección del calor transferido.

En forma similar, cuando se extrae calor de un líquido, su temperatura disminuirá hasta que alcance la temperatura a la cual se funde. Si se sigue extrayendo calor, el líquido retorna a su fase sólida. Este proceso se conoce como ***congelación*** o ***solidificación***. El calor de solidificación es exactamente igual al calor de fusión. Por tanto, la única diferencia entre la congelación y la fusión consiste en que el calor se libera o se absorbe.

En las condiciones apropiadas de temperatura y presión, es posible que una sustancia cambie directamente de la fase sólida a la fase gaseosa sin pasar por la fase líquida. Este proceso se conoce como ***sublimación***. El dióxido de carbono sólido (hielo seco), el yodo y el

alcanfor (bolas de naftalina) son ejemplos de sustancias que se sabe que se subliman a temperaturas normales. La cantidad de calor absorbido por unidad de masa al cambiar de sólido a vapor se llama ***calor de sublimación***.

Antes de abandonar el tema de fusión y vaporización, resulta instructivo ofrecer ejemplos de cómo se miden. En cualquier mezcla, la cantidad de calor absorbido debe ser igual a la cantidad de calor liberado. Este principio se sostiene incluso si ocurre un cambio de fase. El procedimiento se demuestra en los ejemplos 17.5 y 17.6 que se exponen a continuación.

Ejemplo 17.5

Después de agregar 12 g de hielo triturado a −10°C en el vaso de un calorímetro de aluminio que contiene 100 g de agua a 50°C, el sistema se sella y se deja que alcance el equilibrio térmico. ¿Cuál es la temperatura resultante?

Plan: El calor perdido por el calorímetro y el agua debe ser igual al calor ganado por el hielo, incluyendo cualquier cambio de fase que haya ocurrido. Hay tres posibilidades para el equilibrio de temperatura: (1) 0°C con restos de agua y hielo, (2) arriba de 0°C, caso en el cual todo el hielo se funde, y (3) debajo de 0°C, si ninguno de los hielos se funde. Si se conocen la temperatura inicial y la cantidad de agua parece más probable que todo el hielo se funda y que la temperatura de equilibrio t_e esté por encima de 0°C. Daremos por cierta esta suposición y el resultado nos indicará si estamos en lo correcto.

Solución: Calculamos la pérdida de calor total y la ganancia de calor total en forma separada con base en nuestras suposiciones. Para simplificar los cálculos, algunas veces se omitirán las unidades.

$$\begin{aligned}
\textit{Calor perdido} &= \textit{calor perdido por el calorímetro} + \textit{calor perdido por el agua} \\
&= m_c c_c(50°\text{C} - t_e) + m_{\text{agua}}\, c_{\text{agua}}(50°\text{C} - t_e) \\
&= (50\text{ g})[0.22\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)}](50°\text{C} - t_e) + (100\text{ g})[1\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)}](50°\text{C} - t_e) \\
&= 550 - 11t_e + 5000 - 100t_e \\
&= 5550 - 111t_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{Calor ganado} &= Q\textit{ por el hielo} + Q\textit{ por la fusión} + Q\textit{ para alcanzar } t_e \\
&= m_{\text{hielo}} c_{\text{hielo}}(10°\text{C}) + m_{\text{hielo}} L_f + m_{\text{hielo}} c_{\text{agua}}(t_e - 0°\text{C}) \\
&= (12\text{ g})[0.48\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)}](10°\text{C}) + (12\text{ g})(80\text{ cal/g}) \\
&\quad + (12\text{ g})[1\text{ cal/(g}\cdot°\text{C)}]\,t_e - 0 \\
&= 1018 - 12t_e
\end{aligned}$$

Ahora bien, establecemos la pérdida de calor total igual a la ganancia de calor total y resolvemos para hallar la temperatura final.

$$\begin{aligned}
5550 - 111t_e &= 1018 + 12t_e \\
123t_e &= 4532 \\
t_e &= 36.8°\text{C}
\end{aligned}$$

Ejemplo 17.6

Si 10 g de vapor a 100°C se introducen en una mezcla de 200 g de agua y 120 g de hielo, determine la temperatura final del sistema y la composición de la mezcla.

Plan: El hecho de que la cantidad de vapor sea tan pequeña, en comparación con el hielo y el agua, nos lleva a preguntarnos si será suficiente el calor que desprende el vapor para fundir todo el hielo. Para resolver esta duda, calcularemos el calor necesario para fundir

todo el hielo. Y luego lo compararemos con el calor máximo que podría desprender el vapor (tomando el agua condensada a menos de 0°C). Después podremos aplicar las leyes de la conservación para calcular la temperatura final y la composición de la mezcla. Cualquier mezcla de agua y hielo en equilibrio debe tener una temperatura de 0°C.

Solución: La cantidad de calor requerida para fundir todo el hielo es

$$Q_1 = m_{\text{hielo}} L_f = (120 \text{ g})(80 \text{ cal/g}) = 9600 \text{ cal}$$

El calor máximo que esperamos que desprenda el vapor es

$$\begin{aligned} Q_2 &= m_{\text{vapor}} L_v + m_{\text{vapor}} c_{\text{agua}}(100°\text{C} - 0°\text{C}) \\ &= (10)(540) + (10)(1)(100) = 6400 \text{ cal} \end{aligned}$$

Puesto que se necesitaban 9600 cal para fundir todo el hielo y sólo 6400 cal pueden ser proporcionadas por el vapor, la mezcla final debe consistir en hielo y agua a 0°C.

Para determinar la composición final de la mezcla, observe que serían necesarias 3200 calorías adicionales para fundir el hielo restante. Por consiguiente,

$$m_{\text{hielo}} L_f = 3200 \text{ cal}$$

$$m_{\text{hielo}} = \frac{3200 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}} = 40 \text{ g}$$

Por tanto, debe haber 40 g de hielo en la mezcla final. La cantidad de agua restante es

$$\begin{aligned} \textit{Agua restante} &= \textit{agua inicial} + \textit{hielo fundido} + \textit{vapor condensado} \\ &= 200 \text{ g} + 80 \text{ g} + 10 \text{ g} = 290 \text{ g} \end{aligned}$$

La composición final consiste en una mezcla de 40 g de hielo en 290 g de agua a 0°C.

Suponga en el ejemplo 17.6 que todo el hielo se hubiera fundido y trate de calcular t_e como en el ejemplo 17.5. En este caso, hubiéramos obtenido un valor para la temperatura de equilibrio por debajo del punto de congelación (0°C). Resulta evidente que este tipo de respuesta sólo se puede obtener si se parte de una suposición falsa.

Otro procedimiento para resolver el ejemplo 17.6 sería calcular directamente el número de gramos de hielo que deben fundirse para equilibrar las 6400 cal de energía calorífica liberadas por el vapor. Queda como ejercicio para usted demostrar que en ambos casos se obtienen los mismos resultados.

Estrategia para resolver problemas

Cantidad de calor y calorimetría

1. Lea el problema cuidadosamente, luego trace un esquema, marcando en él la información proporcionada y establezca qué es lo que va a calcular. Tenga cuidado de incluir las unidades para todas las cantidades físicas.
2. Si resulta una pérdida o ganancia de calor en un cambio de temperatura, necesitará decidir qué unidades son las apropiadas para el calor específico. La necesidad de usar unidades congruentes se demuestra aquí:

$$Q = mc\,\Delta t \qquad J = (\text{kg})\left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot °\text{C}}\right)(°\text{C})$$

Es conveniente escribir las unidades del calor específico al hacer sustituciones, de modo que la selección de las unidades correctas para otras cantidades resulte obvia.

3. Si hay un cambio de fase, puede necesitar el calor latente de fusión o de vaporización. Nuevamente en este caso debemos ser cuidadosos y usar aquellas unidades que sean consistentes con *joules por kilogramo, calorías por gramo,* o *Btu por libra*. La temperatura permanece constante durante un cambio de fase.
4. La conservación de la energía exige que la pérdida total de calor sea igual a la ganancia total de calor. Observe que una disminución de temperatura, la condensación o la congelación del líquido indican una *pérdida* de

calor. Una elevación en la temperatura, fusión o vaporización ocurre cuando hay una *ganancia* de calor. Podemos sumar los valores absolutos de las pérdidas del lado izquierdo y establecer la igualdad con las ganancias totales del lado derecho. Como ejemplo, considere la masa m_{vapor} del vapor a 100°C mezclado con una masa m_{hielo} del hielo a 0°C. El resultado es agua a la temperatura de equilibrio t_e.

$$m_{\text{vapor}}L_v + m_{\text{vapor}}c_{\text{agua}}(100 - t_e) =$$
$$m_{\text{hielo}}L_f + m_{\text{hielo}}c_{\text{agua}}(t_e - 0)$$

Observe que las diferencias de temperatura se indican como *alta menos baja* en cada caso para obtener los valores *absolutos* ganados o perdidos.

17.6 Calor de combustión

Siempre que una sustancia se quema, libera una cantidad definida de calor. La cantidad de calor por unidad de masa, o por unidad de volumen, cuando la sustancia se quema por completo se llama el ***calor de combustión***. La unidades de uso común son el Btu por libra masa, el Btu por pie cúbico, las calorías por gramo, y las kilocalorías por metro cúbico. Por ejemplo, el calor de combustión del carbón, es aproximadamente de 13 000 Btu/lb_m. Esto significa que cada libra de carbón cuando se quema por completo, libera 13 000 Btu de energía calorífica.

Resumen y repaso

En este capítulo hemos estudiado la cantidad de calor como una cantidad medible que se basa en un cambio patrón. La unidad térmica británica y la caloría son medidas del calor requerido para elevar la temperatura de una unidad de masa de agua en un grado. Al aplicar esas unidades comunes a experimentos con gran variedad de materiales, hemos aprendido a predecir las pérdidas o las ganancias de calor en forma constructiva. Los conceptos esenciales presentados en este capítulo son los siguientes:

- La *unidad térmica británica* (Btu) es el calor necesario para cambiar la temperatura de una libra-masa de agua en un grado Fahrenheit.
- La *caloría* es el calor necesario para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celsius.
- Varios factores de conversión pueden ser útiles para resolver problemas relacionados con la energía térmica:

$$1 \text{ Btu} = 252 \text{ cal} = 0.252 \text{ kcal} \qquad 1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

$$1 \text{ Btu} = 778 \text{ ft} \cdot \text{lb} \qquad 1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J}$$

- La *capacidad calorífica específica c* se usa para determinar la cantidad de calor Q absorbida o liberada por unidad de masa m cuando la temperatura cambia en un intervalo Δt.

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta t} \qquad Q = mc\,\Delta t \qquad \textit{Calor específico}$$

- Para la conservación de la energía térmica es necesario que, en cualquier intercambio de energía térmica, el calor perdido sea igual al calor ganado.

$$\textit{Calor perdido} = \textit{calor ganado}$$

$$\sum (mc\,\Delta t)\text{perdido} = \sum (mc\,\Delta t)\text{ganado}$$

Por ejemplo, suponga que el cuerpo 1 transfiere calor a los cuerpos 2 y 3 mientras el sistema alcanza una temperatura de equilibrio te:

$$m_1c_1(t_1 - t_e) = m_2c_2(t_e - t_2) + m_3c_3(t_e - t_3)$$

- El *calor latente de fusión* L_f y el *calor latente de vaporización* L_v son las pérdidas o ganancias de calor por unidad de masa m durante un cambio de fase. No hay cambio alguno de temperatura.

$$L_f = \frac{Q}{m} \qquad Q = mL_f \qquad \textit{Calor latente de fusión}$$

$$L_v = \frac{Q}{m} \qquad Q = mL_v \qquad \textit{Calor latente de vaporización}$$

Si se presenta un cambio de fase, las relaciones anteriores deben sumarse a la ecuación calorimétrica apropiada.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

17.1. Comente la teoría del calor basada en el calórico. ¿En qué formas permite esa idea explicar con éxito los fenómenos térmicos? ¿En qué aspectos falla?

17.2. Tenemos bloques de cinco metales diferentes —aluminio, cobre, cinc, hierro y plomo— construidos con la misma masa y la misma área en corte transversal. Cada bloque se calienta hasta una temperatura de 100°C y se coloca sobre un bloque de hielo. ¿Cuál de ellos derretirá el hielo a la mayor profundidad? Haga una lista de los cuatro metales restantes en orden descendente, según su profundidad de penetración.

17.3. En un día de invierno se ha observado que la nieve acumulada sobre la acera de concreto se funde antes que la de la carretera. ¿Cuál de esas áreas tiene capacidad calorífica más alta?

17.4. Si dos objetos tienen la misma capacidad calorífica, ¿deben estar hechos forzosamente del mismo material? ¿Qué podemos decir de ellos si ambos tienen el mismo calor específico?

17.5. ¿Por qué se considera que la temperatura es una *cantidad fundamental*?

17.6. En la figura 17.8 se presenta una analogía mecánica del concepto de equilibrio térmico. Cuando se abra la válvula, el agua fluirá hasta que tenga el mismo nivel en cada tubo. ¿Cuáles son las analogías con la temperatura y la energía térmica?

17.7. En una mezcla de hielo y agua, la temperatura tanto del hielo como del agua es de 0°C. ¿Por qué entonces el hielo parece más frío al tacto?

17.8. ¿Por qué el vapor a 100°C produce una quemadura mucho más intensa que el agua a 100°C?

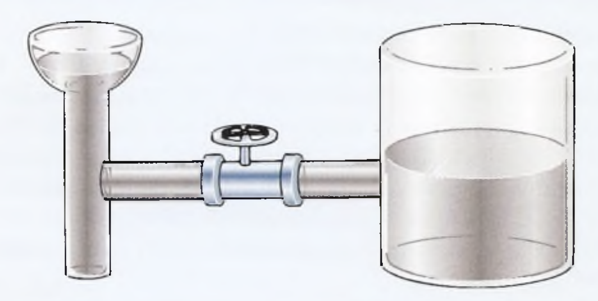


Figura 17.8 Analogía mecánica de cómo se igualan las temperaturas.

17.9. La temperatura de 1 g de hierro se eleva en 1°C. ¿Cuánto calor más se requeriría para elevar la temperatura de 1 lb de hierro en 1°F?

Problemas

Nota: Tome como referencia las tablas 17.1 y 17.2 para los valores aceptados del calor específico, el calor de vaporización y el calor de fusión de las sustancias mencionadas en los siguientes problemas.

Secciones 17.2 y 17.3 Cantidad de calor y capacidad calorífica específica

17.1. ¿Qué cantidad de calor se requiere para cambiar la temperatura de 200 g de plomo, de 20 a 100°C? Resp. 496 cal

17.2. Cierto proceso requiere 500 J de calor. Exprese esta energía en calorías y en Btu.

17.3. Un horno aplica 400 kJ de calor a 4 kg de una sustancia, causando que su temperatura se eleve en 80°C. ¿Cuál es el calor específico? Resp. 1250 J/(kg°C)

17.4. ¿Qué cantidad de calor se liberará cuando 40 lb de cobre se enfrían de 78 a 32°F?

17.5. Un automóvil de 900 kg que viaja con una velocidad inicial de 20 m/s se detiene. El trabajo requerido para que se detenga el carro es igual a su cambio en la energía cinética. Si todo este trabajo se convirtiera en calor, ¿qué cantidad equivalente se pierde en kilocalorías? Resp. 43 kcal

17.6. Un aparato de aire acondicionado tiene un régimen nominal de 15 000 Btu/h. Exprese esta potencia en kilowatts y en calorías por segundo.

17.7. En una taza de cerámica de 0.5 kg se sirve café caliente con un calor específico de 4186 J/(kg°C). ¿Cuánto calor absorbe la taza si la temperatura se eleva de 20 a 80°C? Resp. 125.6 kJ

17.8. Un motor eléctrico de 2 kW tiene 80% de eficiencia. ¿Cuánto calor se pierde en 1 h?

17.9. Un casquillo de cobre de 8 kg tiene que calentarse de 25 a 140°C con el fin de expandirlo para que se ajuste sobre un eje. ¿Cuánto calor se requirió? Resp. 358.8 kJ

17.10. ¿Cuántos gramos de hierro a 20°C será necesario calentar a 100°C para que liberen 1800 cal de calor durante el proceso de volver a su temperatura original?

17.11. Un trozo de 4 kg de metal (c = 320 J/(kg°C)) se encuentra inicialmente a 300°C. ¿Cuál será su temperatura final si pierde 50 kJ de energía calorífica? Resp. 261°C

17.12. En un tratamiento a base de calor, una parte de cobre caliente se enfría con agua, por lo cual pasa de 400 a 30°C. ¿Cuál era la masa de dicha parte si perdió 80 kcal de calor?

Sección 17.4 La medición del calor

17.13. Un tubo de cobre de 400 g que se encuentra inicialmente a 200°C se sumerge en un recipiente que contiene 3 kg de agua a 20°C. Pasando por alto otros intercambios de calor, ¿cuál será la temperatura de equilibrio de la mezcla? Resp. 22.2°C

17.14. ¿Qué cantidad de aluminio (c = 0.22 cal/(g°C)) a 20°C tendrá que añadirse a 400 g de agua caliente a 80°C para que la temperatura de equilibrio sea de 30°C?

17.15. Un trozo de metal de 450 g se calienta a 100°C y luego se deja caer en la taza de un calorímetro de aluminio de 50 g que contiene 100 g de agua. La temperatura inicial de la taza y del agua es de 10°C y la temperatura de equilibrio es de 21.1°C. Calcule el calor específico del metal. Resp. 0.0347 cal/g°C

17.16. ¿Qué masa de agua que inicialmente estaba a 20°C se debió mezclar con 2 kg de hierro para hacer que la temperatura del hierro bajara de 250°C a una temperatura de equilibrio de 25°C?

17.17. Un trabajador saca un trozo de hierro de 2 kg de un horno y lo coloca en un recipiente de aluminio de 1 kg, que se ha llenado parcialmente con 2 kg de agua. Si la temperatura del agua sube de 21 a 50°C, ¿cuál era la temperatura inicial del hierro? Resp. 336.67°C

17.18. ¿Cuánto hierro a 212°F se deberá mezclar con 10 lb de agua a 68°F con el fin de tener una temperatura de equilibrio de 100°F?

17.19. Un bloque de cobre de 1.3 kg se calienta a 200°C y luego se introduce en un recipiente aislado que se ha llenado parcialmente con 2 kg de agua a 20°C. ¿Cuál es la temperatura de equilibrio? Resp. 30.3°C

17.20. Cincuenta gramos de perdigones de cobre se calientan a 200°C y luego se introducen en una taza de aluminio de 50 g que contiene 160 g de agua. La temperatura inicial de la taza y el agua es de 20°C. ¿Cuál es la temperatura de equilibrio?

Sección 17.5 Cambio de fase

17.21. En una fundición hay un horno eléctrico con capacidad para fundir totalmente 540 kg de cobre. Si la temperatura inicial del cobre era de 20°C, ¿cuánto calor en total se necesita para fundir el cobre? Resp. 2.96×10^8 J

17.22. ¿Cuánto calor se requiere para fundir totalmente 20 g de plata a su temperatura de fusión?

17.23. ¿Qué cantidad de calor se necesita para convertir 2 kg de hielo a −25°C en vapor a 100°C? Resp. 6.13×10^6 J

17.24. Si 7.57×10^6 J de calor se absorben en el proceso de fundir por completo un trozo de 1.60 kg de un metal desconocido, ¿cuál es el calor latente de fusión y de qué metal se trata?

17.25. ¿Cuántos gramos de vapor a 100°C es necesario mezclar con 200 g de agua a 20°C con el fin de que la temperatura de equilibrio sea de 50°C? Resp. 10.17 g

17.26. ¿Cuánto calor se libera en total cuando 0.500 lb de vapor a 212°F se convierte en hielo a 10°F?

17.27. Cien gramos de hielo a 0°C se mezclan con 600 g de agua a 25°C. ¿Cuál será la temperatura de equilibrio para la mezcla? Resp. 10.0°C

17.28. Cierta calidad de gasolina tiene un calor de combustión de 4.6×10^7 J/kg. Suponiendo una eficiencia de 100%, ¿cuánta gasolina habrá que quemar para fundir totalmente 2 kg de cobre a su temperatura de fusión?

Problemas adicionales

17.29. Si se aplican 1600 J de calor a una esfera de bronce, su temperatura sube de 20 a 70°C. ¿Cuál es la masa de esa esfera? Resp. 82.1 g

17.30. ¿Cuánto calor absorbe un congelador eléctrico cuando hace que la temperatura de 2 kg de agua descienda de 80 a 20°C?

17.31. Un elemento calefactor proporciona una potencia de salida de 12 kW. ¿Cuánto tiempo se necesita para fundir por completo un bloque de plata de 2 kg? Supongamos que no hay ningún desperdicio de potencia. Resp. 14.7 s

17.32. ¿Cuánto hielo a −10°C se debe agregar a 200 g de agua a 50°C para que se produzca la temperatura de equilibrio a 40°C?

17.33. Suponga que 5 g de vapor a 100°C se mezclan con 20 g de hielo a 0°C. ¿Cuál será la temperatura de equilibrio? Resp. 64.0°C

17.34. ¿Cuánto calor desarrollan los frenos de un camión de 4000 lb para frenar al vehículo a partir de una rapidez de 60 mi/h?

17.35. Doscientos gramos de cobre a 300°C se introducen en una taza de calorímetro de cobre de 310 g parcialmente lleno con 300 g de agua. Si la temperatura inicial de la taza y el agua era de 15°C, ¿cuál será la temperatura de equilibrio? Resp. 30.3°C

17.36. ¿Cuántas libras de carbón será necesario quemar para derretir totalmente 50 lb de hielo en un calefactor cuya eficiencia es del 60%?

17.37. Si 80 g de plomo derretido a 327.3°C se vierten en un molde de hierro de 260 g cuya temperatura inicial es de 20°C, ¿cuál será la temperatura de equilibrio si las demás pérdidas son insignificantes? Resp. 58.9°C

17.38. ¿Qué temperatura de equilibrio se alcanza cuando 2 lb de hielo a 0°F se colocan en una taza de aluminio de 3 lb que contiene 7.5 lb de agua? La temperatura de la taza y la del agua son inicialmente de 200°F.

17.39. Un colector solar tiene 5 m^2 de área y la potencia de la energía solar llega hasta él a razón de 550 W/m^2. Esta potencia se usa para elevar la temperatura de 200 g de agua de 20 a 50°C. ¿Cuánto tiempo requerirá este proceso? Resp. 9.13 s

17.40. Si 10 g de leche a 12°C se agregan a 180 g de café a 95°C, ¿cuál será la temperatura de equilibrio? Su-

ponga que la leche y el café consisten esencialmente en agua.

***17.41.** ¿Cuántos gramos de vapor a 100°C es necesario añadir a 30 g de hielo a 0°C para obtener una temperatura de equilibrio de 40°C? Resp. 6.00 g

***17.42.** Una bala de plomo de 5 g que se mueve a 200 m/s se incrusta en un trozo de madera. La mitad de su energía inicial es absorbida por la bala. ¿Cuál es el incremento registrado en la temperatura de la bala?

***17.43.** Si 4 g de vapor a 100°C se mezclan con 20 g de hielo a −5°C, calcule la temperatura final de la mezcla. Resp. 37.9°C

Preguntas para la reflexión crítica

17.44. Un recipiente aislado de gran tamaño contiene 120 g de café a 85°C. ¿Cuánto hielo a 0°C habrá que añadir para que el café se enfríe hasta 50°C? Ahora bien, ¿cuánto café a 100°C habrá que agregar para que el contenido vuelva a estar a 85°C? ¿Cuántos gramos habrá al final en el recipiente?
Resp. 32.3 g, 355 g, 508 g

17.45. Se han fabricado cuatro bloques de 200 g de cobre, aluminio, plata y plomo respectivamente, de modo que todos tengan la misma masa y la misma área en su base (aunque sus alturas sean diferentes). La temperatura de cada bloque se eleva de 20 a 100°C aplicando calor a razón de 200 J/s. Calcule cuánto tiempo necesita cada bloque para llegar a 100°C.

17.46. Cada uno de los bloques de la pregunta 17.45 se coloca sobre un gran trozo de hielo. Calcule cuánto hielo se derrite a causa de cada bloque, sabiendo que todos los bloques llegan al equilibrio a 0°C. ¿Cuál de los bloques se hunde más profundamente y cuál se hunde menos?
Resp. Pb = 7.78 g, Ag = 13.8 g, Cu = 23.4 g, Al = 55.1 g, Al, Pb

17.47. En un experimento para determinar el calor latente de vaporización en el caso del agua, un estudiante ha comprobado que la masa de la taza de un calorímetro de aluminio es de 50 g. Después de agregar cierta cantidad de agua, la masa combinada de la taza y el agua es de 120 g. La temperatura inicial de la taza y el agua es de 18°C. Cierta cantidad de vapor a 100°C se introduce en el calorímetro y se observa que el sistema alcanza el equilibrio a 47.4°C. La masa total de la mezcla final es de 124 g. ¿Qué valor obtendrá el estudiante para el calor de vaporización?

***17.48.** Masas iguales de hielo a 0°C, agua a 50°C y vapor a 100°C se mezclan y se deja que alcancen el equilibrio. ¿Se condensará el vapor? ¿Cuál será la temperatura de la mezcla final? ¿Qué porcentaje de la mezcla final será de agua y qué porcentaje será de vapor?
Resp. no, 100°C, 19.1% de vapor y 80.9% de agua

***17.49.** Si 100 g de agua a 20°C se mezclan con 100 g de hielo a 0°C y 4 g de vapor a 100°C, halle la temperatura de equilibrio y la composición de la mezcla.

***17.50.** Diez gramos de hielo a −5°C se mezclan con 6 g de vapor a 100°C. Calcule la temperatura final y la composición de la mezcla.
Resp. 100°C, 13.4 g de agua, 2.62 g de vapor

18 Transferencia de calor

La transferencia de calor se demuestra con un fuelle de vidrio. Vidrio fundido se mantiene dentro de un horno sujeto de un extremo de una barra larga. El calor que se siente en las manos que sujetan el otro extremo se debe a la conducción por la barra; el calor que se siente en el rostro se debe a la radiación. Si fuera posible poner una mano sobre el vidrio fundido, el calor sentido se debería a las corrientes de radiación y de convección. En el presente capítulo se explica cada una de estas formas de transferencia de calor. (*Fotografía de Paul E. Tippens.*)



Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará mediante definiciones y ejemplos su comprensión acerca de la *conductividad térmica*, la *convección* y la *radiación*.
2. Resolverá problemas sobre *conductividad térmica* que incluyan parámetros tales como cantidad de calor (Q), área superficial (A), temperatura de la superficie (t), tiempo (τ) y espesor de material (L).
3. Resolverá problemas que supongan la transferencia de calor por convección y comentará el significado del *coeficiente de convección*.
4. Definirá la *razón de radiación* y la *emisividad* y aplicará estos conceptos para resolver problemas que comporten la radiación térmica.

Nos hemos referido al calor como una forma de energía en tránsito. Siempre que hay una diferencia de temperatura entre dos cuerpos o entre dos partes de un mismo cuerpo se dice que el calor *fluye* en la dirección de mayor a menor temperatura. Hay tres métodos principales por los que ocurre tal intercambio de calor: *conducción, convección* y *radiación*. En la figura 18.1 se muestran ejemplos de los tres.

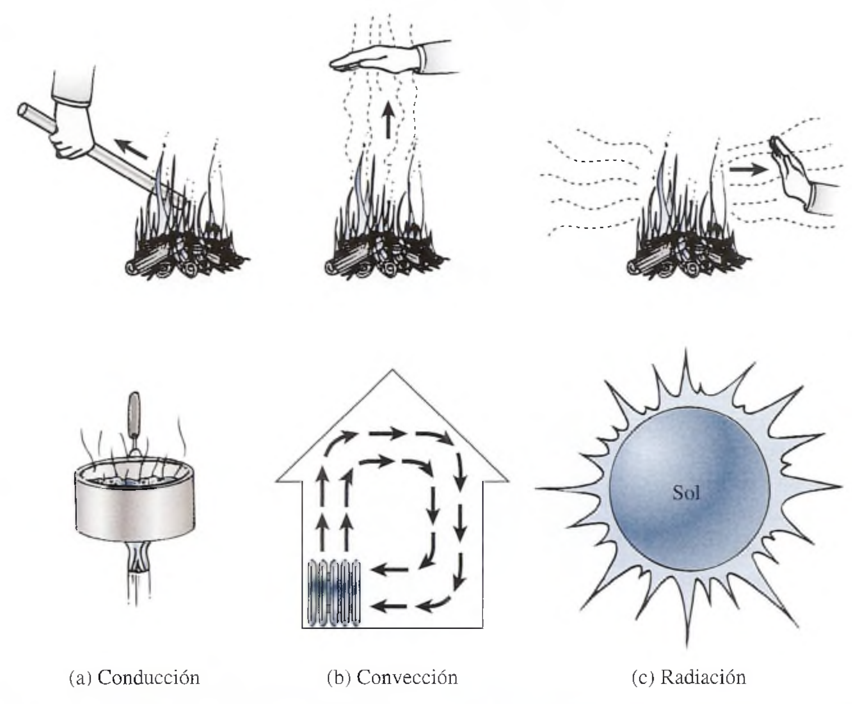


Figura 18.1 Los tres métodos de transferencia de calor: (a) conducción, (b) convección y (d) radiación.

18.1 Métodos de transferencia de calor

La mayor parte de nuestra explicación ha supuesto la transferencia de calor por ***conducción:*** mediante colisiones moleculares entre moléculas vecinas. Por ejemplo, si sostenemos con una mano un extremo de una barra de hierro y metemos el otro en el fuego, al cabo de cierto tiempo el calor llegará hasta nuestra mano a causa de un proceso de conducción. El incremento de la actividad molecular en el extremo calentado va pasando de una a otra molécula hasta que llega a nuestra mano. El proceso continúa mientras haya una diferencia de temperatura a lo largo de la barra.

> La conducción es el proceso por el que se transfiere energía térmica mediante colisiones de moléculas adyacentes a lo largo de un medio material. El medio en sí no se mueve.

FÍSICA HOY

Las aletas disipadoras de calor son barras de metal con forma ondulada que van incorporadas a determinados componentes, como las fuentes de energía que son propensas al sobrecalentamiento. La forma de estas aletas aumenta el área superficial por volumen del metal, lo cual incrementa la posibilidad de que el calor sea transferido del metal al aire circundante.

La aplicación más frecuente del principio de conducción probablemente es la de cocinar.

Por otra parte, si colocamos la mano por encima del fuego, como se muestra en la figura 18.1b, podemos sentir la transferencia de calor al elevarse el aire caliente. Este proceso, llamado ***convección***, difiere del de conducción porque el medio material sí se mueve. El calor se transfiere mediante el movimiento de masas, en vez de ir pasando a través de las moléculas vecinas.

> La convección es el proceso por el que se transfiere calor por medio del movimiento real de la masa de un fluido.

Las corrientes de convección constituyen la base de los sistemas para calentar y enfriar la mayoría de las casas.

Cuando colocamos nuestra mano en la proximidad del fuego, la principal fuente de calor es la radiación térmica. La radiación implica la emisión o absorción de ondas electromagnéticas que se originan en el nivel atómico. Estas ondas viajan a la velocidad de la luz (3×10^8 m/s) y no requieren la presencia de ningún medio material para propagarse.

> La radiación es el proceso por el que el calor se transfiere mediante ondas electromagnéticas.

La fuente más evidente de energía radiante es nuestro propio Sol. Ni la conducción ni la convección pueden intervenir en el proceso de transferencia que hace llegar su energía térmica, a través del espacio, hasta la Tierra. La enorme cantidad de energía térmica que recibe nuestro planeta se transfiere por radiación electromagnética. Sin embargo, cuando entra en juego un medio material, la transferencia de calor que se puede atribuir a la radiación generalmente es pequeña, en comparación con la cantidad que se transfiere por conducción y convección.

Por desgracia, hay gran número de factores que afectan la transferencia de energía térmica por los tres métodos. La tarea de calcular la cantidad de energía térmica transferida en cierto proceso es complicada. Las relaciones que se analizarán en las secciones ulteriores se basan en observaciones empíricas y se consideran condiciones ideales. El grado en que sea posible encontrar esas condiciones determina, en general, la exactitud de nuestras predicciones.

18.2 Conducción

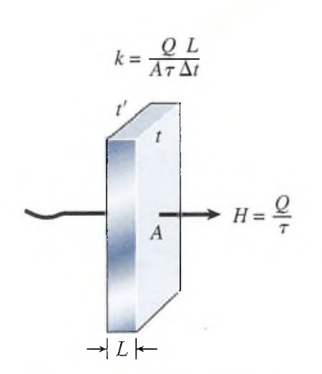


Figura 18.2 Medición de la conductividad térmica.

FÍSICA HOY

Como el aire es mucho mejor aislador que el metal, algunas bombas caloríficas de alta tecnología conducen el calor a través de metal para extraerlo de la parte sobrecalentada hacia un área más fría.

Cuando dos partes de un material se mantienen a temperaturas diferentes, la energía se transfiere por colisiones moleculares de la más alta a la más baja temperatura. Este proceso de conducción es favorecido también por el movimiento de electrones libres en el interior de la sustancia, los cuales se han disociado de sus átomos de origen y tienen la libertad de moverse de uno a otro átomo cuando son estimulados ya sea térmica o eléctricamente. La mayoría de los metales son eficientes conductores del calor porque tienen cierto número de electrones libres que pueden distribuir calor, además del que se propaga por la agitación molecular. En general, un buen conductor de la electricidad también lo es del calor.

La ley fundamental de la conducción térmica es una generalización de resultados experimentales relacionados con el flujo de calor a través de un material en forma de placa. Consideremos la placa de espesor L y área A de la figura 18.2. Una cara se mantiene a una temperatura t y la otra a una temperatura t'. Se mide la cantidad de calor Q que fluye en dirección perpendicular a la cara durante un tiempo τ. Si se repite el experimento para diversos materiales de diferentes espesores y áreas de la cara, estaremos en condiciones de hacer algunas observaciones generales relacionadas con la conducción de calor:

1. La cantidad de calor transferido por unidad de tiempo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura ($\Delta t = t' - t$) entre las dos caras.
2. La cantidad de calor transferido por unidad de tiempo es directamente proporcional al área A de la placa.
3. La cantidad de calor transferido por unidad de tiempo es inversamente proporcional al espesor L de la placa.

Estos resultados se pueden expresar en forma de ecuación introduciendo la constante de proporcionalidad k. Así pues, escribimos

$$H = \frac{Q}{\tau} = kA\frac{\Delta t}{L} \tag{18.1}$$

donde H representa la razón con la que se transfiere el calor. Aun cuando la ecuación se estableció para un material en forma de placa, también se cumple para una barra de sección transversal A y longitud L.

La constante de proporcionalidad k es una propiedad de cada material que se conoce como ***conductividad térmica***. A partir de la ecuación anterior, se puede observar que las sustancias con alta conductividad térmica son buenas conductoras del calor, mientras que las sustancias con baja conductividad son conductoras pobres o *aislantes*.

La conductividad térmica de una sustancia es una medida de su capacidad para conducir el calor y se define por medio de la relación:

$$k = \frac{QL}{\tau A\,\Delta t} \tag{18.2}$$

El valor numérico de la conductividad térmica depende de las unidades elegidas para calor, espesor, área, tiempo y temperatura. Sustituyendo con las unidades del SI para cada una de estas cantidades obtenemos las unidades aceptadas siguientes:

$$\text{Unidades del SI: J/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C)} \qquad \text{o bien} \qquad \text{W/(m} \cdot \text{K)}$$

Como recordará, el joule por segundo (J/s) es la potencia en watts (W), y los intervalos de temperatura kelvin y Celsius son iguales.

Por desgracia, hoy en día las unidades SI de la conductividad se usan poco en la industria; la elección de las unidades empleadas se basa más en el criterio de la comodidad de la medición. Por ejemplo, en el SUEU, el calor se mide en Btu, el espesor en pulgadas, el área en pies cuadrados, el tiempo en horas y el intervalo de temperatura en grados Fahrenheit. En consecuencia, las unidades de la conductividad térmica a partir de la ecuación (18.2) son

$$\text{SUEU: } k = \text{Btu} \cdot \text{in/(ft}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{°F)}$$

En el sistema métrico, en el caso de la transferencia de calor se emplean con más frecuencia las calorías que el joule; por tanto, las unidades siguientes se usan a menudo:

$$\text{Unidades métricas: } k = \text{kcal/m} \cdot \text{s} \cdot \text{°C}$$

Los factores de conversión siguientes le serán útiles:

$$1 \text{ kcal/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C)} = 4186 \text{ W/(m} \cdot \text{K}$$

$$1 \text{ Btu} \cdot \text{in/(ft}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{°F)} = 3.445 \times 10^{-5} \text{ kcal/(m} \cdot \text{s} \cdot \text{°C)}$$

Las conductividades térmicas de diversos materiales se muestran en la tabla 18.1.

Tabla 18.1

Conductividad térmica y valores *R*

	Conductividades térmicas, *k*			Valores *R*
Sustancia	**W/(m · K)**	**kcal/(m · s · °C)**	**Btu · in/(ft² · h · °F)**	**ft² · h · °F/Btu**
Aluminio	205	5.0×10^{-2}	1451	0.00069
Latón	109	2.6×10^{-2}	750	0.0013
Cobre	385	9.2×10^{-2}	2660	0.00038
Plata	406	9.7×10^{-2}	2870	0.00035
Acero	50.2	1.2×10^{-2}	320	0.0031
Ladrillo	0.7	1.7×10^{-4}	5.0	0.20
Concreto	0.8	1.9×10^{-4}	5.6	0.18
Corcho	0.04	1.0×10^{-5}	0.3	3.3
Cartón de yeso	0.16	3.8×10^{-5}	1.1	0.9
Fibra de vidrio	0.04	1.0×10^{-5}	0.3	3.3
Vidrio	0.8	1.9×10^{-4}	5.6	0.18
Poliuretano	0.024	5.7×10^{-6}	0.17	5.9
Forro de madera	0.55	1.3×10^{-5}	0.38	2.64
Aire	0.024	5.7×10^{-6}	0.17	5.9
Agua	0.6	1.4×10^{-4}	4.2	0.24

*Los valores *R* se basan en un espesor de 1 in.

Ejemplo 18.1

La pared exterior de un horno de ladrillos tiene un espesor de 6 cm. La superficie interior se encuentra a 150°C y la exterior a 30°C. ¿Cuánto calor se pierde a través de un área de 1 m² durante 1 h?

Plan: La razón de flujo de calor está dada por la ecuación 18.1. La elección de las unidades para esa cantidad queda determinada por la elección que se haga de la conductividad con base en la tabla 18.1. Usaremos unidades del SI, de modo que para el ladrillo, $k = 0.7$

W/m · K. Luego, la longitud ha de estar en m, el área en m², el tiempo en s y la temperatura en K, así que el calor se expresará en joules (J).

Dados: $A = 1\ \text{m}^2$, $L = 0.060\ \text{m}$, $\tau = 1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$, $\Delta t = (150°\text{C} - 30°\text{C})$
$= 120°\text{C} = 120\ \text{K}$

Solución: despejando Q de la ecuación (18.1) obtenemos

$$Q = kA\tau \frac{\Delta t}{L}$$

$$Q = \frac{[0.7\ \text{W/(mK)}](1\ \text{m}^2)(3600\ \text{s})(120\ \text{K})}{0.060\ \text{m}} = 5.04 \times 10^6\ \text{J}$$

Por tanto, 5.04 MJ de calor fluye cada hora del interior de la pared de ladrillos al exterior.

Siempre es conveniente indicar cuáles son las unidades que corresponden a cada cantidad durante toda la resolución de un problema. Esta práctica le evitará muchos errores innecesarios. Por ejemplo, a veces es fácil olvidar que, en las unidades del SUEU, el espesor debe expresarse en *pulgadas* y el área en *pies cuadrados*. Si durante la sustitución las unidades de la conductividad térmica se indican junto con su respectivo valor numérico, no se cometerá ese tipo de errores.

Cuando se conectan dos materiales de diferente conductividad, la razón a la que se conduce el calor a través de cada uno de ellos debe ser constante. Si no hay fuentes o sumideros de energía térmica dentro de los materiales y los extremos se mantienen a temperatura constante, se logrará finalmente un flujo estacionario, ya que el calor no puede "acumularse" ni "acelerarse" en un punto determinado. La conductividad de los materiales no cambia y el espesor es fijo, lo que significa que los intervalos de temperatura de cada material deben ajustarse para producir el flujo estacionario de calor a lo largo de la estructura compuesta.

Ejemplo 18.2

La pared compuesta de una planta congeladora está formada por una capa de corcho de 10 cm de espesor en el interior y una pared de concreto sólido de 14 cm de espesor en el exterior (figura 18.3). La temperatura de la superficie interior de corcho es de −20°C, y la superficie exterior de concreto se encuentra a 24°C. (a) Determine la temperatura de la interfaz o zona de contacto entre el corcho y el concreto. (b) Calcule la razón de flujo de calor perdido de calor en watts por metro cuadrado.

Plan: En el caso de un flujo estacionario, la razón de flujo de calor a través de la cubierta de corcho es igual a la razón de flujo de calor a través del concreto. Como las áreas son las mismas, podemos igualar las razones de flujo de calor por unidad de área (H/A) para la pared de corcho y para la pared de concreto. Con base en esta ecuación podemos determinar

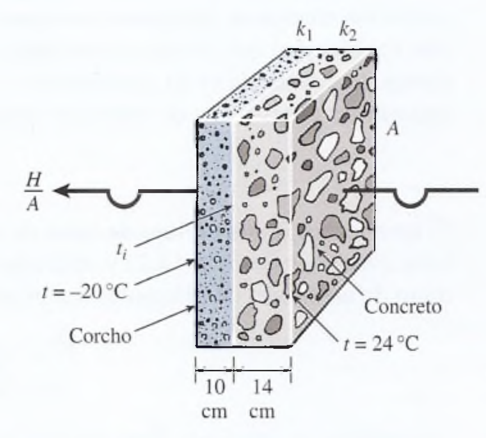


Figura 18.3 Conducción de calor por una pared compuesta.

la temperatura de la zona de contacto y luego usar el resultado para encontrar la razón de flujo de calor por *cualquiera* de las paredes, ya que las razones son iguales.

Solución (a): Se consulta en la tabla 18.1 la conductividad del corcho y la del concreto. Usaremos el subíndice 1 para denotar el corcho y el 2 para el concreto. Con t_i se representará la temperatura en la zona de contacto de ambos materiales. Como H/A es igual en los dos, podemos escribir

$$\frac{H_1}{A_1}(\text{corcho}) = \frac{H_2}{A_2}(\text{concreto})$$

$$\frac{k_1[t_i - (-20°\text{C})]}{0.10 \text{ m}} = \frac{k_2(24°\text{C} - t_i)}{0.14 \text{ m}}$$

$$\frac{[0.04 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})](t_i + 20°\text{C})}{0.10 \text{ m}} = \frac{[0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})](24°\text{C} - t_i)}{0.14 \text{ m}}$$

Ahora, para simplificar multiplicamos cada término por 14 para obtener

$$5.6(t_i + 20\,°\text{C}) = 80(24\,°\text{C} - t_i)$$

$$t_i = 21.1\,°\text{C}$$

Solución (b): El flujo de calor por unidad de área por unidad de tiempo puede encontrarse ahora partiendo de la ecuación (18.1), ya sea que se aplique al corcho o al concreto. Para el concreto tenemos

$$\frac{H_2}{A_2} = \frac{k_2(24°\text{C} - t_i)}{0.14 \text{ m}}$$

$$= \frac{[0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})](24°\text{C} - 21.1°\text{C})}{0.14 \text{ m}}$$

$$= 16.4 \text{ W/m}^2$$

Observe que el intervalo kelvin y el Celsius se cancelan mutuamente, ya que ambos son iguales. La misma razón se calcularía para el corcho. La diferencia de temperatura entre los puntos extremos del corcho es 41.1°C, mientras que la diferencia de temperatura del concreto es de sólo 2.9°C. Los intervalos de temperatura diferentes resultan principalmente de la diferencia en la conductividad térmica de las paredes.

18.3 Aislamiento: el valor *R*

Las pérdidas de calor en los hogares e industrias con frecuencia se deben a las propiedades aislantes de sus diversos muros compuestos. A veces se desea saber, por ejemplo, cuáles serían los efectos de remplazar con material aislante de fibra de vidrio los espacios cerrados (sin ventilación) que se encuentran entre los muros. Para resolver esos casos en varias aplicaciones de ingeniería se ha introducido el concepto de ***resistencia térmica*** R. El valor R de un material de espesor L y de conductividad térmica k se define de este modo:

$$R = \frac{L}{k}$$

Si reconocemos que el flujo de calor de estado estacionario por un muro compuesto es constante (véase el ejemplo 18.2) y aplicamos la ecuación de conductividad térmica a cierto número de espesores de diferentes materiales, se puede demostrar que

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{A\,\Delta t}{\sum_i (L_i/k_i)} = \frac{A\,\Delta t}{\sum_i R_i} \qquad \textbf{(18.3)}$$

La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo (Q/τ) a través de cierto número de espesores de diferentes materiales es igual al producto del área A y la diferencia de temperatura Δt

FÍSICA HOY

La convección forzada es un proceso de convección en el que el movimiento del fluido (o el aire) se mantiene por algo diferente del contenido calorífico del fluido.

dividido entre la suma de los valores R de esos materiales. Los valores R de los materiales de construcción de uso más frecuente se expresan casi siempre en unidades del SUEU, como se muestra en la tabla 18.1. Por ejemplo, el aislante de fibra de vidrio para techos, que tiene 6 in de espesor, tiene un valor R de 18.8 $ft^2 \cdot °F \cdot h/Btu$. Un ladrillo de 4 in tiene un valor R de 4.00 $ft^2 \cdot °F \cdot h/Btu$. Estos materiales, colocados uno al lado del otro, tendrían un valor R total de 22.8 $ft^2 \cdot °F \cdot h/Btu$.

18.4 Convección

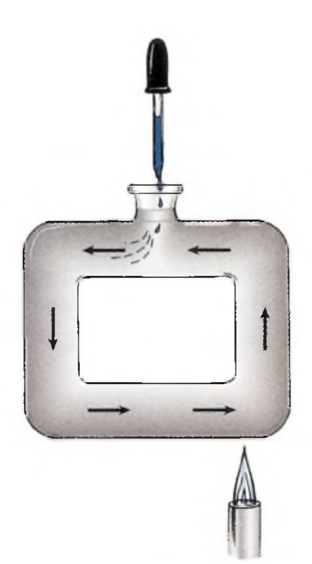


Figura 18.4 Ejemplo de la convección natural.

La *convección* se ha definido como el proceso por el que el calor es transferido por medio del movimiento real de la masa de un medio material. Una corriente de líquido o de gas que absorbe energía de un lugar y lo lleva a otro, donde lo libera a una porción más fría del fluido recibe el nombre de ***corriente de convección***. En la figura 18.4 se presenta una demostración de laboratorio acerca de una corriente de convección. Una sección rectangular de tubería de vidrio se llena de agua y se calienta en una de las esquinas inferiores. El agua que está cerca de la flama se calienta y se dilata, volviéndose menos densa que el agua más fría que está sobre ella. A medida que el agua caliente se eleva, es remplazada por agua más fría del tubo inferior. Este proceso continúa hasta que una corriente de convección contraria al movimiento de las agujas del reloj circula por la tubería. La existencia de dicha corriente se demuestra en forma ostensible dejando caer gotas de tinta por la parte superior abierta. La tinta es transportada por la corriente de convección hasta que finalmente regresa a la parte de arriba, proveniente de la sección derecha de la tubería.

Si el movimiento de un fluido es causado por una diferencia de densidad originada por un cambio de temperatura, la corriente producida se conoce como ***convección natural***. El agua que fluye por la tubería de vidrio del ejemplo anterior representa una corriente de convección natural. Cuando un fluido es obligado a moverse por la acción de una bomba o unas aspas, la corriente producida se conoce como ***convección forzada***.

Corrientes de convección de ambos tipos, natural y forzada, se presentan en el proceso de calentar una casa con un calentador de gas convencional, como el que se muestra en la figura 18.5. Un intercambiador de calor lo transfiere de las flamas del gas al contenedor de metal. El calefactor obliga al aire a pasar por el contenedor caliente y luego por los conductos de la casa. El aire re-

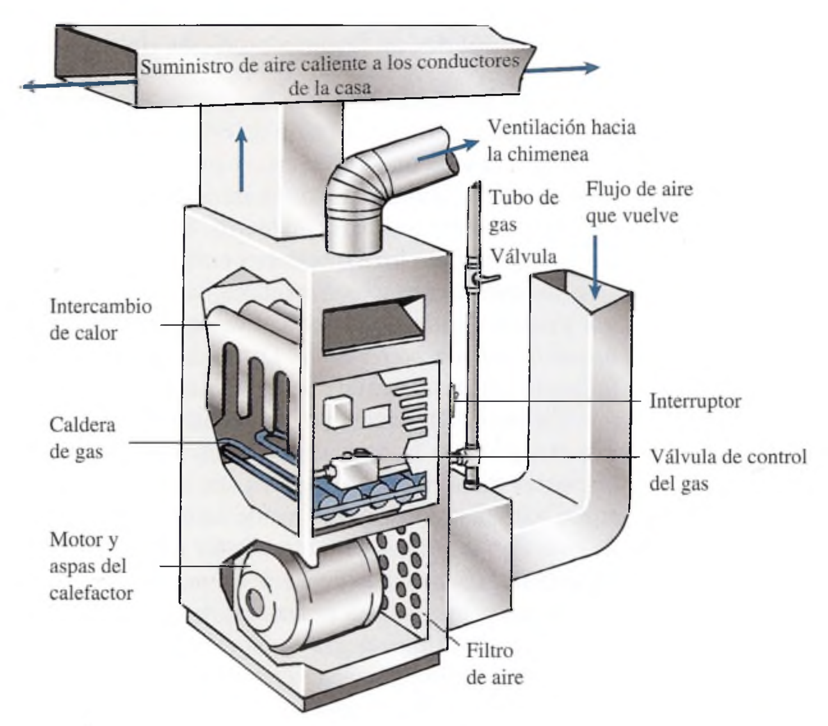


Figura 18.5 Corrientes de convección forzada originadas por un horno de calefacción central. El intercambiador de calor lo transfiere de la caldera por el conducto de ventilación. Los productos de la combustión se ventilan hacia el exterior y jamás se mezclan con el aire empleado para calentar la casa.



Figura 18.6 Cuando se coloca una placa caliente en un fluido frío, las corrientes de convección transfieren el calor lejos de la placa con una razón proporcional a la diferencia de temperaturas y al área de la misma placa.

gresa por otro conjunto de tubos y vuelve a entrar en el horno a través de un filtro. Un termostato mide la temperatura de la casa y regula el calefactor y la fuente de combustible para suministrar la cantidad de calor deseada. Los primeros calefactores de gas desperdiciaban cerca de 40% de la energía que se les suministraba; hoy, los más modernos llegan a alcanzar eficiencias de 90% gracias a que utilizan mecanismos como vapor condensado o cámaras de combustión selladas.

Calcular el calor transferido por convección es una tarea sumamente difícil. Muchas de las propiedades físicas de un fluido dependen de la temperatura y de la presión; por eso en la mayor parte de los casos sólo se puede hacer un cálculo aproximado del proceso. Por ejemplo, considere una placa conductora de material cuya área es A y su temperatura t_s que se sumerge por completo en un fluido más frío, cuya temperatura es t_f, como se ilustra en la figura 18.6. El fluido que entra en contacto con la placa se eleva y desplaza al fluido más frío. La observación experimental muestra que la razón H con la que el calor se transfiere por convección es proporcional al área A y a la diferencia de temperatura Δt entre la placa y el fluido.

A diferencia de la conductividad térmica, la convección no es una propiedad del sólido o del fluido, sino que depende de muchos parámetros del sistema. Se sabe que varía según la geometría del sólido y el acabado de su superficie, la velocidad y la densidad del fluido y la conductividad térmica. Las diferencias de presión influyen también en la transferencia de calor por convección. Para entender cómo la convección es afectada por la geometría, sólo hay que considerar las diferencias evidentes que se presentan por un piso cuya cara está hacia arriba o por un cielorraso cuya cara está hacia abajo. Se han desarrollado varios modelos para realizar estimaciones matemáticas de la transferencia de calor por convección, pero ninguno es lo suficientemente confiable para incluirlo en esta exposición.

18.5 Radiación

El término *radiación* se refiere a la emisión continua de energía en forma de ondas electromagnéticas originadas en el nivel atómico. Ejemplos de ondas electromagnéticas son los rayos gama, los rayos X, las ondas de luz, los rayos infrarrojos, las ondas de radio y las de radar; la única diferencia que hay entre ellas es la longitud de onda. En esta sección estudiaremos la *radiación térmica*.

> La radiación térmica se debe a ondas electromagnéticas emitidas o absorbidas por un sólido, un líquido o un gas debido a su temperatura.

Todos los objetos con una temperatura superior al cero absoluto emiten energía radiante. A bajas temperaturas, la razón de emisión es pequeña y la radiación es predominantemente de longitudes de onda grandes. A medida que la temperatura se eleva, esa razón aumenta rápidamente y la radiación predominante corresponde a longitudes de onda más cortas. Si se calienta sin parar una barra de hierro, finalmente emitirá radiación en la región visible; de ese hecho han surgido las expresiones *caliente al rojo vivo* y *caliente al blanco*.

Las mediciones experimentales han demostrado que la razón a la que es radiada la energía térmica desde una superficie *varía directamente a la cuarta potencia de la temperatura absoluta del cuerpo radiante*. Dicho de otro modo, si la temperatura de un objeto se duplica, la razón con la que emite energía térmica se incrementa dieciséis veces.

Un factor adicional que ha de considerarse al calcular la razón de transferencia de calor por radiación es la naturaleza de las superficies expuestas. Los objetos que son emisores eficientes de la radiación térmica son también eficientes para absorberla. Un objeto que absorbe toda la radiación que incide sobre su superficie se llama ***absorbedor ideal***. Un objeto de este tipo será también un ***radiador ideal***. No existe un absorbedor realmente ideal; pero, en general, cuanto más negra sea una superficie, tanto mejor absorberá la energía térmica. Por ejemplo, una camisa negra absorbe más energía radiante solar que una camisa más clara. Puesto que la camisa negra es también buena emisora, su temperatura externa será más alta que la temperatura de nuestro cuerpo, lo cual hace que nos sintamos incómodos.

A veces un absorbedor ideal o un radiador ideal se conoce como ***cuerpo negro*** por las razones mencionadas. La radiación emitida por un cuerpo negro se denomina *radiación de cuerpo negro*. Aunque tales cuerpos no existen en realidad, el concepto es útil como un patrón para comparar la ***emisividad*** de diversas superficies.

FÍSICA HOY

Una masa de tierra cubierta de hielo
La Antártica es un continente cubierto de hielo. En invierno la extensión del hielo aumenta, ya que un área de océano de aproximadamente 15 millones de kilómetros cuadrados se vuelve hielo marítimo. El hielo del mar es un aislador muy eficaz. La pérdida de calor ocasionada por los bolsones de mar abierto puede superar hasta en dos órdenes de magnitud a la pérdida de calor del hielo. Cuando el agua de mar se congela, la sal contenida en el océano no se congela junto con el hielo. Así, el agua de mar que está debajo del hielo se vuelve más salada. Esta diferencia en salinidad o concentración de sal genera una importante corriente oceánica. El hielo que está cubierto de nieve refleja mucho más la luz que el océano abierto. Esto reduce en gran medida la cantidad de luz disponible para la fotosíntesis bajo el hielo. En lo que se refiere a la transferencia de calor, el efecto de aislamiento y la producción de corrientes oceánicas, el hielo marítimo que está alrededor de la Antártica es determinante para el clima de nuestro planeta.

La emisividad e es una medida de la capacidad de un cuerpo para absorber o emitir radiación térmica.

La emisividad es una cantidad adimensional que tiene un valor numérico entre 0 y 1, según la naturaleza de la superficie. En el caso de un cuerpo negro, es igual a la unidad. Para una superficie de plata perfectamente pulida el valor de la emisividad se aproxima a cero.

La ***razón de radiación*** R de un cuerpo se define formalmente como la energía radiante emitida por unidad de área por unidad de tiempo; dicho de otro modo, la potencia por unidad de área. En forma simbólica esto se expresa

$$R = \frac{E}{\tau A} = \frac{P}{A} \tag{18.4}$$

Si la potencia radiante P se expresa en watts y la superficie A en metros cuadrados, la razón de radiación estará expresada en watts por metro cuadrado. Como ya lo hemos dicho, esta razón depende de dos factores: la temperatura absoluta T y la emisividad e del cuerpo radiante. El enunciado formal de esta dependencia, conocida como la ***ley Stefan-Boltzmann***, se puede escribir como

$$R = \frac{P}{A} = e\sigma T^4 \tag{18.5}$$

La constante de proporcionalidad σ es una constante universal completamente independiente de la naturaleza de la radiación. Si la potencia radiante se expresa en watts y la superficie en metros cuadrados, σ tiene el valor de 5.67×10^{-8} W/m$^2 \cdot$ K^4. La emisividad e tiene valores de 0 a 1, según la naturaleza de la superficie radiante. Un resumen de los símbolos y su definición aparece en la tabla 18.2.

Tabla 18.2

Definiciones de los símbolos de la ley Stefan-Boltzmann ($R = e\sigma T^4$)

Símbolo	Definición	Comentario
R	Energía radiada por unidad de tiempo por unidad de área	$\frac{E}{\tau A}$ o $\frac{P}{A}$
e	Emisividad de la superficie	0–1
σ	Constante de Stefan	5.67×10^{-8} W/(m$^2 \cdot$ K)
T^4	La temperatura absoluta elevada a la cuarta potencia	K^4

Ejemplo 18.3

¿Qué potencia será radiada por una superficie esférica de plata de 10 cm de diámetro si su temperatura es de 527°C? La emisividad de la superficie es 0.04.

Plan: Las unidades son muy importantes. Debemos convertir 527°C en kelvins y determinar el área de la superficie esférica en metros cuadrados (m^2). La potencia radiada de la superficie puede hallarse entonces resolviendo la ecuación (18.5) para P.

Solución: El radio es la mitad del diámetro, así que $R = 0.05$ m. Luego, el área es

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi(0.05 \text{ m})^2; \qquad A = 0.0314 \text{ m}^2$$

La temperatura absoluta es

$$T = 527°\text{C} + 273 = 800 \text{ K}$$

Despejando P de la ecuación (18.5) se obtiene

$$P = e\sigma AT^4$$
$$= (0.04)[5.67 \times 10^{-8}\ \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)](0.0314\ \text{m}^2)(800\ \text{K})^4$$
$$= 29.2\ \text{W}$$

Hemos dicho que todos los objetos emiten radiación sin cesar, independientemente de su temperatura. Si esto es cierto, ¿cómo es que no se les agota su "combustible"? La respuesta es que se les *agotaría* si no se les proporcionara más. El filamento de un foco de luz eléctrica se enfría más rápidamente a la temperatura ambiente cuando se interrumpe el suministro de energía eléctrica. No se sigue enfriando, puesto que al llegar a este punto, el filamento está absorbiendo energía radiante a la misma razón que la está emitiendo. La ley que sirve de fundamento a este fenómeno se conoce como ***ley de Prevost del intercambio de calor:***

> Un cuerpo que se halla a la misma temperatura que sus alrededores irradia y absorbe calor con la misma razón.

En la figura 18.7 se muestra un objeto aislado en equilibrio térmico con las paredes del recipiente donde se encuentra.

La razón con la que un cuerpo absorbe energía está dada también por la ley Stefan-Boltzmann [ecuación (18.5)]. Por tanto, podemos calcular la transferencia neta de energía radiante emitida por un objeto rodeado por paredes a diferentes temperaturas. Considere un delgado filamento de alambre de una lámpara que está cubierto con una envoltura, como aparece en la figura 18.8. Denotemos la temperatura del filamento con T_1 y la del recubrimiento con T_2. La emisividad del filamento es e y sólo consideraremos los procesos radiantes positivos. En este ejemplo se advierte que

Razón de radiación neta = razón de emisión de energía − razón de absorción de energía

$$R = e\sigma T_1^4 - e\sigma T_2^4$$

$$R = e\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{18.6}$$

La ecuación (18.6) puede aplicarse a cualquier sistema para calcular la energía neta emitida por un radiador a temperatura T_1 y emisividad e en presencia de los alrededores a temperatura T_2.

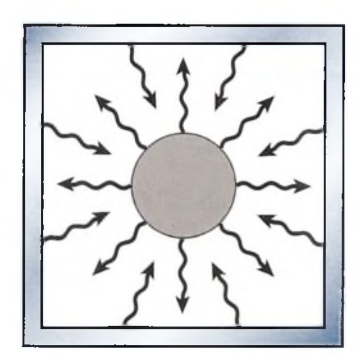


Figura 18.7 Cuando un objeto y lo que lo circunda tienen la misma temperatura, la energía radiante emitida es la misma que la absorbida.



Figura 18.8 La energía neta emitida por un radiador en un entorno que tiene diferente temperatura.

Resumen y repaso

El calor es la transferencia de energía térmica de un lugar a otro. Hemos visto que la razón de transferencia por conducción, convección y radiación se puede predecir a partir de fórmulas experimentales. Deben entenderse los efectos producidos por las diferencias de materiales, el área superficial y las temperaturas para manejar muchas aplicaciones industriales de la transferencia de calor. Los principales conceptos presentados en este capítulo aparecen a continuación.

- En la transferencia de calor por conducción, la cantidad de calor Q transferida por unidad de tiempo τ a través de una pared o una varilla de longitud L está dada por

$$H = \frac{Q}{\tau} = kA\frac{\Delta t}{L} \qquad \textit{Conducción}$$

donde A es el área y Δt la diferencia de temperatura de su superficie. La unidad del SI para H es el *watt* (W). Otras unidades que se usan comúnmente son kcal/s y Btu/h. A partir de esta relación, la conductividad térmica es

$$k = \frac{QL}{\tau A\,\Delta t} \qquad \textit{Conductividad térmica}$$

Las unidades del SI para k son W/m · K. Pueden obtenerse conversiones útiles a partir de las definiciones siguientes:

$$1\ \text{kcal/m}\cdot\text{s}\cdot{}^\circ\text{C} = 4186\ \text{W/(m}\cdot\text{K)}$$
$$1\ \text{W/m}\cdot\text{K} = 6.94\ \text{Btu}\cdot\text{in/(ft}^2\cdot\text{h}\cdot{}^\circ\text{F)}$$
$$1\ \text{Btu}\cdot\text{in/(ft}^2\cdot\text{h}\cdot{}^\circ\text{F)} = 3.445\times10^{-5}\ \text{kcal/(m}\cdot\text{s}\cdot{}^\circ\text{C)}$$

- El valor R es un término de ingeniería cuyo propósito es medir la resistencia térmica que se opone a la conducción del calor. Se define como sigue:

$$R = \frac{L}{k} \qquad \textit{Valor R}$$

Al aplicar este concepto a diferentes materiales de distinto espesor se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{A\,\Delta t}{\sum_i (L_i/k_i)} = \frac{A\,\Delta t}{\sum_i R_i}$$

La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo (Q/τ) a través de diferentes materiales con distinto espesor es igual al producto del área A y la diferencia de temperatura Δt dividido entre la suma de los valores R de esos materiales. De acuerdo con la práctica actual de la ingeniería, las unidades del valor R son ft^2 · °F · h/Btu.

- En la transferencia de calor por radiación, definimos la razón de radiación como la energía emitida por unidad de área y por unidad de tiempo (o simplemente la potencia por unidad de área):

$$R = \frac{E}{\tau A} = \frac{P}{A} \qquad \textit{Razón de radiación,}\ \text{W/m}^2$$

Según la *ley de Stefan-Boltzmann*, esta razón está dada por

$$R = \frac{P}{A} = e\sigma T^4 \qquad \sigma = 5.67\times10^{-8}\ \text{W/(m}^2\cdot\text{K}^4)$$

- La ley de Prevost del intercambio de calor establece que *un cuerpo que está a la misma temperatura que su entorno irradia y absorbe calor a la misma razón.*

Conceptos clave

absorbedor ideal 376
conducción 370
conductividad térmica 371
convección forzada 375
convección natural 375
convección 370
corriente de convección 375
cuerpo negro 376
emisividad 376
ley de Prevost del intercambio de calor 378
ley de Stefan-Boltzmann 377
radiación térmica 370
radiador ideal 376
razón de radiación 377
resistencia térmica (valor R) 374

Preguntas de repaso

18.1. Analice la botella de vacío y explique cómo minimiza la transferencia de calor por conducción, convección y radiación.

18.2. ¿Qué factor determina la *dirección* de la transferencia de calor?

18.3. El calor fluye tanto por conducción como por radiación. ¿Cuál es la diferencia entre ambas? ¿En qué aspectos son similares?

18.4. Un trozo de hierro caliente está suspendido por el centro dentro de un calorímetro evacuado. ¿Podemos determinar el calor específico del hierro con las técnicas presentadas en este capítulo? Comente su respuesta.

18.5. Comente las analogías que existen entre el flujo de calor en estado estacionario y el flujo de un fluido incompresible.

18.6. Una olla llena de agua se coloca sobre el quemador de gas de una estufa de cocina hasta que el agua hierve vigorosamente. Comente las transferencias de calor que se producen allí. ¿Cómo explicaría el hecho de que las burbujas que se forman en el agua son llevadas a la superficie formando una pirámide, en lugar de subir directamente?

18.7. Al colocar una llama debajo de un vaso de papel lleno de agua, es posible hacer que el agua hierva sin que se queme del fondo del vaso. Explique esta situación.

18.8. Si un trozo de madera se envuelve en un pedazo de papel y el sistema se calienta con una llama, el papel se quema. Pero si el papel se enrolla apretadamente en una varilla de cobre y se calienta en la misma forma, no se quema. ¿Por qué?

18.9. En un día frío, un trozo de hierro se siente más frío al tacto que un pedazo de madera. Explique por qué.

18.10. El cobre tiene más o menos dos veces más conductividad térmica que el aluminio, pero su calor específico es un poco menor que la mitad del que corresponde al aluminio. Se ha fabricado un bloque rectangular de cada uno de esos materiales, de modo que tengan masas idénticas y la misma área superficial en sus bases. Cada bloque se calienta a 300°C y se coloca encima de un gran cubo de hielo. ¿Cuál de los bloques dejará de hundirse primero? ¿Cuál se hundirá más profundamente?

18.11. Señale la diferencia entre conductividad térmica y calor específico, a partir de la relación de cada uno con la transferencia de calor.

18.12. El término *absortividad* se usa a veces en lugar del término *emisividad*. ¿Puede justificar tal uso?

18.13. ¿Por qué se requiere más acondicionamiento de aire para enfriar el interior de un automóvil color azul marino, que un automóvil blanco del mismo tamaño?

18.14. Si se intenta diseñar una casa que ofrezca la máxima comodidad tanto en verano como en invierno, ¿preferiría usted que tuviera el techo claro u oscuro? Explique su respuesta.

18.15. Si le interesa saber el número de kilocalorías transferidas por radiación en una unidad de tiempo, puede escribir la ley de Stefan-Boltzmann como sigue

$$\frac{Q}{\tau} = e\sigma A T^4$$

En esta formulación de la ley, demuestre que la constante de Stefan σ es igual a

$$1.35 \times 10^{-11}\ \mathrm{kcal/(m^2 \cdot s \cdot K^4)}$$

18.16. Cuando se calienta un líquido en un matraz de vidrio, se suele colocar una malla de alambre entre la flama y el fondo del matraz. ¿Por qué es conveniente esta práctica?

18.17. ¿El aire caliente que se encuentra sobre el fuego se eleva o es empujado hacia arriba por las llamas?

18.18. ¿Es conveniente pintar un radiador de agua caliente o vapor con un emisor eficiente o con uno deficiente? Si se pinta de negro, ¿será más eficiente? ¿Por qué?

18.19. ¿Qué proceso es más rápido, la conducción o la convección? Dé un ejemplo para justificar su conclusión.

Problemas

Nota: Remítase las tablas 18.1 y 18.2 donde hallará las conductividades térmicas y otras constantes necesarias para la resolución de los problemas de esta sección.

Sección 18.2 Conductividad

18.1. Un bloque de cobre tiene una sección transversal de 20 cm² y una longitud de 50 cm. El extremo izquierdo se mantiene a 0°C y el derecho a 100°C. ¿Cuál es la razón de flujo de calor en watts? Resp. 154 W

18.2. En el problema 18.1, ¿cuál es el flujo de calor si el bloque de cobre se sustituye por un bloque de vidrio de las mismas dimensiones?

18.3. Una varilla de bronce de 50 cm de longitud tiene un diámetro de 3 mm. La temperatura de uno de sus extremos es 76°C más alta que la del otro extremo. ¿Cuánto calor será conducido en 1 min? Resp. 7.03 J

18.4. Un panel de vidrio de una ventana mide 10 in de ancho, 16 in de largo y $\frac{1}{8}$ in de espesor. La superficie interior está a 60°F y la exterior a 20°F. ¿Cuántos Btu se transfieren al exterior en 2 h?

18.5. Un extremo de una varilla de hierro de 30 cm de largo y 4 cm² de sección transversal se coloca dentro de un baño de hielo y agua. El otro extremo se coloca en un baño de vapor. ¿Cuántos minutos tendrán que pasar para transferir 1.0 kcal de calor? ¿En qué dirección fluye éste? Resp. 10.4 min, hacia el hielo

18.6. Una placa de acero de 20 mm de espesor tiene una sección transversal de 600 cm^2. Una de sus caras está a 170°C y la otra a 120°C. ¿Cuál es la razón de la transferencia de calor?

18.7. ¿Cuánto calor se pierde en 12 h a través de una pared de ladrillo refractario de 3 in y un área de 10 ft^2 si uno de los lados está a 330°F y el otro a 78°F? Resp. 50 400 Btu

***18.8.** Una pared de 6 m de longitud y 3 m de altura está formada por 12 cm de concreto unidos a 10 cm de tabla de corcho. La temperatura interior es de 10°C y la exterior de 40°C. Halle la temperatura en la superficie de unión de los dos materiales.

***18.9.** ¿Cuál es la razón de flujo de calor en estado estacionario a través de la pared compuesta del problema 18.8? Resp. 4.82 kcal/s *o* 20 172 J/s

Sección 18.5 Radiación

18.10. ¿Cuál es la potencia radiada por un cuerpo negro esférico con un área superficial de 20 cm^2 si su temperatura es de 250°C?

18.11. ¿Cuál es la razón de radiación de un cuerpo negro esférico a una temperatura de 327°C? ¿Cambiará esta razón si el radio se duplica y se mantiene la temperatura? Resp. 7.35 kW/m^2, no.

18.12. La emisividad de una esfera metálica es 0.3, y a una temperatura de 500 K irradia una potencia de 800 W. ¿Cuál es el radio de la esfera?

***18.13.** Si cierto cuerpo absorbe 20% de la radiación térmica incidente, ¿cuál es su emisividad? ¿Qué energía emitirá este cuerpo en 1 min si su superficie es de 1 m^2 y su temperatura de 727°C? Resp. 680.4 kJ

***18.14.** La temperatura de operación del filamento de una lámpara de 25 W es de 2727°C. Si la emisividad es 0.3, ¿cuál es el área superficial del filamento?

Problemas adicionales

18.15. Un panel de vidrio de una ventana mide 60 cm de ancho, 1.8 m de alto y 3 mm de espesor. La temperatura interior es de 20°C y la exterior de −10°C. ¿Cuánto calor escapa de la casa a través de esta ventana en 1 h? Resp. 31.1 MJ

18.16. Un aislamiento de fibra de vidrio con 20 cm de espesor cubre el piso de un desván de 20 × 15 m. ¿Cuántas calorías de calor se pierden hacia el desván si las temperaturas en uno y otro lado del aislamiento son de −10°C y 24°C?

18.17. El fondo de una olla de aluminio tiene 3 mm de espesor y un área superficial de 120 cm^2. ¿Cuántas calorías por minuto son conducidas a través del fondo de la olla si la temperatura de la superficie exterior es de 114°C y la temperatura de la superficie interior es de 117°C? Resp. 0.600 cal

18.18. Un muro de concreto macizo mide 80 ft de alto, 100 ft de ancho y 6 in de espesor. Las temperaturas superficiales en uno y otro lado de la pared son 30 y 100°F. ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que sean transferidas 400 000 Btu de calor?

18.19. El fondo de una olla de metal caliente tiene 86 cm^2 de área y 98°C de temperatura. La olla se coloca encima de una base de corcho de 5 mm de espesor. La cubierta de Formica que está debajo de la capa de corcho se mantiene a una temperatura constante de 20°C. ¿Cuánto calor es conducido a través del corcho en 2 min? Resp. 644 J

***18.20.** ¿Qué espesor de cobre se requiere para llegar a tener el mismo valor de aislamiento que una tabla de corcho de 2 in?

***18.21.** ¿Qué espesor de concreto se requiere para alcanzar el mismo valor de aislamiento que 6 cm de fibra de vidrio? Resp. 1.20 m

18.22. La hoja de vidrio de una ventana de un edificio de oficinas mide 2 por 6 m y tiene 1.2 cm de espesor. Su superficie externa está a 23°C y la interna a 25°C. ¿Cuántos joules de calor pasan a través del vidrio en una hora?

18.23. ¿Cuál debe ser la temperatura de un cuerpo negro si su razón de radiación es de 860 W/m^2? Resp. 351 K

18.24. Una bola de acero gris tiene una emisividad de 0.75 y, cuando la temperatura es de 570°C, la potencia radiada es de 800 W. ¿Cuál es el área total superficial de la bola?

18.25. Una lámpara de 25 W tiene un filamento cuya área es de 0.212 cm^2. Si la emisividad es 0.35, ¿cuál es la temperatura de operación del filamento? Resp. 2776 K

Preguntas para la reflexión crítica

***18.26.** La pared de una planta frigorífica consiste en 6 in de concreto y 4 in de tabla de corcho. La temperatura de la superficie interna del corcho es de −15°F y la de la superficie externa de 70°F. ¿Cuál es la temperatura de la superficie de contacto entre el corcho y el concreto? ¿Cuánto calor es conducido a través de cada pie cuadrado de esa pared en una hora?
Resp. 63.68°F, 5.9 Btu/(ft^2 h)

***18.27.** Una hielera de madera tiene paredes de 4 cm de espesor y un área efectiva total de 2 m^2. ¿Cuántos gramos de hielo se derretirán en 1 min si la temperatura interna de las paredes es de 4°C y la externa de 20°C?

***18.28.** El filamento de una lámpara funciona a una temperatura de 727°C y está rodeado por una cubierta a 227°C. Si el filamento tiene una emisividad de 0.25 y un área superficial de 0.30 cm^2, ¿cuál es la potencia de operación de la lámpara? Resp. 0.399 W.

***18.29.** La conductividad térmica del material *A* es el doble de la del material *B*. ¿Cuál tiene un valor *R* más alto? Cuando 6 cm del material A están entre dos paredes, la razón de conducción es 400 W/m^2. ¿Qué espesor de material *B* se requiere para proporcionar la misma razón de transferencia de calor si los demás factores permanecen constantes?



19 Propiedades térmicas de la materia

El astronauta Mark Lee realiza pruebas durante una caminata espacial. El estado térmico dentro de su traje y en el espacio se describe según las condiciones de presión, temperatura y volumen. Los cambios de cualquiera de estos parámetros dentro del traje pueden ser desastrosos. (*Foto de la NASA.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Escribirá y aplicará la relación entre el volumen y la presión de un gas a temperatura constante (*ley de Boyle*).
2. Escribirá y aplicará la relación entre el volumen y la temperatura de un gas en condiciones de presión constante (*ley de Charles*).
3. Escribirá y aplicará la relación entre la temperatura y la presión de un gas en condiciones de volumen constante (*ley de Gay-Lussac*).

4. Aplicará la ley general de los gases para resolver problemas que incluyan cambios de masa, volumen, presión y temperatura de los gases.
5. Definirá los conceptos *presión de vapor*, *punto de rocío* y *humedad relativa*, y aplicará cada uno de ellos en la resolución de problemas.

Ahora que hemos comprendido los conceptos de calor y temperatura, procederemos a estudiar el comportamiento térmico de la materia. Para esto, nos interesan cuatro cantidades medibles: la presión, el volumen, la temperatura y la masa de una muestra. Todas estas variables, en conjunto, determinan el estado de una determinada muestra de materia. Dependiendo de su estado, la materia puede existir en fase líquida, sólida o gaseosa. Por lo tanto, es importante distinguir entre los términos *estado* y *fase*. Empezaremos por estudiar el comportamiento térmico de los gases.

19.1 Gases ideales, ley de Boyle y ley de Charles

En un gas las moléculas individuales están tan distantes entre sí, que las fuerzas de cohesión que existen entre ellas por lo general son pequeñas. Si bien es cierto que la estructura molecular de diferentes gases puede variar en forma considerable, su comportamiento casi no se ve afectado por el tamaño de las moléculas individuales. Se puede decir con bastante seguridad que cuando una cantidad grande de gas está confinada en un volumen reducido, el volumen ocupado por las moléculas todavía resulta ser una fracción minúscula del volumen total.

Una de las generalizaciones más útiles respecto de los gases es el concepto del ***gas ideal***, cuyo comportamiento no se ve afectado en lo absoluto por fuerzas de cohesión o volúmenes moleculares. Por supuesto, ningún gas real es *ideal*, pero en condiciones normales de temperatura y presión, el comportamiento de cualquier gas es muy parecido al comportamiento de un gas ideal. Por consiguiente, las observaciones experimentales de gran número de gases reales puede conducir a la deducción de leyes físicas generales que rigen su comportamiento térmico. El grado en el que cualquier gas real obedece estas relaciones está determinado por el grado en que se aproxima al gas ideal.

Las primeras mediciones experimentales del comportamiento térmico de los gases fueron realizadas por Robert Boyle (1627-1691). Él llevó a cabo un estudio exhaustivo de los cambios en el volumen de los gases como resultado de cambios en la presión. Todas las demás variables, como la masa y la temperatura, se mantuvieron constantes. En 1660, Boyle demostró que el volumen de un gas es inversamente proporcional a su presión. En otras palabras, cuando se duplica el volumen, la presión disminuye a la mitad de su valor original. En la actualidad, este hallazgo recibe el nombre de ***ley de Boyle***.

Ley de Boyle: Siempre que la masa y la temperatura de una muestra de gas se mantengan constantes, el volumen de dicho gas es inversamente proporcional a su presión absoluta.

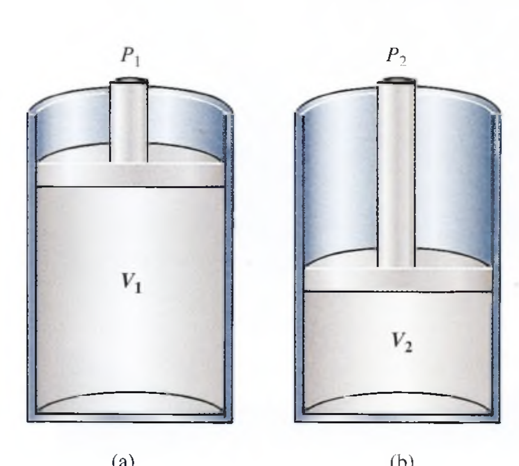


Figura 19.1 Cuando se comprime un gas a temperatura constante, el producto de su presión por su volumen siempre es constante; o sea, $P_1V_1 = P_2V_2$.

Otra forma de enunciar la ley de Boyle consiste en decir que el producto de la presión P de un gas por su volumen V será constante, en tanto no cambie la temperatura. Consideremos, por ejemplo, el caso de un cilindro cerrado provisto de un émbolo móvil, como se muestra en la figura 19.1. En la figura 19.1a, el estado inicial del gas se describe por medio de su presión P_1 y de su volumen V_1. Si el émbolo se presiona hacia abajo hasta que llegue a la nueva posición que aparece en la figura 19.1b, su presión se incrementará a P_2 mientras su volumen disminuye a V_2. Este proceso se muestra gráficamente en la figura 19.2. Si el proceso ocurre sin que cambie la temperatura, la ley de Boyle revela que

$$P_1V_1 = P_2V_2 \qquad m \text{ y } T \text{ constantes} \qquad (19.1)$$

Dicho de otro modo, el producto de la presión por el volumen en el estado inicial es igual al producto de la presión por el volumen en el estado final. La ecuación (19.1) es un enunciado matemático de la ley de Boyle. La presión P debe ser la presión *absoluta* y no la presión *manométrica*.

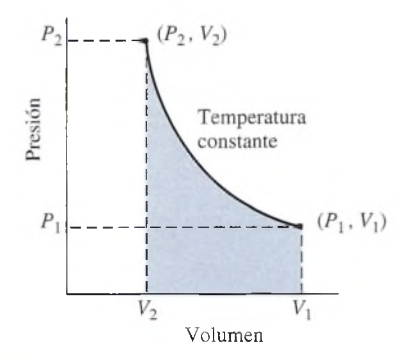


Figura 19.2 Un diagrama P-V muestra que la presión de un gas ideal varía inversamente respecto a su volumen.

Ejemplo 19.1

¿Qué volumen de gas hidrógeno a presión atmosférica se requiere para llenar un tanque de 5000 cm³ bajo una presión manométrica de 530 kPa?

Plan: Una atmósfera de presión es de 101.3 kPa. La presión absoluta final es 530 kPa (presión manométrica) más 101.3 kPa. Aplicaremos la ley de Boyle para calcular el volumen del hidrógeno a 1 atm que se requiere para producir una presión *interna* de 631 kPa. No es necesario convertir el volumen a unidades del SI si se aceptan las mismas unidades de volumen para la respuesta.

Solución: Las presiones inicial y final son

$$P_1 = 101.3 \text{ kPa} \qquad p_2 = 530 \text{ kPa} + 101.3 \text{ kPa} = 631 \text{ kPa}$$

El volumen final V_2 es 5000 cm³. Al aplicar la ecuación (19.1), tenemos

$$P_1V_1 = P_2V_2$$
$$(101.3 \text{ kPa})V_1 = (631 \text{ kPa})(5\,000 \text{ cm}^3)$$
$$V_1 = 31\,145 \text{ cm}^3$$

Observe que no fue necesario para las unidades de presión ser congruentes con las unidades de volumen. Puesto que P y V aparecen en ambos lados de la ecuación, únicamente es necesario elegir las mismas unidades para la presión. Las unidades para el volumen serán entonces las unidades sustituidas para V_2.

En el capítulo 16 aprovechamos el hecho de que el volumen de gas se incrementaba directamente con su temperatura para poder definir el cero absoluto. Encontramos el resultado (−273°C) extrapolando la línea en la gráfica de la figura 19.3. Por supuesto, cualquier gas real se volverá líquido antes de que su volumen llegue a cero. Pero la relación directa es una aproximación válida para la mayoría de los gases que no están sujetos a condiciones extremas de temperatura y de presión.

El primero que comprobó experimentalmente esta proporcionalidad directa entre el volumen y la temperatura fue Jacques Charles en 1787. La ***ley de Charles*** se enuncia de la siguiente manera:

> **Ley de Charles:** Mientras la masa y la presión de un gas se mantengan constantes, el volumen de dicho gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta.

Si se usa el subíndice 1 para referirnos al estado inicial de un gas y el subíndice 2 para referirnos a su estado final, se obtiene el enunciado matemático de la ley de Charles.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \qquad m \text{ y } P \text{ constantes} \qquad \textbf{(19.2)}$$

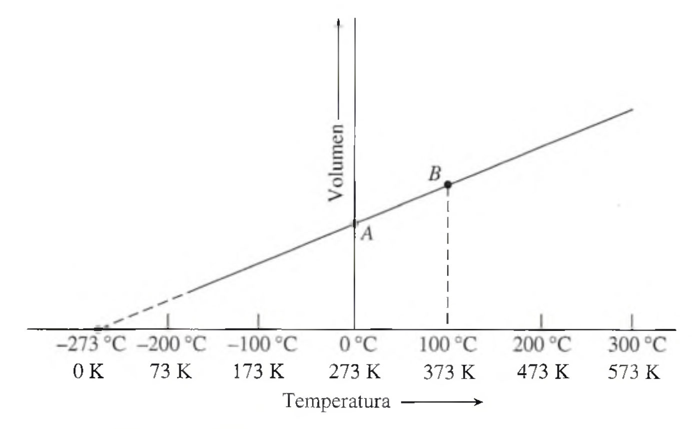


Figura 19.3 Variación del volumen como función de la temperatura. Cuando el volumen se extrapola a cero, la temperatura de un gas es la del cero absoluto (0 K).

En esta ecuación V_1 se refiere al volumen de un gas a la temperatura *absoluta* T_1, y V_2 es el volumen final de la misma muestra de gas cuando su temperatura absoluta es T_2.

La unidad del SI para el volumen es el metro cúbico (m^3) y, desde luego, es la unidad preferida. Sin embargo es muy común encontrar el litro (L) usado como unidad de volumen, en especial cuando se trabaja con gas. El litro es el volumen contenido en un cubo que mide 10 cm por lado.

$$1\ \text{L} = 1\,000\ \text{cm}^3 = 1 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Usaremos el litro en algunos ejemplos porque es una unidad de uso muy común. Como siempre, tenga cuidado cuando use cualquier unidad distinta a las unidades del SI en las fórmulas.

Ejemplo 19.2

Un cilindro sin fricción se llena con 2 L de un gas ideal a 23°C. Un extremo del cilindro está fijo a un pistón movible y el gas puede expandirse a una presión constante hasta que su volumen llega a 2.5 L. ¿Cuál es la nueva temperatura del gas?

Plan: La masa y la presión del gas permanecen constantes, así que el cambio en la temperatura debe ser proporcional al cambio en el volumen, y la ley de Charles se puede aplicar para determinar la nueva temperatura. Recuerde usar las *temperaturas absolutas*.

Solución: La información conocida se organiza como sigue:

Dados: $T_1 = 23\text{C} + 273 = 296\ \text{K}$, $V_1 = 2\ \text{L}$, $V_2 = 2.5\ \text{L}$; Encuentre: $T_2 = ?$

Ahora, resolvemos la ley de Charles para T_2:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1}$$

$$T_2 = \frac{(2.5\ \text{L})(296\ \text{K})}{2\ \text{L}} = 370\ \text{K}$$

La temperatura final del gas es 370 K o 97°C.

19.2 Ley de Gay-Lussac

Las tres cantidades que determinan el estado de una masa dada de gas son su presión, volumen y temperatura. La ley de Boyle se ocupa de los cambios de presión y de volumen a temperatura constante, y la ley de Charles se refiere al volumen y temperatura bajo presión constante. La variación de presión como función de la temperatura se describe en una ley atribuida a Gay-Lussac.

Ley de Gay-Lussac: Si el volumen de una muestra de gas permanece constante, la presión absoluta de dicho gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta.

Esto significa que si se duplica la presión aplicada al gas, su temperatura absoluta se duplicará también. La ***ley de Gay-Lussac*** en forma de ecuación puede escribirse como

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \qquad m \text{ y } V \text{ constantes} \qquad \textbf{(19.3)}$$

Ejemplo 19.3

El neumático de un automóvil se infla a una presión manométrica de 207 kPa (30 lb/in^2) en un momento en que la presión de los alrededores es de 1 atm (101.3 kPa) y la temperatura es de 25°C. Después de manejarlo, la temperatura del aire del neumático aumenta a 40°C. Suponga que el volumen de gas cambia sólo ligeramente, ¿cuál es la nueva presión manométrica en el neumático?

Plan: Como el volumen y la masa son constantes, la presión debe aumentar en la misma proporción que la temperatura; aplicaremos la ley de Gay Lussac para determinar la presión absoluta final. La presión manométrica, por tanto, se obtiene al restar la presión del ambiente (101.3 kPa).

Solución: Primero determinaremos las temperaturas absolutas y la presión absoluta.

$$P_1 = 207 \text{ kPa} + 101.3 \text{ kPa} = 308 \text{ kPa}$$

$$T_1 = 25 + 273 = 298 \text{ K}; \qquad T_2 = 40 + 273 = 313 \text{ K}$$

La nueva presión se calcula a partir de la ley de Gay Lussac

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \qquad \text{o} \qquad P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1}$$

$$P_2 = \frac{(308 \text{ kPa})(313 \text{ K})}{298 \text{ K}}; \qquad P_2 = 324 \text{ kPa}$$

La presión manométrica se calcula al restar la presión del aire que hay en el ambiente (101.3 kPa).

$$\text{Presión manométrica} = 324 \text{ kPa} - 101 \text{ kPa} = 223 \text{ kPa}$$

Un manómetro leería esta presión como 223 kPa o aproximadamente 32.27 lb/in^2.

19.3 Leyes generales de los gases

Hasta ahora hemos estudiado tres leyes que pueden usarse para describir el comportamiento térmico de los gases. La ley de Boyle, como se enuncia en la ecuación (19.1), se aplica a una muestra de gas cuya temperatura no cambia. La ley de Charles, como se indica en la ecuación (19.2), se aplica a una muestra de gas a presión constante. La ley de Gay-Lussac, en la ecuación (19.3), corresponde a una muestra de gas a volumen constante. Por desgracia, generalmente ninguna de estas condiciones se satisface. Lo más común es que un sistema sufra cambios de volumen, de temperatura y de presión como resultado de un proceso térmico. Una relación más general que combina las tres leyes es la siguiente:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \qquad m \text{ constante} \qquad \textbf{(19.4)}$$

donde (P_1, V_1, T_1) pueden considerarse como las coordenadas del estado inicial y (P_2, V_2, T_2) las coordenadas del estado final. En otras palabras, para una masa dada, la razón PV/T es constante para cualquier gas ideal. La ecuación (19.4) puede recordarse con la frase "una (PV/T) privada siempre es privada".

Ejemplo 19.4

Un tanque para oxígeno con un volumen interior de 20 litros se llena con ese gas bajo una presión absoluta de 6 MPa a 20°C. El oxígeno se va a usar en un avión para grandes alturas, donde la presión absoluta es sólo 70 kPa y la temperatura es −20°C. ¿Qué volumen de oxígeno será capaz de suministrar el tanque en esas condiciones?

Plan: Las presiones conocidas son presiones absolutas, así que convertimos a temperaturas absolutas y aplicamos la ecuación (19.4).

Solución: Después de sumar 273 a las dos temperaturas Celsius, resolvemos para V_2.

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{o} \qquad V_2 = \frac{P_1V_1T_2}{P_2T_1}$$

$$V_2 = \frac{(6 \times 10^6 \text{ Pa})(20 \text{ L})(253 \text{ K})}{(70 \times 10^3 \text{ Pa})(293 \text{ K})} = 1480 \text{ L}$$

Ahora vamos a considerar el efecto de un cambio de masa en el comportamiento de los gases. Si la temperatura y el volumen de un gas confinado se mantienen constantes, al añadir más gas habrá un incremento proporcional en la presión. En forma similar, si la presión y la temperatura se mantienen fijos, al aumentar la masa habrá un aumento proporcional en el volumen del recipiente. Podemos combinar estas observaciones experimentales con la ecuación (19.4) para obtener la relación general:

$$\frac{P_1V_1}{m_1T_1} = \frac{P_2V_2}{m_2T_2} \tag{19.5}$$

donde m_1 es la masa inicial y m_2 la masa final. Un estudio de esta relación revelará que la ley de Boyle, la ley de Charles, la ley de Gay-Lussac junto con la ecuación (19.4) representan casos especiales de la ecuación más general (19.5).

Ejemplo 19.5

La lectura de la presión manométrica en un tanque para el almacenamiento de helio indica 2000 lb/in^2 cuando la temperatura es de 27°C. Durante la noche, hay una fuga en el recipiente y a la mañana siguiente se tienen 1 500 lb/in^2 a una temperatura de 17°C. ¿Qué porcentaje de la masa original de helio permanece dentro del recipiente?

Plan: El volumen puede quedar fuera de nuestra consideración ya que no cambia ($V_1 = V_2$), así que podemos simplificar la ecuación (19.5) y resolver para la razón m_2/m_1 del gas restante al gas contenido inicialmente en el recipiente. Por tanto, esta razón se expresa como un porcentaje. Dado que las presiones inicial y final están dadas en las mismas unidades, no hay necesidad de convertir las presiones a unidades del SI. No obstante, *necesitamos* sumar 1 atm de presión (14.7 lb/in^2) a cada uno de los valores de la presión manométrica, y las temperaturas deben expresarse en kelvin.

Solución: Puesto que $V_1 = V_2$, simplificamos la ecuación (19.5) para obtener

$$\frac{P_1V_1}{m_1T_1} = \frac{P_2V_2}{m_2T_2} \quad \text{o} \quad \frac{P_1}{m_1T_1} = \frac{P_2}{m_2T_2}$$

La razón m_2/m_1 representa la fracción de la masa de helio que permanece ahí, así que

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2T_1}{P_1T_2}$$

Las presiones y las temperaturas se ajustan a sus valores absolutos en la siguiente forma:

$$P_1 = 2000 \text{ lb/in}^2 + 14.7 \text{ lb/in}^2 = 2014.7 \text{ lb/in}^2$$
$$P_1 = 1500 \text{ lb/in}^2 + 14.7 \text{ lb/in}^2 = 1514.7 \text{ lb/in}^2$$
$$T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$
$$T_2 = 17 + 273 = 290 \text{ K}$$

Al sustituir estos valores se obtiene

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{(1514.7 \text{ lb/in}^2)(300 \text{ K})}{(2014.7 \text{ lb/in}^2)(290 \text{ K})} = 0.778$$

Por tanto, el 77.8 por ciento del helio aún permanece dentro del recipiente.

La ecuación (19.5) es de carácter general, pues en ella se toman en cuenta las variaciones en la presión, volumen, temperatura y masa de un gas. Sin embargo, lo que en realidad influye en la presión y el volumen no es la masa de un gas, sino el número de moléculas del mismo. De acuerdo con la teoría cinética de los gases, la presión se debe a las colisiones moleculares que se producen contra las paredes del recipiente. Al aumentar el número de moléculas aumentará el número de partículas que chocan por segundo, y, por lo tanto, la presión del gas será mayor. Si estamos considerando un proceso térmico que implique cantidades del mismo gas, podemos aplicar con la mayor seguridad la ecuación (19.5), puesto que la masa es proporcional al número de moléculas.

Cuando se trabaja con diferentes tipos de gas, como el hidrógeno comparado con el oxígeno, es necesario considerar la igualdad en el número de moléculas, en vez de masas iguales. Cuando se colocan en recipientes similares, 6 g de hidrógeno pueden originar una presión mucho mayor que 6 g de oxígeno. Hay muchas más moléculas de hidrógeno en 6 g de H_2 que moléculas de oxígeno en 6 g de O_2. Para lograr una expresión más general, debemos revisar la ecuación (19.5) con el fin de tomar en cuenta las diferencias en el número de moléculas de gas en lugar de la diferencia en masa. Primero, debemos desarrollar métodos para relacionar la cantidad de gas con el número de moléculas presentes.

19.4 Masa molecular y mol

Aun cuando es difícil determinar la masa de los átomos individuales debido a su tamaño, por medio de métodos experimentales se ha logrado medir la ***masa atómica***. Por ejemplo, ahora sabemos que un átomo de helio tiene una masa de 6.65×10^{-24} g. Cuando se trabaja con cantidades macroscópicas como el volumen, la presión y la temperatura, es mucho más adecuado comparar las *masas relativas* de los átomos individuales.

Las masas atómicas relativas se basan en la masa de un átomo de referencia que se conoce como *carbono 12*. Al asignar arbitrariamente un valor exacto de 12 *unidades de masa atómica* (u) a este átomo, se cuenta con un patrón con el cual se pueden comparar otras masas atómicas.

La masa atómica de un elemento es la masa de un átomo de dicho elemento comparada con la masa de un átomo de carbono tomado como 12 unidades de masa atómica.

Sobre esta base, la masa atómica del hidrógeno es de aproximadamente 1 u, y la masa atómica del oxígeno es aproximadamente de 16 u.

Una molécula consiste en una combinación química de dos o más átomos. La definición de ***masa molecular*** surge de la definición de masa atómica.

La masa molecular M es la suma de las masas atómicas de todos los átomos que componen la molécula.

Por ejemplo, una molécula de oxígeno (O_2) contiene dos átomos de oxígeno. Su masa molecular es de 16 u × 2 = 32 u. Una molécula de dióxido de carbono (CO_2) contiene un átomo de carbono y dos átomos de oxígeno. Por lo tanto, la masa molecular del CO_2 es de 44 u:

$$\begin{aligned} 1\,\text{C} &= 1 \times 12 = 12\ \text{u} \\ 2\,\text{O} &= 2 \times 16 = 32\ \text{u} \\ \hline CO_2 &= 44\ \text{u} \end{aligned}$$

Al trabajar con gases, notamos que tiene más sentido considerar la cantidad de sustancia en términos del número de moléculas presentes. Esto lleva implícita la creación de una nueva unidad de medida llamada ***mol***.

Una mol es la cantidad de una sustancia que contiene el mismo número de partículas que el número de átomos que hay en 12 g de carbono 12.

Tomando como base esta definición, 1 mol de carbono debe ser igual a 12 g. Puesto que la masa molecular de cualquier sustancia se basa en el carbono 12 como patrón, entonces:

Una mol es la masa en gramos numéricamente igual a la masa molecular de una sustancia.

Por ejemplo, 1 mol de hidrógeno (H_2) es 2 g, 1 mol de oxígeno (O_2) es 32 g, y 1 mol de dióxido de carbono (CO_2) es 44 g. Dicho en otras palabras, 2 g de H_2, 32 g de O_2, y 44 g de CO_2, tienen el mismo número de moléculas. A este número N_A se le conoce como ***número de Avogadro***.

La razón del número de moléculas N al número de moles n debe ser igual al número de Avogadro N_A. Simbólicamente,

$$N_A = \frac{N}{n} \qquad \textit{Moléculas por mol} \qquad \textbf{(19.6)}$$

Hay varios métodos experimentales para determinar el número de Avogadro. El valor aceptado para N_A es

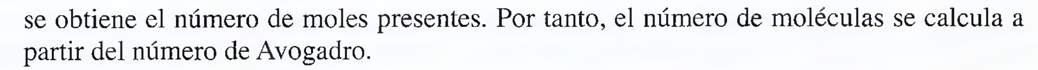
$$N_A = 6.023 \times 10^{23} \text{ moléculas por mol} \qquad \textit{Número de Avogadro} \qquad \textbf{(19.7)}$$

La forma más sencilla de determinar el número de moles n contenidas en un gas es dividiendo su masa m en gramos entre su masa molecular M por mol. Por tanto,

$$n = \frac{m}{M} \qquad \textit{Número de moles} \qquad \textbf{(19.8)}$$

Ejemplo 19.6 (a) ¿Cuántas moles de gas hay en 200 g de CO_2? (b) ¿Cuántas moléculas hay?

Plan: Primero debemos determinar la masa molecular del CO_2, que se calculó como 44 g/mol anteriormente en esta sección. Al dividir la masa del gas entre su masa molecular



se obtiene el número de moles presentes. Por tanto, el número de moléculas se calcula a partir del número de Avogadro.

Solución (a): Para 200 g de un gas que contiene 44 g/mol, determinamos a partir de la ecuación (19.8) que

$$n = \frac{m}{M} = \frac{200\text{ g}}{44\text{ g/mol}}; \qquad n = 4.55\text{ mol}$$

Solución (b): Como el número de Avogadro N_A es el número de moléculas por mol, calculamos que el número de moléculas de gas en 4.55 moles de gas es

$$n = \frac{N}{N_A} \qquad \text{o} \qquad N = nN_A$$

$$N = (4.55\text{ mol})(6.023 \times 10^{23}\text{ moléculas/mol}); \quad N = 2.74 \times 10^{24}\text{ moléculas}$$

19.5 La ley del gas ideal

Sigamos adelante con la búsqueda de una ley más general de los gases. Si se sustituye el número de moles n para la masa m en la ecuación (19.5), podemos escribir

$$\frac{P_1V_1}{n_1T_1} = \frac{P_2V_2}{n_2T_2} \tag{19.9}$$

Esta ecuación representa la forma más útil de una ley general de los gases cuando se conocen todos los parámetros de los estados inicial y final, excepto una sola cantidad.

Una expresión alternativa de la ecuación (19.9) es

$$\frac{PV}{nT} = R \tag{19.10}$$

donde R se conoce como ***constante universal de los gases***. Si es posible evaluar R bajo ciertos valores conocidos de P, V, n y T, la ecuación (19.10) se puede usar directamente sin contar con ninguna información acerca de los estados inicial y final. El valor numérico para R, por supuesto, depende de las unidades elegidas para P, V, n y T. En unidades del SI, el valor es

$$R = 8.314\text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$$

La elección de otras unidades conduce a los siguientes valores equivalentes:

$$R = 0.0821\text{ L}\cdot\text{atm/(mol}\cdot\text{K)}$$
$$= 1.99\text{ cal/(mol}\cdot\text{K)}$$

Si la presión se mide en pascales y el volumen en metros cúbicos, se puede usar para la constante $R = 8.314$ J/(mol · K). Sin embargo, con frecuencia la presión se expresa en atmósferas y el volumen en litros. En lugar de efectuar las conversiones apropiadas, probablemente sea más sencillo usar la expresión $R = 0.0821$ L · atm/(mol · K).

La ecuación (19.10) se conoce como ***ley de los gases ideales***, y generalmente se escribe en la siguiente forma

$$PV = nRT \tag{19.11}$$

Otra forma útil de la ley de los gases ideales se basa en el hecho de que $n = m/M$, por lo que

$$PV = \frac{m}{M}RT \tag{19.12}$$

Siempre que la densidad de un gas real es razonablemente baja, la ley del gas ideal es válida para cualquier gas o incluso una mezcla de varios gases en tanto que sus moléculas estén separadas lo suficiente, se puede aplicar la ecuación (19.11), siendo n el número de moles.

Ejemplo 19.7 Determine el volumen de 1 mol de cualquier gas ideal en condiciones estándares de temperatura (273 K) y de presión (101.3 kPa).

Plan: Recuerde que 1 mol de cualquier gas contiene el mismo número de moléculas, así que mientras se trata al gas como un gas *ideal*, se puede usar la ecuación (19.11) para calcular su volumen. Como 1 mol está a una presión de 1 atm, usaremos 0.0821 L · atm/mol · K para R.

Solución: Al resolver para V en la ecuación (19.11), obtenemos

$$PV = nRT \qquad \text{o} \qquad V = \frac{nRT}{P}$$

$$V = \frac{(1 \text{ mol})[0.0821 \text{ L} \cdot \text{atm}/(\text{mol} \cdot \text{K})](273 \text{ K})}{1 \text{ atm}}$$

$$= 22.4 \text{ L o } 0.0224 \text{ m}^3$$

Por consiguiente, 1 mol de cualquier gas ideal a temperatura y presión estándares tiene un volumen de 22.4 L.

Ejemplo 19.8 ¿Cuántos gramos de oxígeno ocuparán un volumen de 1.6 m³ a una presión de 200 kPa y a una temperatura de 27°C?

Plan: Se necesitará determinar la masa molecular del oxígeno que es diatómico; es decir, cada molécula contiene dos átomos de oxígeno. Por tanto, hay 32 g/mol (M = 16 u + 16 u = 32 u). Usando la ley del gas ideal, podemos determinar la masa directamente a partir de la ecuación (19.12).

Solución: La temperatura absoluta es (27 + 273) o 300 K. Al sustituir se obtiene

$$PV = \frac{m}{M}RT \qquad \text{o} \qquad m = \frac{MPV}{RT}$$

$$m = \frac{(32 \text{ g/mol})(200 \times 10^3 \text{ Pa})(1.6 \text{ m}^3)}{[8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})](300 \text{ K})} = 4105.5 \text{ g}$$

$$m = 4\,105.5 \text{ g}$$

19.6 Licuefacción de un gas

Hemos definido un gas ideal como aquel cuyo comportamiento térmico no se ve afectado en lo absoluto por fuerzas de cohesión o por el volumen molecular. Si ese gas se comprime a temperatura constante, permanecerá como gas sin importar la presión a la cual se le someta. En otras palabras, obedecerá la ley de Boyle a cualquier temperatura. Las fuerzas de enlace necesarias para la licuefacción nunca están presentes.

Todos los gases reales están sometidos a fuerzas intermoleculares. Sin embargo, a bajas presiones y altas temperaturas, los gases reales se comportan en forma muy similar a un gas ideal. Se les aplica entonces la ley de Boyle porque las fuerzas intermoleculares en estas condiciones son prácticamente despreciables. Un gas real a altas temperaturas se puede comprimir dentro de un cilindro, como lo muestra la figura 19.4, aplicando presiones relativamente altas, sin que se produzca la licuefacción. Si se traza una gráfica del incremento de presión expresado como una función del volumen, se obtiene la curva A_1B_1. Observe la similitud entre esta curva y la que corresponde a un gas ideal, como se muestra en la figura 19.2.

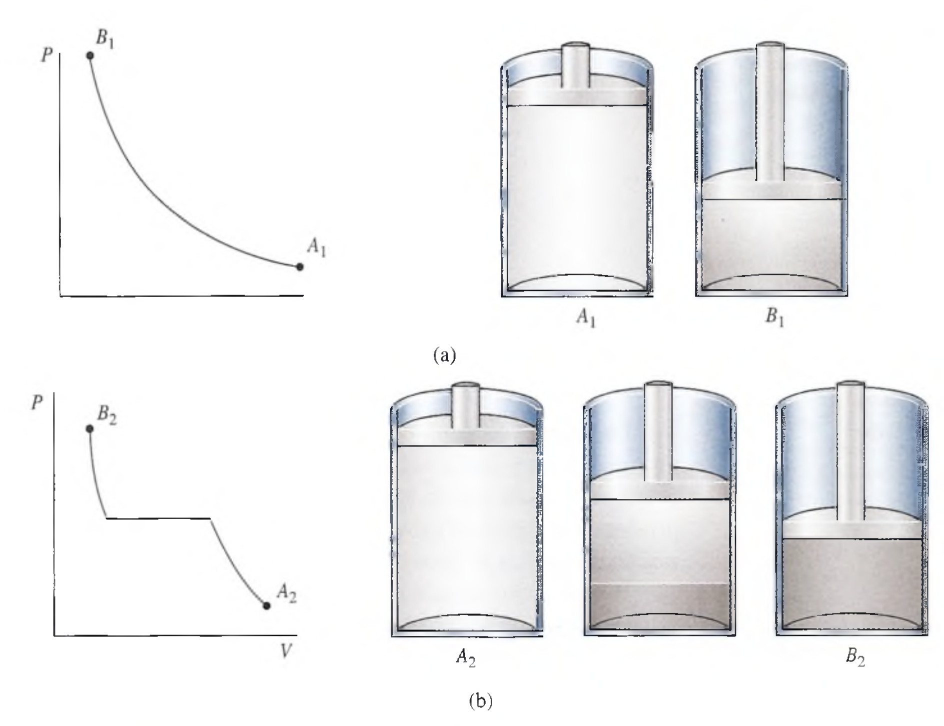


Figura 19.4 (a) Compresión de un gas ideal a cualquier temperatura o de un gas real a alta temperatura. (b) Licuefacción de un gas real cuando se comprime a bajas temperaturas.

Si el mismo gas se comprime a una temperatura mucho más baja, empezará a condensarse a una presión y un volumen determinados. Si se le comprime aún más, continuará la licuefacción del gas a una presión esencialmente constante, hasta el momento en que todo el gas se haya condensado. Al llegar a ese punto, una brusca elevación de la presión da como resultado una disminución ligera del volumen. El proceso completo se muestra gráficamente como la curva A_2B_2 que aparece en la figura 19.4.

Empecemos ahora a realizar la compresión a alta temperatura y diseñemos el experimento para temperaturas cada vez más bajas. Al final se alcanzará una temperatura en la cual el gas se empezará a licuar bajo compresión. A la temperatura más alta a la que se puede producir la licuefacción se le ha dado el nombre de ***temperatura crítica***.

La temperatura crítica de un gas es la temperatura por arriba de la cual el gas no se licuará, independientemente de la presión que se le aplique.

Si se desea licuar un gas cualquiera, primero debe enfriarse por debajo de su temperatura crítica. Antes de que se llegara a comprender este concepto, los científicos intentaban licuar oxígeno sometiéndolo a presiones extremas. Sus intentos fallaban debido a que la temperatura crítica del oxígeno es $-119°C$. Después de enfriar el gas por debajo de esta temperatura, se puede licuar fácilmente por medio de compresión.

19.7 Vaporización

En el capítulo 17 se estudió en detalle el proceso de vaporización en el cual se requiere una cantidad definida de calor para pasar de la fase líquida a la fase de vapor. Hay tres formas por las que puede ocurrir este cambio: (1) evaporación, (2) ebullición y (3) sublimación. Durante la evaporación, se presenta la vaporización en la superficie de un líquido mientras las moléculas con más energía abandonan la superficie. En el proceso de ebullición, el proceso de vaporización se presenta en el seno del líquido. La sublimación tiene lugar cuando un sólido se evapora sin pasar por la fase líquida. En cada uno de esos casos, el líquido o el sólido deben perder una cantidad de energía igual al calor latente de evaporación o ***sublimación***.

FÍSICA HOY

Por qué las máquinas Zamboni dejan un rastro de vapor

Las máquinas Zamboni, esas máquinas que quitan el desecho de hielo en las pistas de patinaje, dejan la superficie de hielo limpia y fresca. ¿Alguna vez se ha preguntado por qué el agua que extienden deja un rastro de vapor fresco? Esa agua tiene una temperatura de 180°F (82°C). Se preguntará por qué las máquinas extienden agua que está casi en su punto de ebullición. ¿Por qué no vierten agua muy fría? La respuesta es que la evaporación enfría la capa de agua caliente al punto de congelación muy rápido. Intente este experimento con bandejas de hielo: llene una con agua hirviendo y otra con agua fría de la llave. Coloque ambas en su congelador. Revíselas cada 15 minutos. ¿Cuál se congela más rápido? ¡El agua caliente! Ésta es la razón por la cual las máquinas Zamboni dejan rastros de vapor.

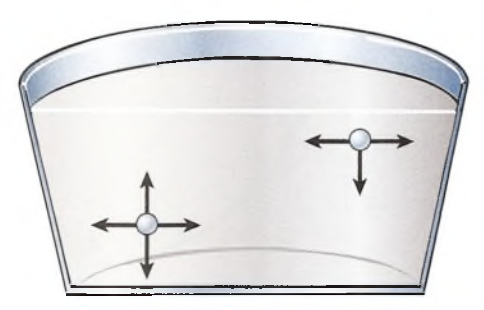


Figura 19.5 Una molécula cercana a la superficie de un líquido experimenta una fuerza neta hacia abajo. Únicamente las moléculas con más energía son capaces de superar esta fuerza y abandonar el líquido.

La teoría molecular de la materia supone que un líquido está formado por moléculas agrupadas muy cerca unas de otras. Estas moléculas tienen una energía cinética media que está relacionada con la temperatura del líquido. Sin embargo, debido a las colisiones que se producen al azar o al movimiento vibratorio, no todas las moléculas se mueven con la misma rapidez; algunas se mueven más rápidamente que otras.

Por el hecho de que las moléculas están muy cercanas entre sí, las fuerzas entre ellas son relativamente grandes. A medida que una molécula se aproxima a la superficie del líquido, como se muestra en la figura 19.5, experimenta una fuerza resultante que la empuja hacia abajo. La fuerza neta surge del hecho de que no existen moléculas del líquido encima de la superficie, que equilibren la atracción hacia abajo de las moléculas que se encuentran debajo de la superficie. Únicamente las partículas que se *mueven con mayor rapidez* pueden llegar a la superficie con la energía suficiente para sobrepasar las fuerzas de oposición. Se dice que estas moléculas se *evaporan* debido a que, al abandonar el líquido, se convierten en partículas de gas típicas. No han cambiado químicamente; la única diferencia entre un líquido y su propio vapor es la distancia que separa las moléculas.

En vista de que sólo las moléculas con mayor energía son capaces de separarse de la superficie, la energía cinética media de las partículas que permanecen en el líquido se reduce. Por lo tanto, la *evaporación es un proceso de enfriamiento.* (Si deja usted caer unas gotas de alcohol en el dorso de su mano, sentirá una sensación de enfriamiento.) La rapidez de evaporación es afectada por la temperatura del líquido, el número de moléculas por encima del líquido (la presión), el área de la superficie expuesta y el grado de ventilación presente.

19.8 Presión de vapor

Se llena parcialmente un recipiente de agua, como se aprecia en la figura 19.6. La presión que ejercen las moléculas por arriba de la superficie del agua se mide por medio de un manómetro de mercurio de tubo abierto. En la figura 19.6a hay tantas moléculas de aire en el interior del recipien-

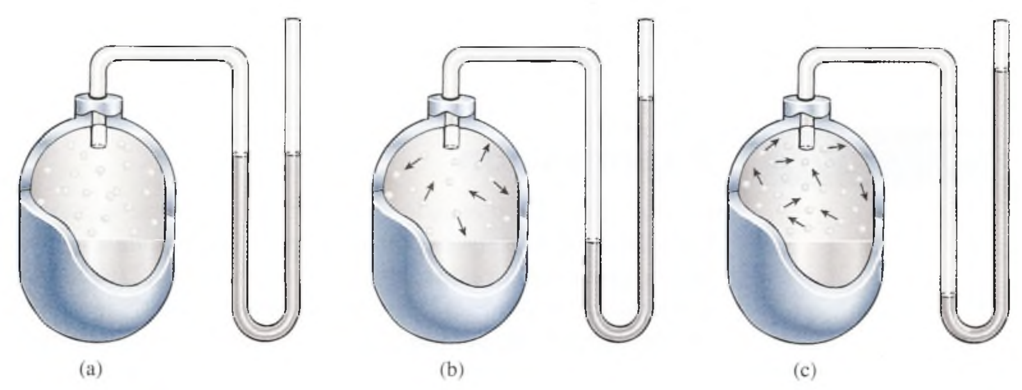


Figura 19.6 Medición de la presión de vapor de un líquido: (a) sólo la presión del aire, (b) presión de vapor parcial y (c) presión de vapor saturado.

te como las que existen en un volumen de aire igual fuera del recipiente. Es decir, la presión dentro del recipiente es igual a 1 atm, como lo indican los niveles iguales de mercurio en el manómetro.

Cuando una molécula del líquido con alta energía se desprende de la superficie, se transforma en una molécula de vapor y se mezcla con las moléculas de aire que se encuentran encima del líquido. Estas moléculas de vapor chocan con las moléculas de aire, con otras moléculas de vapor y contra las paredes del recipiente. Las moléculas adicionales de vapor son la causa de que se eleve la presión dentro del recipiente, como se ilustra en la figura 19.6b. Las moléculas de vapor también pueden rebotar contra el líquido, y allí son retenidas con moléculas en estado líquido. Este proceso recibe el nombre de ***condensación***. Al cabo de cierto tiempo, la rapidez de evaporación llega a ser igual a la rapidez de condensación y se produce una condición de equilibrio, como se aprecia en la figura 19.6c. En estas condiciones, se dice que el espacio situado arriba del líquido está *saturado*. A la presión ejercida por el vapor saturado contra las paredes del recipiente, además de la que ejercen las moléculas de aire, se le conoce como ***presión de vapor saturado***. Esta presión es característica de cada sustancia y depende de la temperatura, pero es independiente del volumen del vapor.

La presión de vapor saturado de una sustancia es la presión adicional ejercida por las moléculas de vapor sobre la sustancia y sus alrededores en condiciones de saturación.

Una vez obtenida la condición de saturación para una sustancia y su vapor a una temperatura determinada, la presión de vapor permanece esencialmente constante. Si la temperatura se incrementa, las moléculas del líquido adquieren más energía y la evaporación se produce con mayor rapidez. La condición de equilibrio persiste hasta que la rapidez de condensación se equilibra de nuevo con la rapidez de evaporación. Por lo tanto, la presión de vapor saturado de una sustancia aumenta al elevarse la temperatura.

La curva de la presión de vapor saturado correspondiente al agua aparece en la gráfica de la figura 19.7. Observe que la presión de vapor aumenta rápidamente con la temperatura. A la temperatura ambiente (20°C), es de 17.5 mm de mercurio aproximadamente; a 50°C, aumenta a 92.5 mm; y a 100°C es igual a 760 mm, o 1 atm. Este último punto es importante para establecer la diferencia entre ***evaporación*** y ***ebullición***.

Cuando un líquido hierve, se puede ver cómo se elevan las burbujas de su vapor desde el interior del líquido hacia la superficie. El hecho de que dichas burbujas sean estables y no se desintegren indica que la presión del interior de la burbuja es igual a la presión que existe fuera de ella. La presión del interior de la burbuja es presión de vapor a esa temperatura; la presión de afuera es la presión que existe a esa profundidad del líquido. En esta condición de equilibrio, la vaporización se realiza libremente en todo el líquido, dando lugar a una agitación del líquido.

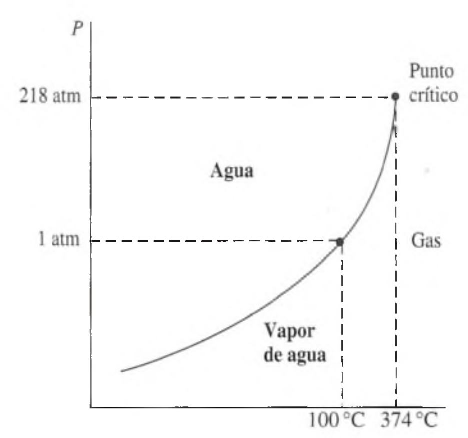


Figura 19.7 Curva de vaporización del agua. Cualquier punto de la curva representa condiciones de presión y de temperatura en las que el agua puede hervir. La curva termina abruptamente en la temperatura crítica, debido a que el agua sólo puede existir en forma de gas más allá de ese punto.

La ebullición se define como la vaporización dentro de un líquido cuando su presión de vapor es igual a la presión en el líquido.

Si la presión en la superficie del líquido es de 1 atm, como lo sería en un recipiente abierto, la temperatura a la cual ocurre la ebullición se conoce como *punto de ebullición normal* para ese líquido. El punto de ebullición normal del agua es 100°C por el hecho de que ésa es la temperatura a la cual la presión de vapor del agua es 1 atm (760 mm de mercurio). Si la presión sobre la superficie de cualquier líquido es menor que 1 atm, se alcanzará la ebullición a una temperatura inferior al punto de ebullición normal. Si la presión externa es mayor que 1 atm, la ebullición se iniciará a una temperatura más alta.

19.9 Punto triple

Hemos estudiado con detalle el proceso de vaporización y en la figura 19.7 se trazó una curva de vaporización para el agua. Esta curva se representó por la línea *AB* en el diagrama general de fase de la figura 19.8. Cualquier punto de esta curva representa una temperatura y una presión a las cuales el agua y su vapor pueden coexistir en equilibrio.

Se puede trazar una curva similar para las temperaturas y presiones a las cuales una sustancia en la fase sólida puede coexistir con su propia fase líquida. Una curva de este tipo se llama ***curva de fusión***. La curva de fusión para el agua está representada por la línea *AC* en el diagrama de fase. En cualquier punto de esta curva, la rapidez con la cual se funde el hielo es igual a la rapidez con la cual se congela el agua. Observe que a medida que la presión aumenta, la temperatura de fusión (o temperatura de congelación) se reduce.

Se puede trazar una tercera gráfica, llamada ***curva de sublimación***, para mostrar las temperaturas y presiones a las cuales un sólido puede coexistir con su propio vapor. La curva de sublimación del agua está representada por la curva *AD* en la figura 19.8.

Estudiemos ahora el diagrama de fase para el agua con más detalle con el fin de ilustrar la utilidad de este tipo de gráfico para cualquier sustancia. Las coordenadas de cualquier punto de la gráfica representan una presión particular P y una temperatura particular T. El volumen debe considerarse constante para cualquier cambio térmico indicado en la gráfica. Para cualquier punto que queda dentro de la horquilla, entre las curvas de vaporización y fusión, el agua existirá en su fase líquida. Las regiones correspondientes a sólido y vapor se indican también en el diagrama. El punto A, en el cual las tres curvas se intersecan, se llama ***punto triple*** para el agua. Este punto es la temperatura y la presión a la cual el hielo, el agua líquida y el vapor de agua coexisten en equilibrio. Se ha demostrado mediante cuidadosas mediciones que el punto triple para el agua es 0.01°C y 4.62 mm de mercurio (Hg).

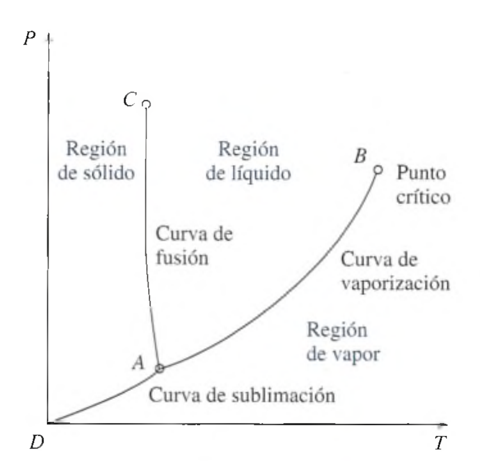


Figura 19.8 Diagrama de fases del punto triple para el agua o cualquier otra sustancia que se dilate al congelarse.

19.10 Humedad

El aire de nuestra atmósfera está compuesto en su mayor parte de nitrógeno y oxígeno, con pequeñas cantidades de vapor de agua y otros gases. A menudo es útil describir el contenido de vapor de agua de la atmósfera en términos de ***humedad absoluta***.

La humedad absoluta se define como la masa de agua por unidad de volumen de aire.

Por ejemplo, si cada metro cúbico de aire contiene 7 g de vapor de agua, la humedad absoluta es 7 g/m^3. Otras unidades que se usan para la humedad absoluta son libras por pie cúbico y granos por pie cúbico (7000 granos = 1 lb).

Un método más útil para expresar el contenido de vapor de agua en el aire consiste en comparar la presión de vapor real a una determinada temperatura, con la presión de vapor saturado a esa misma temperatura. La atmósfera está saturada cuando contiene toda el agua que le es posible contener a una cierta temperatura. La adición de más moléculas de vapor tan sólo da por resultado una cantidad igual de condensación.

La humedad relativa se define como la razón de la presión real de vapor del aire a la presión de vapor saturado a esa temperatura.

$$\textit{Humedad relativa} = \frac{\textit{Presión real de vapor}}{\textit{Presión de vapor saturado}} \qquad \textbf{(19.13)}$$

La ***humedad relativa*** se expresa generalmente como un porcentaje.

Si el aire de una habitación aún no está saturado, puede estarlo ya sea añadiendo más vapor de agua al aire o reduciendo la temperatura de la habitación hasta que sea suficiente con el vapor ya presente. La temperatura a la cual el aire debe enfriarse a presión constante para producir la saturación se llama ***punto de rocío***. Así, si se coloca hielo en un vaso de agua, las paredes exteriores del vaso se humedecerán cuando su temperatura llegue al punto de rocío. Para una temperatura y un punto de rocío determinados, la humedad relativa puede calcularse a partir de tablas de presión de vapor saturado. La tabla 19.1 ofrece una lista de presiones de vapor saturado para el agua a diversas temperaturas.

Tabla 19.1

Presión de vapor saturado para el agua

Temperatura		Presión	Temperatura		Presión
°C	°F	mmHg	°C	°F	mmHg
0	32	4.62	50	122	92.5
5	41	6.5	60	140	149.4
10	50	9.2	70	158	233.7
15	59	12.8	80	176	355.1
17	62.6	14.5	85	185	433.6
19	66.2	16.5	90	194	525.8
20	68	17.5	95	203	633.9
22	71.6	19.8	98	208.4	707.3
24	75.2	22.4	100	212	760.0
26	78.8	25.2	103	217.4	845.1
28	82.4	28.3	105	221	906.1
30	86	31.8	110	230	1074.6
35	95	42.2	120	248	1489.1
40	104	55.3	150	302	3570.5

Ejemplo 19.9 En un día claro, la temperatura del aire es 86°F, y el punto de rocío es 50°F. ¿Cuál es la humedad relativa?

Plan: Primero, calculamos la presión *real* de vapor (a 86°F) y luego encontramos el valor de la tabla para la presión de vapor *saturado* para el punto de rocío (50°F). La humedad relativa es la razón de la presión de saturación para 50°F respecto a la presión de saturación para 86°F.

Solución: Según la tabla 19.1, la presión del vapor saturado a 50°F es 9.2 mm y la presión del vapor saturado a 86°F es 31.8 mm. Por tanto, la humedad relativa es

$$\frac{9.2\text{ mm}}{31.8\text{ mm}} = 0.29$$

La humedad relativa es 29 por ciento.

Resumen y repaso

Es necesario conocer las propiedades térmicas de la materia para que sea posible aplicar las múltiples leyes expuestas en este capítulo. Las relaciones entre masa, temperatura, volumen y presión nos permiten explicar y predecir el comportamiento de los gases. Los principales conceptos estudiados en este capítulo se resumen a continuación.

- Una forma útil de la ley general de los gases que no incluye el uso de moles, se ha escrito sobre la base de que PV/mT es constante. Cuando un gas en el estado 1 cambia a otro estado 2, podemos escribir

$$\frac{P_1V_1}{m_1T_1} = \frac{P_2V_2}{m_2T_2}$$

P = presión $\quad$ V = volumen

m = masa $\quad$ T = temperatura absoluta

Cuando uno o varios de los parámetros m, P, T o V es constante, ese factor desaparece de ambos lados de la ecuación anterior. La *ley de Boyle*, la *ley de Charles* y la *ley de Gay-Lussac* representan los casos especiales siguientes:

$$P_1V_1 = P_2V_2; \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

- Al aplicar la ley general de los gases en cualquiera de sus formas, es preciso recordar que la presión se refiere a *presión absoluta* y la temperatura se refiere a *temperatura absoluta.*

$$\textit{Presión absoluta} = \textit{presión manométrica} + \textit{presión atmosférica}$$

$$T_K = t_C + 273 \qquad T_R = t_F + 460$$

Por ejemplo, la presión medida en un neumático de automóvil es de 30 lb/in^2 a 37°C. Estos valores deben ser ajustados antes de sustituirlos en las leyes de los gases:

$$P = 30 \text{ lb/in}^2 + 14.7 \text{ lb/in}^2 \qquad \text{(absoluta)}$$
$$T = 37°\text{C} + 273 = 310 \text{ K}$$

- Una forma más general de la ley de los gases se obtiene si usamos los conceptos de la masa molecular M y el número de moles n para un gas. El número de moléculas en 1 mol es el número de Avogadro N_A.

$$N_A = \frac{N}{n}$$

$$N_A = 6.023 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol} \qquad \textit{Número de Avogadro}$$

El número de moles se encuentra al dividir la masa de un gas (en gramos) entre su masa molecular M:

$$n = \frac{m}{M} \qquad \textit{Número de moles}$$

Con frecuencia se desea determinar la masa, la presión, el volumen o la temperatura de un gas en un solo estado. La ley de los gases ideales usa el concepto molar para establecer una ecuación más específica:

$$PV = nRT \qquad R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$$

Es conveniente señalar que el uso de la constante antes mencionada restringe las unidades de P, V, T y n aquellas que se incluyen en la constante.

- La *humedad relativa* se puede calcular con la ayuda de tablas de presión de vapor saturado, según la siguiente definición:

$$\textit{Humedad relativa} = \frac{\textit{Presión real de vapor}}{\textit{Presión de vapor saturado}}$$

Recuerde que la presión *real* de vapor a una temperatura en particular es igual que la presión de vapor *saturado* para la temperatura del punto de condensación. Tome como referencia el ejemplo 19.9.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

19.1. Señale la diferencia entre *estado* y *fase*.

19.2. Explique la ley de Boyle a partir de la teoría molecular de la materia.

19.3. Explique la ley de Charles a partir de la teoría molecular de la materia.

19.4. ¿Por qué se debe usar la temperatura absoluta en la ley de Charles?

19.5. Un tanque de acero cerrado se llena con un gas ideal y se calienta. ¿Qué sucede con (a) la masa, (b) el volumen, (c) la densidad y (d) la presión del gas?

19.6. Compruebe la exactitud de las siguientes ecuaciones que incluyen la densidad ρ de un gas ideal.

(a) $\dfrac{P_1}{\rho_1 T_1} = \dfrac{P_2}{\rho_2 T_2}$

(b) $\rho = \dfrac{PM}{RT}$

19.7. Suponga que queremos expresar la presión de un gas ideal en milímetros de mercurio y el volumen en centímetros cúbicos. Demuestre que la constante universal de los gases será igual a 6.23×10^4 mm · cm^3/mol · K.

19.8. Una mol de cualquier gas ocupa 22.4 litros a PTS. ¿Podríamos decir también que la misma masa de cualquier gas ocupará el mismo volumen? Explique su respuesta.

19.9. Señale la diferencia entre evaporación, ebullición y sublimación.

19.10. A partir de su experiencia, ¿esperaría usted que el alcohol tenga una presión de vapor más alta que el agua? ¿Por qué?

19.11. Explique el principio de operación de la olla de presión y la olla de vacío como utensilios de cocina.

19.12. ¿Un sólido puede tener presión de vapor? Explique su respuesta.

19.13. Si la evaporación es un proceso de enfriamiento, ¿la condensación es entonces un proceso de calentamiento? Explique su respuesta.

19.14. Explique los efectos de enfriamiento que produce la evaporación, en función del calor latente de vaporización.

19.15. Señale la diferencia entre un vapor y un gas, a partir del concepto de la temperatura crítica.

19.16. ¿Dónde tardará más un huevo en cocerse, en agua hirviendo, en el monte Everest o a la orilla del mar? ¿Por qué?

19.17. Se hace hervir vigorosamente agua en un frasco abierto. Cuando el frasco se retira del fuego y se tapa firmemente, la ebullición cesa. ¿Por qué? A continuación, el frasco cerrado se invierte y se coloca bajo un chorro de agua fría. La ebullición se reanuda. Explique la situación. En cuanto el frasco es retirado del agua, la ebullición cesa. Si el frasco se enfría, la ebullición vuelve a empezar. ¿Por cuánto tiempo puede continuar el proceso de hacer hervir el agua por medio del enfriamiento?

19.18. En un día frío, la humedad relativa dentro de una casa tiene el mismo valor que la humedad relativa fuera de la casa. ¿Son necesariamente iguales los puntos de rocío? Explique su respuesta.

19.19. Explique el significado de *presión crítica*.

19.20. ¿Es posible que exista hielo en equilibrio con agua hirviendo? Explique su respuesta.

19.21. La formación de humedad en la parte interior de las paredes y ventanas de una casa pueden ocasionar daños considerables. ¿A qué se debe esa humedad? Comente varias formas en que se puede reducir o evitar la formación de humedad.

19.22. Comente la formación de la niebla y las nubes. ¿Por qué las condiciones de niebla suelen intensificarse en otoño y al inicio de la primavera?

Problemas

Sección 19.3 Leyes generales de los gases

19.1. Un gas ideal ocupa un volumen de 4.00 m^3 a una presión absoluta de 200 kPa. ¿Cuál será la nueva presión si el gas es comprimido lentamente hasta 2.00 m^3 a temperatura constante?

Resp. 400 kPa

19.2. La presión absoluta de una muestra de un gas ideal es de 300 kPa a un volumen de 2.6 m^3. Si la presión disminuyera a 101 kPa a temperatura constante, ¿cuál sería el nuevo volumen?

19.3. Doscientos centímetros cúbicos de un gas ideal a 20°C se expande hasta un volumen de 212 cm^3 a presión constante. ¿Cuál es la temperatura final?

Resp. 37.6°C

19.4. La temperatura de una muestra de gas disminuye de 55 a 25°C bajo presión constante. Si el volumen inicial era de 400 mL, ¿cuál es el volumen final?

19.5. Un cilindro de acero contiene un gas ideal a 27°C. La presión *manométrica* es de 140 kPa. Si la temperatura del recipiente se eleva hasta 79°C, ¿cuál será la nueva presión *manométrica*? Resp. 182 kPa

19.6. La presión absoluta de una muestra de gas que estaba inicialmente a 300 K se duplica mientras el volumen permanece constante. ¿Cuál es la nueva temperatura?

19.7. Un cilindro de acero contiene 2.00 kg de un gas ideal. De un día para otro, la temperatura y el volumen se mantienen constantes, pero la presión absoluta disminuye de 500 a 450 kPa. ¿Cuántos gramos del gas se fugaron en ese lapso? Resp. 200 g

19.8. Cinco litros de un gas a 25°C tienen una presión absoluta de 200 kPa. Si la presión absoluta se reduce a 120 kPa y la temperatura sube a 60°C, ¿cuál es el volumen final?

19.9. Un compresor de aire recibe 2 m^3 de aire a 20°C y a la presión de una atmósfera (101.3 kPa). Si el compresor descarga en un depósito de 0.3 m^3 a una presión absoluta de 1 500 kPa, ¿cuál es la temperatura del aire descargado? Resp. 652.72 K

19.10. Un depósito de 6 L contiene una muestra de gas bajo una presión absoluta de 600 kPa y a la temperatura de 57°C. ¿Cuál será la nueva presión si la misma muestra de gas se coloca en un recipiente de 3 L a 7°C?

19.11. Si 0.8 L de un gas a 10°C se calientan a 90°C bajo presión constante, ¿cuál será el nuevo volumen? Resp. 1.03 L

19.12. La parte interior de un neumático de automóvil está bajo una presión manométrica de 30 lb/in^2 a 4°C. Después de varias horas, la temperatura del aire interior sube a 50°C. Suponiendo un volumen constante, ¿cuál es la nueva presión manométrica?

19.13. Una muestra de 2 L de gas tiene una presión absoluta de 300 kPa a 300 K. Si tanto la presión como el volumen se duplican, ¿cuál es la temperatura final? Resp. 1200 K

Sección 19.4 La masa molecular y la mol

19.14. ¿Cuántas moles hay en 600 g de aire? (M = 29 g/mol)

19.15. ¿Cuántas moles de gas hay en 400 g de nitrógeno gaseoso? (M = 28 g/mol.) ¿Cuántas moléculas hay en esta muestra? Resp. 14.3 mol, 8.60×10^{24} moléculas

19.16. ¿Cuál es la masa de una muestra de 4 mol de aire? (M = 29 g/mol)

19.17. ¿Cuántos gramos de hidrógeno gaseoso (M = g/mol) hay en 3.0 moles de hidrógeno? ¿Cuántos gramos de aire (M = g/mol) hay en 3.0 moles de aire? Resp. 6 g, 87 g

***19.18.** ¿Cuántas moléculas de hidrógeno gaseoso (M = g/mol) se necesitan para formar la misma masa que 4 g de oxígeno (M = 32 g/mol)? ¿Cuántas moles hay en cada muestra?

***19.19.** ¿Cuál es la masa de una molécula de oxígeno? (M = 32 g/mol). Resp. 5.31×10^{-26} kg

***19.20.** La masa molecular del CO_2 es 44 g/mol. ¿Cuál es la masa de una sola molécula de CO_2?

Sección 19.5 La ley de los gases ideales

19.21. Tres moles de un gas ideal tienen un volumen de 0.026 m^3 y una presión de 300 kPa. ¿Cuál es la temperatura del gas en grados Celsius? Resp. 39.7°C

19.22. Un depósito de 16 L contiene 200 g de aire (M = 29 g/mol) a 27°C. ¿Cuál es la presión absoluta de esta muestra?

19.23. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno gaseoso (M = 28 g/mol) llenarán un volumen de 2 000 L a una presión absoluta de 202 kPa y una temperatura de 80°C? Resp. 3.85 kg

19.24. ¿Cuál es el volumen ocupado por 8 g de gas nitrógeno (M = 28 g/mol) a temperatura y la presión estándar (PTS)?

19.25. Un frasco de 2 L contiene 2×10^{23} moléculas de aire (M = 29 g/mol) a 300 K. ¿Cuál es la presión absoluta del gas? Resp. 414 kPa

19.26. Un depósito de 2 m^3 contiene gas nitrógeno (M = 28 g/mol) bajo una presión manométrica de 500 kPa. Si la temperatura es de 27°C, ¿cuál es la masa del gas contenido en el depósito?

19.27. ¿Cuántas moles de gas hay en un volumen de 2000 cm^3 en condiciones de temperatura y presión normales (PTS)? Resp. 0.0893 mol

19.28. Un cilindro de 0.30 cm^3 contiene 0.27 g de vapor de agua (M = 18 g/mol) a 340°C. ¿Cuál es su presión absoluta, suponiendo que el vapor de agua es un gas ideal?

Sección 19.10 Humedad

19.29. Si la temperatura del aire es de 20°C y el punto de rocío es 12°C, ¿cuál es la humedad relativa? Resp. 60.8%

19.30. El punto de rocío es 20°C. ¿Cuál es la humedad relativa cuando la temperatura del aire es de 24°C?

19.31. La humedad relativa es 77% cuando la temperatura del aire es 28°C. ¿Cuál es el punto de rocío? Resp. 23.5°C

19.32. ¿Cuál es la presión del vapor de agua en el aire durante un día en el cual la temperatura es de 86°F y la humedad relativa es de 80%?

19.33. La temperatura del aire en una habitación durante el invierno es de 28°C. ¿Cuál es la humedad relativa si la humedad se empieza a formar sobre una ventana cuando la temperatura de su superficie es de 20°C? Resp. 61.8%

Problemas adicionales

19.34. Una muestra de gas ocupa 12 L a 7°C y bajo una presión absoluta de 102 kPa. Calcule su temperatura cuando el volumen se reduce a 10 L y la presión aumenta a 230 kPa.

19.35. Un neumático de tractor contiene 2.8 ft^3 de aire a una presión manométrica de 70 lb/in^2. ¿Qué volumen de aire a 1 atm de presión se requiere para llenar ese neumático si no cambian ni la temperatura ni el volumen? Resp. 16.1 ft^3

19.36. Un recipiente de 3 L se llena con 0.230 mol de un gas ideal a 300 K. ¿Cuál es la presión del gas? ¿Cuántas moléculas hay en esta muestra de gas?

19.37. ¿Cuántas moles de gas helio (M = 4 g/mol) hay en un depósito de 6 L cuando la presión es 2×10^5 Pa y la temperatura es de 27°C? ¿Cuál es la masa del helio? Resp. 0.481 mol, 1.92 g

19.38. ¿Cuántos gramos de aire (M = 29 g/mol) es necesario bombear en un neumático de automóvil para que tenga una presión manométrica de 31 lb/in^2? Suponga que el volumen del neumático es de 5000 cm^3 y su temperatura es de 27°C.

19.39. La temperatura del aire dentro de un automóvil es de 26°C. El punto de rocío es 24°C. ¿Cuál es la humedad relativa dentro del vehículo? Resp. 88.9%

19.40. La lente de una cámara conserva su transparencia cuando la temperatura ambiente es de 71.6°F y la humedad relativa es de 88%. ¿Cuál es la temperatura más baja de la lente a la cual ésta no se empaña todavía a causa de la humedad?

***19.41.** ¿Cuál es la densidad del gas oxígeno (M = 32 g/mol) a una temperatura de 23°C y a la presión atmosférica? Resp. 1.317 kg/m^3

***19.42.** Un depósito de 5000 cm^3 está lleno de dióxido de carbono (M = 44 g/mol) a 300 K y 1 atm de presión. ¿Cuántos gramos de CO_2 se pueden agregar al depósito si la presión absoluta máxima es de 60 atm y no hay cambio alguno de temperatura?

***19.43.** La densidad de un gas desconocido a temperatura y presión estándar (PTS) es de 1.25 kg/m^3. ¿Cuál es la densidad de este gas a 18 atm y 60°C? Resp. 18.4 kg/m^3

Preguntas para la reflexión crítica

***19.44.** Un depósito con 14 L de capacidad contiene gas helio a 24°C bajo una presión manométrica de 2700 kPa. (a) ¿Cuál será el volumen de un globo lleno de este gas si el helio se expande a una presión absoluta interna de 1 atm y la temperatura cae a −35°C? (b) Suponga ahora que el sistema regresa a su temperatura original (24°C). ¿Cuál es el volumen final del globo? Resp. (a) 310 L, (b) 387 L

***19.45.** Un tanque de acero está lleno de oxígeno. Al atardecer, cuando la temperatura es de 27°C, el manómetro en la parte superior del depósito indica una presión de 400 kPa. Durante la noche se produce una fuga en el depósito. A la mañana siguiente se observa que la presión manométrica es de sólo 300 kPa y que la temperatura es de 15°C. ¿Qué porcentaje del gas original permanece dentro del depósito?

***19.46.** Un frasco de 2 L está lleno de nitrógeno (M = 28 g/mol) a 27°C y 1 atm de presión absoluta. Se abre una llave de paso en la parte superior del frasco para que entre en contacto con el aire y el sistema se calienta hasta una temperatura de 127°C. Entonces se cierra la llave de paso y se deja que el sistema vuelva a la temperatura inicial de 27°C. ¿Qué masa de nitrógeno hay en el frasco? ¿Cuál es la presión final? Resp. 1.71 g, 0.750 atm

***19.47.** ¿Cuál es el volumen de 8 g de dióxido de azufre (M = 64 g/mol) si están bajo una presión absoluta de 10 atm y una temperatura de 300 K? Si 10^{20} moléculas escapan de este volumen cada segundo, ¿cuánto tiempo tardará la presión en reducirse a la mitad?

***19.48.** Un frasco contiene 2 g de helio (M = 4 g/mol) a 57°C y 12 atm de presión absoluta. Entonces la temperatura baja a 17°C y la presión cae a 7 atm. ¿Cuántos gramos de helio han escapado del recipiente?

Resp. 1.13 L, 0.672 g

***19.49.** ¿Cuál debe ser la temperatura del aire dentro de un globo de aire caliente para que su masa sea 0.97 veces la de un volumen igual de aire a la temperatura de 27°C?

20 Termodinámica



Las máquinas térmicas, como la que impulsa a esta locomotora, funcionan en un ciclo que produce trabajo resultante a partir del calor suministrado. Los procesos termodinámicos implícitos en tal conversión son la materia del presente capítulo. (*Fotografía © vol. 247/Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará mediante definiciones y ejemplos que ha comprendido la *primera* y la *segunda ley de la termodinámica.*
2. Definirá y ofrecerá ejemplos ilustrados de procesos *adiabáticos, isocóricos, isobáricos* e *isotérmicos.*
3. Escribirá y aplicará una relación para determinar la *eficiencia ideal* de una máquina térmica.
4. Definirá el *coeficiente de rendimiento* para un refrigerador y resolverá problemas de refrigeración similares a los expuestos en el texto.

La ***termodinámica*** se ocupa de la transformación de la energía térmica en energía mecánica y del proceso inverso, la conversión de trabajo en calor. Puesto que casi toda la energía disponible de las materias primas se libera en forma de calor, es fácil comprender por qué la termodinámica desempeña un papel tan importante en la ciencia y en la tecnología.

En este capítulo estudiaremos dos leyes fundamentales que deben cumplirse en todos los casos en que la energía térmica se utiliza para realizar trabajo. La primera es simplemente otra forma de postular el principio de la conservación de la energía. La segunda ley impone restricciones en torno al empleo eficiente de la energía disponible.

20.1 Calor y trabajo

La equivalencia de calor y trabajo como dos formas de energía ha quedado establecida con toda claridad. Rumford destruyó la teoría del calórico al demostrar que es posible extraer calor de un sistema por tiempo indefinido, siempre que se le suministre trabajo externo al sistema. Joule dijo la última palabra cuando demostró la equivalencia mecánica del calor.

El trabajo, lo mismo que el calor, supone la transferencia de energía, pero existe una diferencia importante entre estos dos términos. En mecánica definimos el ***trabajo*** como una cantidad escalar, igual en magnitud al producto de una fuerza por un desplazamiento. La temperatura no interviene en esta definición. El ***calor***, por otra parte, es energía que fluye de un cuerpo a otro a causa de la diferencia de temperatura. Una condición indispensable para que se transfiera calor es que exista una diferencia de temperatura. El *desplazamiento* es la condición necesaria para que se realice un trabajo.

Lo relevante en este análisis es reconocer que tanto el calor como el trabajo representan cambios que ocurren en un proceso. Generalmente estos cambios van acompañados de una variación en la energía interna. Considere las dos situaciones que se ilustran en la figura 20.1. En la figura 20.1a la energía interna del agua aumenta debido a que se efectúa trabajo mecánico. En la figura 20.1b la energía interna del agua aumenta debido a un flujo de calor.

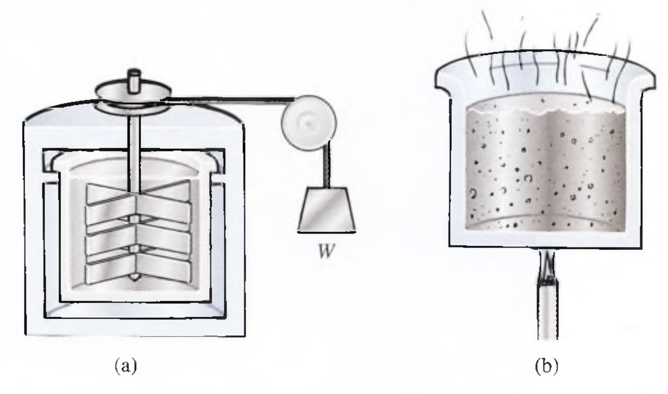


Figura 20.1 Aumento de la energía interna de un sistema (a) realizando trabajo y (b) suministrando calor al sistema.

20.2 Función de la energía interna

Al estudiar las transformaciones de calor en trabajo o, viceversa, de trabajo en calor es útil exponer el concepto de *sistema* termodinámico y sus *alrededores*. Entendemos por *sistema* un conjunto de moléculas u objetos en los que se centra nuestra atención. Es común describirlo por su masa, presión, volumen y temperatura; en cierto modo, está contenido por sus *alrededores*. Por ejemplo, en un motor de gasolina, el sistema consta de la gasolina combustible; los alrededores son los pistones, las paredes del cilindro, el sistema de escape y otros elementos.

Se dice que un sistema se halla en ***equilibrio termodinámico*** si no hay una fuerza resultante que actúe sobre el sistema y si la temperatura del sistema es la misma que la de sus alrededores. Esta condición requiere que no se realice trabajo alguno ni sobre el sistema ni por el sistema, y que no haya ningún intercambio de calor entre el sistema y sus alrededores. En estas condiciones, el sistema posee una energía interna definida U. Su *estado termodinámico* puede describirse mediante tres coordenadas: (1) su presión), (2) su volumen V y (3) su temperatura T. Cada vez que dicho sistema absorba o libere energía, ya sea en forma de calor o de trabajo, alcanzará un nuevo estado de equilibrio, de modo que su energía siempre se conserve.

En la figura 20.2 vamos a considerar un proceso termodinámico en el que un sistema es obligado a cambiar de un estado de equilibrio 1 a un estado de equilibrio 2. En la figura 20.2a el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico con una energía interna inicial U_1 y coordenadas termodinámicas (P_1, V_1, T_1). En la figura 20.2b el sistema reacciona con sus alrededores. El calor Q puede ser absorbido por el sistema o liberado a su ambiente. La transferencia de calor se considera positiva para el calor de entrada y negativo para el de salida. El calor neto *absorbido* por

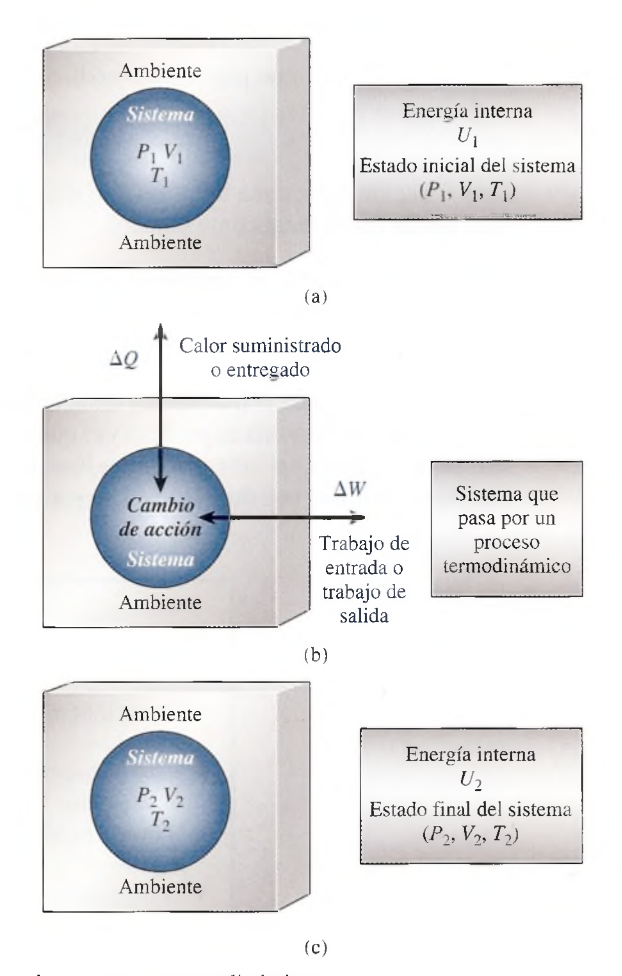


Figura 20.2 Esquema de un proceso termodinámico.

el sistema se representa por ΔQ. El trabajo W puede ser realizado *por* el sistema, *sobre* el sistema o ambas cosas. El trabajo de salida se considera positivo y el de entrada negativo. Por tanto, ΔW representa el trabajo neto realizado *por* el sistema (trabajo de salida). En la figura 20.2c el sistema ha alcanzado su estado final 2 y de nuevo está en equilibrio, con una energía interna final U_2. Sus nuevas coordenadas termodinámicas son (P_2, V_2, T_2).

Puesto que la energía tiene que conservarse, el cambio en la energía interna

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

debe representar la diferencia entre el calor neto ΔQ absorbido por el sistema y el trabajo neto ΔW que realiza el sistema sobre sus alrededores.

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W \qquad \textbf{(20.1)}$$

En consecuencia, el cambio en energía interna se define exclusivamente en términos de las cantidades mensurables calor y trabajo. La ecuación (20.1) establece la existencia de una ***función de energía interna*** *U que se determina mediante las coordenadas termodinámicas de un sistema*. Su valor en el estado final menos su valor en el estado inicial representa el cambio en energía del sistema. Puesto que la temperatura está relacionada con la energía interna, generalmente es cierto que un aumento o una disminución de la energía interna también origina un incremento o una reducción de la temperatura.

20.3 Primera ley de la termodinámica

La *primera ley de la termodinámica* es simplemente una nueva exposición del principio de la conservación de la energía:

La energía no puede crearse o destruirse, sólo transformarse de una forma a otra.

Al aplicar esta ley a un proceso termodinámico se observa, a partir de la ecuación (20.1), que

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad \textbf{(20.2)}$$

Esta ecuación representa un postulado matemático de la ***primera ley de la termodinámica***, la cual puede enunciarse como sigue:

Primera ley de la termodinámica: en cualquier proceso termodinámico, el calor neto absorbido por un sistema es igual a la suma del trabajo neto que éste realiza y el cambio de su energía interna.

Cuando se aplica la primera ley de la termodinámica es preciso reconocer que el calor Q suministrado en un sistema es positivo y el que expulsa o pierde el sistema, negativo. El trabajo que realiza un sistema es positivo; el que se hace sobre el sistema, negativo. Un aumento de la energía interna es positivo; una disminución, negativa. En la figura 20.3 se resumen tales convenciones.

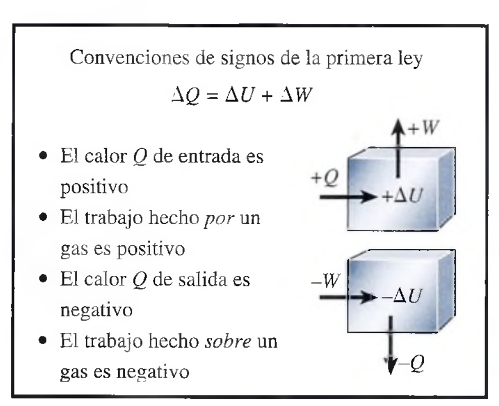


Figura 20.3 Convención de signos de la primera ley de la termodinámica.

Por ejemplo, si un gas absorbe 800 J de calor y realiza un trabajo neto de 200 J mientras expulsa 300 J de calor en el proceso, se observa que el calor neto de entrada es

$$\Delta Q = 800 \text{ J} - 300 \text{ J} = 500 \text{ J}$$

Como $\Delta W = 200$ J, el cambio de la energía interna se determina a partir de la ecuación (20.2)

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 500 \text{ J} - 200 \text{ J} \quad \text{o} \quad \Delta U = +300 \text{ J}$$

El valor positivo indica un *incremento* de la energía interna del sistema.

Ejemplo 20.1

Una máquina térmica realiza 240 J de trabajo durante el cual su energía interna *disminuye* en 400 J. ¿Cuál será el intercambio de calor neto de este proceso?

Plan: La energía interna disminuye, así que ΔU es negativo; el trabajo lo efectúa un motor, así que ΔW es positivo. La magnitud y el signo del intercambio de energía térmica ΔQ se halla con base en la primera ley de la termodinámica.

Solución: Al sustituir $\Delta U = -400$ J y $\Delta W = +240$ J se obtiene

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = (-400 \text{ J}) + (240 \text{ J})$$
$$= -400 \text{ J} + 240 \text{ J} = -160 \text{ J}$$

El signo negativo del intercambio de calor indica que el calor neto es *expulsado* por el sistema. Si no hay cambio de fase, la temperatura del sistema disminuirá.

20.4 Procesos isobáricos y el diagrama *P*-*V*

Resulta aleccionador estudiar los cambios de energía inherentes a los procesos termodinámicos analizando un gas encerrado en un cilindro equipado con un émbolo móvil y sin fricción. Consideremos el trabajo realizado por el gas que se dilata de la figura 20.4a. El émbolo tiene un área de sección transversal A y descansa sobre una columna de gas con una presión P. El calor puede fluir hacia dentro o fuera del gas a través de las paredes del cilindro. Es posible realizar trabajo sobre el gas o que éste lo realice empujando el émbolo hacia abajo; también es posible que el gas efectúe trabajo a medida que se dilata hacia arriba.

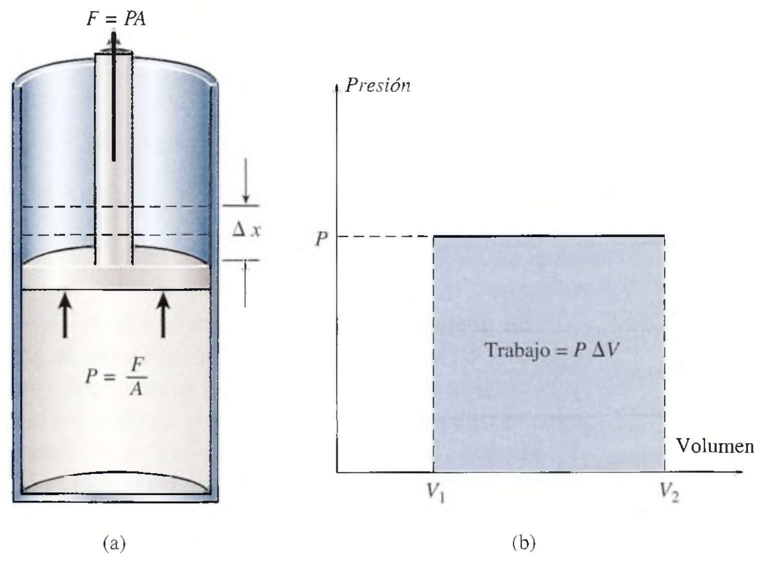


Figura 20.4 (a) Cálculo del trabajo realizado por un gas que se dilata a presión constante. (b) El trabajo es igual al área debajo de la curva en un diagrama *P*-*V*.

Consideremos primero el trabajo efectuado por el gas cuando se dilata a una presión constante ($P = F/A$). La fuerza F ejercida por el gas sobre el émbolo será igual al producto de la presión P por el área A del émbolo

$$F = PA$$

Recuerde que el *trabajo* equivale al producto de la fuerza por el desplazamiento paralelo. Si el émbolo se mueve hacia arriba a lo largo de una distancia Δx, el trabajo realizado será

$$\Delta W = F\,\Delta x = (PA)\Delta x$$

Pero el aumento del volumen ΔV del gas es simplemente $A\,\Delta x$, así que podemos reordenar los factores de arriba para determinar que el trabajo hecho por un gas que se dilata a presión constante está dado por

$$\Delta W = P\Delta V \qquad \textbf{(20.3)}$$

En otras palabras, el trabajo neto es igual al producto de la presión constante por el cambio de volumen. Éste es un ejemplo de lo que se denomina un ***proceso isobárico***. Cabe señalar que el cambio de volumen ΔV es el *valor final* menos el *inicial*, de modo que una disminución del volumen resulta en trabajo negativo, en tanto que un aumento en trabajo positivo.

Un proceso isobárico es un proceso termodinámico que sucede a presión constante.

El proceso se muestra gráficamente en la figura 20.4b, donde se traza el incremento de volumen en función de la presión. Esta representación, llamada ***diagrama P-V***, es de gran utilidad en la termodinámica. En el ejemplo anterior, la presión era constante, por lo que la gráfica es una línea recta. Observe que el *área* bajo la curva (o recta en este caso) equivale a

$$\text{Área} = P(V_2 - V_1) = P\,\Delta V$$

que también es igual al trabajo hecho por el gas que se dilata. Esto nos lleva a un principio importante:

Cuando un proceso termodinámico implica cambios en el volumen, en la presión o en ambos factores, el trabajo realizado por el sistema es igual al área bajo la curva en un diagrama *P-V*.

Ejemplo 20.2

Suponga que el gas dentro del cilindro de la figura 20.4 se dilata a una presión constante de 200 kPa, en tanto que su volumen aumenta de 2×10^{-3} m^3 a 5×10^{-3} m^3. ¿Qué trabajo realiza el gas?

Solución: El trabajo hecho es igual a la presión constante por el cambio de volumen

$$\text{Trabajo} = (200 \times 10^3 \text{ Pa})(5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3)$$
$$\text{Trabajo} = 600 \text{ J}$$

En general, la presión no será constante durante el desplazamiento de un émbolo. Por ejemplo, en la carrera del pistón de un motor de gasolina, el fluido se enciende a alta presión, y la presión disminuye cuando el pistón se desplaza hacia abajo. El diagrama *P-V* en este caso es una curva en declive, como aparece en la figura 20.5a. El volumen aumenta de V_1 a V_2, mientras la presión disminuye de P_1 a P_2. Para calcular el trabajo realizado en un proceso de ese tipo debemos recurrir al cálculo o a un análisis gráfico. Si el área bajo la curva puede estimarse de forma gráfica, entonces el trabajo también puede determinarse.

En la figura 20.5 puede demostrarse que el área bajo la curva es igual al trabajo hecho, cuando la presión no es constante. El área del estrecho rectángulo sombreado representa el trabajo efectuado por el gas que se expande en un incremento ΔV_i bajo la presión constante P_i.

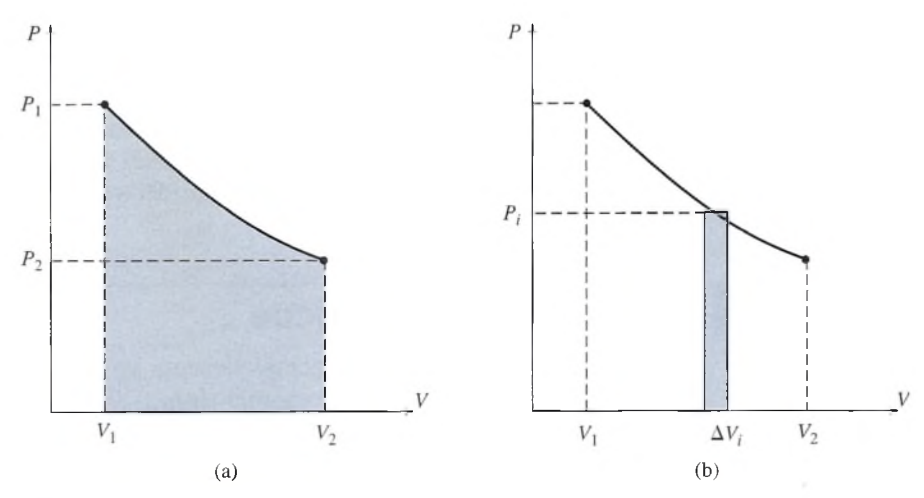


Figura 20.5 Cálculo del trabajo realizado por un gas que se expande a varias presiones.

Si el área bajo toda la curva se divide en varios de estos rectángulos, podemos sumar todos los productos $P_i \Delta V_i$ con el fin de obtener el trabajo total. Por tanto, el trabajo total es simplemente el área bajo el diagrama P-V entre los puntos V_1 y V_2 sobre el eje correspondiente al volumen.

20.5 Caso general para la primera ley

La primera ley de la termodinámica establece que la energía debe conservarse en cualquier proceso termodinámico. En la formulación matemática

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta U$$

hay tres cantidades que pueden sufrir cambios. El proceso más general es aquel en el que participan las tres cantidades. Por ejemplo, el fluido de la figura 20.5 se dilata mientras está en contacto con una flama. Considerando el gas como un sistema, hay una transferencia neta de calor ΔQ

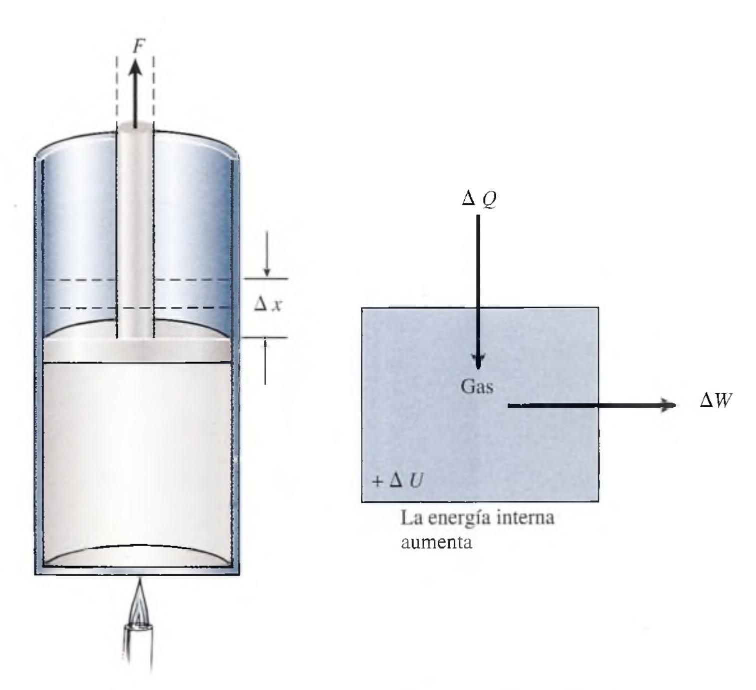


Figura 20.6 Parte de la energía ΔQ suministrada al gas por la flama resulta en trabajo externo ΔW. El resto incrementa la energía interna ΔU del gas.

impartida al gas. Esta energía se usa de dos formas: (1) la energía interna ΔU del gas aumenta debido a una parte de la energía térmica de entrada, y (2) el gas realiza una cantidad de trabajo ΔW sobre el émbolo, que equivale al resto de la energía disponible.

Surgen casos especiales de la primera ley cuando una o más de las tres cantidades —ΔQ, ΔW o ΔU— no sufren cambios. En estos casos, la primera ley se simplifica de modo considerable. En las secciones 20.6 a 20.8 consideraremos algunos de estos procesos especiales.

20.6 Procesos adiabáticos

Suponga que hay un sistema completamente aislado de sus alrededores, de modo que no puede haber un intercambio de energía térmica Q. Cualquier proceso que ocurra totalmente dentro, como en una cámara aislada, se denomina ***proceso adiabático*** y se dice que el sistema está rodeado por paredes *adiabáticas*.

> Un proceso adiabático es aquel en el que no hay intercambio de energía térmica ΔQ entre un sistema y sus alrededores.

Al aplicar la primera ley a un proceso en el que $\Delta Q = 0$ se obtiene

$$\Delta W = -\Delta U \qquad \textit{Adiabático} \qquad \textbf{(20.4)}$$

La ecuación (20.4) nos muestra que en todo proceso adiabático, el trabajo se realiza a *costa* de la energía interna. Generalmente, la disminución de energía térmica va acompañada de un descenso en la temperatura.

Como ejemplo de un proceso adiabático, considere la figura 20.7, donde un émbolo se eleva por la acción de un gas que se expande. Si las paredes del cilindro se aíslan y la dilatación ocurre con rapidez, el proceso será aproximadamente adiabático. A medida que el gas se expande, efectúa trabajo sobre el émbolo, pero pierde energía interna y experimenta una caída en la temperatura. Si el proceso se invierte forzando al émbolo a descender, entonces el trabajo se realizará *sobre* el gas ($-\Delta W$) y habrá un incremento en la energía interna (ΔU), de modo que

$$-\Delta W = +\Delta U$$

En este ejemplo la temperatura se elevará.

Otro ejemplo de un proceso adiabático que es útil en el ramo de la refrigeración industrial es el que se conoce como ***proceso de estrangulación***.

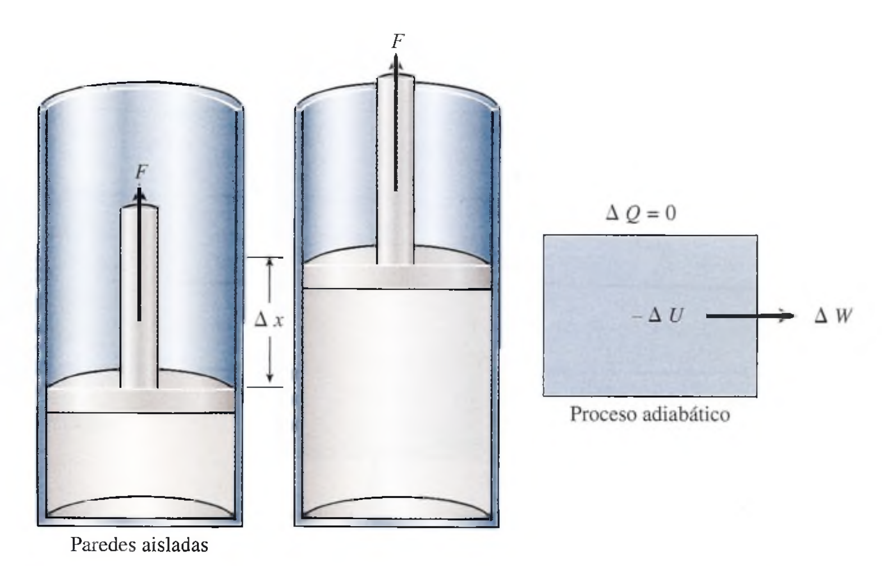


Figura 20.7 En un proceso adiabático no hay transferencia de calor y el trabajo se lleva a cabo a *costa* de la energía interna.

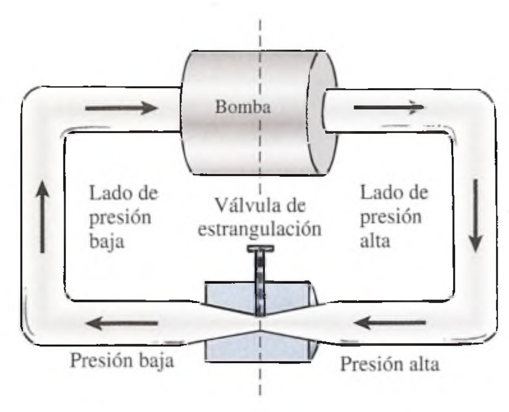


Figura 20.8 El proceso de estrangulación.

> Un proceso de estrangulación es aquel en el que el fluido a alta presión se filtra adiabáticamente, ya sea a través de una pared porosa o de una abertura estrecha, hacia una región de baja presión.

Considere un gas que circula, impulsado por una bomba, a través del aparato ilustrado en la figura 20.8. El gas que proviene del lado de la bomba donde la presión es alta es forzado a cruzar una constricción estrecha, llamada *válvula de estrangulación*, para pasar al lado de presión baja. La válvula está perfectamente aislada, de modo que el proceso es adiabático y $\Delta Q = 0$. De acuerdo con la primera ley, $\Delta W = -\Delta U$, y el trabajo neto realizado por el gas al pasar a través de la válvula se efectúa a expensas de la energía interna. En refrigeración, un líquido refrigerante sufre una caída de temperatura y una vaporización parcial como resultado del proceso de estrangulamiento.

20.7 Procesos isocóricos

Otro caso especial de la primera ley se presenta cuando no se realizó trabajo, ni *por* el sistema ni *sobre* el sistema. Este tipo de proceso se conoce como ***proceso isocórico***. También recibe el nombre de ***proceso isovolumétrico*** porque no puede haber cambio de volumen sin la realización de trabajo.

> Un proceso isocórico es aquel en el que el volumen del sistema permanece constante.

Al aplicar la primera ley a un proceso en el que $\Delta W = 0$ se obtiene

$$\Delta Q = \Delta U \qquad \textit{Isocórico} \qquad \textbf{(20.5)}$$

Por tanto, en un proceso isocórico toda la energía térmica absorbida por un sistema incrementa su energía interna. En este caso, generalmente hay un incremento en la temperatura del sistema.

Un proceso isocórico se presenta cuando se calienta agua en un recipiente a volumen fijo, como se muestra en la figura 20.8. A medida que se suministra calor, el aumento de la energía interna resulta en una elevación de la temperatura del agua hasta que empieza a hervir. Si se continúa incrementando la energía interna, se pone en marcha el proceso de vaporización. Sin embargo, el volumen del sistema, formado por el agua y su vapor, permanece constante y no se realiza trabajo externo.

Cuando se retira la flama, el proceso se invierte a medida que el calor deja el sistema a través del fondo del cilindro. El vapor de agua se condensará y la temperatura del agua resultante descenderá hasta igualar la temperatura ambiente. Este proceso representa una pérdida de calor y el correspondiente descenso de la energía interna, pero, nuevamente, no se realiza trabajo.

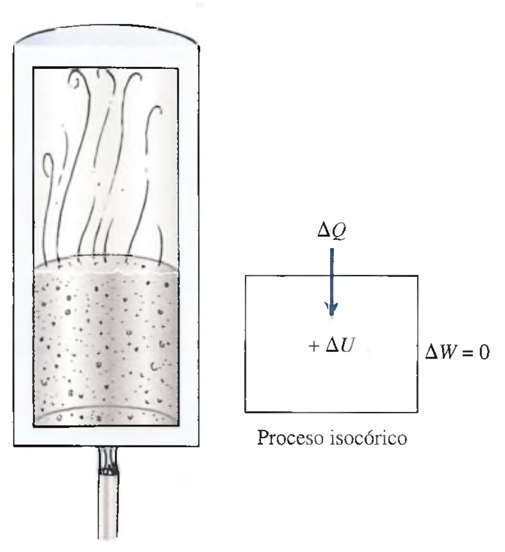


Figura 20.9 En un proceso isocórico, el volumen del sistema (agua y vapor) permanece constante.

20.8 Proceso isotérmico

Es posible que la presión y el volumen de un gas varíen sin que cambie la temperatura. En el capítulo 19 estudiamos la ley de Boyle para describir cambios de volumen y presión durante dichos procesos. Un gas puede comprimirse en un cilindro de forma tan lenta que prácticamente permanece en equilibrio térmico con sus alrededores. La presión aumenta a medida que el volumen disminuye, pero la temperatura es prácticamente constante.

> Un proceso isotérmico es aquel en el que la temperatura del sistema permanece constante.

Si no hay cambio de fase, una temperatura constante indica que no hay cambio en la energía interna del sistema. Al aplicar la primera ley a un proceso en el que $\Delta U = 0$ se obtiene

$$\Delta Q = \Delta W \qquad \textit{Isotérmico} \qquad \textbf{(20.6)}$$

Por tanto, en un ***proceso isotérmico*** toda la energía absorbida por un sistema se convierte en trabajo de salida.

20.9 Segunda ley de la termodinámica

Cuando nos frotamos las manos vigorosamente, el trabajo hecho contra la fricción incrementa la energía interna y ocasiona una elevación de temperatura. El aire de los alrededores constituye un gran depósito a una temperatura más baja, y la energía térmica se transfiere al aire sin que éste cambie su temperatura de manera considerable. Cuando dejamos de frotarnos, nuestras manos vuelven a su estado original. De acuerdo con la primera ley de la termodinámica, la energía mecánica se ha transformado en calor con una eficiencia de 100%.

$$\Delta W = \Delta Q$$

Este tipo de transformación puede continuar indefinidamente en tanto se suministre trabajo.

Consideremos ahora el proceso inverso. ¿Es posible convertir la energía térmica en trabajo con una eficiencia de 100%? En el ejemplo anterior, ¿es posible capturar todo el calor transferido al aire y hacerlo volver a nuestras manos, provocando que ellas se froten indefinidamente en forma espontánea? En un día de frío invernal, este proceso favorecería a los cazadores de manos frías. Por desgracia, tal proceso no puede ocurrir, aun cuando no infrinja la primera ley. Tampoco es posible recuperar todo el calor perdido al frenar un automóvil con el propósito de que las ruedas empiecen a girar de nuevo.

Veremos que la conversión de energía térmica en trabajo mecánico es un proceso de pérdidas. La primera ley de la termodinámica señala que no podemos tener ganancias en un experimento de ese tipo. Dicho de otro modo, es imposible conseguir más trabajo por parte de un sistema que el calor que se le suministra. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de seguir frenando. Es obvio que necesitamos otra regla que establezca que no es posible convertir el 100 por ciento de la energía térmica en trabajo útil. Esta regla constituye el fundamento de la ***segunda ley de la termodinámica***.

Segunda ley de la termodinámica: es imposible construir una máquina que, funcionando de manera continua, no produzca otro efecto que la extracción de calor de una fuente y la realización de una cantidad *equivalente* de trabajo.

Para profundizar más y hacer más aplicable este principio, suponga que estudiamos el funcionamiento y la eficiencia de máquinas térmicas. Un sistema concreto puede ser un motor de gasolina, un motor de propulsión, una máquina de vapor o incluso el cuerpo humano. El funcionamiento de una máquina térmica se describe mejor por medio de un diagrama similar al que se muestra en la figura 20.9. Durante la operación de una máquina general de este tipo ocurren tres procesos:

1. Una cantidad de calor Q_{ent} se suministra a la máquina desde un recipiente a alta temperatura T_{ent}.
2. La máquina realiza un trabajo mecánico W_{sal} mediante la utilización de una parte del calor de entrada.
3. Una cantidad de calor Q_{sal} se libera al recipiente de baja temperatura T_{sal}.

La sustancia de trabajo empieza en un estado termodinámico específico descrito por su temperatura, presión, volumen y número de moles. Pasa por una serie de procesos y vuelve a su estado original. En este proceso cíclico, las energías internas inicial y final son iguales y $\Delta U = 0$. Por consiguiente, la primera ley de la termodinámica indica que el trabajo neto realizado en un ciclo completo está dado por

Trabajo neto = calor de entrada − calor de salida

$$\Delta W = Q_{ent} - Q_{sal} \qquad \textbf{(20.7)}$$

Si construimos un diagrama *P-V* para un motor que funcione en un ciclo completo, se formará un bucle cerrado y el área dentro de él será igual al trabajo neto realizado por el motor. Todas las máquinas térmicas y los refrigeradores funcionan de tal modo cíclico.

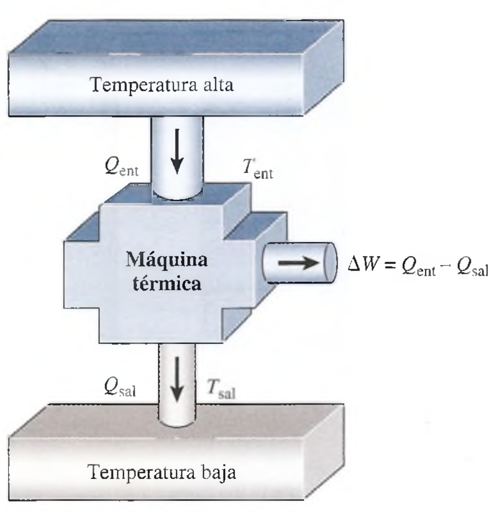


Figura 20.10 Diagrama de una máquina térmica.

FÍSICA HOY

¿Una máquina de movimiento permanente?

Según la segunda ley de la termodinámica, es imposible que exista una máquina de movimiento permanente. No obstante, Maxwell propuso la idea de un "diablillo" que abriría una pequeñísima puerta para permitir el paso de partículas de movimiento rápido y luego la cerraría para mantener fuera a las partículas de movimiento lento. Si el "diablillo" de Maxwell pudiera realizar esta tarea sin usar energía, la segunda ley de la termodinámica no se cumpliría. Además de divertir a algunos profesores de física, esta idea ha tenido poco uso en el mundo real.

Sin embargo, ahora los científicos lograron construir un sistema de engranaje y trinquete formado por siete anillos de benceno (compuestos químicos). Ellos esperaban que el trinquete forzara al engranaje a girar en un solo sentido. Si tal cosa ocurría, eso significaría que se había creado energía a partir de los movimientos al azar de los compuestos. Pero eso no ocurrió. El engranaje giró con la misma frecuencia en un sentido que en otro. A pesar de todo, tal vez esto sólo sea el principio.

¿Qué pasaría si el trinquete se engranara por medio de unas tenacillas en miniatura? En ese caso se cumpliría la segunda ley de la termodinámica, puesto que las tenacillas ejercerían la energía necesaria para colocar el trinquete en su lugar.

Si desea ver una simulación de este "demonio de Maxwell", de carácter teórico, visite **monet.physik.unibas.ch**

La *eficiencia* de una ***máquina térmica*** se define como la razón del trabajo útil realizado por una máquina respecto al calor suministrado a ésta, y generalmente se expresa como porcentaje

$$Eficiencia = \frac{Trabajo\ de\ salida}{Trabajo\ de\ entrada}$$

$$e = \frac{Q_{\text{ent}} - Q_{\text{sal}}}{Q_{\text{ent}}} \qquad \textbf{(20.8)}$$

Por ejemplo, una máquina con una eficiencia de 25% ($e = 0.25$) podría absorber 800 J, realizar un trabajo de 200 J y desechar 600 J como calor perdido. Una máquina eficiente a 100% es aquella en la que todo el calor de entrada se convierte en trabajo útil. En este caso, no se entregaría calor al medio ambiente ($Q_{\text{sal}} = 0$). Aunque en un proceso de ese tipo se conservaría la energía, se viola la segunda ley de la termodinámica. La máquina más eficiente es la que cede al medio la *menor* cantidad posible de calor.

20.10 Ciclo de Carnot

Todas las máquinas térmicas están sujetas a gran número de dificultades prácticas. La fricción y la pérdida de calor por la conducción y la radiación impiden que las máquinas reales funcionen a su eficiencia máxima. Una máquina ideal, libre de ese tipo de problemas, fue sugerida por Sadi Carnot en 1824. La ***máquina de Carnot*** tiene la eficiencia máxima posible tratándose de una máquina que absorbe calor de una fuente a alta temperatura, realiza trabajo externo y deposita calor en un recipiente a baja temperatura. La eficiencia de una cierta máquina puede determinarse comparándola con la máquina de Carnot al funcionar entre las mismas temperaturas.

El ***ciclo de Carnot*** se ilustra en la figura 20.10. Un gas confinado en un cilindro provisto de un émbolo móvil se pone en contacto con una fuente a alta temperatura T_{ent}. Una cantidad de calor Q_{ent} es absorbida por el gas, el cual se dilata isotérmicamente a medida que la presión disminuye. La primera etapa del ciclo de Carnot se muestra gráficamente por medio de la curva *AB* en el diagrama *P-V* (véase la figura 20.11). Luego, el cilindro se coloca en una base aislante, donde continúa la expansión adiabática en tanto que la presión disminuye hasta su nivel más bajo. Esta etapa se representa gráficamente por la curva *BC*. En la tercera etapa el cilindro es extraído de la base aislante y colocado sobre una fuente a baja temperatura T_{sal}. Una cantidad de calor Q_{sal} es extraída del gas a medida que éste se comprime isotérmicamente desde el punto *C* hasta el *D* en el diagrama *P-V*. Por último, el cilindro se coloca de nuevo en la base aislante, donde se comprime adiabáticamente hasta su etapa original a lo largo de la trayectoria *DA*. La máquina realiza trabajo externo durante el proceso de expansión y regresa a su estado inicial durante los procesos de compresión.

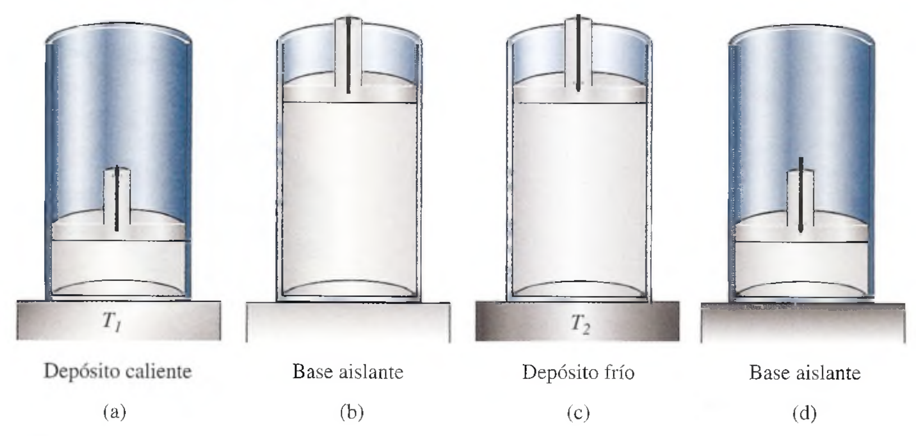


Figura 20.11 El ciclo de Carnot: (a) expansión isotérmica, (b) expansión adiabática, (c) compresión isotérmica y (d) compresión adiabática.

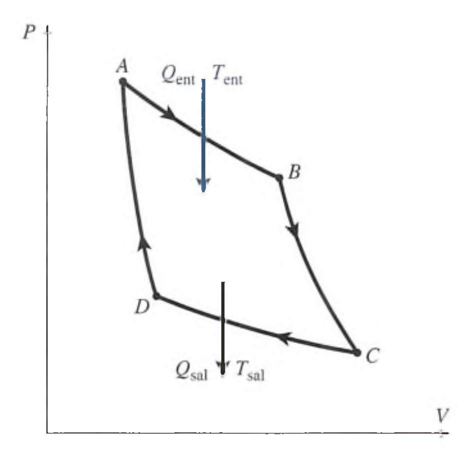


Figura 20.12 El ciclo de Carnot: un diagrama *P-V* para una máquina ideal. El trabajo neto es igual al calor neto $Q_{ent} - Q_{sal}$.

20.11 La eficiencia de una máquina ideal

Es difícil predecir la eficiencia de una máquina real a partir de la ecuación (20.8) porque calcular las cantidades Q_{ent} y Q_{sal} es complicado. Las pérdidas por calor y fricción a través de las paredes del cilindro y alrededor del émbolo, la combustión incompleta del combustible e incluso las propiedades físicas de diferentes combustibles son factores que dificultan nuestros esfuerzos por medir la eficiencia de tales máquinas. Sin embargo, podemos imaginar una *máquina ideal* que no se vea afectada por las dificultades prácticas. La eficiencia de dicha máquina sólo depende de las cantidades de calor absorbidas y liberadas entre dos fuentes de calor bien definidas, y no dependen de las propiedades térmicas del combustible que se use. Es decir, independientemente de los cambios internos de presión, volumen, longitud y otros factores, todas las máquinas ideales tienen la misma eficiencia cuando están funcionando entre las mismas dos temperaturas (T_{ent} y T_{sal}).

Una máquina ideal es aquella que tiene la más alta eficiencia posible para los límites de temperatura dentro de los que funciona.

Si podemos definir la eficiencia de una máquina en términos de temperaturas de entrada y salida en vez de hacerlo en términos del calor de entrada o de salida, tendremos una fórmula más útil. Para una máquina ideal se puede probar que la razón de Q_{ent}/Q_{sal} es la misma que la razón de T_{ent}/T_{sal}, pero demostrar esta aseveración rebasa los propósitos de esta obra. Por tanto, la eficiencia de una máquina ideal puede expresarse como una función de las temperaturas absolutas de las fuentes de entrada y de salida. La ecuación (20.8), para una máquina ideal, se transforma en

$$e = \frac{T_{ent} - T_{sal}}{T_{ent}} \qquad \textbf{(20.9)}$$

Se puede demostrar que ninguna máquina que opere entre las mismas dos temperaturas puede ser más eficiente que lo que indica la ecuación (20.9). Esta eficiencia ideal representa entonces el límite superior de la eficiencia de cualquier máquina práctica. Cuanto mayor es la diferencia de temperatura entre dos fuentes, mayor es la eficiencia de cualquier máquina.

Ejemplo 20.3 Una máquina ideal que funciona entre dos depósitos a 500 K y 400 K, respectivamente, absorbe 900 J de calor del depósito a alta temperatura durante cada ciclo. ¿Cuál es su eficiencia y cuánto calor libera al medio?

Plan: la eficiencia ideal se determina con la ecuación (20.9) con base en temperaturas absolutas. Es posible emplear la eficiencia para establecer la salida de trabajo y luego restar esta cantidad de la energía total de entrada con el fin de hallar cuánta se pierde.

Solución: La eficiencia ideal es

$$e = \frac{T_{\text{ent}} - T_{\text{sal}}}{T_{\text{ent}}} = \frac{500\text{ K} - 400\text{ K}}{500\text{ K}} = 0.200$$

Por consiguiente, la eficiencia ideal es de 20%. Ahora, por definición, la eficiencia es la razón $W_{\text{sal}}/Q_{\text{ent}}$, de modo que se determina que

$$e = \frac{W_{\text{sal}}}{Q_{\text{ent}}} = 0.200 \qquad \text{o} \qquad W_{\text{sal}} = (0.200)(900\text{ J}) = 180\text{ J}$$

Con base en la primera ley de la termodinámica, el trabajo neto ha de ser igual al intercambio neto de calor

$$W_{\text{sal}} = Q_{\text{ent}} - Q_{\text{sal}} \qquad \text{o} \qquad Q_{\text{sal}} = Q_{\text{ent}} - W_{\text{sal}}$$

$$Q_{\text{sal}} = 900\text{ J} - 180\text{ J} \qquad \text{y} \qquad Q_{\text{sal}} = 720\text{ J}$$

Se observa que una máquina ideal con una eficiencia de 20% toma 900 J de energía, realiza 180 J de trabajo y libera 720 J al medio.

20.12 Máquinas de combustión interna

Un motor de combustión interna genera el calor de entrada dentro de la máquina misma. La máquina más común de este tipo es el motor de gasolina de cuatro tiempos, en el cual la mezcla de gasolina y aire se inflama por medio de una bujía en cada cilindro. La energía térmica liberada se convierte en trabajo útil debido a la presión que ejercen los gases que se dilatan sobre el pistón. El proceso de cuatro tiempos se muestra en la figura 20.13. Durante la *carrera de admisión* (figura 20.13a) una mezcla de aire y vapor de gasolina entra en el cilindro a través de la válvula de admisión. Ambas válvulas se cierran durante la *carrera de compresión* (figura 20.13b) y el pistón se mueve hacia arriba causando una elevación en la presión. Justo antes de que el pistón llegue al extremo superior, se lleva a cabo el encendido de la mezcla, lo que origina un cambio abrupto tanto en la temperatura como en la presión. En la *carrera de trabajo* (figura 20-13c) la fuerza de los gases que se expanden impulsa al pistón hacia abajo, con lo que se realiza trabajo externo. Durante la *carrera de expulsión* (figura 20-13d) se expulsan los gases quemados fuera del cilindro a través de la válvula de escape. Nuevamente se repite todo el ciclo mientras se siga suministrando combustible al cilindro.

El ciclo ideal que usa un ingeniero para perfeccionar un motor de gasolina se muestra en la figura 20-14. Se conoce como *ciclo de Otto* en honor a su inventor. La fase de compresión se representa con la curva *ab*. La presión aumenta adiabáticamente a medida que el volumen

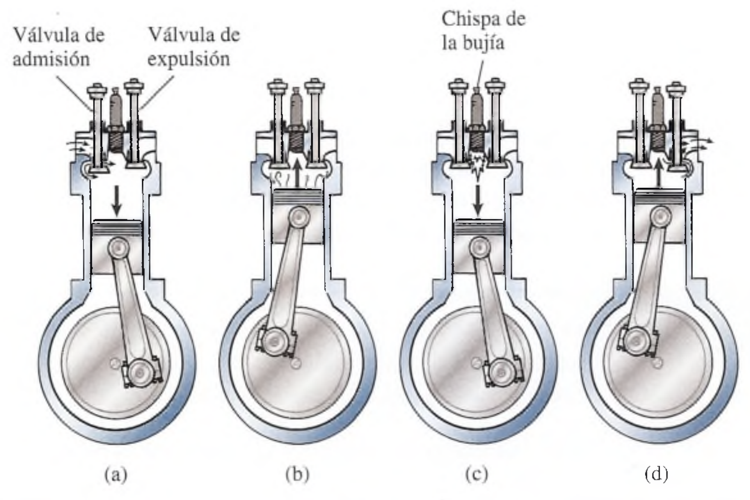


Figura 20.13 El motor de gasolina de cuatro tiempos: (a) carrera de admisión, (b) carrera de compresión, (c) carrera de trabajo y (d) carrera de expulsión.

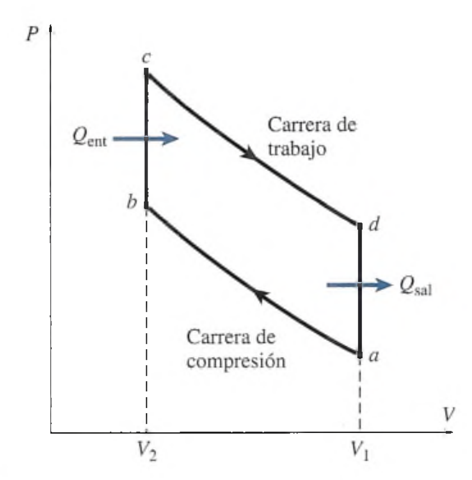


Figura 20.14 El ciclo de Otto de un motor de gasolina de cuatro tiempos.

se reduce. En el punto b se enciende la mezcla, con lo que se suministra una cantidad de calor Q_{ent} al sistema. Esto ocasiona una brusca elevación en la presión, como lo indica la línea bc. En la carrera de trabajo (cd) los gases se expanden adiabáticamente efectuando trabajo externo. Luego el sistema se enfría a volumen constante hasta el punto a, cediendo una cantidad de calor Q_{sal}. Los gases de la combustión son expulsados en la siguiente carrera del pistón hacia arriba, suministrándose más combustible en la siguiente carrera cuando el pistón se mueve hacia abajo. Después el ciclo vuelve a empezar. La razón de volúmenes V_1/V_2, como se indica en el diagrama P-V, se llama *razón de compresión* y es igual a 8 para la mayoría de los motores de automóvil.

La eficiencia del ciclo de Otto ideal se muestra en la ecuación (20.10):

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma - 1}} \tag{20.10}$$

donde γ es la constante adiabática para la sustancia de trabajo. La constante adiabática se define por

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

donde c_p es el calor específico del gas a presión constante y c_v es el calor específico a volumen constante. Para gases monoatómicos $\gamma = 1.67$, y para gases diatómicos $\gamma = 1.4$. En el motor de gasolina la sustancia de trabajo es en su mayoría aire, para el cual $\gamma = 1.4$. En el caso ideal, la ecuación (20.10) muestra que las razones de compresión más altas producen rendimientos superiores puesto que γ es siempre mayor que 1.

Ejemplo 20.4

Calcule la eficiencia de un motor de gasolina para el cual la razón de compresión es 8 y $\gamma = 1.4$.

Solución: A partir de la información proporcionada, observamos que

$$\frac{V_1}{V_2} = 8 \qquad \text{y} \qquad \gamma - 1 = 1.4 - 1 = 0.4$$

Entonces, a partir de la ecuación (20.10),

$$e = 1 - \frac{1}{8^{0.4}} = 1 - \frac{1}{2.3} = 57\%$$

En este ejemplo, 57% representa la eficiencia máxima posible de un motor de gasolina con los parámetros proporcionados. En realidad, la eficiencia de una máquina así casi siempre es de aproximadamente 30% debido a las pérdidas de calor no controladas.

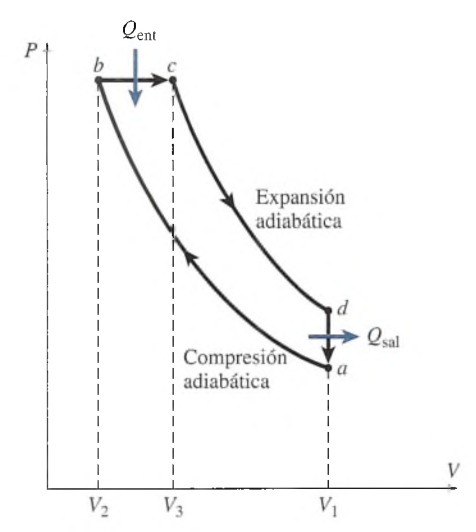


Figura 20.15 El ciclo diésel ideal.

Un segundo tipo de máquina de combustión interna es la diésel. En ella el aire se comprime a alta temperatura y presión hasta cerca del extremo superior del cilindro. El combustible diésel que se inyecta en el cilindro en este punto, se enciende y empuja el pistón hacia abajo. El ciclo diésel ideal se muestra en el diagrama *P-V* en la figura 20.15. Empezando en *a*, se comprime el aire adiabáticamente hasta el punto *b*, donde se inyecta el combustible diésel. Este combustible se enciende por el aire caliente, liberando una cantidad de calor Q_{ent} a una presión casi constante (línea *bc*). El resto de la fase de trabajo consiste en una dilatación adiabática hasta el punto *d*, realizando trabajo externo. Durante las fases de admisión y expulsión, el gas se enfría a volumen constante hasta el punto *a*, perdiendo una cantidad de calor Q_{sal}. La eficiencia de una máquina diésel está en función de la razón de compresión (V_1/V_2) y de la *razón de expansión* (V_1/V_3).

20.13 Refrigeración

Se puede pensar que un ***refrigerador*** es una máquina térmica que opera en sentido inverso. Un esquema de un refrigerador aparece en la figura 20.16. Durante cada ciclo, un compresor o un dispositivo similar proporciona trabajo mecánico *W* al sistema, extrayendo una cantidad de calor $Q_{frío}$ de un depósito frío y cediendo una cantidad de calor Q_{cal} a un depósito caliente. De acuerdo con la primera ley, el trabajo de entrada está dado por

$$W = Q_{calor} - Q_{frío}$$

La eficiencia de cualquier refrigerador se determina por la cantidad de calor $Q_{frío}$ extraída con el mínimo gasto de trabajo mecánico *W*. De este modo, la razón $Q_{frío}/W$ es una medida de la eficiencia de enfriamiento del refrigerador y se le llama su ***coeficiente de rendimiento*** K. Simbólicamente,

$$K = \frac{Q_{frío}}{W} = \frac{Q_{frío}}{Q_{calor} - Q_{frío}} \tag{20.11}$$

La eficiencia máxima puede expresarse en términos de temperaturas absolutas:

$$K = \frac{T_{frío}}{T_{calor} - T_{frío}} \tag{20.12}$$

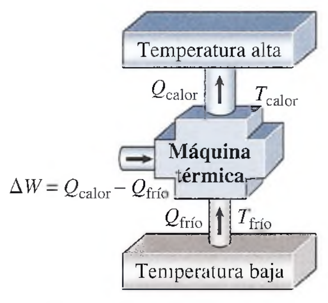


Figura 20.16 Diagrama de un refrigerador.

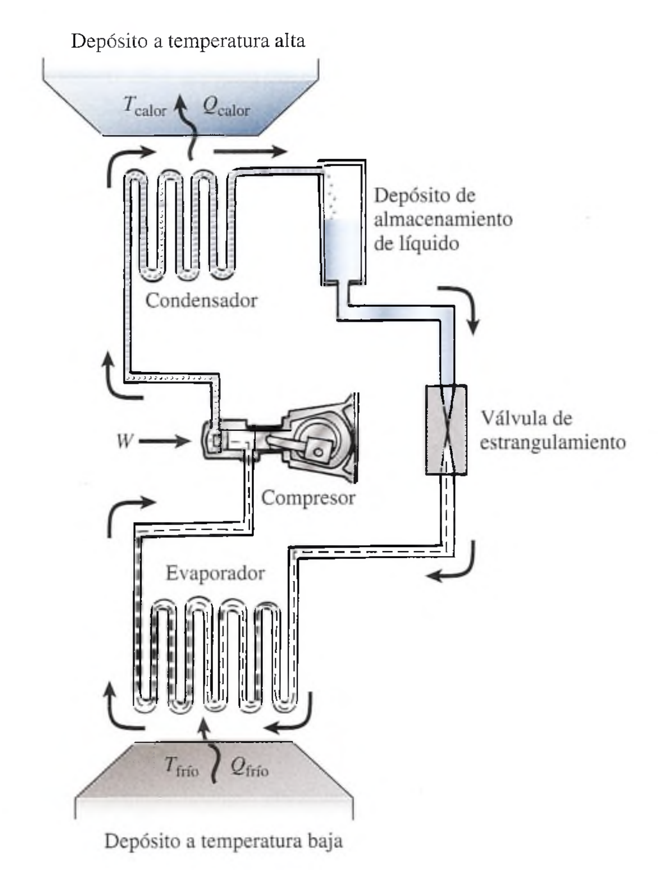


Figura 20.17 Componentes básicos de un sistema de refrigeración.

FÍSICA HOY

Se conecta un refrigerador a la corriente eléctrica y funciona en una habitación cerrada muy pequeña. Tras algunas horas, la temperatura de la habitación se establece a 30°C. Si entonces se abre la puerta del refrigerador y se le deja así durante varias horas, la temperatura de la habitación aumentará.

Con el fin de comprender mejor el proceso de refrigeración, considere el esquema general presentado en la figura 20.6, el cual es aplicable a diversos dispositivos de refrigeración, desde una planta comercial hasta un refrigerador o nevera doméstica. La sustancia de trabajo, llamada ***refrigerante***, es un fluido que se licua fácilmente por medio de un incremento en la presión o una caída de temperatura. En la fase líquida puede evaporarse rápidamente al hacérsele pasar por un proceso de estrangulamiento (véase la sección 20.6) a una temperatura cercana a la temperatura ambiente. Entre los refrigerantes comunes tenemos el amoniaco, el freón 12, el cloruro de metilo y el dióxido de azufre. El más común de los refrigerantes industriales es el amoniaco, que hierve a −28°F bajo una presión de 1 atm. Entre los refrigerantes domésticos el más común es el freón 12, que hierve a −22°F a la presión atmosférica. El cambio de presión afecta drásticamente las temperaturas de condensación y vaporización de todos los refrigerantes.

Como se muestra en el esquema, un sistema usual de refrigeración consta de un ***compresor***, un ***condensador***, un ***depósito de almacenamiento del líquido***, una ***válvula de estrangulamiento*** y un ***evaporador***. El compresor suministra el trabajo de entrada necesario para que el refrigerante se mueva a lo largo del sistema. Cuando se mueve el émbolo a la derecha, succiona el refrigerante a través de la válvula de admisión a una presión un poco más alta que la atmosférica y próxima a la temperatura ambiente. Durante la carrera de trabajo, la válvula de admisión se cierra y la de descarga se abre. El refrigerante que emerge, a altas temperatura y presión, circula hacia el condensador, donde es enfriado hasta que se licúa. El condensador se puede enfriar mediante una corriente de agua o con un ventilador eléctrico. Durante esta fase se libera una cantidad de calor Q_{calor} del sistema. El refrigerante líquido condensado, aún en condiciones de alta presión y temperatura, se almacena en un depósito de líquido. Luego, el refrigerante líquido pasa desde el tanque de almacenamiento por una válvula de estrangulamiento, causando un descenso brusco en la temperatura y la presión. A medida que fluye el refrigerante líquido a través del serpentín evaporador, absorbe una cantidad de calor $Q_{frío}$ del espacio y de los productos que están siendo enfriados. Este calor hace hervir el refrigerante líquido y es transportado hacia fuera por el refrigerante gaseoso como

calor latente de vaporización. Esta fase es el "pago" por la operación completa, y todos los componentes sólo contribuyen a la transferencia real del calor al evaporador. Por último, el vapor refrigerante deja el evaporador y es succionado hacia el compresor para empezar otro ciclo.

Ejemplo 20.5

Un refrigerador ideal funciona entre los 500 y los 400 K. En cada ciclo extrae 800 J de un depósito frío. ¿Cuánto trabajo se lleva a cabo en cada ciclo y cuánto calor se libera al medio?

Plan: Primero calcularemos el coeficiente de rendimiento K a partir de la temperatura proporcionada. Como K es la razón de calor extraído $Q_{\text{frío}}$ (800 J) a calor de entrada, después determinaremos el trabajo hecho en cada ciclo. El calor de salida puede entonces hallarse porque el trabajo es igual a la diferencia ($Q_{\text{frío}} - Q_{\text{calor}}$).

Solución: Al sustituir las temperaturas absolutas en la ecuación 20.12 se obtiene

$$K = \frac{T_{\text{frío}}}{T_{\text{calor}} - T_{\text{frío}}} = \frac{400 \text{ K}}{500 \text{ K} - 400 \text{ K}}; \qquad K = 4.00$$

Entonces el trabajo en un ciclo se determina como sigue:

$$K = \frac{Q_{\text{frío}}}{W_{\text{ent}}} \qquad \text{o} \qquad W_{\text{ent}} = \frac{Q_{\text{frío}}}{K}$$

$$W_{\text{ent}} = \frac{800 \text{ J}}{4} = 200 \text{ J}$$

Ahora, puesto que $W_{\text{ent}} = Q_{\text{calor}} - Q_{\text{frío}}$, es posible hallar Q_{calor} del modo siguiente:

$$Q_{\text{calor}} = W_{\text{ent}} + Q_{\text{frío}} = 200 \text{ J} + 800 \text{ J}$$
$$Q_{\text{calor}} = 100 \text{ J}$$

Cabe advertir que en este ejemplo hemos usado el coeficiente de rendimiento máximo posible. En un refrigerador real, un valor de K más pequeño resulta en la necesidad de más de 200 J de trabajo por ciclo.

Resumen y repaso

La termodinámica es la ciencia que estudia la conversión del calor en trabajo o el proceso inverso, la conversión del trabajo en calor. Hemos visto que en esos procesos no sólo se debe conservar la energía, sino que también hay límites para la eficiencia. A continuación se enumeran los principales conceptos presentados en el capítulo.

- La *primera ley de la termodinámica* es un replanteamiento del principio de la conservación de la energía. Indica que el calor neto ΔQ impartido a un sistema es igual al trabajo neto ΔW realizado por el sistema más el cambio neto de la energía interna ΔU del sistema. Simbólicamente,

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta U \qquad \textit{Primera ley de la termodinámica}$$

- En termodinámica, el trabajo ΔW suele realizarse sobre un gas. En esos casos el trabajo se representa en términos de la presión y el volumen. Un diagrama P-V es útil también para medir ΔW. Si la presión es constante,

$$\Delta W = P\,\Delta V$$

$$\Delta W = \text{área bajo la curva } P\text{-}V$$

- Se presentan casos especiales de la primera ley cuando una de las cantidades no se somete a un cambio.
  a. *Proceso adiabático*
  $\Delta Q = 0 \qquad \Delta W = -\Delta U$
  b. *Proceso isocórico*
  $\Delta V = 0 \qquad \Delta W = 0 \qquad \Delta Q = \Delta U$
  c. *Proceso isotérmico*
  $\Delta T = 0 \qquad \Delta U = 0 \qquad \Delta Q = \Delta W$
  d. *Proceso isobárico*
  $\Delta P = 0 \qquad \Delta W = P\,\Delta V$

- La *segunda ley de la termodinámica* impone restricciones a la posibilidad de satisfacer la *primera*. En suma, indica que en todo proceso tiene lugar cierta pérdida de energía a causa de las fuerzas de fricción u otras fuerzas de disipación. Un motor 100% eficiente, o sea, que convierte todo el calor de entrada en un trabajo útil de salida, no es posible.
- En general, una máquina térmica se representa tal como se muestra en la figura 20.10. El significado de los símbolos empleados en las ecuaciones siguientes puede tomarse de ella. El trabajo que realiza la máquina es la diferencia entre el calor de entrada y el de salida.

$$W = Q_{ent} - Q_{sal} \qquad \textit{Trabajo} \text{ (kcal } \textit{o} \text{ J)}$$

- La *eficiencia e* de un motor es la razón entre la salida de trabajo y la entrada de calor. Se puede calcular para un motor ideal con cualquiera de las relaciones siguientes:

$$e = \frac{Q_{ent} - Q_{sal}}{Q_{ent}}$$

$$e = \frac{T_{ent} - T_{sal}}{T_{ent}} \qquad \textit{Eficiencia}$$

- El *refrigerador* es una máquina térmica que funciona al revés. Una medida del rendimiento de esos aparatos es el grado de enfriamiento que se obtiene a cambio del trabajo que es necesario introducir en el sistema. El enfriamiento se produce a causa de la extracción del calor $Q_{frío}$ del depósito de enfriamiento. El coeficiente de rendimiento K se obtiene ya sea con

$$K = \frac{Q_{frío}}{Q_{calor} - Q_{frío}} \quad \text{o} \quad K = \frac{T_{frío}}{T_{calor} - T_{frío}}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

20.1. El calor latente de vaporización del agua es 540 cal/g. Sin embargo, cuando 1 g de agua se evapora por completo a presión constante, la energía interna del sistema se incrementa en sólo 500 cal. ¿Qué pasó con las 40 cal restantes? ¿Se trata de un proceso isocórico? ¿Isotérmico?

20.2. Si tanto el calor como el trabajo se pueden expresar en las mismas unidades, ¿por qué es necesario distinguir entre ambos?

20.3. ¿Es necesario usar el concepto de energía molecular para describir y usar la función de energía interna? Explique su respuesta.

20.4. En un gas se produce una expansión adiabática. ¿Realiza el gas un trabajo externo? En caso afirmativo, ¿cuál es la fuente de energía?

20.5. ¿Qué pasa con la energía interna de un gas que pasa por (a) una compresión adiabática, (b) una expansión isotérmica y (c) un proceso de estrangulamiento?

20.6. Un gas realiza un trabajo externo durante una expansión isotérmica. ¿Cuál es la fuente de energía?

20.7. En el texto se ofreció un solo enunciado para la segunda ley de la termodinámica. Comente cada uno de los enunciados siguientes y demuestre que son equivalentes al presentado en el texto:

a. Es imposible construir un refrigerador que, trabajando continuamente, extraiga el calor de un cuerpo frío y lo envíe a un cuerpo caliente sin que se realice un trabajo en el sistema.
b. La dirección natural del flujo de calor es de un cuerpo con alta temperatura a otro con baja temperatura, independientemente del tamaño de cada recipiente.
c. Todos los procesos naturales espontáneos son irreversibles.
d. Los acontecimientos naturales siempre avanzan en una dirección que va del orden al desorden.

20.8. Es energéticamente posible extraer la energía térmica contenida en el océano y usarla para impulsar un buque de vapor a través del mar. ¿Qué objeciones puede usted hacer a esa idea?

20.9. En un refrigerador eléctrico, el calor es transferido del interior frío a los alrededores más calientes. ¿Por qué no constituye esto una violación a la segunda ley de la termodinámica?

20.10. Considere el rendimiento del trabajo externo realizado por la expansión isotérmica de un gas ideal. ¿Por qué este proceso de convertir calor en trabajo no viola la segunda ley de la termodinámica?

20.11. Si los procesos naturales tienden a hacer que disminuya el orden en el universo, ¿cómo puedes explicar la evolución de los sistemas biológicos hasta un estado de suma organización? ¿Acaso esto infringe la segunda ley de la termodinámica?

20.12. ¿Se puede calentar o enfriar una habitación con sólo dejar abierta la puerta de un refrigerador eléctrico? Explique su respuesta.

20.13. ¿Qué temperatura deberá tener el depósito frío de una máquina de Carnot para que ésta sea 100% eficiente? ¿Puede pasar esto? Si es imposible que una máquina de Carnot tenga una eficiencia de 100%, ¿por qué se le conoce como la máquina *ideal*?

20.14. ¿De qué depende la eficiencia de las máquinas térmicas? ¿Por qué es, en general, tan baja?

Problemas

Sección 20.3 La primera ley de la termodinámica

20.1. En un proceso químico industrial, se proporcionan a un sistema 600 J de calor y produce 200 J de trabajo. ¿Cuál es el incremento registrado en la energía interna de este sistema? Resp. 400 J

20.2. Supongamos que la energía interna de un sistema disminuye en 300 J, al tiempo que un gas realiza 200 J de trabajo. ¿Cuál es el valor de Q? ¿El sistema ha ganado o ha perdido calor?

20.3. En un proceso termodinámico, la energía interna del sistema se incrementa en 500 J. ¿Cuánto trabajo fue realizado por el gas si en el proceso fueron absorbidos 800 J de calor? Resp. 300 J

20.4. Un pistón realiza 300 J de trabajo sobre un gas, que luego se expande y efectúa 220 J de trabajo sobre sus alrededores. ¿Cuál es el cambio en la energía interna del sistema si el intercambio neto de calor es cero?

20.5. En un laboratorio químico, un técnico aplica 340 J de energía a un gas, al tiempo que el sistema que rodea a dicho gas realiza 140 J de trabajo *sobre* el gas. ¿Cuál es el cambio en la energía interna? Resp. 480 J

20.6. ¿Cuál es el cambio de la energía interna en el problema 20.5 si los 140 J de trabajo son realizados *por* el gas, en lugar de realizarse *sobre* el gas?

20.7. Un sistema absorbe 200 J de calor cuando la energía interna aumenta en 150 J. ¿Qué trabajo realiza el gas en ese caso? Resp. 50 J

***20.8.** El calor específico del agua es 4186 J/(kg · C°). ¿Cuál es el cambio en la energía interna de 200 g de agua cuando ésta se calienta de 20 a 30°C? Suponga que el volumen es constante.

*20.9. A una presión constante de 101.3 kPa, 1 g de agua ($1\ cm^3$) se evapora por completo y alcanza un volumen final de 1671 cm^3 en su forma de vapor. ¿Qué trabajo ha realizado el sistema contra sus alrededores? ¿Cuál es el incremento de la energía interna? Resp. 169 J, 2087 J

Sección 20.4 Procesos isobáricos y el diagrama *P-V*

20.10. El volumen de un gas disminuye de 5 a 3 L bajo una presión constante de 2 atm. ¿Cuánto trabajo se realiza? ¿Y se realiza *sobre* el gas o lo realiza éste? Si hay un incremento de 300 J en la energía interna, ¿cuál es el intercambio neto de calor? Trace un bosquejo del proceso.

20.11. Durante una expansión isobárica, una presión constante de 250 kPa hace que el volumen de un gas pase de 1 a 3 L. ¿Qué trabajo realiza el gas? Resp. 500 J

20.12. Un gas encerrado en el cilindro de un motor tiene un volumen inicial de $2 \times 10^{-4}\ m^3$. Luego el gas se expande isobáricamente a 220 kPa. Si durante el proceso se absorben 350 J y la energía interna aumenta 150 J, ¿cuál es el volumen final del gas?

Sección 20.5 El caso general de la primera ley, Sección 20.6 Procesos adiabáticos, Sección 20.7 Procesos isocóricos, Sección 20.8 Procesos isotérmicos

20.13. Un gas ideal se expande isotérmicamente al tiempo que absorbe 4.80 J de calor. El pistón tiene una masa de 3 kg. ¿A qué altura se elevará el pistón respecto a su posición inicial? Resp. 16.3 cm

20.14. El trabajo realizado sobre un gas durante una compresión adiabática es de 140 J. Calcule el incremento de la energía interna del sistema, en calorías.

20.15. Se encierran en un contenedor dos kilogramos de agua, originalmente a 20°C, de modo que todo cambio es isocórico. Luego, el agua absorbe 9000 J de calor, al tiempo que 1500 se gotean al medio debido a un mal aislamiento. Determine el incremento en la temperatura del agua. Resp. 0.896°C

20.16. Un gas está encerrado en una lata de cobre. ¿Cuánto calor es necesario suministrar para incrementar la energía interna en 59 J? ¿Qué tipo de proceso termodinámico está implícito en este caso?

20.17. Un gas encerrado por un pistón se expande casi isobáricamente a 100 kPa. Cuando el sistema absorbe 20 000 J de calor, su volumen aumenta de $0.100\ m^3$ a $0.250\ m^3$. ¿Qué trabajo se ha realizado y cuál es el cambio en la energía interna? Resp. 15.0 kJ, 5 kJ

20.18. El calor específico del bronce es de 390 J/kg · C°. Un trozo de bronce de 4 kg se calienta isocóricamente, con lo que la temperatura se eleva en 10 C°. ¿Cuál es el incremento de la energía interna?

*20.19. Dos litros de un gas ideal tienen una temperatura de 300 K y una presión de 2 atm. El gas soporta una dilatación isobárica mientras su temperatura se eleva hasta 500 K. ¿Qué trabajo ha realizado el gas? Resp. 269.46 kJ

*20.20. El diámetro de un pistón es de 6.00 cm y la longitud de su carrera es de 12 cm. Suponga que una fuerza constante de 340 N mueve el pistón durante una carrera completa. Calcule primero el trabajo a partir de la fuerza y la distancia. Compruebe después su respuesta considerando la presión y el volumen.

*20.21. En el caso de procesos adiabáticos, se puede demostrar que la presión y el volumen están relacionados entre sí por la expresión siguiente:

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$$

donde γ es la constante adiabática, cuyo valor es 1.40 para gases diatómicos y también para la mezcla de vapor de gasolina/aire en los motores de combustión. Use la ley de los gases ideales para demostrar la relación acompañante:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

*20.22. La razón de compresión de cierto motor diésel es 15. La mezcla aire-combustible ($\gamma = 1.4$) entra a 300 K y 1 atm de presión. Halle la presión y la temperatura del gas después de la compresión adiabática. (Use el problema 20.21 como referencia.)

Sección 20.9 La segunda ley de la termodinámica

20.23. ¿Cuál es la eficiencia de un motor que realiza 300 J de trabajo en cada ciclo, al tiempo que desecha 600 J hacia el medio? Resp. 33.3%

20.24. Durante un ciclo completo, un sistema absorbe 600 cal de calor y lanza 200 cal al medio. ¿Cuánto trabajo se realiza? ¿Cuál es la eficiencia?

20.25. Un motor con 37% de eficiencia pierde 400 J de calor en cada ciclo. ¿Qué trabajo se realiza y cuánto calor se absorbe en cada ciclo? Resp. 235 J, 635 J

20.26. ¿Cuál es la eficiencia de una máquina ideal que opera entre las temperaturas de 525 K y 300 K?

20.27. Una máquina de vapor recibe vapor sobrecalentado de una caldera que trabaja a 200°C y que lo arroja directamente al aire a 100°C. ¿Cuál es la eficiencia ideal? Resp. 21.1%

20.28. En un ciclo de Carnot, la expansión isotérmica de un gas tiene lugar a 400 K y dicho gas absorbe 500 cal de calor. ¿Cuánto calor se pierde si el sistema experimenta una compresión isotérmica a 300 K? ¿Cuál es la pérdida de calor y qué trabajo se realiza?

20.29. Una máquina de Carnot absorbe 1200 cal durante cada ciclo cuando funciona entre 500 y 300 K. ¿Cuál es la eficiencia? ¿Cuánto calor es expulsado y cuánto trabajo se realiza, en joules, durante cada ciclo? Resp. 40%, 720 cal, 2010 J

20.30. La eficiencia real de un motor es 60% de su eficiencia ideal. El motor opera entre las temperaturas de 460 y 290 K. ¿Cuánto trabajo se realiza en cada ciclo si 1600 J de calor son absorbidos?

20.31. Un refrigerador extrae 400 J de calor de una caja en cada ciclo y expulsa 600 J hacia un recipiente a alta temperatura. ¿Cuál es el coeficiente de rendimiento? Resp. 2.00

20.32. El coeficiente de rendimiento de un refrigerador es 5.0. ¿Cuánto calor se desecha si el compresor realiza 200 J de trabajo durante cada ciclo?

20.33. ¿Cuánto calor se extrae del recipiente frío si el compresor de un refrigerador realiza 180 J de trabajo en cada ciclo? El coeficiente de rendimiento es 4.0. ¿Cuánto calor se expulsa hacia el recipiente caliente? Resp. 720 J, 900 J

20.34. Un refrigerador ideal extrae 400 J de calor de un recipiente a 200 K y expulsa calor hacia un recipiente a 500 K. ¿Cuál es el coeficiente de rendimiento ideal y cuánto trabajo se realiza en cada ciclo?

***20.35.** Un refrigerador de Carnot tiene un coeficiente de rendimiento de 2.33. Si el compresor realiza 600 J de trabajo en cada ciclo, ¿cuántos joules de calor son extraídos del recipiente frío y cuántos son arrojados al medio? Resp. 1400 J, 2000 J

Problemas adicionales

20.36. En un proceso termodinámico se suministran 200 Btu para producir una expansión isobárica bajo una presión de 100 lb/in^2. La energía interna del sistema no cambia. ¿Cuál es el aumento de volumen del gas?

20.37. Una muestra de gas de 100 cm^3 a la presión de 100 kPa se calienta isocóricamente desde el punto *A* hasta el punto *B* hasta que su presión es de 300 kPa. Después se expande isobáricamente hasta el punto *C*, donde su volumen es de 400 cm^3. La presión vuelve entonces a 100 kPa en el punto *D*, sin cambio de volumen. Por último, regresa a su estado original en el punto *A*. Trace el diagrama *P-V* para este ciclo. ¿Cuál es el trabajo neto realizado en todo el ciclo? Resp. 60 J

20.38. Calcule el trabajo neto realizado por un gas al pasar por todo el ciclo que aparece en la figura 20.18.

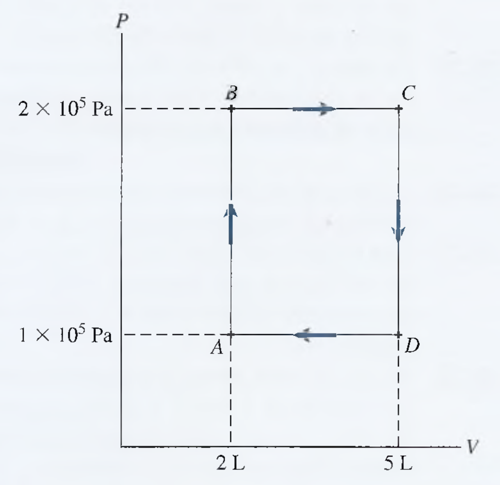
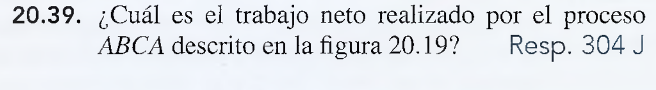


Figura 20.18



20.39. ¿Cuál es el trabajo neto realizado por el proceso *ABCA* descrito en la figura 20.19? Resp. 304 J

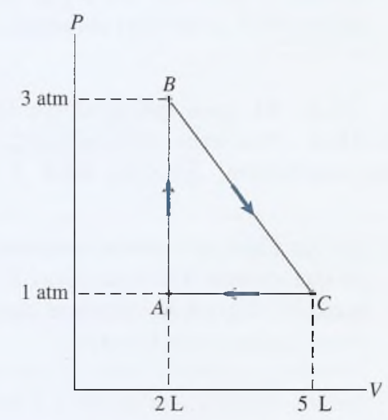


Figura 20.19

***20.40.** Un motor real funciona entre 327 y 0°C y tiene una potencia de salida de 8 kW. ¿Cuál es la eficiencia ideal de este motor? ¿Cuánta potencia se desperdicia si la eficiencia real es de sólo 25%?

***20.41.** La eficiencia de Otto de un motor de gasolina es de 50% y la constante adiabática de 1.4. Calcule la razón de compresión. Resp. 5.66

***20.42.** Una bomba de calor obtiene calor de un depósito de agua a 41°F y lo entrega a un sistema de tubería en una casa a 78°F. La energía necesaria para operar la bomba de calor es aproximadamente el doble de la que se requiere para accionar una bomba de Carnot. ¿Cuánto trabajo mecánico hay que proporcionar a la bomba para que entregue 1 × 10^6 Btu de energía calorífica a la vivienda?

20.43. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia de 48%. Si la sustancia de trabajo entra al sistema a 400°C, ¿cuál es la temperatura del escape? Resp. 350 K

20.44. Durante la fase de compresión de un motor de automóvil, el volumen de la mezcla de combustible disminuye de 18 a 2 in^3. Si la constante adiabática es de 1.4, ¿cuál es la eficiencia máxima posible del motor?

20.45. Cuántos joules de trabajo debe realizar el compresor de un refrigerador para hacer que 1 kg de agua a 20°C se convierta en hielo a −10°C? El coeficiente de rendimiento es de 3.5. Resp. 126 kJ

20.46. En un refrigerador mecánico, los serpentines de baja temperatura del evaporador están a −30°C y el condensador tiene una temperatura de 60°C. ¿Cuál es el coeficiente de rendimiento máximo posible?

20.47. Un motor tiene una eficiencia térmica de 27% y una temperatura de escape de 230°C. ¿Cuál es la temperatura de entrada más baja posible?

Resp. 416°C

20.48. El coeficiente de rendimiento de un refrigerador es de 5.0. Si la temperatura ambiente es de 28°C, ¿cuál es la temperatura más baja posible que puede alcanzarse dentro del refrigerador?

Preguntas para la reflexión crítica

20.49. Un gas se expande en oposición a un pistón móvil y lo levanta una distancia de 2 in a velocidad constante. ¿Cuánto trabajo realiza el gas si el pistón pesa 200 lb y tiene un área transversal de 12 in^2? Si la expansión es adiabática, ¿cuál es el cambio de la energía interna, en Btu? ¿El cambio ΔU representa un incremento o un decremento de la energía interna?

Resp. 33.3 ft · lb, 0.0428 Btu, un decremento

***20.50.** Considere el diagrama *P-V* que se muestra en la figura 20.20, donde se indican la presión y el volumen para cada uno de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. A partir del punto *A*, una muestra de 100 cm^3 de gas absorbe 200 J de calor, haciendo que la presión aumente de 100 a 200 kPa, al tiempo que el volumen aumenta a 200 cm^3. A continuación, el gas se expande de *B* a *C*, absorbiendo 400 J adicionales de calor mientras su volumen se incrementa hasta 400 cm^3. (a) Halle el trabajo neto realizado y el cambio de la energía interna en cada uno de los procesos *AB* y *BC*. (b) ¿Cuáles son el trabajo neto y el cambio total de la energía interna en el proceso *ABC*? (c) ¿Qué tipo de proceso se ilustra en el caso *BC*?

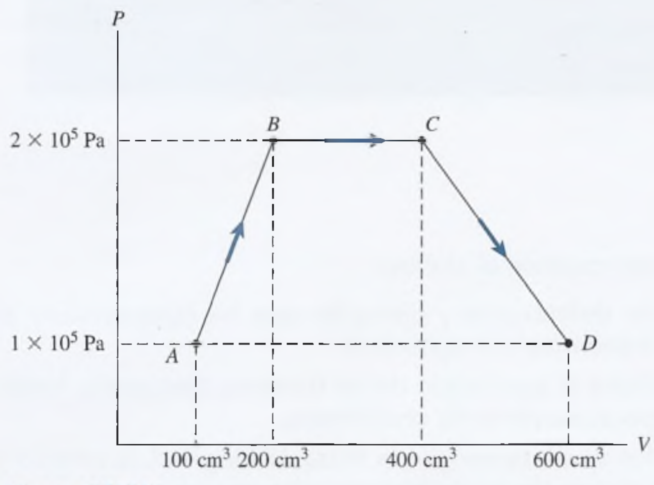


Figura 20.20

***20.51.** El ciclo iniciado en el problema anterior continúa ahora de *C* a *D*, al tiempo que son absorbidos 200 J adicionales de calor. (a) Halle el trabajo neto y el cambio neto de la energía interna en el proceso *CD*. (b) Suponga que el sistema regresa a su estado original en el punto *A*. ¿Cuál es el trabajo neto en todo el ciclo *ABCDA* y cuál es la eficiencia del ciclo?

***20.52.** Considere una masa específica de gas que se hace pasar por un proceso de estrangulación adiabático. Antes de entrar en la válvula, tiene una energía interna U_1, una presión P_1 y un volumen V_1. Después de pasar por la válvula, tiene una energía interna U_2, una presión P_2 y un volumen V_2. El trabajo neto realizado es el trabajo efectuado por el gas menos el trabajo efectuado sobre el gas. Demuestre que

$$U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_2V_2$$

La cantidad $U + PV$, conocida como *entalpía*, se conserva durante un proceso de estrangulación.

***20.53.** Un motor de gasolina recibe 2000 J de calor y entrega 400 J de trabajo por ciclo. El calor se obtiene de la combustión de gasolina, la cual tiene un calor de combustión de 50 kJ/g. ¿Cuál es la eficiencia térmica? ¿Cuánto calor se pierde por ciclo? ¿Cuánta gasolina se quema en cada ciclo? Si el motor funciona a 90 ciclos por segundo, ¿cuál es la potencia de salida?

Resp.20%, 1600 J, 0.040 g, 36 kW

***20.54.** Considere una máquina de Carnot con eficiencia *e* y un refrigerador de Carnot cuyo coeficiente de rendimiento es *K*. Si estos aparatos funcionan entre las mismas temperaturas, obtenga la relación siguiente

$$K = \frac{1 - e}{e}$$

21 Movimiento ondulatorio



Movimiento ondulatorio formado por una gota de agua que cae en un tanque de ondas. Las ondas son capaces de transmitir energía de un lugar a otro como una perturbación, sólo con movimientos localizados de partículas individuales. En este capítulo estudiamos las propiedades físicas de las ondas mecánicas. (*Foto © BS15 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará por medio de definiciones y ejemplos que ha comprendido el *movimiento ondulatorio transversal* y *longitudinal.*
2. Definirá, relacionará y aplicará el significado de los términos *frecuencia, longitud de onda* y *rapidez* para el movimiento ondulatorio.
3. Resolverá problemas en los que intervengan la *masa*, la *longitud*, la *tensión* y la *velocidad de onda*, en el caso de ondas transversales en una cuerda.
4. Escribirá y aplicará una expresión para determinar las *frecuencias características* en el caso de una cuerda vibrante cuyos extremos están fijos.

La energía se puede transferir de un lugar a otro por diversos medios. Al golpear un clavo, la energía cinética del martillo se convierte en trabajo útil sobre el clavo. El viento, los proyectiles y la mayoría de las máquinas simples también realizan trabajo a expensas del movimiento de la materia. Incluso la conducción de calor y la electricidad implican el movimiento de partículas elementales llamadas *electrones*. En este capítulo estudiaremos la transferencia de energía de un punto a otro sin que se realice una transferencia física del material entre los puntos.

21.1 Ondas mecánicas

Cuando se deja caer una piedra en un estanque de agua, se origina una perturbación que se propaga en círculos concéntricos, que al cabo del tiempo se extienden a todas las partes del estanque. Un corcho pequeño, que flota sobre la superficie del agua, se mueve hacia arriba y hacia abajo a medida que se propaga la perturbación. En realidad, se ha transferido energía a través de una cierta distancia, desde el punto del impacto de la piedra en el agua hasta el lugar donde se encuentra el trozo de corcho. Esta energía se transmite mediante la agitación de las partículas de agua que colindan entre sí. Únicamente la perturbación se mueve a través del agua. El movimiento real de cualquier partícula de agua individual es relativamente pequeño. A la propagación de la energía por medio de una perturbación en un medio, y no por el movimiento del medio mismo, se le llama ***movimiento ondulatorio***.

El ejemplo anterior se refiere a una ***onda mecánica*** porque su existencia misma depende de una fuente mecánica y de un medio material.

Una onda mecánica es una perturbación física en un medio elástico.

Es importante notar que no todas las perturbaciones son necesariamente mecánicas. Por ejemplo, las ondas luminosas, las ondas de radio y la radiación térmica propagan su energía por medio de perturbaciones eléctricas y magnéticas. De hecho, no hace falta ningún medio físico para la transmisión de las ondas electromagnéticas. Sin embargo, muchas de las ideas básicas que se presentan en este capítulo para las ondas mecánicas también se aplican a las ondas electromagnéticas.

21.2 Tipos de ondas

Las ondas se clasifican de acuerdo con el tipo de movimiento que generan en una parte determinada del medio en el cual se producen, respecto a la dirección en la que se propaga la onda. Un tipo de onda es la ***onda transversal***.

En una onda transversal, la vibración de las partículas individuales del medio es perpendicular a la dirección de la propagación de la onda.

Por ejemplo, suponga que se ata el extremo de una cuerda a un poste y que agitamos con la mano el otro extremo, como muestra la figura 21.1. Al mover el extremo libre rápidamente hacia arriba y hacia abajo, enviamos una sola perturbación llamada ***pulso*** a lo largo de la

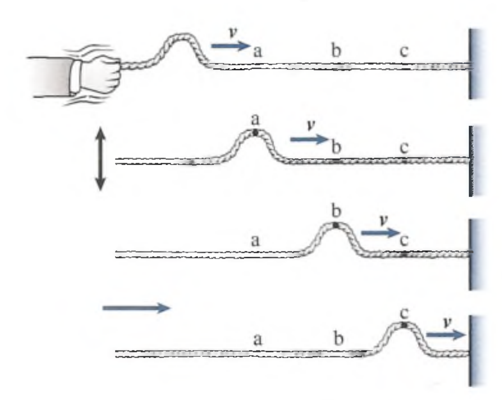


Figura 21.1 En una onda de tipo transversal, cada una de las partículas se mueve perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

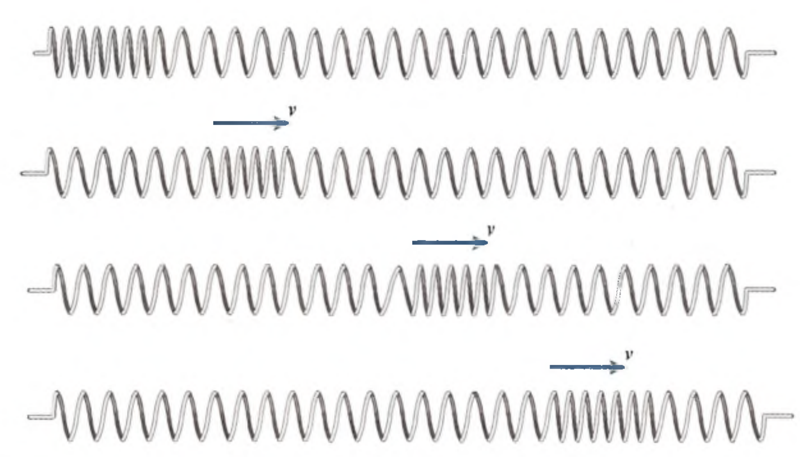


Figura 21.2 En una onda longitudinal el movimiento de las partículas individuales es paralelo a la dirección de propagación de la onda. La ilustración muestra el movimiento de un pulso de condensación.

FÍSICA HOY

Las ondas que viajan, las ondas estacionarias y los pulsos de onda pueden verse en situaciones cotidianas. Las ondas que viajan se manifiestan en cuerpos de agua como océanos y lagos. Las ondas estacionarias pueden observarse en una taza de café colocada en una superficie vibrante como el tablero de un automóvil encendido. Un pulso de onda longitudinal se crea cuando una línea de automóviles comienza a moverse desde el reposo al encenderse la luz verde del semáforo.

cuerda. Tres nudos a iguales distancias en los puntos a, b y c demuestran que las partículas individuales se mueven hacia arriba y hacia abajo mientras que la perturbación se mueve hacia la derecha con una velocidad v.

Otro tipo de onda, como la que se genera con un resorte en espiral, aparece en la figura 21.2. Las espiras cercanas al extremo izquierdo se comprimen formando una ***condensación***. Cuando cesa la fuerza de distorsión, un pulso de condensación se propaga a lo largo del resorte. Ninguna parte del resorte se mueve mucho respecto a su posición de equilibrio, pero el pulso continúa recorriendo el resorte. Este tipo de onda se llama ***onda longitudinal*** debido a que las partículas del resorte se desplazan en la misma dirección en la que avanza la perturbación.

En una onda longitudinal, la vibración de las partículas individuales es paralela a la dirección de la propagación de la onda.

Si las espiras del resorte de nuestro ejemplo fueran forzadas a separarse hacia la izquierda, se generaría una ***rarefacción*** como la que se muestra en la figura 21.3. Después de que cese la fuerza perturbadora, se propagará un pulso de rarefacción a lo largo del resorte. En general, una onda longitudinal consiste en una serie de condensaciones y rarefacciones que se desplazan en determinada dirección.

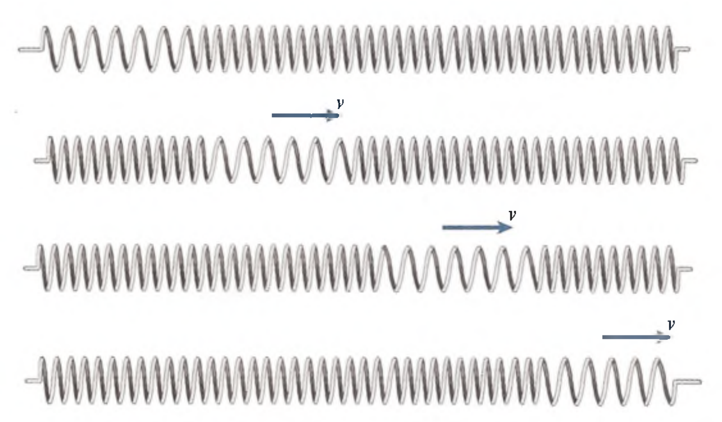


Figura 21.3 Movimiento longitudinal de un pulso de rarefacción en un resorte en espiral.

21.3 Cálculo de la rapidez de onda

La rapidez a la cual se mueve un pulso a través de un medio depende de la elasticidad del medio y de la inercia de las partículas del mismo. Los materiales más elásticos producen mayores fuerzas de restitución cuando se distorsionan. Los materiales menos densos se resisten

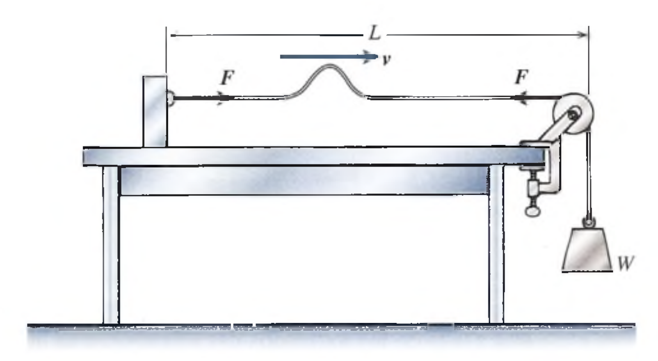


Figura 21.4 Cálculo de la rapidez de un pulso transversal en una cuerda.

menos a moverse. En ambos casos, la capacidad de las partículas para propagar una perturbación a las partículas vecinas es mejor, y el pulso viajará en ese caso a mayor rapidez.

Consideremos el movimiento de un pulso transversal a través de una cuerda según la figura 21.4. La masa m de la cuerda y su longitud L se mantienen bajo una tensión constante F por medio de la pesa suspendida. Cuando se da un solo movimiento a la cuerda en su extremo izquierdo, se propaga un pulso transversal a lo largo de la misma. La elasticidad de la cuerda se mide por la tensión F. La inercia de las partículas individuales se determina mediante la *masa por unidad de longitud* μ de la cuerda. Se puede demostrar que la ***rapidez de onda*** del pulso transversal en una cuerda está dado por

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{m/L}} \tag{21.1}$$

La masa por unidad de longitud μ se conoce generalmente como la ***densidad lineal*** de la cuerda. Si F se expresa en newtons y μ en kilogramos por metro, la rapidez estará expresada en metros por segundo.

Ejemplo 21.1 La longitud L de la cuerda de la figura 21.4 es de 2 m, y su masa es de 0.3 g. Calcule la rapidez del pulso transversal en la cuerda si ésta se encuentra bajo una tensión de 20 N.

Plan: Primero determinaremos la densidad lineal de la cuerda y luego calcularemos la rapidez de la ecuación 21.1. Recuerde que la unidad del SI para la masa es el kilogramo.

Solución:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.3 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{2\ \text{m}}$$

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}$$

Al sustituir directamente en la ecuación (21.1) se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{20\ \text{N}}{1.5 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}}}$$

$$v = 365\ \text{m/s}$$

El cálculo de la rapidez de un pulso longitudinal quedará reservado para el siguiente capítulo, donde se estudiará en relación con las ondas sonoras.

21.4 Movimiento ondulatorio periódico

Hasta ahora sólo se han considerado las perturbaciones individuales que no se repiten, llamadas *pulsos*. ¿Qué sucede cuando se repiten periódicamente otras perturbaciones similares? Suponga que atamos el extremo izquierdo de una cuerda al extremo de un vibrador electromagnético, como muestra la figura 21.5. El extremo del vibrador metálico se mueve con des-

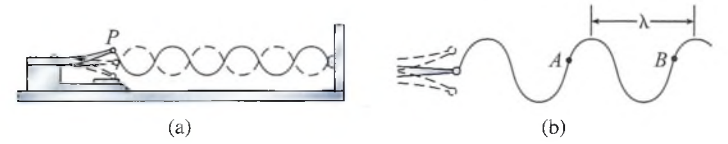


Figura 21.5 (a) Producción y propagación de una onda transversal periódica. (b) La longitud de onda λ es la distancia entre cualquier par de partículas en fase, como las que se ubican en dos crestas adyacentes o entre los puntos A y B.

plazamiento armónico debido a un campo magnético oscilatorio. Puesto que la cuerda está sujeta a uno de los extremos del vibrador, a lo largo de dicha cuerda se envía una serie de pulsos transversales periódicos. Las ondas resultantes están formadas por muchas crestas y valles que se mueven a lo largo de la cuerda con rapidez constante. La distancia entre dos crestas o valles adyacentes en ese tipo de tren de ondas se llama ***longitud de onda*** y se representa por λ.

Mientras la onda se desplaza por la cuerda, cada partícula de ésta vibra respecto a su posición de equilibrio con la misma frecuencia y amplitud que la fuente vibrante. Sin embargo, las partículas de la cuerda no se encuentran en posiciones correspondientes en iguales intervalos de tiempo. Se dice que dos partículas están ***en fase*** cuando tienen el mismo desplazamiento y ambas se mueven en la misma dirección. En la figura 21.5b, las partículas A y B están en fase. Puesto que las partículas que se encuentran en las crestas de un determinado tren de ondas también están en fase, es posible dar una definición más general de la longitud de onda.

La longitud de onda λ de un tren de ondas periódicas es la distancia entre dos partículas cualesquiera que estén en fase.

Cada vez que el punto extremo P del vibrador efectúa una oscilación completa, la onda se moverá a través de una distancia de una longitud de onda. El tiempo requerido para cubrir esta distancia es, por tanto, igual al periodo T de la fuente que vibra. De este modo, la rapidez de la onda v se puede relacionar con la longitud de onda λ y el periodo T por medio de la ecuación

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{21.2}$$

La ***frecuencia*** f de una onda es el número de ondas que pasan por un punto determinado en la unidad de tiempo. En realidad, es equivalente a la frecuencia de la fuente de la vibración y, por lo tanto, es igual al recíproco del periodo ($f = 1/T$). Las unidades en las que se expresa la frecuencia pueden ser ondas por segundo, oscilaciones por segundo o ciclos por segundo. La unidad del SI que corresponde a la frecuencia es el ***hertz*** (Hz), el cual se define como un ciclo por segundo.

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = \frac{1}{\text{s}}$$

Por tanto, si pasan por un punto 40 ondas cada segundo, la frecuencia es de 40 Hz.

La rapidez de una onda se expresa más frecuentemente en función de su frecuencia y no de su periodo. Por tanto, la ecuación (21.2) puede escribirse como

$$v = f\lambda \tag{21.3}$$

La ecuación (21.3) representa una relación física importante entre la rapidez, la frecuencia y la longitud de onda de *cualquier* onda periódica. Una ilustración de estas cantidades aparece en la figura 21.6 para una onda transversal periódica.

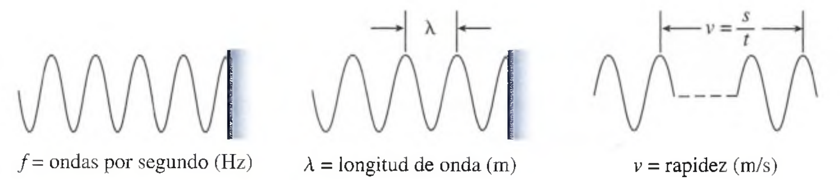


Figura 21.6 Relación entre la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de una onda transversal periódica.

Ejemplo 21.2

Un hombre se sienta a pescar en el borde de un muelle y cuenta las ondas de agua que golpean uno de los postes de soporte de la estructura. En un minuto cuenta 80 ondas. Si una cresta determinada recorre 12 m en 8 s, ¿cuál es la longitud de onda?

Plan: No debemos confundir la frecuencia, la cual son las ondas por segundo, con la velocidad, que es la distancia que una cresta determinada viaja por unidad de tiempo.

Solución: La frecuencia y la velocidad de las ondas se calculan a partir de sus definiciones.

$$f = \frac{80 \text{ ondas}}{60 \text{ s}} = 1.33 \text{ Hz}$$

$$v = \frac{x}{t} = \frac{12 \text{ m}}{8 \text{ s}}; \qquad v = 1.50 \text{ m/s}$$

A partir de la ecuación (21.3), la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1.50 \text{ m/s}}{1.33 \text{ Hz}}; \qquad \lambda = 1.13 \text{ m}$$

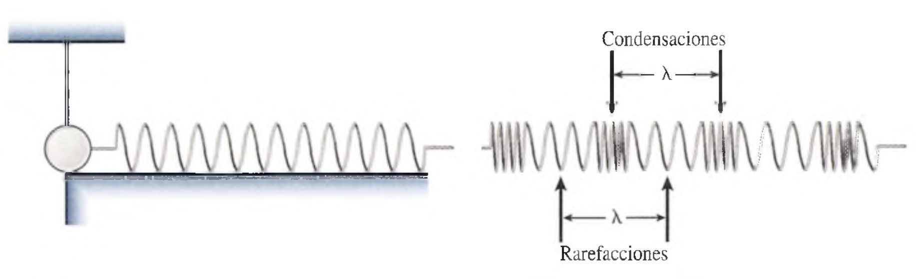


Figura 21.7 Producción y propagación de una onda longitudinal de tipo periódico.

Con el aparato que muestra la figura 21.7 puede generarse una onda periódica longitudinal. El extremo izquierdo del resorte en espiral está unido a una esfera metálica que a su vez se sostiene mediante una hoja de sierra para cortar metales. Cuando la esfera metálica se desplaza hacia la izquierda y se suelta, vibra con movimiento armónico. Las condensaciones y rarefacciones resultantes se transmiten por el resorte generando una onda longitudinal periódica. Cada partícula del resorte en espiral oscila horizontalmente hacia atrás y hacia adelante, con la misma frecuencia y amplitud que la esfera de metal. La distancia entre cualquier par de partículas adyacentes que se encuentran en fase es la longitud de onda. Tal como se ilustra en la figura 21.7, la distancia entre dos condensaciones o rarefacciones adyacentes cualesquiera es una medida conveniente de la longitud de onda. La ecuación (21.3) también se aplica a una onda longitudinal periódica.

21.5 Energía de una onda periódica

Hemos visto que cada partícula en una onda periódica oscila con un movimiento armónico simple determinado por la fuente de la onda. El contenido de energía de una onda puede analizarse considerando el movimiento armónico de las partículas en forma individual. Por ejemplo, considere una onda transversal periódica en una cuerda en el instante representado en la figura 21.8. La partícula *a* ha alcanzado su máxima ***amplitud***; su velocidad es cero, y está experimentando su máxima fuerza de restitución. La partícula *b* está cruzando por su posición de equilibrio, donde la fuerza de restitución es igual a cero. En ese instante, la partícula *b* tiene su mayor rapidez y, por consiguiente, su energía máxima. La partícula *c* se encuentra a su máximo desplazamiento en la dirección negativa. Mientras la onda periódica

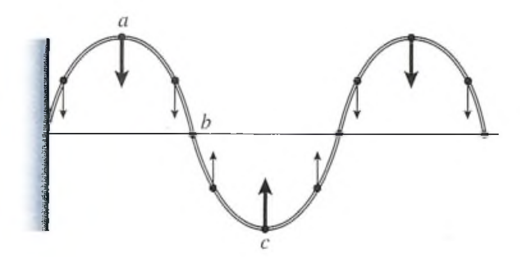


Figura 21.8 Fuerzas de restitución que actúan sobre las partículas de una cuerda vibrante.

recorre la cuerda, cada partícula oscila hacia atrás y hacia adelante respecto a su propia posición de equilibrio.

En el capítulo 14 sobre el movimiento armónico, se encontró que la velocidad máxima de una partícula que oscila con una frecuencia f y una amplitud A está dada por

$$v_{\text{máx}} = 2\pi f A$$

Cuando una partícula tiene esta rapidez, está pasando por su posición de equilibrio, donde su energía potencial es cero y su energía cinética es máxima. De modo que la energía total de la partícula es

$$\begin{aligned} E &= U + K = K_{\text{máx}} \\ &= \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}m(2\pi f A)^2 \\ &= 2\pi^2 f^2 A^2 m \end{aligned} \tag{21.4}$$

A medida que una onda periódica pasa a través de un medio, cada elemento de éste realiza trabajo continuamente sobre los elementos adyacentes. Por lo tanto, la energía que se transmite a lo largo de la cuerda vibrante no se confina a una sola posición. Ahora se aplicará el resultado obtenido para una sola partícula a la longitud total de la cuerda que vibra. El contenido de energía de toda la cuerda es la suma de las energías individuales de las partículas que la forman. Si m representa la masa total de la cuerda en vez de la masa de cada partícula, la ecuación (21.4) representa la energía de la onda total en la cuerda. En una cuerda de longitud L, la energía de la onda por unidad de longitud está dada por

$$\frac{E}{L} = 2\pi^2 f^2 A^2 \frac{m}{L}$$

Sustituyendo μ para la masa por unidad de longitud, escribimos

$$\frac{E}{L} = 2\pi^2 f^2 A^2 \mu \tag{21.5}$$

La energía de la onda es proporcional al cuadrado de la frecuencia f, al cuadrado de la amplitud A y a la densidad lineal μ de la cuerda. Debe tomarse en cuenta que la densidad lineal no es función de la longitud de la cuerda. Esto es cierto, puesto que la masa aumenta en proporción a la longitud L, de modo que μ es constante para cualquier longitud.

Suponga que la onda viaja por la longitud L de una determinada cuerda con una rapidez v. El tiempo t necesario para que la onda recorra esta longitud es

$$t = \frac{L}{v}$$

Si la energía en esta longitud de cuerda se representa por E, la potencia P de la onda está dada por

$$P = \frac{E}{t} = \frac{E}{L/v} = \frac{E}{L}v \tag{21.6}$$

Esto representa la *razón* de propagación de la energía por la cuerda. La sustitución a partir de la ecuación (21.5) nos da

$$P = 2\pi^2 f^2 A^2 \mu v \qquad \textbf{(21.7)}$$

La potencia de la onda es directamente proporcional a la energía por unidad de longitud y a la rapidez de propagación de la onda.

El hecho de que la energía de la onda y la potencia de la onda dependan de f^2 y A^2, como lo indican las ecuaciones (21.5) y (21.7), es una conclusión general para todo tipo de ondas. Las mismas ideas se aplicarán en el siguiente capítulo cuando se estudie la energía de una onda sonora.

21.6 Principio de superposición

Hasta aquí hemos considerado el movimiento de un solo tren de pulsos que pasan a través de un medio. Ahora estudiaremos lo que sucede cuando dos o más trenes de ondas pasan simultáneamente a través del mismo medio. Vamos a analizar las ondas transversales en una cuerda que está vibrando. La rapidez de una onda transversal se determina por medio de la tensión de la cuerda y su densidad lineal. Puesto que estos parámetros son función del medio y no de la fuente, cualquier onda transversal tendrá la misma rapidez para una determinada cuerda bajo tensión constante. Sin embargo, la frecuencia y la amplitud pueden variar en forma considerable.

> Cuando dos o más trenes de ondas existen simultáneamente en el mismo medio, cada onda recorre el medio como si las otras no estuvieran presentes.

La onda resultante es una superposición de las ondas componentes. Es decir, el desplazamiento que resulta de una sola partícula en la cuerda que vibra es la suma algebraica de los desplazamientos que cada onda produciría, independientemente de las demás. Éste es el ***principio de superposición***:

> Cuando dos o más ondas existen simultáneamente en el mismo medio, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante es la suma algebraica de los desplazamientos de cada onda.

Debe observarse que el principio de superposición, tal como se ha enunciado aquí, se aplica únicamente a medios de tipo *lineal*, es decir, a aquellos cuya respuesta es directamente proporcional a la causa. Además, la suma de los desplazamientos es *algebraica* sólo si las ondas tienen el mismo plano de polarización. Para nuestros propósitos, vamos a suponer que una cuerda vibrante satisface ambas condiciones.

La aplicación de este principio se muestra gráficamente en la figura 21.9. Las dos ondas, representadas por líneas continuas y discontinuas, se superponen para formar la onda resultante indicada por la línea gruesa. En la figura 21.9a la superposición da por resultado una onda de mayor amplitud, conocida como ***interferencia constructiva***. La ***interferencia destructiva*** se presenta cuando la amplitud resultante es más pequeña, como se ve en la figura 21.9b.

(a) Interferencia constructiva (b) Interferencia destructiva

Figura 21.9 Principio de superposición.

21.7 Ondas estacionarias

Consideremos ahora la reflexión de un pulso transversal, como se muestra en la cuerda de la figura 21.10. Cuando el extremo de la cuerda se ata fuertemente al soporte, el pulso que llega golpea el soporte y ejerce sobre él una fuerza ascendente. La fuerza de reacción que ejerce a su vez el soporte tira entonces en dirección de la cuerda hacia abajo, lo cual origina un pulso reflejado. Tanto el desplazamiento como la velocidad se invierten en el pulso reflejado. Esto quiere decir que si un pulso llega como una cresta, se refleja como un valle, con la misma rapidez pero en la dirección opuesta, y viceversa.

Supongamos que ahora se hace vibrar una cuerda cuyos extremos están fijos, como se muestra en la figura 21.11. Se puede aplicar el principio de superposición para analizar en cualquier instante la onda resultante que se forma. En la figura 21.11a se han considerado las ondas que inciden y que se reflejan en un tiempo determinado $t = 0$. La onda incidente, que viaja a la derecha, se indica por una línea continua delgada. La onda reflejada, que viaja a la izquierda, se indica por una línea discontinua. Las dos ondas tienen la misma rapidez y longitud de onda, pero tienen direcciones opuestas. En este instante todas las partículas de la cuerda se encuentran en una línea horizontal, como muestra la línea gruesa. Observe que la línea gruesa es una superposición de las ondas incidente y reflejada en el momento en que la suma de sus desplazamientos es igual a cero. Si se toma una foto instantánea de la cuerda un instante después mostraría que, con unas cuantas excepciones, todas las partículas han cambiado de posición. Esto se debe a que las ondas componentes se han movido una distancia finita.

Consideremos ahora la onda resultante en un tiempo t igual a un cuarto de periodo posterior ($t = \frac{1}{4}T$), como en la figura 21.11b. La onda componente indicada mediante una línea continua se moverá a la *derecha* una distancia de un cuarto de longitud de onda. La onda componente indicada por la línea discontinua se habrá movido a la *izquierda* una distancia de un cuarto de longitud de onda. La onda resultante y, por tanto, la forma de la cuerda en este momento se indica mediante una línea continua gruesa. La interferencia constructiva ha dado como resultado una onda del doble de amplitud de cualquiera de las ondas componentes. Cuando el tiempo t es de la mitad de un periodo ($t = \frac{1}{2}T$), se presenta la interferencia destructiva total, y una vez más la forma de la cuerda es una línea recta, como en la figura 21.11c. Cuando $t = \frac{3}{4}T$, la forma de la cuerda alcanza su máxima amplitud en dirección opuesta. Esta interferencia constructiva se muestra mediante una línea gruesa en la figura 21.11d.

Una serie de fotografías instantáneas de la cuerda vibrante, tomadas a intervalos de tiempo muy pequeños, revelaría cierto número de ondas como muestra la figura 21.11e. A una onda así se le llama ***onda estacionaria***.

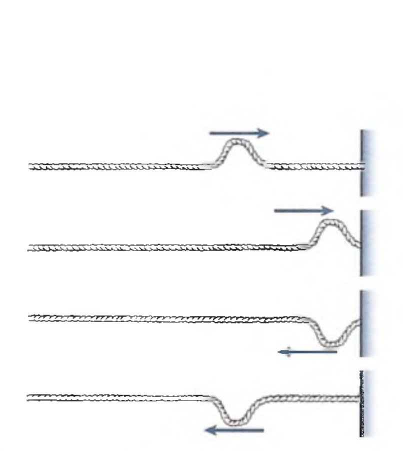


Figura 21.10 Reflexión de un pulso transversal en una frontera fija.

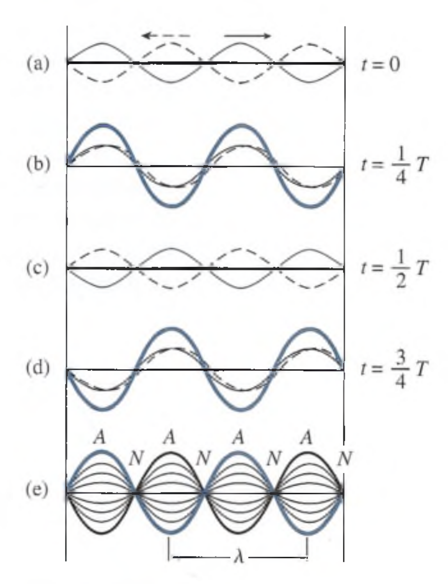


Figura 21.11 Producción de una onda estacionaria.

Observe que hay ciertos puntos a lo largo de la cuerda que permanecen en reposo. Estas posiciones, llamadas ***nodos***, se han indicado como N en la figura. Un insecto pequeño posado en un nodo sobre la cuerda vibrante no se movería hacia arriba y abajo a causa del movimiento ondulatorio.

Entre los puntos nodales, las partículas de la cuerda se mueven hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple. Los puntos de máxima amplitud se presentan a la mitad de la distancia entre los nodos y se llaman ***antinodos***. Un insecto pequeño que descansara sobre la cuerda en cualesquiera de estos puntos, marcados con A, experimentaría rapideces y deslizamientos máximos en la oscilación de la cuerda hacia arriba y hacia abajo.

La distancia entre nodos alternados o antinodos alternados en una onda estacionaria es una medida de la longitud de onda de las ondas componentes.

Las ondas estacionarias longitudinales también se presentan debido a una reflexión continua de pulsos de condensación y rarefacción. En este caso los nodos existen donde las partículas del medio son estacionarias, y los antinodos se presentan donde las partículas del medio oscilan con una amplitud máxima en la dirección de la propagación. Las ondas estacionarias longitudinales se estudiarán en el siguiente capítulo, en relación con las ondas sonoras.

21.8 Frecuencias características

Consideremos las posibles ondas estacionarias que se pueden originar en una cuerda de longitud L cuyos extremos están fijos, como se muestra en la figura 21.12. Cuando la cuerda empieza a vibrar, los trenes de onda incidente y reflejado viajan en direcciones opuestas, con una misma longitud de onda. Los puntos extremos fijos representan las *condiciones de frontera* que restringen el número de posibles longitudes de onda que producirán las ondas estacionarias. Estos puntos extremos deben ser nodos de desplazamiento para cualquier patrón de ondas resultante.

La onda estacionaria más sencilla posible se presenta cuando las longitudes de onda de las ondas incidentes y reflejadas son equivalentes al doble de la longitud de la cuerda. La onda estacionaria consiste en un bucle que tiene puntos nodales en cada extremo, como se ve en la figura 21.12a. Este patrón de vibración se conoce como el ***modo fundamental de oscilación***. Los modos superiores de oscilación se producirán para longitudes de onda cada vez más cortas. En la figura se observa que las longitudes de onda permitidas son las siguientes:

$$\frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \ldots$$

o, en forma de ecuación,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21.8}$$

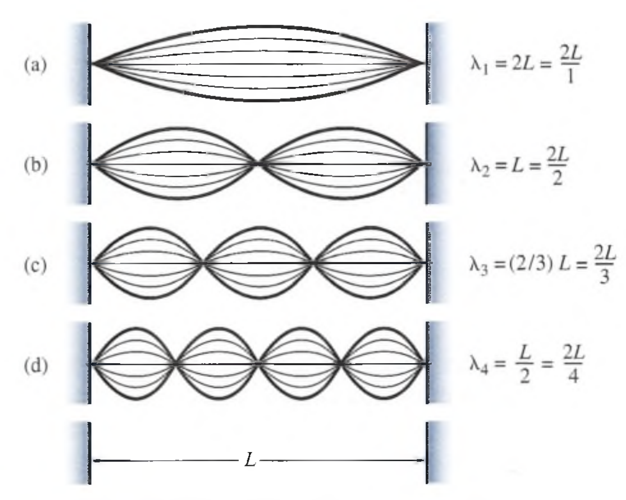


Figura 21.12 Modelos posibles de ondas estacionarias en una cuerda vibrante.

Las frecuencias correspondientes de vibración son, partiendo de que $v = f\lambda$,

$$f_n = \frac{nv}{2L} = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21.9}$$

donde v es la rapidez de las ondas transversales. Esta rapidez es la misma para todas las longitudes de onda, puesto que depende tan sólo de las características del medio vibrante. A las frecuencias que se obtienen mediante la ecuación (21.9) se les llama ***frecuencias características de vibración***. En términos de la tensión F de la cuerda y de la densidad lineal μ, las frecuencias características son las siguientes:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21.10}$$

La frecuencia más baja posible ($v/2L$) se conoce como la ***frecuencia fundamental*** f_1. Las otras frecuencias, que son múltiplos enteros de la fundamental, se conocen como ***sobretonos***. La serie completa,

$$f_n = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21.11}$$

está conformada por la frecuencia fundamental y sus sobretonos, y se le conoce como ***serie armónica***. La fundamental es la primera armónica; el primer sobretono ($f_2 = 2\ f_1$) es la segunda armónica; el segundo sobretono ($f_3 = 3f_1$) es la tercera armónica, y así sucesivamente.

Ejemplo 21.3

Una cuerda de acero para piano de 50 cm de longitud tiene una masa de 3.05 g y se encuentra bajo una tensión de 400 N. ¿Cuáles son las frecuencias de su modo fundamental de vibración y de los primeros dos sobretonos?

Plan: Primero calcularemos la densidad lineal de la cuerda. De nuevo debemos expresar la *longitud* en metros y la *masa* en kilogramos. Recuerde que la vibración fundamental ocurre cuando hay un solo bucle y $n = 1$ en la ecuación (21.10). El primer sobretono es la segunda armónica ($n = 2$) y el segundo sobretono es la tercera armónica, y así sucesivamente.

Solución: La densidad lineal es

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{3.05 \times 10^{-3}\text{ kg}}{0.500\text{ m}}; \qquad \mu = 6.10 \times 10^{-3}\text{ kg/m}$$

El modo fundamental se determina estableciendo que $n = 1$ en la ecuación (21.10).

$$f_1 = \frac{(1)}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{(1)}{2(0.5\text{ m})}\sqrt{\frac{400\text{ N}}{6.10 \times 10^{-3}\text{ kg/m}}}$$
$$= 256\text{ Hz}$$

El primero y el segundo sobretonos son

$$f_2 = 2f_1 = 2(256\text{ Hz}); \qquad f_2 = 512\text{ Hz}$$
$$f_3 = 3f_1 = 3(256\text{ Hz}); \qquad f_3 = 768\text{ Hz}$$

En el siguiente capítulo veremos que, mientras una cuerda vibra en uno o más de sus posibles modos, la energía se transmite al aire de los alrededores en forma de ondas sonoras. Estas ondas longitudinales consisten en condensaciones y rarefacciones de la misma frecuencia que las cuerdas vibrantes. El oído humano interpreta estas ondas como sonido. La frecuencia fundamental de 256 Hz se interpreta como *do central* en el piano.

Resumen y repaso

Hemos investigado el movimiento ondulatorio mecánico en el cual la energía es transferida por una perturbación física en un medio elástico. Las leyes fundamentales desarrolladas en este capítulo son importantes porque también pueden aplicarse a muchos otros tipos de ondas que estudiaremos posteriormente. Los conceptos esenciales se resumen a continuación.

- La velocidad de una onda transversal en una cuerda de masa m y longitud L está dada por

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \mu = \frac{m}{L} \qquad v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \qquad \textit{Rapidez de onda}$$

	Fuerza F	Masa m	Longitud L	Rapidez v
Unidades del SI	N	kg	m	m/s
Unidades del SUEU	lb	slug	ft	ft/s

- Para cualquier onda de periodo T o frecuencia f, la rapidez v se puede expresar en función de la longitud de onda λ en la siguiente forma:

$$v = \frac{\lambda}{T} \qquad v = f\lambda \qquad \textit{La frecuencia está dada en } \text{Hz} = 1/\text{s}$$

- La *energía por unidad de longitud* y la *potencia* de la propagación de ondas se pueden obtener a partir de

$$\frac{E}{L} = 2\pi^2 f^2 A^2 \mu \qquad P = 2\pi^2 f^2 A^2 \mu v$$

- Las frecuencias características de los posibles modos de vibración de una cuerda en tensión se calculan a partir de

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Frecuencias características

- Las series $f_n = nf_1$ se conocen como *armónicas*. Éstas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental f_1. Se trata de valores matemáticos y es posible que no existan todas las armónicas. Las posibilidades reales más allá de la fundamental se llaman *sobretonos*. Puesto que todas las armónicas son posibles para una cuerda que vibra, el primer sobretono es la segunda armónica, el segundo sobretono es la tercera armónica, y así sucesivamente.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

21.1. Explique cómo una onda de agua es tanto transversal como longitudinal.

21.2. Describa un experimento para demostrar que la energía está asociada al movimiento ondulatorio.

21.3. En una *onda torsional*, las partículas individuales del medio vibran con movimiento armónico angular sobre el eje de propagación. Proponga un ejemplo mecánico de ese tipo de onda.

21.4. Comente la interferencia de ondas. ¿Hay una pérdida de energía cuando interfieren las ondas? Explique su respuesta.

21.5. Un impulso transversal se envía a lo largo de una cuerda de masa m y longitud L bajo una tensión F. ¿Cómo se verá afectada la rapidez del pulso si (a) la masa de la cuerda se cuadruplica, (b) la longitud de la cuerda se cuadruplica y (c) la tensión se reduce en una cuarta parte?

21.6. Dibuje gráficas de una onda transversal periódica y una onda longitudinal periódica. Indique en las figuras la longitud de onda y la amplitud de cada onda.

21.7. ¿Qué armónica aparece indicada en la figura 21.12d? ¿Qué sobretono está presente?

21.8. Hemos visto que las condiciones de frontera determinan los modos de vibración posibles. Haga un diagrama de la frecuencia fundamental y de los dos primeros sobretonos en el caso de una varilla vibratoria (a) sujeta por uno de los extremos y (b) sujeta por su punto medio.

21.9. Una cuerda al vibrar tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz. Si su longitud se reduce en una cuarta parte, ¿cuál será la nueva frecuencia fundamental? ¿Se ha alterado la rapidez de la onda al acortar la cuerda? Suponga que la tensión es constante.

21.10. Muestre gráficamente la superposición de dos ondas que viajan en la misma dirección. La amplitud de la segunda onda es igual a tres cuartas partes y la longitud de onda es igual a la mitad de las que corresponden a la primera onda.

21.11. En un experimento realizado con la cuerda vibratoria, un extremo de ésta se unió a la punta de un vibrador y el otro extremo se hizo pasar por una polea. Se usaron pesas suspendidas para producir la frecuencia fundamental y los tres primeros sobretonos. ¿Cuál será el efecto del estiramiento de la cuerda en el cálculo de la frecuencia producida?

Problemas

Sección 21.1 Ondas mecánicas, Sección 21.2 Tipos de ondas, Sección 21.3 Cálculo de la rapidez de onda, Sección 21.4 Movimiento ondulatorio periódico

21.1. Una onda transversal tiene una longitud de onda de 30 cm y vibra con una frecuencia de 420 Hz. ¿Cuál es la rapidez de esta onda? Resp. 126 m/s

21.2. En un muelle, una persona cuenta los choques de una ola cuando las crestas golpean un poste. Si escucha 80 choques en 1 min y una cresta en particular recorre una distancia de 8 m en 4 s, ¿cuál es la longitud de una sola ola?

21.3. La figura 21.13 muestra una onda transversal. Calcule la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la rapidez de la onda si ésta tiene una frecuencia de 12 Hz. Resp. 12 cm, 28 cm, 83.3 ms, 3.36 m/s

21.4. En el caso de la onda longitudinal de la figura 21.13, halle la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la rapidez de la onda si ésta tiene una frecuencia de 8 Hz. Si la amplitud se duplicara, ¿cambiaría cualquiera de los demás factores?

21.5. Un alambre de metal de 500 g tiene una longitud de 50 cm y está bajo una tensión de 80 N. ¿Cuál es la rapidez de una onda transversal en ese alambre? Resp. 8.94 m/s

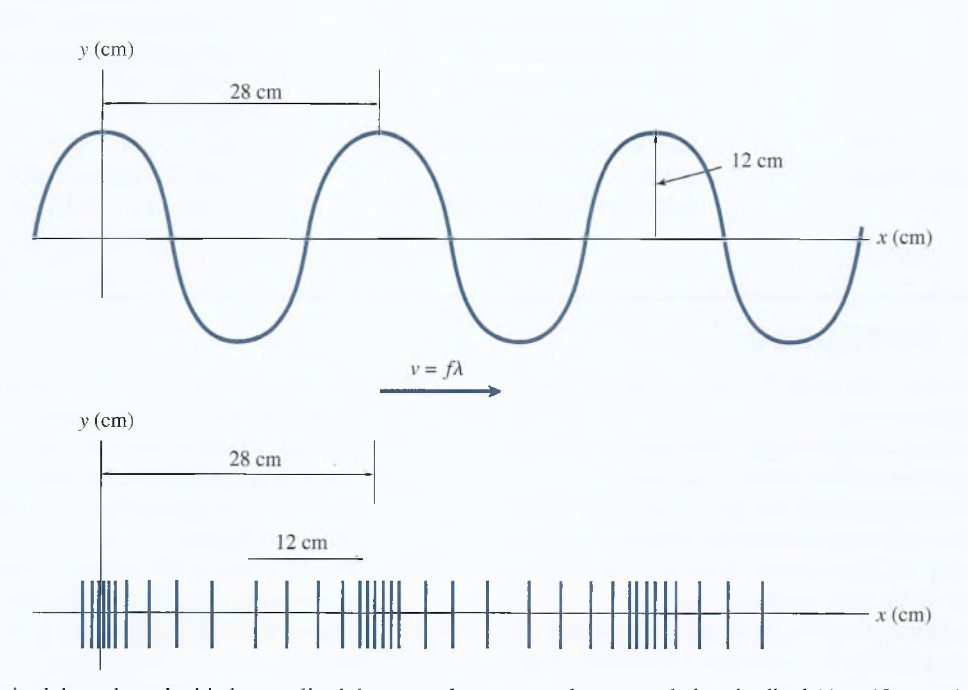


Figura 21.13 Longitud de onda, velocidad y amplitud de una onda transversal y una onda longitudinal ($A = 12$ cm y $\lambda = 28$ cm).

21.6. Si el alambre del problema 21.5 se corta a la mitad, ¿cuál será su nueva masa? Demuestre que la rapidez de la onda no cambia. ¿Por qué?

21.7. Una cuerda de 3 m sometida a una tensión de 200 N mantiene una rapidez de onda transversal de 172 m/s. ¿Cuál es la masa de la cuerda? Resp. 20.3 g

21.8. Una cuerda de 200 g se estira sobre una distancia de 5.2 m y se somete a una tensión de 500 N. Calcule la rapidez de una onda transversal en esa cuerda.

21.9. ¿Qué tensión se requiere para producir una rapidez de onda de 12.0 m/s en una cuerda de 900 g y 2 m de longitud? Resp. 64.8 N

21.10. Un flotador de madera colocado en el extremo de una cuerda para pescar describe ocho oscilaciones completas en 10 s. Si una sola onda tarda 3.60 s para recorrer 11 m, ¿cuál es la longitud de onda de las ondas en el agua?

21.11. ¿Qué frecuencia se requiere para que una cuerda vibre con una longitud de onda de 20 cm cuando está bajo una tensión de 200 N? Suponga que la densidad lineal de la cuerda es de 0.008 kg/m. Resp. 791 Hz

21.12. Una tensión de 400 N hace que un alambre de 300 g y 1.6 m de longitud vibre con una frecuencia de 40 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas transversales?

21.13. Una cuerda horizontal es sacudida hacia delante y atrás en uno de sus extremos mediante un dispositivo que completa 80 oscilaciones en 12 s. ¿Cuál es la rapidez de las ondas longitudinales si las condensaciones están separadas por 15 cm a medida que la onda desciende por la cuerda? Resp. 1.00 m/s

Sección 21.5 Energía de una onda periódica

21.14. Un trozo de cuerda de 2 m tiene una masa de 300 g y vibra con una frecuencia de 2 Hz y una amplitud de 50 mm. Si la tensión en la cuerda es de 48 N, ¿cuánta potencia es necesario impartirle?

21.15. Una cuerda de 80 g tiene una longitud de 40 m y vibra con una frecuencia de 8 Hz y una amplitud de 4 cm. Calcule la energía por unidad de longitud que pasa a lo largo de la cuerda. Resp. 4.04×10^{-3} J/m

21.16. Si la longitud de onda de la onda transversal del problema 21.11 es de 1.6 m, ¿qué potencia es suministrada por la fuente?

***21.17.** Una cuerda de 300 g tiene 2.50 m de longitud y vibra con una amplitud de 8.00 mm. La tensión en la cuerda es de 46 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas para que la potencia promedio sea 90.0 W? Resp. 174 Hz

Sección 21.7 y 21.8 Ondas estacionarias y frecuencias características

21.18. Una cuerda vibra con una frecuencia fundamental de 200 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de la segunda armónica y la del tercer sobretono?

21.19. Si la frecuencia fundamental de una onda es de 330 Hz, ¿cuál es la frecuencia de su quinta armónica y la de su segundo sobretono? Resp. 1650 Hz, 990 Hz

21.20. La densidad lineal de una cuerda es 0.00086 kg/m. ¿Cuál deberá ser la tensión de la cuerda para que un tramo de 2 m de longitud vibre a 600 Hz en su tercera armónica?

21.21. Una cuerda de 10 g y 4 m de longitud tiene una tensión de 64 N. ¿Cuál es la frecuencia de su modo fundamental de oscilación? ¿Cuáles son las frecuencias del primero y el segundo sobretonos? Resp. 20, 40 y 60 Hz

21.22. La segunda armónica de una cuerda vibratoria es de 200 Hz. La longitud de la cuerda es 3 m y su tensión es de 200 N. Calcule la densidad lineal de la cuerda.

21.23. Una cuerda de 0.500 g tiene 4.3 m de longitud y soporta una tensión de 300 N. Está fija en ambos extremos y vibra en tres segmentos, ¿cuál es la frecuencia de las ondas estacionarias? Resp. 560 Hz

21.24. Una cuerda vibra con ondas estacionarias en cinco antinodos cuando la frecuencia es 600 Hz. ¿Qué frecuencia hará que la cuerda vibre en sólo dos antinodos?

21.25. Un alambre de 120 g fijo por ambos extremos tiene 8 m de longitud y soporta una tensión de 100 N. ¿Cuál es la longitud de onda más grande posible para una onda estacionaria? ¿Cuál es la frecuencia? Resp. 16 m, 5.10 Hz

Problemas adicionales

21.26. Una cuerda E_5 del violín de la figura 21.14 se va a afinar a una frecuencia de 660 Hz. Del puente a la cejuela, la longitud de la cuerda es 33 cm y su masa es 0.125 g. ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda?

21.27. ¿Cuál es la rapidez de una onda transversal en una cuerda de 2.00 m de longitud y 80 g de masa que soporta una tensión de 400 N? Resp. 100 m/s

21.28. Una onda transversal viaja con una rapidez de 8.00 m/s. Una partícula individual de la cuerda pasa de su punto más alto a su punto más bajo en un lapso de 0.03 s. ¿Cuál es la longitud de onda?

21.29. Una cuerda de una guitarra eléctrica baja de 750 mm de longitud se estira con la fuerza suficiente para producir una vibración fundamental de 220 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda? Resp. 330 m/s

21.30. Una masa de 5 kg cuelga del techo en el extremo de un alambre de 30 g y 1.8 m de longitud. ¿Cuál es la frecuencia fundamental de vibración de este alambre?



Figura 21.14 La longitud, la masa y la tensión de un cuerda de violín determinan la frecuencia observada. (*Foto por Paul. E. Tipppens.*)

21.31. Un alambre tensor de acero que sostiene un poste mide 18.9 m de longitud y 9.5 mm de diámetro. Su densidad lineal es de 0.474 kg/m. Cuando se golpea con un martillo uno de sus extremos, el impulso regresa en 0.3 s. ¿Cuál es la tensión en el alambre?
Resp. 7530 N

***21.32.** Un alambre de 30 m que pesa 400 N se ha estirado con una tensión de 1800 N. ¿Cuánto tiempo tarda un impulso en recorrer el alambre de ida y vuelta si éste se golpea en uno de sus extremos?

***21.33.** Las ondas transversales tienen una rapidez de 20 m/s en una cuerda sometida a una tensión de 8 N. ¿Qué tensión se requiere para impartir a una onda una rapidez de 30 m/s en la misma cuerda?
Resp. 18.0 N

***21.34.** La frecuencia fundamental para una cuerda determinada es de 80 Hz. Si la masa de la cuerda se duplica, pero los demás factores se mantienen constantes, ¿cuál será la nueva frecuencia fundamental?

Preguntas para la reflexión crítica

21.35. En un experimento de laboratorio se utiliza un vibrador electromagnético como fuente de ondas estacionarias en una cuerda. Se ha observado que un tramo de 1 m de esa cuerda tiene una masa de 0.6 mg. Un extremo de dicha cuerda está unido a la punta del vibrador y el otro pasa a través de una polea a 1 m de distancia y está atado a un gancho para pesas. Cuando se cuelga una masa de 392 g del extremo libre de la cuerda, ésta vibra en 3 segmentos. ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? ¿Qué nueva masa unida al extremo libre hará que la cuerda vibre en cuatro antinodos? (Figura 21.15) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? Resp. 120 Hz, 22.0 g

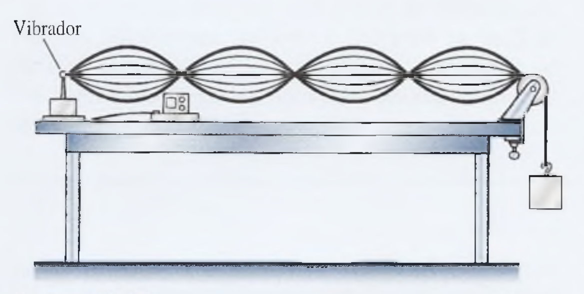


Figura 21.15

***21.36.** Para comprender los parámetros que afectan la velocidad de una onda en una cuerda que vibra, supongamos que

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} = 100 \text{ m/s}$$

¿Cuál es la nueva rapidez de onda v' para cada uno de los siguientes cambios: (a) $F' = 2F$, (b) $m' = 2$ m, (c) $L' = 2L$

***21.37.** Una fuente de potencia de 2 mW genera ondas en una cuerda A y otra fuente de poder genera ondas en una cuerda idéntica B. Las ondas de ambas cuerdas son de la misma frecuencia f y velocidad v. Si la amplitud en la cuerda B es el doble de la que corresponde a la cuerda A, ¿qué potencia se ha suministrado a la cuerda B? Resp. 8.00 mW

***21.38.** La frecuencia fundamental de una cuerda de acero para piano es de 253 Hz. ¿Qué incremento fraccional se requerirá en la tensión de la cuerda para que la frecuencia coincida con la nota "do" deseada (256 Hz)?

***21.39.** Un oscilador variable permite que un estudiante ajuste en el laboratorio la frecuencia de una fuente para producir ondas estacionarias en una cuerda que vibra. Un tramo de 1.20 m de cuerda ($\mu = 0.400$ g/m) se somete a una tensión de 200 N. ¿Qué frecuencia se requiere para producir tres bucles estacionarios en la cuerda que vibra? ¿Cuál es la frecuencia fundamental? ¿Qué frecuencia producirá cinco bucles?
Resp. 884 Hz, 295 Hz, 1473 Hz

22 Sonido



Durante siglos, las ondas sonoras longitudinales producidas en los órganos de tubos han brindado hermosas notas de tonalidades profundas. La longitud de los tubos y las condiciones de frontera determinan el tono de las notas; las cavidades resonantes y las condiciones que rodean a los tubos determinan la calidad del sonido. (*Fotografía © vol. 32 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá el sonido y resolverá problemas que impliquen su velocidad en metales, en líquidos y en gases.
2. Usará condiciones de frontera para deducir y aplicar relaciones para calcular las *frecuencias características* de un tubo abierto y de uno cerrado.
3. Calculará el nivel de intensidad en decibeles de un sonido cuya intensidad se expresa en *watts por metro cuadrado.*
4. Utilizará sus conocimientos del *efecto Doppler* para predecir el cambio aparente en la frecuencia sonora que resulta del movimiento relativo entre una fuente y un oyente.

Cuando se produce una perturbación periódica en el aire ***ondas sonoras*** longitudinales viajan por él. Por ejemplo, si se golpea un diapasón con un martillo, las ramas vibratorias emiten ondas longitudinales, como se muestra en la figura 22.1. El oído, que actúa como receptor de estas ondas periódicas, las interpreta como sonido.

¿Es necesario el oído para que exista el sonido? Si el diapasón se golpeara en la atmósfera de un planeta distante, ¿habría sonido, aun cuando ningún oído captara esa perturbación? La respuesta depende de cómo se defina el sonido.

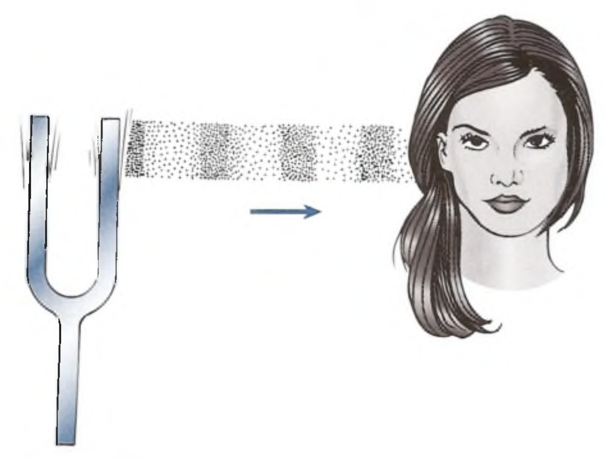


Figura 22.1 Un diapasón funciona como la fuente de ondas sonoras longitudinales.

El término ***sonido*** se usa de dos formas. Los fisiólogos lo definen en términos de las sensaciones auditivas producidas por perturbaciones longitudinales en el aire. Para ellos, el sonido no existe en un planeta distante. Por otra parte, los físicos nos referimos a las perturbaciones por sí mismas y no a las sensaciones que producen.

El sonido es una onda mecánica longitudinal que se propaga por un medio elástico.

En este caso, el sonido existe en el planeta. En este capítulo el concepto *sonido* se usará en su significado físico.

22.1 Producción de una onda sonora

Son necesarios dos factores para que se produzca el sonido: una fuente de vibración mecánica y un medio elástico por el que se propague la perturbación. La fuente puede ser un diapasón, una cuerda que vibre o una columna de aire vibrando en un tubo de órgano. *Los sonidos se producen por materia que se halla en vibración.* La necesidad de la existencia de un medio elástico puede demostrarse colocando un timbre eléctrico dentro de un frasco conectado a una bomba de vacío, como se muestra en la figura 22.2. Cuando el timbre se conecta a una batería para que suene continuamente, se extrae aire del frasco lentamente. A medida que va saliendo el aire del frasco, el sonido del timbre se vuelve cada vez más débil hasta que finalmente ya

FÍSICA HOY

La nueva tecnología de micrófonos ha logrado crear unidades más pequeñas que nunca. Existe un micrófono grabado por corrosión en una oblea de silicio, y en el cual la vibración de una membrana de 400 nm de grosor convierte el sonido en una señal eléctrica. El dispositivo ocupa sólo 2 mm^2. Otro nuevo avance en la tecnología de los micrófonos utiliza dos carriles metálicos minúsculos para medir las pequeñísimas ondulaciones del aire empujado hacia los lados por las ondas sonoras.

Continúa

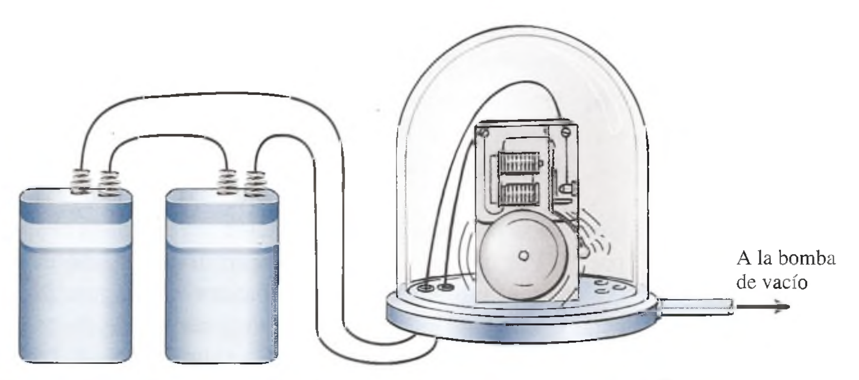


Figura 22.2 En el vacío no se puede escuchar un timbre. Se necesita un medio material para la producción de sonido.

FÍSICA HOY

Continuación
El aire ocasiona más enfriamiento en un carril que en el otro (los carriles son aproximadamente tan delgados como la longitud de onda del sonido audible). Este micrófono capta el sonido sin utilizar partes móviles y se afirma que es sumamente direccional y que permite eliminar el ruido de fondo. Otro micrófono diminuto utiliza en realidad una luz láser que incide en una membrana de nitruro de silicio recubierta de oro y se refleja en una fibra óptica. La luz láser reflejada se convierte entonces en una señal eléctrica. Según se informa, este dispositivo es miles de veces más sensible que la generación anterior de sensores de presión hechos a base de fibra óptica.

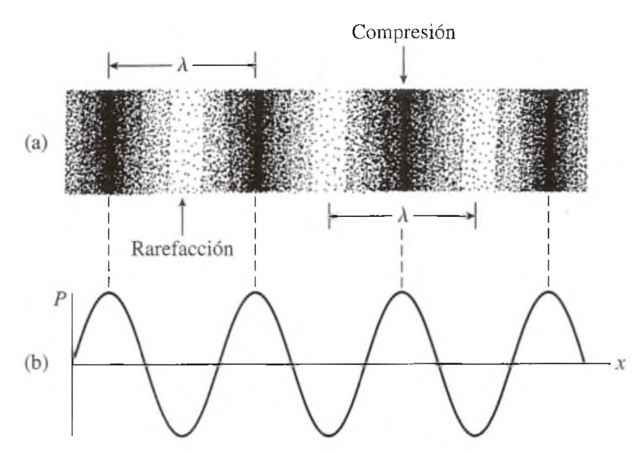


Figura 22.3 (a) Compresiones y rarefacciones de una onda de sonido en el aire en un instante específico. (b) La variación senoidal de la presión en función del desplazamiento.

no se escucha. Cuando se permite que el aire penetre de nuevo en el frasco, el timbre vuelve a sonar. Por tanto, el aire es necesario para transmitir el sonido.

Ahora estudiemos más detalladamente las ondas sonoras longitudinales en el aire que proceden de una fuente que vibra. Una tira metálica delgada se sujeta fuertemente en su base, se tira de uno de sus lados y luego se suelta. Al oscilar el extremo libre de un lado a otro con movimiento armónico simple, se propagan a través del aire una serie de ondas sonoras longitudinales periódicas que se alejan de la fuente. Las moléculas de aire que colindan con la lámina metálica se comprimen y se expanden alternadamente, transmitiendo una onda como la que se muestra en la figura 22.3a. Las regiones densas en las que gran número de moléculas se agrupan acercándose mucho entre sí se llaman ***compresiones***. Son exactamente análogas a las ***condensaciones*** estudiadas para el caso de ondas longitudinales en un resorte en espiral. Las regiones que tienen relativamente pocas moléculas se conocen como ***rarefacciones***. Las compresiones y las rarefacciones se alternan a través del medio de la misma forma que las partículas de aire individuales oscilan de un lado a otro en la dirección de la propagación de la onda. Puesto que una compresión corresponde a una región de alta presión y una rarefacción a una región de baja presión, una onda sonora también puede representarse trazando en una gráfica el cambio de presión P en función de la distancia x (véase la figura 22.3b). La distancia entre dos compresiones o rarefacciones sucesivas es la longitud de onda.

22.2 La rapidez del sonido

Cualquier persona que haya visto a cierta distancia cómo se dispara un proyectil ha observado el fogonazo del arma antes de escuchar la detonación. Ocurre algo similar al observar el relámpago de un rayo antes de oír el trueno. Aunque tanto la luz como el sonido viajan a rapideces finitas, la de la luz es tan grande en comparación con la del sonido que puede considerarse instantánea. La rapidez del sonido puede medirse directamente determinando el tiempo que les toma a las ondas moverse a través de una distancia conocida. En el aire, a 0° C, el sonido viaja a una rapidez de 331 m/s (1087 ft/s).

En el capítulo 21 se estableció el concepto de que la rapidez de una onda depende de la elasticidad del medio y de la inercia de sus partículas. Los materiales más elásticos permiten mayores rapideces de onda, mientras que los materiales más densos retardan el movimiento ondulatorio. Las relaciones empíricas siguientes se basan en estas proporcionalidades.

Para las ondas sonoras longitudinales en un alambre o varilla, la rapidez de la onda está dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \textit{Varilla} \qquad \textbf{(22.1)}$$

donde Y es el módulo de Young para el sólido y ρ es su densidad. Esta relación es válida sólo para varillas cuyos diámetros son pequeños en comparación con las longitudes de las ondas sonoras longitudinales que se propagan por ellas.

En un *sólido extendido*, la rapidez de la onda longitudinal es función del módulo de corte S, el módulo de volumen B y la densidad ρ del medio. La rapidez de la onda se puede calcular a partir de

$$v = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}S}{\rho}} \qquad \textit{Sólido extendido} \qquad \textbf{(22.2)}$$

Las ondas longitudinales transmitidas en un fluido tienen una rapidez que se determina con base en

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textit{Fluido} \qquad \textbf{(22.3)}$$

donde B es módulo de volumen para el fluido y ρ su densidad.

Para calcular la rapidez del sonido en un gas, el módulo de volumen está dado por

$$B = \gamma P$$

donde γ es la constante adiabática ($\gamma = 1.4$ para el aire y los gases diatómicos) y P es la presión del gas. Por tanto, la rapidez de las ondas longitudinales en un gas, a partir de la ecuación (22.3), está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad \textbf{(22.4)}$$

Pero para un gas ideal

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \qquad \textbf{(22.5)}$$

donde $R = 8.314$ J/mol · kg (constante universal de los gases)
T = temperatura absoluta del gas
M = masa molecular del gas

Sustituyendo de la ecuación (22.5) en la ecuación (22.4) se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \textit{Gas} \qquad \textbf{(22.6)}$$

FÍSICA HOY

Cuando los objetos se mueven más rápido que la rapidez del sonido crean ondas de choque. Como la energía producida por éstas se halla mayormente en el frente de onda, puede causar daño, sobre todo a los edificios. Por ello, los aviones de propulsión de chorro no vuelan a rapideces supersónicas a menos que se hallen a grandes alturas. Número de mach = v_{objeto}/v_{sonido}, donde $v_{objeto} > v_{sonido}$.

Ejemplo 22.1

Calcule la rapidez del sonido en una varilla de aluminio.

Solución: El módulo de Young y la densidad del aluminio son

$$Y = 68\,900 \text{ MPa} = 6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$
$$\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3 = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

De la ecuación (22.1)

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2}{2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}}$$
$$= \sqrt{2.55 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 5050 \text{ m/s}$$

Esta rapidez es aproximadamente 15 veces mayor que la del sonido en aire.

Ejemplo 22.2 Calcule la rapidez del sonido en el aire en un día en que la temperatura es de 27°C. La masa molecular del aire es 29.0 y la constante adiabática es 1.4.

Plan La información suministrada, junto con la constante universal de los gases (R = 8.314 J/(mol · kg) sirve para determinar la rapidez del sonido a partir de la ecuación (22.6) Como se requieren unidades del SI, debemos convertir la masa molecular en *kilogramos* por mol ($M = 29 \times 10^{-3}$ kg/mol).

Solución: La temperatura absoluta del aire es $T = 27 + 273 = 300$ K

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{(1.4)[8.31 \text{ J/(mol} \cdot \text{kg)}](300 \text{ K})}{29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}}$$

$$v = 347 \text{ m/s}$$

La rapidez del sonido es significativamente mayor a 27°C que a 0°C. A temperatura y presión normales (273 K, 1 atm), la rapidez del sonido es 331 m/s. A partir de la ecuación (22.6) se advierte que la rapidez del sonido en el aire varía directamente con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Por consiguiente, se puede obtener en forma aproximada la rapidez (v) del sonido mediante

$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}} \tag{22.7}$$

Esta relación presupone que γ y M no cambian y que la rapidez del sonido es 331 m/s a la temperatura de 273 K.

Ejemplo 22.3 ¿Cuál es la rapidez del sonido en el aire a temperatura ambiente (20°C)?

Plan: Primero determinamos la temperatura absoluta (20 + 273 = 293 K) y luego sustituimos directamente el resultado en la ecuación (22.7)

Solución

$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}} = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{293 \text{ K}}{273 \text{ K}}} \quad \text{o} \quad v = 343 \text{ m/s}$$

22.3 Vibración de columnas de aire

En el capítulo anterior se describieron los modos de vibración posibles para un resorte fijo en ambos extremos. La frecuencia de las ondas sonoras transmitidas en el aire que rodea al resorte es idéntica a la frecuencia del resorte vibratorio. Por tanto, las frecuencias posibles, o *armónicas*, de las ondas sonoras producidas por un resorte vibratorio están dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22.8}$$

donde v es la velocidad de las ondas transversales en el resorte.

El sonido también puede producirse por las vibraciones longitudinales de una columna de aire en un tubo que está abierto en ambos extremos, un *tubo abierto*, o uno que está cerrado en un extremo, un *tubo cerrado*. Al igual que en el resorte que se pone a vibrar, los modos de vibración posibles quedan determinados por las condiciones de frontera. Los modos de vibración posibles para el aire en un tubo cerrado se ilustran en la figura 22.4. Cuando se produce una onda de compresión en el tubo, el desplazamiento de las partículas de aire en el extremo cerrado debe ser igual a cero.

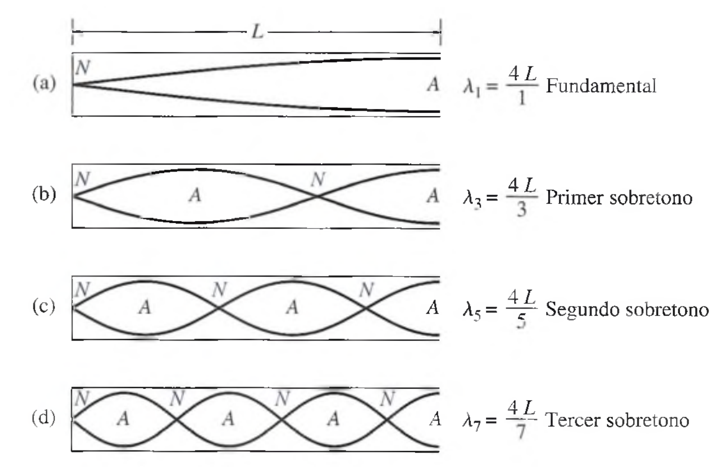


Figura 22.4 Ondas estacionarias posibles en un tubo cerrado.

El extremo cerrado de un tubo debe ser un nodo de desplazamiento.

El aire en el extremo abierto de un tubo tiene la mayor libertad de movimiento, por lo que el desplazamiento es libre en el extremo abierto.

El extremo abierto de un tubo debe ser un antinodo de desplazamiento.

Las curvas senoidales en la figura 22.4 representan desplazamientos máximos.

El modo fundamental de oscilación de una columna de aire en un tubo cerrado tiene un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el abierto. Por ende, la longitud de onda de la fundamental es igual a cuatro veces la longitud L del tubo (figura 22.4a). El siguiente modo posible, que es el primer sobretono, se presenta cuando hay dos nodos y dos antinodos, como se muestra en la figura 22.4b. Por consiguiente, la longitud de onda del primer sobretono es igual a $4L/3$. Un razonamiento similar permite mostrar que el segundo y el tercer sobretonos se presentan para longitudes de onda iguales a $4L/5$ y $4L/7$, respectivamente. En resumen, las longitudes de onda posibles son

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{22.9}$$

La rapidez de las ondas sonoras está dada por $v = f\lambda$, así que las frecuencias posibles para un *tubo cerrado* son

$$f_n = \frac{nv}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \textit{Tubo cerrado} \tag{22.10}$$

Observe que en un tubo cerrado únicamente se presentan los *armónicos impares*. El primer sobretono es el tercer armónico, el segundo sobretono es el quinto armónico, y así sucesivamente.

Una columna de aire que vibra en un tubo abierto en *ambos* extremos debe estar limitada por antinodos de desplazamiento. En la figura 22.5 se muestra la fundamental y los primeros tres sobretonos para un tubo abierto. Observe que la longitud de onda fundamental es el doble que la longitud L del tubo. Cuando el número de nodos se incrementa de uno en uno, las longitudes de onda posibles en un tubo abierto son

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22.11}$$

Entonces, las posibles frecuencias son,

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textit{Tubo abierto} \tag{22.12}$$

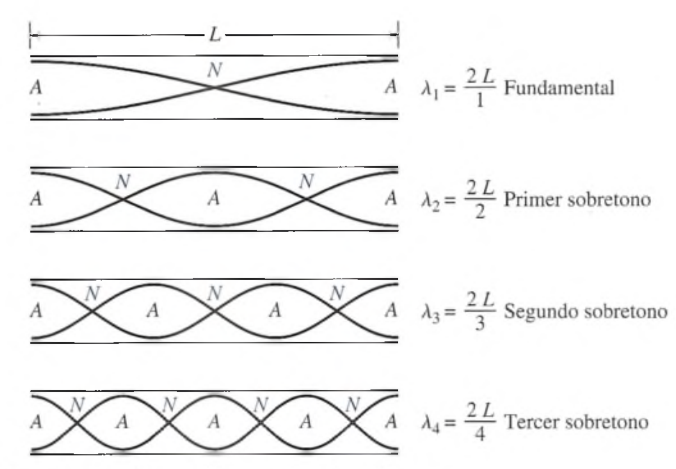


Figura 22.5 Ondas estacionarias posibles en un tubo abierto.

donde v es la velocidad de las ondas sonoras. Por consiguiente, todos los armónicos son posibles para una columna de aire que vibra en un tubo abierto. Los tubos abiertos de diversas longitudes se usan en gran número de instrumentos musicales, por ejemplo, órganos, flautas y trompetas.

Ejemplo 22.4

¿Cuáles son las frecuencias de la fundamental y los primeros dos sobretonos en un tubo cerrado de 12 cm? La temperatura del aire es de 30°C.

Plan: Recuerde que en un tubo *cerrado* sólo son posibles los armónicos impares. La fundamental será el primer armónico ($n = 1$), el primer sobretono se presentará en $n = 3$ y el segundo en $n = 5$. Para determinar las frecuencias correspondientes se aplica en cada caso la ecuación (22.10).

Solución: La rapidez del sonido se halla con la ecuación (20.7), donde $T = 30 + 273 = 303$ K

$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{303 \text{ K}}{273 \text{ K}}} = 349 \text{ m/s}$$

La primera fundamental se presenta cuando $n = 1$ en la ecuación (22.10)

$$f_1 = \frac{nv}{4L} = \frac{349 \text{ m/s}}{4(0.12 \text{ m})}; \qquad f_1 = 727 \text{ Hz}$$

El primero y el segundo sobretonos ocurren cuando $n = 3$ y $n = 5$, respectivamente.

$$\text{Primer sobretono} = 3f_1 = 2181 \text{ Hz}$$
$$\text{Segundo sobretono} = 5f_1 = 3635 \text{ Hz}$$

Ejemplo 22.5

El segundo sobretono en un tubo de cobre abierto en ambos extremos es de 1800 Hz cuando la rapidez del sonido es igual a 340 m/s. ¿Cuál es la longitud del tubo?

Plan: El segundo sobretono se presenta en el *tercer* armónico ($n = 3$). La longitud del tubo se determina resolviendo para L cuando $n = 3$.

Solución: Con base en la ecuación (22.12), para un tubo abierto con $n = 3$ se tiene que

$$f_3 = \frac{3v}{2L} \qquad \text{y} \qquad L = \frac{3v}{2f_3} = \frac{3(340 \text{ m/s})}{2(1800 \text{ Hz})}$$

$$L = 0.283 \text{ m} \qquad \text{o} \qquad 28.3 \text{ cm}$$

22.4 Vibración forzada y resonancia

Cuando un cuerpo que está vibrando se pone en contacto con otro, este otro es forzado a vibrar con la misma frecuencia que el original. Por ejemplo, si se golpea un diapasón con un martillo y luego se coloca su base contra la cubierta de una mesa de madera, la intensidad del sonido se incrementará repentinamente. Cuando se quita de la mesa el diapasón, la intensidad disminuye a su nivel original. Las vibraciones de las partículas de la mesa en contacto con el diapasón se llaman ***vibraciones forzadas***.

Hemos visto que los cuerpos elásticos tienen ciertas frecuencias naturales de vibración características del material y de las condiciones de frontera. Una cuerda tensa de una longitud definida puede producir sonidos de frecuencias características. Un tubo abierto o cerrado también tiene frecuencias naturales de vibración. Siempre que se aplican a un cuerpo una serie de impulsos periódicos de una frecuencia casi igual a alguna de las frecuencias naturales del cuerpo, éste se pone a vibrar con una amplitud relativamente grande. Este fenómeno se conoce como ***resonancia*** o ***vibración simpática***.

Un ejemplo de resonancia es el caso de un niño sentado en un columpio. La experiencia nos indica que el columpio puede ser puesto en vibración (oscilación) con gran amplitud por medio de una serie de pequeños empujones aplicados a intervalos regulares. La resonancia se producirá únicamente cuando los empujones estén en fase con la frecuencia natural de vibración del columpio. Una ligera variación de los pulsos de entrada dará como resultado una vibración pequeña o incluso ninguna.

El refuerzo del sonido por medio de la resonancia tiene múltiples aplicaciones, así como también buen número de consecuencias desagradables. La resonancia en una columna de aire en un tubo de órgano amplifica el débil sonido de una vibración de un chorro de aire vibrante. Muchos instrumentos musicales se diseñan con cavidades resonantes para producir una variedad de sonidos. La resonancia eléctrica en los receptores de radio permite al oyente percibir con claridad las señales débiles. Cuando se sintoniza la frecuencia de la estación elegida, la señal se amplifica por resonancia eléctrica. En auditorios mal diseñados o enormes salas de concierto, la música y las voces pueden tener un sonido hueco desagradable al oído. Se sabe que los puentes se destruyen debido a vibraciones simpáticas de gran amplitud producidas por ráfagas de viento.

22.5 Ondas sonoras audibles

Hemos definido el ***sonido*** como una *onda mecánica longitudinal que se propaga por un medio elástico*. Ésta es una definición amplia que no impone restricciones a ninguna frecuencia del sonido. Los fisiólogos se interesan principalmente en las ondas sonoras que tienen la capacidad de afectar el sentido del oído. Por tanto, es conveniente dividir el espectro del sonido en tres intervalos de frecuencias: sonido ***audible***, sonido ***infrasónico*** y sonido ***ultrasónico***. Estos intervalos se definen como sigue

> Sonido audible es el que corresponde a las ondas sonoras en un intervalo de frecuencias de 20 a 20 000 Hz.

> Las ondas sonoras que tienen frecuencias por debajo del intervalo audible se denominan infrasónicas.

> Las ondas sonoras que tienen frecuencias por encima del intervalo audible se llaman ultrasónicas.

Cuando se estudian los sonidos audibles, los fisiólogos usan los términos ***fuerza***, ***tono*** y ***calidad*** (*timbre*) para describir las sensaciones producidas. Por desgracia, estos términos representan magnitudes sensoriales y, por tanto, subjetivas. Lo que es volumen fuerte para una persona es moderado para otra. Lo que alguien percibe como calidad, otro lo considera inferior. Como siempre, los físicos deben trabajar con definiciones explícitas mensurables.

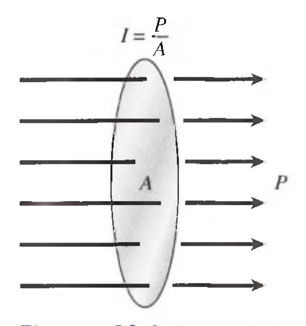


Figura 22.6 La intensidad de una onda sonora es una medida de la potencia transmitida por unidad de área perpendicular a la dirección de la propagación de la onda.

Por consiguiente, el físico intenta correlacionar los efectos sensoriales con las propiedades físicas de las ondas. Estas correlaciones se resumen de la forma siguiente:

Efectos sensoriales		Propiedad física
Fuerza (volumen)	⟷	Intensidad
Tono	⟷	Frecuencia
Timbre (calidad)	⟷	Forma de la onda

El significado de los términos de la columna de la izquierda puede variar considerablemente de uno a otro individuo; los de la derecha son mensurables y objetivos.

Las ondas sonoras constituyen un flujo de energía a través de la materia. La ***intensidad*** de una onda sonora específica es una medida de la razón en la que la energía se propaga por cierto volumen espacial. Un método práctico de especificar la intensidad sonora es en términos de la razón con que la energía se transfiere a través de la unidad de área normal a la dirección de la propagación de la onda (véase la figura 22.6). Puesto que la razón a la que fluye la energía es la *potencia* de una onda, la intensidad puede relacionarse con la potencia por unidad de área que pasa por un punto concreto.

FÍSICA HOY

La rapidez el sonido se denomina Mach 1 cuando se describen altas rapideces en la superficie de la Tierra o sobre ella. Al momento de publicar la presente edición de esta obra en inglés, la marca mundial de rapidez en la superficie del planeta la tenía el automóvil ThrustSSC, que había cronometrado 763 mi/h, rapidez superior a Mach 1 (761.2 mi/h). La forma aerodinámica del auto, el sistema de suspensión activa que conserva el ángulo necesario para la fuerza aerodinámica hacia abajo y los dos motores Rolls Royce de propulsión a chorro ubicados de modo que el auto eludiera la trayectoria de las ondas de choque permitieron alcanzar esa rapidez.

La marca mundial de un motor de "aspiración de aire" lo tiene el X-43A Scramjet de la NASA, que logró la rapidez de Mach 9.8 o 7000 mi/h. Ese histórico vuelo ocurrió el 16 de noviembre de 2004 y alcanzó una altitud de aproximadamente 110 000 ft.

La intensidad sonora es la potencia transferida por una onda sonora a través de la unidad de área normal a la dirección de la propagación.

$$I = \frac{P}{A} \tag{22.13}$$

Las unidades para la intensidad son la razón de una unidad de potencia a una unidad de área. En unidades del SI, la intensidad se expresa en W/m^2, y ésa es la unidad que emplearemos en esta obra. Sin embargo, la razón de flujo de energía en las ondas sonoras es pequeña, y en la industria se usa todavía μW/cm^2 en numerosas aplicaciones. El factor de conversión es

$$1\ \mu\text{W/cm}^2 = 1 \times 10^{-2}\ \text{W/m}^2$$

Se puede demostrar por métodos similares a los utilizados para un resorte que oscila que la intensidad sonora varía directamente con el cuadrado de la frecuencia f y el cuadrado de la amplitud A de una onda sonora. Expresada con símbolos, la intensidad I está dada por

$$I = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v \tag{22.14}$$

donde v es la velocidad del sonido en un medio de densidad ρ. El símbolo A en la ecuación (22.14) se refiere a la amplitud de la onda sonora y no a la unidad de área, como en la ecuación (22.13).

La intensidad I_0 del sonido audible apenas perceptible es del orden de 10^{-12} W/m^2. Esta intensidad, que se conoce como el ***umbral auditivo***, ha sido adoptado por expertos en acústica como la intensidad mínima para que un sonido sea audible.

El umbral auditivo representa el estándar de la intensidad mínima para que un sonido sea audible. Su valor a una frecuencia de 1000 Hz es

$$I_0 = 1 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2 = 1 \times 10^{-10}\ \mu\text{W/cm}^2 \tag{22.15}$$

El intervalo de intensidades por arriba del cual el oído humano es sensible es enorme. Abarca desde el umbral auditivo I_0 hasta una intensidad 10^{12} veces mayor. El extremo superior, conocido como ***umbral de dolor***, representa el punto en el que la intensidad es intolerable para el oído humano. La sensación se vuelve dolorosa y no sólo auditiva.

El umbral de dolor representa la intensidad máxima que el oído promedio puede registrar sin sentir dolor. Su valor es

$$I_p = 1\ \text{W/m}^2 = 100\ \mu\text{W/cm}^2 \tag{22.16}$$

En vista de la amplitud del intervalo de intensidades al que es sensible el oído, es más práctico establecer una escala logarítmica para las mediciones de intensidades sonoras, la cual se base en la regla siguiente:

Cuando la intensidad I_1 de un sonido es 10 veces mayor que la intensidad I_2 de otro, se dice que la relación de intensidades es de 1 bel (B).

Por tanto, cuando se compara la intensidad de dos sonidos, nos referimos a la diferencia entre ***niveles de intensidad*** dada por

$$B = \log \frac{I_1}{I_2} \qquad \text{bel (B)} \qquad \textbf{(22.17)}$$

donde I_1 es la intensidad de un sonido e I_2 la del otro.

Ejemplo 22.6

Dos sonidos tienen intensidades de 2.5×10^{-8} W/m² y 1.2 W/m². Calcule la diferencia en niveles de intensidad en beles.

Solución

$$B = \log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{1.2\ \text{W/m}^2}{2.5 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2}$$
$$= \log 4.8 \times 10^7 = 7.68\ \text{B}$$

En la práctica, la unidad de 1 B es demasiado grande. Para obtener una unidad más útil, se define el ***decibel*** (dB) como un décimo del bel. Por tanto, la respuesta al ejemplo 22.6 también puede expresarse como 76.8 dB.

Al usar la intensidad I_0 como patrón de comparación para todas las intensidades es posible establecer una escala general para valorar cualquier sonido. El nivel de intensidad en decibeles de cualquier sonido de intensidad I puede calcularse a partir de la relación general

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad \textit{decibel}\ \text{(dB)} \qquad \textbf{(22.18)}$$

donde I_0 es la intensidad del umbral auditivo (1×10^{-12} W/m²). El nivel de intensidad para I_0 es de cero decibeles.

Ejemplo 22.7

Calcule el nivel de intensidad de un sonido cuya intensidad es de 1×10^{-4} W/m².

Solución:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left(\frac{10^{-4}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} \right)$$
$$= 10 \log 10^8 = 10(8) = 80\ \text{dB}$$

En virtud de la notación logarítmica de los decibeles, el amplio intervalo de intensidades se reduce a niveles de intensidad de 0 a 120 dB. Debemos recordar, sin embargo, que la escala no es lineal sino logarítmica. Un sonido de 40 dB es mucho más que el doble de intensidad que uno de 20 dB. Un sonido que es 100 veces más intenso que otro es tan sólo 20 dB mayor. En la tabla 22.1 aparecen varios ejemplos de los niveles de intensidad de sonidos comunes.

Tabla 22.1

Niveles de intensidad para sonidos comunes

Sonido	Nivel de intensidad, dB
Umbral de audición	0
Susurro de las hojas	10
Murmullo de voces	20
Radio a volumen bajo	40
Conversación normal	65
En una esquina de una calle transitada	80
Transporte subterráneo	100
Umbral de dolor	120
Motor de propulsión	140-160

La intensidad de un sonido disminuye cuando el oyente se aleja de la fuente sonora. El cambio de la intensidad varía con el cuadrado de la distancia a la fuente. Por ejemplo, una persona colocada al doble de distancia de una fuente oye el sonido a la cuarta parte de la intensidad anterior y una persona alejada el triple de distancia oye el sonido a un noveno de la intensidad. Para saber por qué ocurre esto, considere que el sonido se irradia hacia fuera en todas direcciones desde una fuente puntual, como se muestra en la figura 22.7. La onda sonora se ve como una sucesión de superficies esféricas. Considere los puntos A y B ubicados a las distancias r_1 y r_2 de una fuente que produce un sonido de potencia P. Recordando que $I = P/A$ y que el área de la esfera es $4\pi r^2$, podemos escribir las intensidades I_1 e I_2 de la forma siguiente:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

La potencia de la fuente no cambia; por tanto, es posible eliminar P de las ecuaciones anteriores y resolver para obtener la razón de las dos intensidades, como sigue

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \text{o} \qquad I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \tag{22.19}$$

Esta expresión es muy útil para determinar como varía la intensidad del sonido al cambiar de una posición a otra.

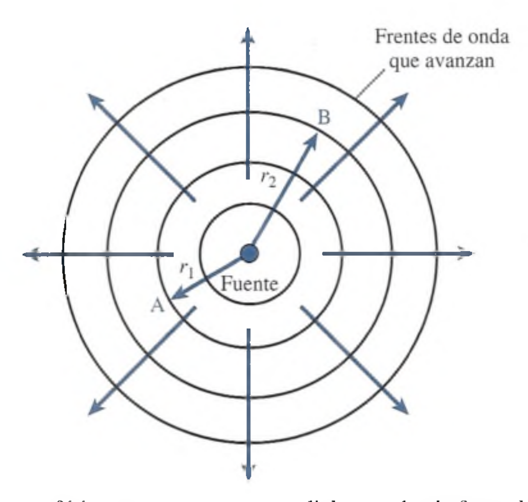


Figura 22.7 Ondas sonoras esféricas que se propagan radialmente hacia fuera desde una fuente isométrica. La intensidad decae inversamente con el cuadrado de la distancia de la fuente.

Ejemplo 22.8 Una fuente puntual emite sonido con una potencia media de 40 W. ¿Cuál es la intensidad a una distancia $r_1 = 3.5$ m de la fuente? ¿Cuál será la intensidad a una distancia r_2 de 5 m?

Plan: La intensidad es la potencia por unidad de área y el área en torno a una fuente puntual es de $4\pi r^2$. La intensidad en el primer lugar se determina sustituyendo los valores conocidos. En el segundo, se halla más fácil, a partir de la ecuación (22.9).

Solución: Puesto que $r_1 = 3.5$ m y $P = 40$ W, la intensidad I_1 se halla como sigue

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} = \frac{40\text{ W}}{4\pi(3.5\text{ m})^2}; \qquad \text{o} \qquad I_1 = 0.260\text{ W/m}^2$$

Ahora usamos la ecuación (22.9) para determinar la intensidad en $r_2 = 5$ m.

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \qquad \text{e} \qquad I_2 = \frac{I_1 r_1^2}{r_2^2}$$

$$I_2 = \frac{(0.260\text{ W/m}^2)(3.5\text{ m})^2}{(5\text{ m})^2} = 0.127\text{ W/m}^2$$

Observe que esta relación del cuadrado del inverso se aplica a las *intensidades* y *no* a los *niveles de intensidad.*

22.6 Tono y calidad

El efecto de la intensidad en el oído humano se manifiesta en sí mismo como *volumen*. En general, las ondas sonoras más intensas son también de mayor volumen, pero el oído no es igualmente sensible a sonidos de todas las frecuencias. Por tanto, un sonido de alta frecuencia puede no parecer tan alto como uno de menor frecuencia que tenga la misma intensidad.

La ***frecuencia*** de un sonido determina lo que el oído juzga como el *tono* del sonido. Los músicos designan el tono por las letras que corresponden a las notas de las teclas del piano. Por ejemplo, las notas *do*, *re* y *fa* se refieren a tonos específicos, o frecuencias. Un disco de sirena, como el que se muestra en la figura 22.8, puede utilizarse para demostrar cómo el tono queda determinado por la frecuencia de un sonido. Una corriente de aire se envía sobre una hilera de agujeros uniformemente espaciados. Al variar la velocidad de rotación del disco el tono del sonido resultante se incrementa o decrece.

Dos sonidos del mismo tono se pueden distinguir fácilmente. Suponga que suena la nota do (256 Hz) sucesivamente en un piano, una flauta, una trompeta y un violín. Aun cuando cada sonido tiene el mismo tono, hay una marcada diferencia en el timbre (véase la figura 22.9). Se dice que esta diferencia resulta de una diferencia en la *calidad* o *timbre* del sonido.

En los instrumentos musicales, independientemente de la fuente de vibración, generalmente se excitan al mismo tiempo diversos modos de oscilación. Por consiguiente, el sonido

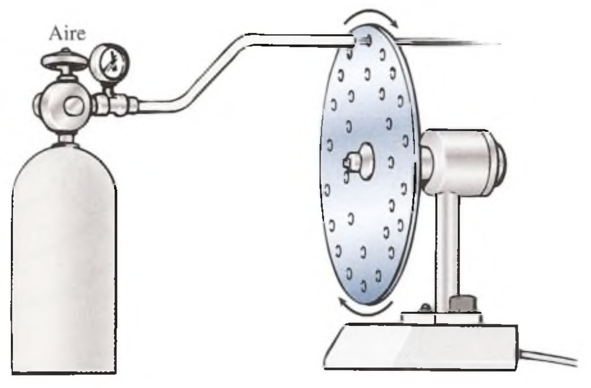


Figura 22.8 Demostración de la relación entre tono y frecuencia.



Figura 22.9 Un do correspondiente a cada uno de estos instrumentos tiene la misma frecuencia (tono), pero todos producen sonidos muy distintos debido a las condiciones de frontera diferentes. La cantidad y la intensidad relativa de los armónicos presentes influyen en la calidad o timbre del sonido. (*Fotografías de Hemera, Inc.*)

producido no sólo consta de la fundamental sino también de varios armónicos. *La calidad o timbre de un sonido se determina por el número y las intensidades relativas de los armónicos presentes*. La diferencia en calidad o timbre entre dos sonidos puede observarse en forma objetiva analizando las complejas *formas de onda* que resultan de cada sonido. En general, cuanto más compleja es la onda, mayor es el número de armónicos que contribuyen a dicha complejidad. El tono (frecuencia) del sonido de cada uno de los instrumentos de la figura (22.9) es el mismo y, sin embargo, los sonidos son muy distintos, ya que difieren en *calidad* o *timbre*.

22.7 Interferencia y pulsaciones

FÍSICA HOY

No todas las flores son polinizadas por las aves y las abejas; cientos de especies lo son por los murciélagos. ¿Cómo hallan las flores estos animales, que ubican los objetos mediante ondas de sonido que se reflejan? Los científicos han descubierto una flor tropical que polinizan los murciélagos y que tiene un pétalo grande que funciona como un espejo acústico cóncavo que refleja el sonido.

En el capítulo 21 se explicó el principio de superposición como un método para estudiar la interferencia en ondas transversales. La interferencia también se presenta en el caso de ondas sonoras longitudinales y el principio de superposición también se les aplica a ellas. Un ejemplo común de la interferencia en ondas sonoras se presenta cuando dos diapasones (o cualquier otra fuente sonora de una sola frecuencia) cuyas frecuencias difieren ligeramente, se golpean de manera simultánea. El sonido producido varía en intensidad, alternando entre tonos fuertes y casi silencio. Estas pulsaciones regulares se conocen como ***pulsaciones***. El *efecto vibrato* que se obtiene en algunos órganos es una aplicación de este principio. Cada nota del vibrato es producida por dos tubos sintonizados a frecuencias ligeramente diferentes.

Para comprender el origen de las pulsaciones, examinemos la interferencia que se establece entre ondas sonoras que proceden de dos diapasones de frecuencia ligeramente distinta, como se muestra en la figura 22.10. La superposición de ondas A y B ilustra el origen de las pulsaciones. Los tonos fuertes se presentan cuando las ondas interfieren constructivamente; los suaves, cuando interfieren en forma destructiva. La observación y los cálculos demuestran que las dos ondas interfieren constructivamente $f - f'$ veces por segundo. Así, podemos escribir

$$\text{Número de pulsaciones por segundo} = |f - f'| \qquad \textbf{(22.20)}$$

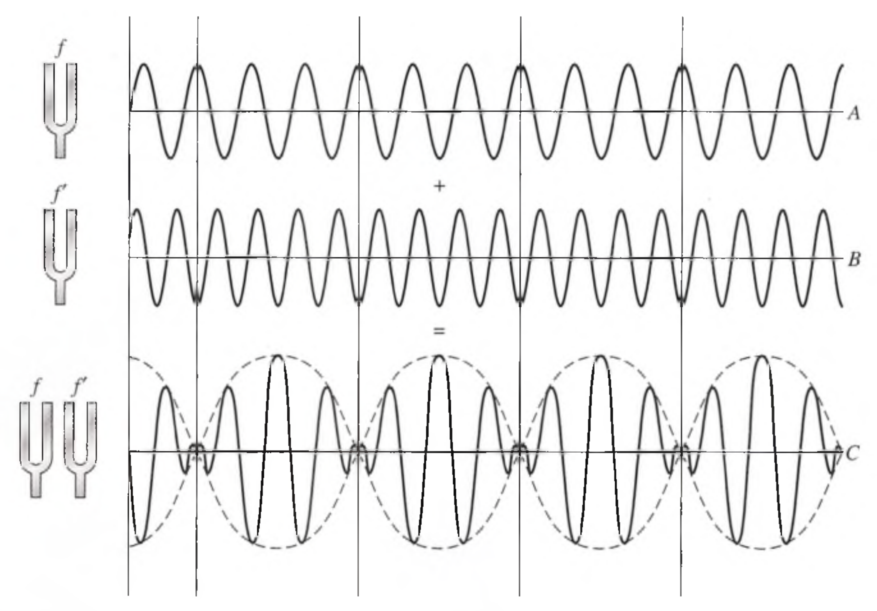


Figura 22.10 Diagrama que muestra el origen de las pulsaciones. La onda C es una superposición de ondas A y B.

Por ejemplo, si dos diapasones de 256 y 259 Hz se golpean al mismo tiempo, el sonido resultante pulsará tres veces por segundo.

22.8 El efecto Doppler

Siempre que una fuente sonora se mueve en relación con un oyente, el tono del sonido, como lo escucha el observador, puede no ser el mismo que el que se percibe cuando la fuente está en reposo. Por ejemplo, si uno está cerca de la vía del ferrocarril y escucha el silbato del tren al aproximarse, se advierte que el tono del silbido es *más alto* que el normal que se escucha cuando el tren está detenido. A medida que el tren se aleja, se observa que el tono que se escucha es *más bajo* que el normal. De forma similar, en las pistas de carreras el sonido de los automóviles que se acercan a la gradería es considerablemente de tono más alto que el de los autos que se alejan.

El fenómeno no se restringe al movimiento de la fuente. Si la fuente de sonido está fija, un oyente que se mueva hacia ella advertirá un aumento similar en el tono. Un oyente que se aleja de la fuente de sonido escuchará un sonido de menor tono. El cambio en la frecuencia del sonido que resulta del movimiento relativo entre una fuente y un oyente se denomina ***efecto Doppler***.

El efecto Doppler se refiere al cambio aparente en la frecuencia de una fuente de sonido cuando hay un movimiento relativo de la fuente y del oyente.

Es posible demostrar de manera gráfica el origen del efecto Doppler por medio de la representación de las ondas periódicas emitidas por una fuente como círculos concéntricos que se mueven en forma radial hacia fuera, como en la figura 22.11. La distancia entre cualquier par de círculos representa la longitud de onda λ del sonido que se desplaza con una velocidad V. La frecuencia con que estas ondas golpean el oído determina el tono del sonido escuchado.

Consideremos en primer lugar que la fuente se mueve a la derecha hacia un observador A inmóvil, como en la figura 22.12. A medida que la fuente en movimiento emite ondas sonoras, cada onda sucesiva se emite desde un punto más cercano al oyente que la onda inmediata anterior. Esto da por resultado que la distancia entre las ondas sucesivas, o la longitud de onda, sea menor que la normal. Una longitud de onda más pequeña produce una frecuencia de ondas mayor, lo que aumenta el tono del sonido escuchado por el oyente A. Mediante un razonamiento similar se demuestra que un *incremento* en la longitud de las ondas que llegan al oyente B hará que éste escuche un sonido de *menor* frecuencia.

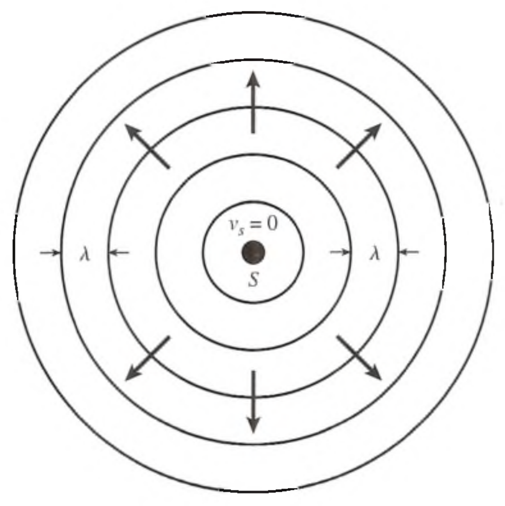


Figura 22.11 Representación gráfica de ondas sonoras emitidas desde una fuente estacionaria.

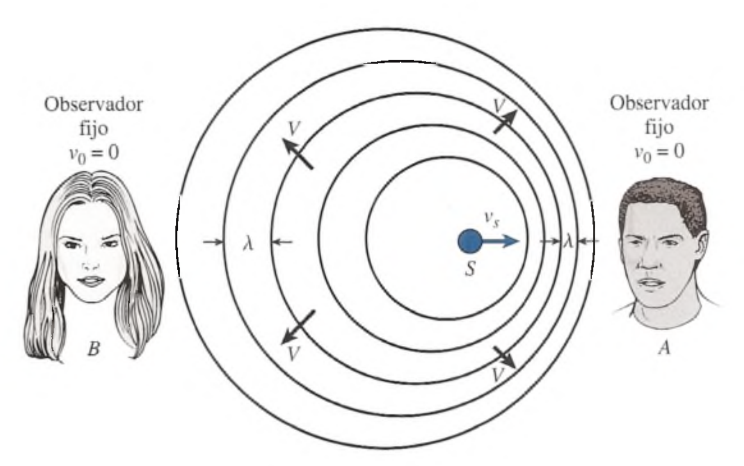


Figura 22.12 Ilustración del efecto Doppler. Las ondas del frente de un sonido que se mueve se hallan más cercanas entre sí que las que están detrás de ellas.

Ahora podemos deducir una relación para predecir el cambio en la frecuencia observada. Durante una vibración completa de la fuente estacionaria (un tiempo igual al del periodo T), cada onda se moverá a lo largo de una distancia de una longitud de onda. Esta distancia se representa por λ en la figura 22.13a y está dada por

$$\lambda = VT = \frac{V}{f_s} \qquad \textit{Fuente estacionaria}$$

donde V es la velocidad del sonido y f_s es la frecuencia de la fuente. Si la fuente se mueve a la derecha con una velocidad igual a v_s como en la figura 22.13b, la nueva longitud de onda λ' al frente de la fuente será

$$\lambda' = VT - v_s T = (V - v_s)T$$

Pero $T = 1/f_s$, de modo que escribimos

$$\lambda' = \frac{V - v_s}{f_s} \qquad \textit{Fuente en movimiento} \qquad \textbf{(22.21)}$$

Esta ecuación también se aplica para la longitud de onda a la izquierda de la fuente en movimiento si seguimos la convención de que las rapideces al aproximarse se consideran positivas y las rapideces al alejarse negativas. Por ello, si calculamos λ' a la izquierda de la fuente en

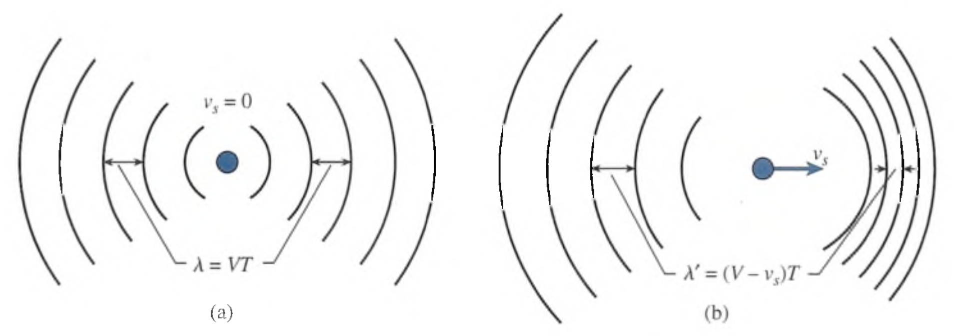


Figura 22.13 Cálculo de la magnitud de la longitud de onda del sonido emitido desde una fuente en movimiento. La velocidad de la fuente v_s se considera positiva para rapideces de acercamiento y negativa para rapideces de alejamiento.

movimiento, el valor negativo sería sustituido para v_s, lo que resultaría en una mayor longitud de onda.

La velocidad del sonido en un medio es función de las propiedades del medio y no depende del movimiento de la fuente. Por tanto, la frecuencia f_o escuchada por un oyente inmóvil y proveniente de una fuente en movimiento de frecuencia f_s está dada por

$$f_o = \frac{V}{\lambda'} = \frac{Vf_s}{V - v_s} \qquad \textit{Fuente en movimiento} \qquad \textbf{(22.22)}$$

donde V es la rapidez del sonido y v_s la de la fuente. *La rapidez v_s se considera positiva para rapideces de acercamiento y negativa para rapideces de alejamiento.*

Ahora estudiemos el caso en que la fuente está fija y el observador se mueve hacia ella con una velocidad igual a v_o. Aquí la longitud de onda del sonido recibido no cambia, pero el número de ondas que encuentra el oyente por unidad de tiempo (la frecuencia observada) aumenta como resultado de la rapidez v_o. *En consecuencia, el oyente escuchará la frecuencia*

$$f_o = \frac{f_s(V + v_o)}{V} \qquad \textit{Observador en movimiento} \qquad \textbf{(22.23)}$$

Aquí, *la rapidez v_o del observador debe considerarse positiva para rapideces que se aproximan a la fuente y negativa para las que se alejen de ella.*

A menudo la fuente y el observador están en movimiento, de modo que se necesita una relación más general que abarque todo el movimiento relativo. Es posible combinar las ecuaciones (22.22) y (22.23) a fin de obtener esa ecuación general que funcione en todos los casos siempre que el movimiento relativo tanto del observador como de la fuente vaya a lo largo de una línea recta

$$f_o = f_s\frac{V + v_o}{V - v_s} \qquad \textit{Ecuación general del efecto Doppler} \qquad \textbf{(22.24)}$$

Se observa que la ecuación (22.24) disminuye el valor de la ecuación (22.22) para el observador inmóvil ($v_o = 0$) y la ecuación (22.23) para la fuente estacionaria ($v_s = 0$).

La convención de signos es de suma importancia al aplicar esta relación. El signo de la velocidad del sonido siempre es positivo. Las velocidades v_o y v_s se consideran positivas para las rapideces de aproximación y negativas para rapideces de alejamiento. Una velocidad de aproximación significa que ya sea la velocidad de la fuente o bien la del observador tiene una dirección tal que los acercará a ambos.

Veamos un ejemplo. Un ciclista viaja a la derecha a 15 m/s y grita a un corredor que va delante de él, en la *misma* dirección, a 5 m/s. La rapidez de la fuente v_s es de +15 m/s (de aproximación) y la del corredor (observador) es de −5 m/s (de alejamiento). Aunque en realidad los dos están acercándose, la rapidez del observador v_o se considera *negativa* porque su dirección se *aleja* de la fuente.

Ejemplo 22.9 Un día en que la rapidez del sonido es de 340 m/s, un tren emite un sonido de 400 Hz de frecuencia. (a) ¿Cuál es la frecuencia del sonido escuchado por un observador inmóvil cuando el tren se mueve hacia él con una velocidad de 20 m/s? (b) ¿Cuál es la frecuencia que se escucha cuando el tren se mueve alejándose del oyente a esa velocidad?

Plan: Para contestar ambas preguntas sólo se necesita sustituir los valores conocidos en la ecuación general del efecto Doppler (22.24). Sin embargo, los signos sustituidos para la velocidad de la fuente deben ser *positivos* en el caso de la primera pregunta y *negativos* para la segunda. La velocidad del observador es igual a cero en ambos casos.

Solución (a): La velocidad de la fuente es $v_s = +20$ m/s, $V = +340$ m/s y $f_s = 400$ Hz.

$$f_o = \frac{f_s(V + v_o)}{V - v_s} = \frac{(400 \text{ Hz})(340 \text{ m/s} + 0)}{340 \text{ m/s} - (+20 \text{ m/s})}$$

$$f_o = \frac{(400 \text{ Hz})(340 \text{ m/s})}{320 \text{ m/s}} = 425 \text{ Hz}$$

Solución (b): La fuente se aleja, así que en este caso $v_s = -20$ m/s.

$$f_o = \frac{f_s(V + v_o)}{V - v_s} = \frac{(400 \text{ Hz})(340 \text{ m/s} + 0)}{340 \text{ m/s} - (-20 \text{ m/s})}$$

$$f_o = \frac{(400 \text{ Hz})(340 \text{ m/s})}{360 \text{ m/s}} = 378 \text{ Hz}$$

Ejemplo 22.10 Un automóvil se desplaza a la izquierda a 20 m/s con la bocina sonando a una frecuencia de 360 Hz. ¿Qué frecuencia escucha una persona que va frente al auto conduciendo una bicicleta a 12 m/s y que también va a la izquierda? Suponga que la velocidad del sonido es de 340 m/s.

Plan: De nuevo, el problema se reduce a elegir bien los signos para la velocidad del observador y de la fuente. El auto se *aproxima*, así que $v_s = +20$ m/s; el ciclista se *aleja*, de modo que $v_o = -12$ m/s.

Solución: La velocidad de la fuente es $v_s = +20$ m/s, $V = +340$ m/s y $f_s = 360$ Hz.

$$f_o = \frac{f_s(V + v_o)}{V - v_s} = \frac{(360 \text{ Hz})[340 \text{ m/s} + (-12 \text{ m/s})]}{340 \text{ m/s} - (+20 \text{ m/s})}$$

$$f_o = \frac{(360 \text{ Hz})(328 \text{ m/s})}{320 \text{ m/s}} = 369 \text{ Hz}$$

Al trabajar en problemas que implican movimiento relativo de la fuente y del observador es útil considerar si la respuesta obtenida es o no lógica. Por ejemplo, si dos objetos se *aproximan* como resultado de su movimiento relativo, la frecuencia percibida debe ser mayor que la de la fuente; si están *alejándose*, la frecuencia debe ser menor.

Resumen y repaso

Hemos definido el sonido como una onda mecánica longitudinal en un medio elástico. Por tanto, la elasticidad y la densidad de un medio influyen en la rapidez del sonido cuando se desplaza por él. En ciertas condiciones, hemos visto que las ondas sonoras estacionarias pueden producir frecuencias características que percibimos como el tono del sonido. También estudiamos la intensidad del sonido y el efecto Doppler. A continuación se resumen los principales conceptos expuestos en el capítulo.

- El sonido es una onda longitudinal que viaja por un medio elástico. Su rapidez en el aire a 273 K es de 331 m/s, o sea, 1087 ft/s. A otras temperaturas, la rapidez del sonido se calcula mediante

$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}} \qquad \textit{Rapidez del sonido en el aire}$$

- La rapidez del sonido en otros medios puede determinarse con las expresiones siguientes:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \textit{Varilla}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \textit{Gas}$$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textit{Fluidos}$$

$$v = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}S}{\rho}} \qquad \textit{Sólido extendido}$$

- Las ondas sonoras longitudinales estacionarias pueden establecerse en una columna de aire que vibra en un tubo abierto por ambos extremos o en un tubo cerrado por un extremo. Las frecuencias características son

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textit{Tubo abierto de longitud}$$

$$f_n = \frac{nv}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \textit{Tubo cerrado de longitud L}$$

Observe que *sólo los armónicos impares son posibles en un tubo cerrado.* En este caso, el primer sobretono es el tercer armónico, el segundo sobretono es el quinto armónico, y así sucesivamente.

- La intensidad de un sonido es la potencia P por unidad de área A perpendicular a la dirección de propagación.

$$I = \frac{P}{A} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v \qquad \textit{Intensidad,} \text{ W/m}^2$$

- El nivel de intensidad en decibeles se calcula mediante

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2 \qquad \textit{Nivel de intensidad}$$

- Siempre que dos ondas tienen más o menos la misma frecuencia y existen simultáneamente en el mismo medio, se establecen pulsaciones de manera que

$$\text{Número de pulsaciones por segundo} = |f - f'|$$

- La ecuación general del efecto Doppler es la siguiente

$$f_o = f_s \frac{V + v_o}{V - v_s} \qquad \textit{Ecuación general del efecto Doppler}$$

donde f_o = frecuencia observada
f_s = frecuencia de la fuente
V = velocidad del sonido
v_o = velocidad del observador
v_s = velocidad de la fuente

Nota: Se considera que la rapidez es positiva en la aproximación y negativa en el alejamiento.

Conceptos clave

auditivo 448
calidad o timbre 448
compresión 443
condensación 443
decibel 450
efecto Doppler 454
frecuencia 452
infrasónico 448
intensidad 449
nivel de intensidad 450
onda sonora 441
pulsaciones 453

Preguntas de repaso

22.1. ¿Cuál es la definición fisiológica del sonido? ¿Cuál es el significado del sonido en física?

22.2. ¿Por qué los astronautas tienen que comunicarse por radio en la superficie de la Luna? ¿Podrían oír a otra nave espacial que descendiera cerca de ellos? ¿Pueden oír si tocan sus cascos?

22.3. ¿Cómo suena la voz de una persona que acaba de inhalar gas helio? ¿Este efecto se refleja en el tono, la sonoridad o la calidad?

22.4. Los sonidos de voz tienen su origen en la vibración de las cuerdas vocales. Las aberturas de la boca y la nariz actúan como cavidad resonante para amplificar y distinguir los sonidos. Suponga que se canturrea en un tono constante igual a la nota *do* de un piano. Al abrir y cerrar la boca, ¿qué propiedad fisiológica del sonido se afecta?

22.5. Se puede estimar la distancia de una tempestad en millas contando el número de segundos transcurridos entre la aparición de un relámpago y la audición del trueno correspondiente, y dividiendo el resultado entre 5. Explique por qué ésta es una aproximación razonable.

22.6. El escaparate de una tienda se rompe a causa de una explosión ocurrida a varias millas de distancia. Una copa de cristal fino se rompe cuando el violín toca una nota alta. ¿Son similares las causas de ambos daños? ¿Qué propiedad física del sonido interviene en cada caso?

22.7. Compare la rapidez del sonido en los sólidos, líquidos y gases. Explique el porqué de las diferencias observadas.

22.8. Realice un análisis de unidades en la ecuación (22.1) y demuestre que $\sqrt{Y/\rho}$ arroja unidades de rapidez.

22.9. ¿Cómo se afectará la rapidez del sonido en un gas si la temperatura de éste se cuadruplica?

22.10. Un timbre eléctrico funciona dentro de un frasco al vacío. No se oye ningún sonido porque no existe un medio. Explique qué pasa si el frasco se inclina hasta que la campana del timbre toque las paredes del frasco.

22.11. Trace diagramas para mostrar las diferencias entre una onda longitudinal progresiva y una onda longitudinal estacionaria.

22.12. Una onda estacionaria se establece en una cuerda que vibra. ¿Cómo son los armónicos de los sonidos posibles en relación con el número de antinodos que se forman en la cuerda? ¿Cómo son los armónicos en relación con el número de nodos?

22.13. ¿Qué efecto producirá sobre la frecuencia de una columna de aire que vibra, el hecho de cerrar un extremo de un tubo abierto?

22.14. Compare la calidad del sonido producido por un violín con el que produce un diapasón.

22.15. Si el oído promedio no puede oír sonidos de frecuencias muy superiores a 15 000 Hz, ¿qué caso tiene fabricar sistemas musicales estereofónicos que tengan respuestas de frecuencias muy por encima de los 15 000 Hz?

22.16. Un diapasón que vibra sobre una caja de resonancia se aproxima a una pared y se aleja de un observador. La intensidad del sonido resultante produce pulsaciones. Explique la situación.

22.17. Un maestro intenta explicar el efecto Doppler utilizando pelotas de beisbol y una bicicleta. Comienza diciendo: "Supongan que estoy en reposo y arrojo una pelota en la misma dirección cada segundo a rapidez constante. Consideren que yo soy la fuente de ondas sonoras y que las pelotas son el frente de las ondas que avanza. El espaciamiento entre las pelotas en cualquier instante es constante y similar a la longitud de onda de las ondas sonoras. Supongan ahora que voy en bicicleta hacia delante a rapidez constante y sigo arrojando pelotas hacia delante y hacia atrás a la misma razón y a la misma rapidez. El espaciamiento de las pelotas delante de mí será más estrecho porque cada vez que lanzo una pelota en esa dirección me desplazo también en dicha dirección. Asimismo, las pelotas que son arrojadas hacia atrás estarán más espaciadas de lo normal". Analice detenidamente la situación. ¿En qué aspectos es correcta su analogía? ¿En qué aspecto importante no es correcta? ¿Por qué una expresión similar a la ecuación (22.21) no es un buen medio para predecir el espaciamiento de las pelotas? ¿Por qué funciona bien en el caso de las ondas sonoras?

Problemas

Sección 22.2 La velocidad del sonido

22.1. El módulo de Young para el acero es 2.07×10^{11} Pa y su densidad es de 7800 kg/m^3. Calcule la rapidez del sonido en una varilla de acero.
Resp. 5150 m/s

22.2. Un trozo de varilla de cobre de 3 m tiene una densidad de 8800 kg/m^3 y el módulo de Young para el cobre es de 1.17×10^{11} Pa. ¿Cuánto tiempo demorará el sonido en recorrer la varilla desde un extremo hasta el otro?

22.3. ¿Cuál es la rapidez del sonido en el aire ($M = 29$ g/mol y $\gamma = 1.4$) en un día en que la temperatura es de 30° C? Use la fórmula de aproximación para comprobar este resultado. Resp. 349 m/s

22.4. Se ha medido en 3380 m/s la rapidez de las ondas longitudinales en una varilla de cierto metal cuya densidad es 7850 kg/m^3. ¿Cuál es el módulo de Young para ese metal?

22.5. Si la frecuencia de las ondas del problema 22.4 es de 312 Hz, ¿cuál es la longitud de onda?
Resp. 10.8 m

22.6. Compare la rapidez teórica del sonido en el hidrógeno ($M = 2.0$ g/mol, $\gamma = 1.4$) con la rapidez en el helio ($M = 4.0$ g/mol, $\gamma = 1.66$) a 0° C.

***22.7.** Una onda sonora es enviada por un barco hasta el fondo del mar, donde se refleja y regresa. Si el viaje de ida y vuelta demora 0.6 s, ¿a qué profundidad está el fondo del océano? Considere que el módulo volumétrico del agua de mar es 2.1×10^9 Pa y que su densidad es de 1030 kg/m^3. Resp. 428 m

Sección 22.3 Vibración de columnas de aire

22.8. Determine la frecuencia fundamental y los tres primeros sobretonos para un tubo de 20 cm a 20° C si dicho tubo está abierto en ambos extremos.

22.9. Halle la frecuencia fundamental y los tres primeros sobretonos para un tubo de 20 cm a 20° C, cerrado en uno de sus extremos.
Resp. 429, 1290, 2140 y 3000 Hz

22.10. El conducto auditivo forma una cavidad de ondas estacionarias, cerrado en un extremo, como se muestra en la figura 22.14. Suponga que la longitud de esta cavidad es de 2.8 cm. Si una habitación se halla a 24° C, ¿qué frecuencia fundamental será amplificada?

22.11. ¿Qué longitud de un tubo abierto producirá una frecuencia fundamental de 356 Hz a 20° C?
Resp. 48.2 cm

22.12. ¿Qué longitud de tubo abierto producirá una frecuencia de 1200 Hz como su primer sobretono, un día en que la rapidez del sonido es de 340 m/s?

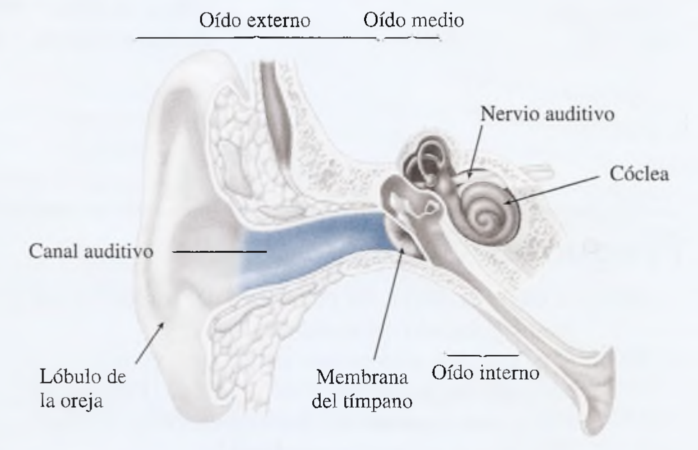


Figura 22.14 El canal auditivo del oído humano es una cavidad estrecha, cerrada en un extremo.

22.13. El segundo sobretono de un tubo cerrado es de 1200 Hz a 20° C. ¿Cuál es la longitud del tubo?
Resp. 35.7 cm

22.14. En un experimento de resonancia, el aire contenido en un tubo cerrado de longitud variable resuena con un diapasón cuando la columna de aire tiene primero una longitud de 6 cm y después de 18 cm. ¿Cuál es la frecuencia del diapasón si la temperatura es de 20° C?

***22.15.** Tenemos dos tubos de 3 m de longitud, uno abierto y otro cerrado. Compare la longitud de onda del cuarto sobretono de cada tubo a 20° C.
Resp. abierto = 1.20 m, cerrado = 1.33 m

Sección 22.5 Ondas sonoras audibles

22.16. ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibeles de un sonido que tiene una intensidad de 4×10^{-5} W/m^2?

22.17. La intensidad de un sonido es 6×10^{-8} W/m^2. ¿Cuál es el nivel de intensidad? Resp. 47.8 dB

22.18. A cierta distancia de un silbato se mide un sonido de 60 dB. ¿Cuál es la intensidad de ese sonido en W/m^2?

22.19. ¿Cuál es la intensidad de un sonido de 40 dB?
Resp. 1×10^{-8} W/m^2

22.20. Calcule las intensidades correspondientes a sonidos de 10, 20 y 30 dB.

22.21. Calcule los niveles de intensidad que corresponden a sonidos de 1×10^{-6} W/m^2, 2×10^{-6} W/m^2 y 3×10^{-6} W/m^2. Resp. 60.0 dB, 63.0 dB, 64.8 dB

22.22. Una fuente isométrica de sonido transmite una potencia de 60 W. ¿Cuáles son la intensidad y el nivel de intensidad de un sonido que se oye a 4 m de distancia de esta fuente?

22.23. Una fuente sonora de 3.0 W se halla a 6.5 m de un observador. ¿Cuáles son la intensidad y el nivel de intensidad del sonido que se escucha a esa distancia? Resp. 5.6×10^{-3} W/m^2, 97.5 dB

22.24. Una persona colocada a 6 m de una fuente sonora oye el sonido con una intensidad de 2×10^{-4} W/m^2. ¿Con qué intensidad lo oye una persona colocada a 2.5 m de la fuente?

***22.25.** El nivel de intensidad a 6 m de una fuente es de 80 dB. ¿Cuál es el nivel de intensidad a una distancia de 15.6 m de la misma fuente? Resp. 71.7 dB

Sección 22.8 El efecto Doppler

Suponga que la rapidez del sonido es 343 m/s para todos estos problemas.

22.26. Una fuente estacionaria de sonido emite una señal cuya frecuencia es de 290 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias que oye un observador (a) que se aproxima a la fuente a 20 m/s y (b) que se aleja de la fuente a 20 m/s?

22.27. Un automóvil hace sonar una bocina a 560 Hz mientras se desplaza con una rapidez de 15 m/s, primero aproximándose a un oyente estacionario y después alejándose de él con la misma rapidez. ¿Cuáles son las frecuencias que escucha el oyente? Resp. 586 Hz, 537 Hz

22.28. En un automóvil estacionado, una persona hace sonar una bocina a 400 Hz. ¿Qué frecuencias escucha el conductor de un vehículo que pasa junto al primero con una rapidez de 60 km/h?

22.29. Un tren que avanza a 20 m/s hace sonar un silbato a 300 Hz al pasar junto a un observador estacionario. ¿Cuáles son las frecuencias que oye el observador al pasar el tren? Resp. 319, 300 y 283 Hz

22.30. Un niño que pasea en bicicleta hacia el norte a 6 m/s oye una sirena de 600 Hz de una patrulla de policía que avanza hacia el sur a 15 m/s. ¿Cuál es la frecuencia que escucha el niño?

22.31. Una ambulancia viaja hacia el norte a 15 m/s. Su sirena tiene una frecuencia de 600 Hz en reposo. Un automóvil avanza hacia el sur a 20 m/s en dirección a la ambulancia. ¿Qué frecuencias escucha el conductor del automóvil antes y después que su vehículo pasa junto a la ambulancia? Resp. 664 Hz, 541 Hz

***22.32.** Un camión que avanza 24 m/s rebasa a un coche que viaja a 10 m/s en la misma dirección. El camionero hace sonar una bocina de 600 Hz. ¿Qué frecuencia oye el conductor del coche?

***22.33.** El silbato de un tren de 500 Hz es escuchado por un observador estacionario con una frecuencia de 475 Hz. ¿Cuál es la rapidez del tren? ¿Se está moviendo hacia el observador o se aleja de él? Resp. 18.1 m/s, se aleja

Problemas adicionales

22.34. La rapidez del sonido en una varilla de cierto metal es de 4600 m/s y la densidad del metal es 5230 kg/m^3. ¿Cuál es el módulo de Young del metal?

22.35. El haz de un sonar viaja en un fluido una distancia de 200 m en 0.12 s. El módulo volumétrico de elasticidad para el fluido es 2600 MPa. ¿Cuál es la densidad del fluido? Resp. 936 kg/m^3

22.36. ¿Cuál es la frecuencia del tercer sobretono de un tubo cerrado cuya longitud es de 60 cm?

22.37. Una cuerda de 40 g y 2 m de longitud vibra en tres lazadas. La tensión en la cuerda es de 270 N. ¿Cuál es la longitud de onda? ¿Cuál es la frecuencia? Resp. 1.33 m, 87.1 Hz

22.38. ¿Cuántas pulsaciones por segundo se oyen cuando dos diapasones de 256 y 259 Hz se hacen sonar al mismo tiempo?

22.39. ¿Cuál es la longitud de un tubo cerrado cuyas frecuencias de su segundo sobretono es 900 Hz en un día en que la temperatura es de 20° C? Resp. 47.6 cm

22.40. La frecuencia fundamental de un tubo abierto es 360 Hz. Si se cierra un extremo de este tubo, ¿cuál será la nueva frecuencia fundamental?

***22.41.** Una varilla de acero de 60 cm está sujeta por un extremo como se muestra en la figura 22.15a. Dibuje la frecuencia fundamental y el primer sobretono para estas condiciones de frontera. ¿Cuáles son las longitudes de onda en cada caso? Resp. 2.40 m, 80.0 cm

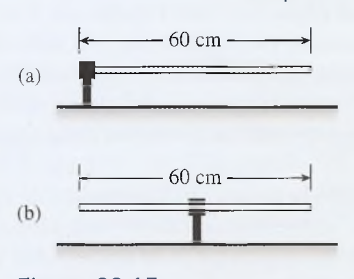


Figura 22.15

***22.42.** La varilla de 60 cm de la figura 22.15b está sujeta ahora por su punto medio. ¿Cuáles son las longitudes de onda de la frecuencia fundamental y el primer sobretono?

22.43. La velocidad del sonido en una varilla de acero es 5060 m/s. ¿Cuál es la longitud de una varilla de ace-

ro montada como se muestra en la figura 22.15a si la frecuencia fundamental de vibración de la varilla es de 3000 Hz? Resp. 42.2 cm

***22.44.** Halle la relación entre la intensidad de los sonidos si uno es 12 dB más alto que el otro.

22.45. Cierto altavoz tiene una abertura circular de 6 cm^2 de área. La potencia radiada por este altavoz es de 6×10^{-7} W. ¿Cuál es la intensidad del sonido en la abertura? ¿Cuál es el nivel de intensidad? Resp. 1 mW/m^2, 90 dB

22.46. El silbato de señales de una fábrica textil tiene una frecuencia de 360 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias que escucha el conductor de un automóvil que pasa frente a la fábrica a 25 m/s un día en el cual el sonido viaja a 343 m/s?

***22.47.** ¿Cuál es la diferencia en los niveles de intensidad (dB) para dos sonidos cuyas intensidades son 2×10^{-5} W/m^2 y 0.90 W/m^2? Resp. 46.5 dB

Preguntas para la reflexión crítica

***22.48.** Al inhalar gas helio, podemos elevar en forma considerable la frecuencia de nuestra voz. Para el aire $M = 29$ g/mol y $\gamma = 1.4$; para el helio $M = 4.0$ g/mol y $\gamma = 1.66$. A una temperatura de 27° C, usted canta una nota do a 256 Hz. ¿Qué frecuencia se escuchará si inhala usted gas helio y todos los demás parámetros permanecen iguales? Observe que tanto v como f se incrementaron. ¿Cómo puede explicar esto considerando que $v = f\lambda$? Comente su respuesta Resp. 751 Hz

***22.49.** Un silbato de juguete está fabricado con un trozo de caña de azúcar de 8 cm de longitud. En rigor, es un tubo abierto desde la entrada de aire hasta el extremo opuesto. Suponga que ahora le hacemos un orificio en el punto medio para que sea posible abrir y cerrar el orificio con un dedo. Si la velocidad del sonido es 340 m/s, ¿cuáles son las dos frecuencias fundamentales que es posible obtener abriendo y cerrando el orificio que hicimos en el centro de la caña? ¿Cuál es la frecuencia fundamental si el orificio del centro se cubre y el extremo final se tapa?

***22.50.** Un diapasón cuya frecuencia es de 512 Hz se mueve alejándose de un observador y acercándose a una pared plana con una rapidez de 3 m/s. La rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s. ¿Cuál es la frecuencia aparente del sonido no reflejado? ¿Cuál es la frecuencia aparente del sonido reflejado? ¿Cuántas pulsaciones se escuchan cada segundo? Resp. 508 Hz, 517 Hz, 9 pulsaciones/s

***22.51.** Usando la definición logarítmica de decibel, deduzca la expresión siguiente para vincular la relación entre las intensidades de dos sonidos y la diferencia, en decibeles, de dichos sonidos:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

Use esta relación para resolver los problemas 22.44 y 22.47.

***22.52.** El aparato de laboratorio que muestra la figura 22.16 se usa para medir la rapidez del sonido en el aire por el método de resonancia. Un diapasón que vibra a una frecuencia f se sostiene sobre el extremo abierto de un tubo parcialmente lleno de agua. La longitud de la columna de aire se puede modificar cambiando el nivel del agua. A medida que el nivel del agua desciende gradualmente desde la parte superior del tubo, la intensidad del sonido alcanza puntos máximos en los tres niveles que se muestra en la figura. Los máximos se presentan cada vez que la columna de aire resuena con el diapasón. Así, la distancia entre las posiciones de resonancia sucesivas es la distancia entre las notas adyacentes para las ondas estacionarias en la columna de aire. La frecuencia del diapasón es 512 Hz y las posiciones de resonancia se presentan a 17, 51 y 85 cm de la parte superior del tubo. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire? ¿Cuál es la temperatura ambiente aproximada? Resp. 348 m/s, 28.3° C

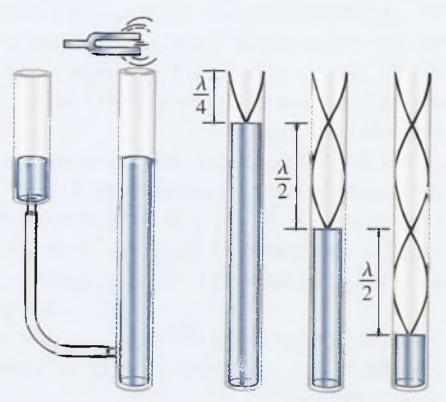
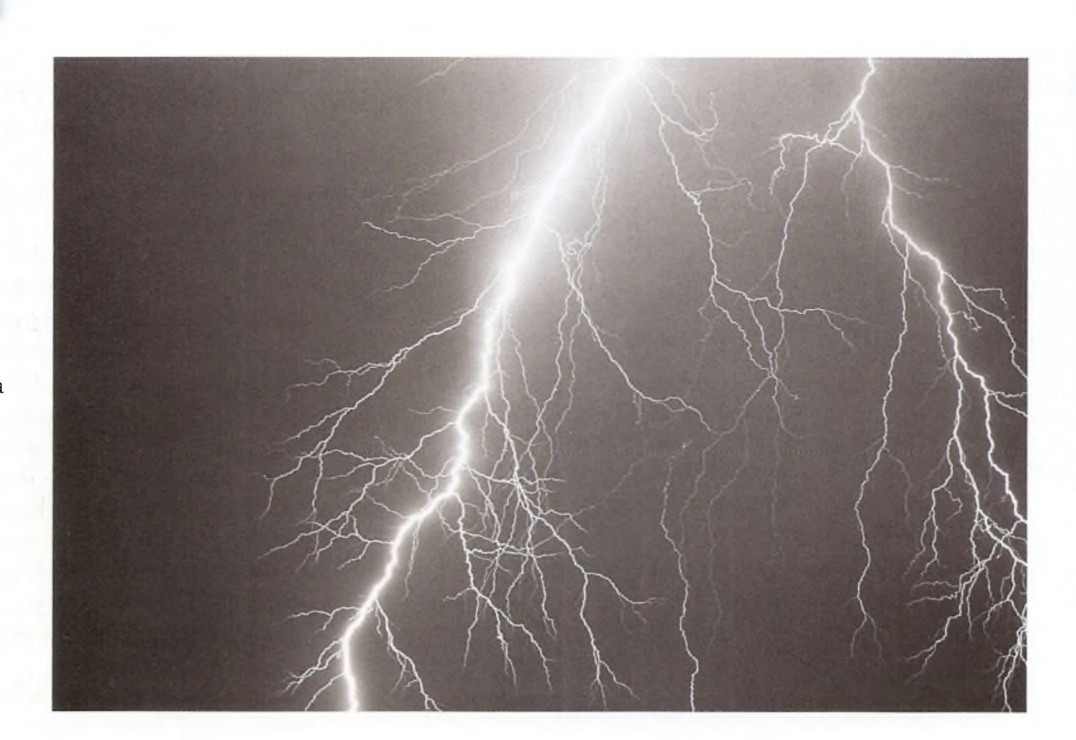


Figura 22.16 Aparato de laboratorio para calcular la velocidad del sonido mediante el método de resonancia.

22.53. ¿Cuál es la diferencia en los niveles de intensidad de dos sonidos, uno de los cuales tiene el doble de intensidad que el otro?

23 La fuerza eléctrica



Los rayos son una de las manifestaciones más bellas de la naturaleza. Con temperaturas cercanas a aquellas de la superficie del Sol y ondas de choque que provocan daños, también representan un peligro significativo para los seres humanos y las estructuras físicas. Son resultado de una concentración sustancial de carga en las nubes, la cual finalmente se descarga en el suelo junto con una ruta de ionización creada por una columna de electrones que se extiende desde las nubes hacia el suelo. (*Fotografía © vol. 1 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará la existencia de dos clases de carga eléctrica y comprobará la *primera ley de la electrostática* usando materiales de laboratorio.
2. Explicará y demostrará el proceso de carga por *contacto* y por *inducción*, y usará un *electroscopio* para determinar la naturaleza de una carga desconocida.
3. Establecerá la *ley de Coulomb* y la aplicará en la resolución de problemas en los que intervengan fuerzas eléctricas.
4. Definirá el *electrón*, el *coulomb* y el *microcoulomb* como unidades de carga eléctrica.

Un peine o una barra de plástico adquieren la curiosa capacidad de atraer otros objetos después de frotarlos con una prenda de lana; en algunas ocasiones se siente una *sacudida* molesta cuando se toca la manija de la puerta de un automóvil después de que se desliza uno en el asiento; en un montón de hojas de papel, estás ofrecen resistencia cuando se intenta separarlas. Todos estos fenómenos son ejemplos de *electrificación* y ocurren con frecuencia como resultado del frotamiento de objetos entre sí. Hace ya mucho tiempo que a ese proceso de frotamiento se le conoce como ***cargar***, y se decía que el objeto electrificado se había *cargado*. En este capítulo comenzaremos a estudiar la ***electrostática***, ciencia que se ocupa de las cargas eléctricas en reposo.

23.1 La carga eléctrica

La mejor forma de empezar el estudio de la electrostática es experimentar con objetos que se electrifican por medio del frotamiento. Todos los materiales ilustrados en la figura 23.1 se encuentran comúnmente en un laboratorio de física; según el orden en que aparecen en la figura se trata de: una barra de ebonita (plástico duro) sobre un pedazo de piel de gato, una barra de vidrio sobre un pedazo de seda, un electroscopio de esferas de médula de saúco, esferas de médula de saúco suspendidas y un electroscopio de hoja de oro. Una ***esfera de médula de saúco*** es una esfera ligera hecha con la madera de ese árbol y recubierta con pintura metálica, que casi siempre se utiliza suspendida de un hilo de seda. El ***electroscopio*** es un instrumento de laboratorio sensible que se utiliza para detectar la presencia de carga eléctrica.

FÍSICA HOY

Imagine un periódico que no necesita reciclarse o desecharse. Las noticias se transmiten cada mañana en forma electrónica a un material preparado especialmente parecido al papel o a otros dispositivos. Además, el texto y los gráficos son estables y no requieren baterías. Usted puede leer un libro o transportar la información con usted a la playa o a cualquier otra parte. Varias compañías como Xerox y E-Ink están desarrollando aplicaciones como ésta.

Una aplicación utiliza millones de microcápsulas diminutas que contienen partículas negras con carga positiva suspendidas en un fluido transparente. La manipulación de un campo eléctrico entre un electrodo superior transparente y un electrodo inferior puede controlar la posición de las partículas blancas y negras. Por tanto, el texto y los gráficos pueden mostrarse en forma de píxeles, de un modo parecido a como se muestran en un monitor de computadora.

Electrodo transparente
Fluido transparente
Pigmento positivo
Pigmento negativo
Electrodo inferior

El electroscopio de esferas de médula de saúco se puede utilizar para estudiar los efectos de la electrificación. Considere dos esferas de médula de saúco con pintura metálica suspendidas de un punto común mediante hilos de seda. Empezamos por frotar vigorosamente la barra de ebonita con el pedazo de piel de gato (o con un paño de lana). Si posteriormente la barra de ebonita se acerca al electroscopio, ésta atraerá a las esferas de médula de saúco suspendidas, como se muestra en la figura 23.2a. Después de permanecer por un instante en contacto con la barra, las esferas serán repelidas por dicha barra y también entre sí. Cuando se retira la barra, las esferas permanecen separadas, tal como se aprecia en la figura. La repulsión se debe a alguna propiedad adquirida por las esferas como resultado de su contacto con la barra cargada. Se supone, en forma razonable, que parte de la *carga* se ha transferido de la barra a las esferas y que los tres objetos se encuentran cargados de igual forma. A partir de estas observaciones, podemos enunciar la siguiente conclusión:

> Existe una fuerza de repulsión entre dos sustancias que están electrificadas de la misma manera.

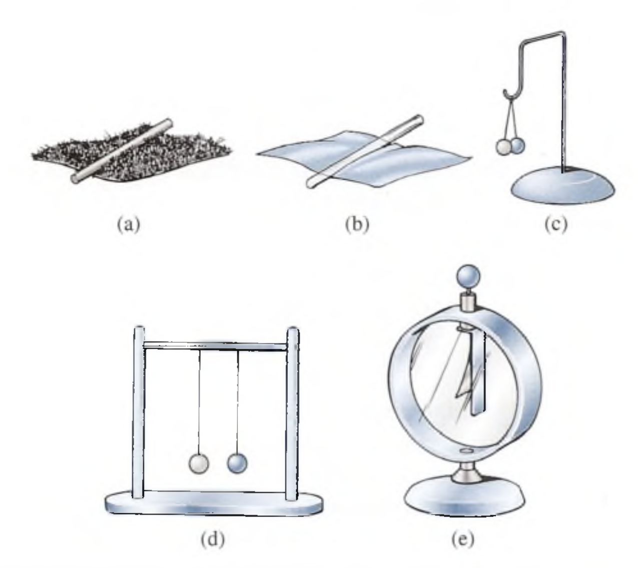


Figura 23.1 Materiales de laboratorio para estudiar la electrostática: (a) una barra de ebonita descansa sobre un trozo de piel de gato, (b) una barra de vidrio descansa sobre un pedazo de seda, (c) el electroscopio de esferas de médula de saúco, (d) dos esferas de médula de saúco suspendidas y (e) el electroscopio de hoja de oro.

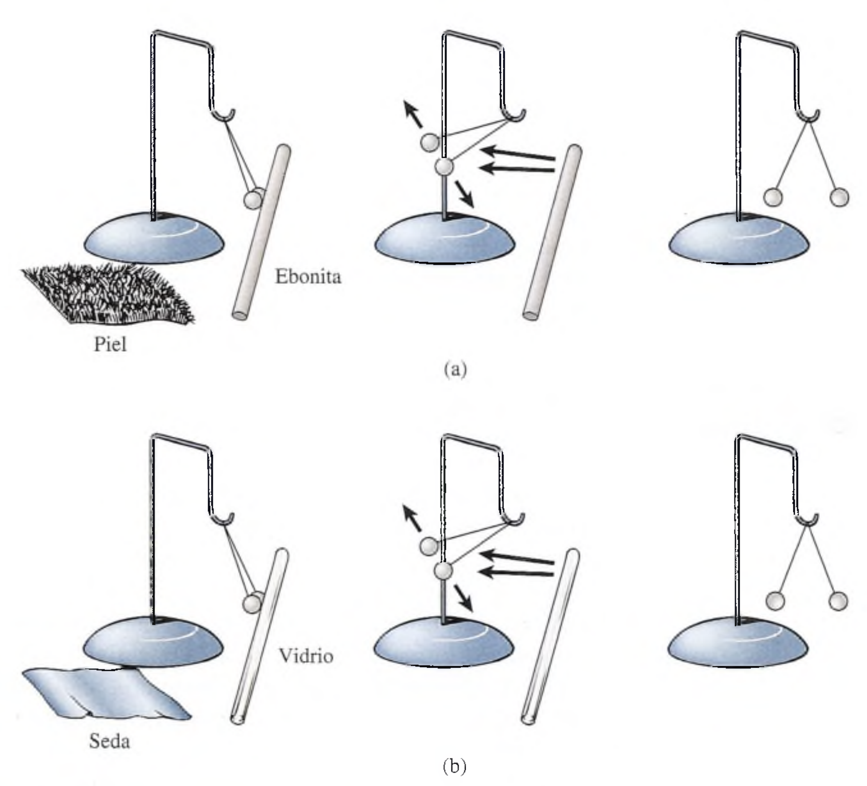


Figura 23.2 (a) Cómo proporcionar carga a un electroscopio de esferas de médula de saúco con una barra de ebonita. (b) Cómo proporcionar carga a las esferas de médula de saúco con una barra de vidrio.

Continuando con la experimentación, se toma la barra de vidrio y se frota vigorosamente con un pedazo de seda. Cuando la barra cargada se acerca a las esferas de saúco, se presenta la misma secuencia de hechos que los que se observaron con la barra de ebonita (véase la figura 23.2b). ¿Significa esto que la naturaleza de la carga es la misma en ambas barras? Nuestro experimento ni aprueba ni desaprueba esta suposición. En cada caso, la barra y las esferas se electrificaron de la misma manera, y también en cada caso hubo una repulsión.

Para investigar si los dos procesos son idénticos, carguemos una de las esferas mediante la barra de vidrio y la otra con la de ebonita. Como se aprecia en la figura 23.3, existe una fuerza de *atracción* entre las esferas cargadas en esta forma. Se puede concluir que las cargas producidas en las barras de vidrio y de ebonita son opuestas.

Experimentos similares con un gran número de materiales diferentes demuestran que la totalidad de los objetos electrificados se pueden dividir en dos grupos: (1) los que tienen una carga como la que se produjo en el vidrio y (2) los que tienen una carga como la que se produjo en la ebonita. De acuerdo con una convención establecida por Benjamín Franklin se dice que los objetos del primer grupo tienen una carga *positiva* (+) y que los pertenecientes

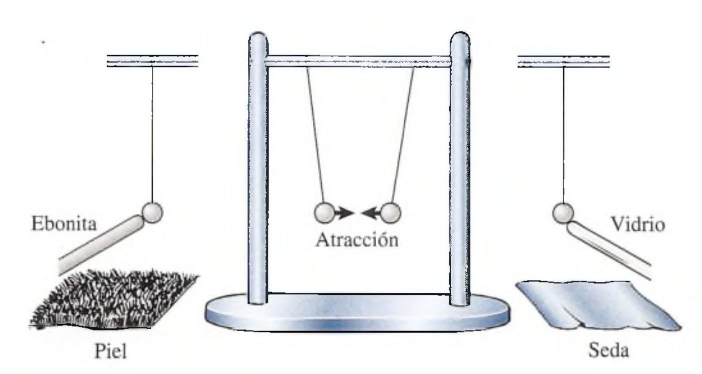


Figura 23.3 Existe una fuerza de atracción entre dos sustancias que tienen carga opuesta.

al segundo grupo, una carga *negativa* (−). En realidad, estos términos no tienen un significado matemático, sencillamente se refieren a los dos tipos contrarios de carga eléctrica.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar ***la primera ley de la electrostática***, la cual está basada en nuestra experimentación anterior:

Las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo contrario se atraen.

Dos objetos cargados negativamente o dos objetos cargados positivamente se repelen entre sí, como se observa en la figura 23.2a y b, respectivamente. La figura 23.3 demuestra que un objeto cargado positivamente atrae a un objeto cargado negativamente.

23.2 El electrón

¿Qué ocurre en realidad durante el proceso de frotamiento con el cual se produce el fenómeno de electrificación? Benjamín Franklin pensaba que todos los cuerpos contenían una determinada cantidad de fluido eléctrico que servía para mantenerlos en un estado sin carga (neutro). Él postuló que cuando dos sustancias diferentes se frotaban entre sí, una de ellas acumulaba un exceso de fluido y quedaba cargada positivamente, mientras que la otra perdía fluido y quedaba cargada negativamente. Ahora se sabe que la sustancia transferida no es un fluido, sino pequeñas cantidades de electricidad negativa llamadas ***electrones***.

La teoría atómica moderna sobre la materia sostiene que todas las sustancias están formadas por átomos y moléculas. Cada átomo tiene una parte central cargada positivamente a la que se le llama *núcleo*, que está rodeado de una nube de electrones cargados negativamente. El núcleo consta de cierto número de *protones*, cada uno de ellos con una sola unidad de carga positiva y (excepto para el hidrógeno) uno o más *neutrones*. Como su nombre lo sugiere, un ***neutrón*** es una partícula eléctricamente neutra. Normalmente, un átomo de materia se encuentra en un estado *neutro* o *sin carga* debido a que contiene el mismo número de protones en su núcleo que de electrones alrededor de éste. Un diagrama esquemático del átomo de neón se muestra en la figura 23.4. Si, por alguna razón, un átomo neutro pierde uno o más de sus electrones exteriores, el átomo tiene una carga neta positiva y se le conoce como un ***ion*** positivo. Un ion negativo es un átomo que ha ganado una o más cargas adicionales.

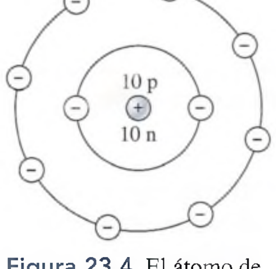


Figura 23.4 El átomo de neón consiste en un núcleo estrechamente compactado que contiene diez protones (p) y diez neutrones (n). El átomo es eléctricamente neutro debido a que está rodeado por diez electrones.

Cuando dos materiales particulares se ponen en contacto estrecho, algunos de los electrones más débilmente retenidos se pueden transferir de un material al otro. Por ejemplo, cuando una barra de ebonita se frota contra un pedazo de piel, los electrones se transfieren de la piel a la barra, dejando un *exceso* de electrones sobre la barra y una *deficiencia* de electrones en la piel. En forma similar, cuando una barra de vidrio se frota con un pedazo de seda, los electrones se transfieren del vidrio a la seda. Ahora podemos plantear este enunciado:

Un objeto que tiene un exceso de electrones está cargado negativamente, y un objeto que tiene una deficiencia de electrones está cargado positivamente.

En la figura 23.5 se ilustra una demostración de laboratorio acerca de la transferencia de carga. Una barra de ebonita se frota fuertemente sobre un pedazo de piel; una esfera de médula de saúco se carga negativamente con la barra y la otra se pone en contacto con la piel. La atracción resultante demuestra que la piel tiene carga opuesta. El proceso de frotamiento ha provocado una deficiencia de electrones en la piel.

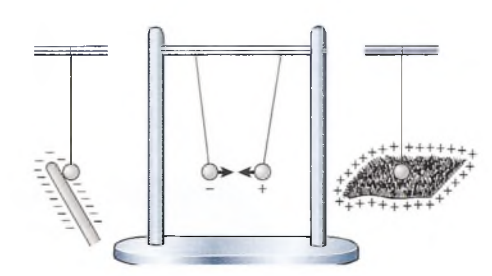


Figura 23.5 Al frotar una barra de ebonita con un pedazo de piel se transfieren electrones de la piel a la barra.

23.3 Aislantes y conductores

Un trozo de materia está compuesto de muchos átomos dispuestos de una manera peculiar de acuerdo con el material. Algunos materiales, principalmente los metales, tienen un gran número de *electrones libres*, que pueden moverse a través del material. Estos materiales tienen la habilidad de transferir carga de un objeto a otro, y se les llama ***conductores***.

Un conductor es un material a través del cual se transfiere fácilmente la carga.

La mayoría de los metales son buenos conductores. En la figura 23.6 una varilla de cobre está sostenida por una base de vidrio. Las esferas de médula de saúco se pueden cargar al tocar el extremo derecho de la varilla de cobre que a su vez toca una barra de caucho cargada. Los electrones se transfieren o son *conducidos* a través de la varilla hasta las esferas de saúco. Tome nota de que la carga no se transfiere ni a la base de vidrio ni al pedazo de seda. Estos materiales son malos conductores y se les conoce como ***aislantes***.

Un aislante es un material que se resiste al flujo de carga.

Otros ejemplos de buenos aislantes son la ebonita, el plástico, la mica, la baquelita, el azufre y el aire.

Un semiconductor es un material con capacidad intermedia para transportar carga.

Algunos ejemplos de materiales semiconductores son el silicio, el germanio y el arseniuro de galio. La facilidad con la que un ***semiconductor*** transporta carga puede variar mucho a causa de la adición de impurezas o por un cambio de temperatura.

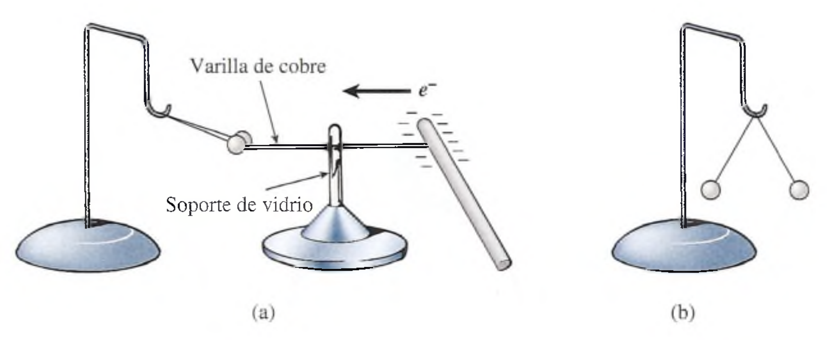


Figura 23.6 Los electrones son conducidos por la varilla de cobre para cargar las esferas de médula de saúco.

23.4 El electroscopio de hojas de oro



Figura 23.7 Electroscopio de hoja de oro.

El electroscopio de hoja de oro que muestra la figura 23.7 consiste en una lámina u hoja de oro muy delgada, unida a una barra conductora. La barra y la hoja se protegen de corrientes de aire por medio de una cubierta cilíndrica con ventanas de vidrio. La barra está unida a la parte superior por medio de una perilla esférica y se aisló de la cubierta mediante una barra cilíndrica de ebonita o ámbar. Cuando se suministra cierta carga a la perilla, la repulsión de las cargas iguales de la barra y la hoja de oro provocan que la hoja se aparte de la barra.

La figura 23.8 ilustra la forma de cargar un electroscopio por *contacto*. Cuando la perilla se toca con la barra cargada negativamente, los electrones fluyen desde la barra hasta la hoja, dejando un exceso de electrones en el electroscopio. Cuando la perilla se toca con una barra cargada positivamente, los electrones se transfieren de la perilla a la barra, lo cual deja al electroscopio con una deficiencia de electrones. Observe que en el electroscopio y en la barra de carga la carga residual tiene el mismo signo.

Una vez que el electroscopio está cargado, ya sea positiva o negativamente, se puede usar para detectar la presencia y la naturaleza de otros objetos cargados (véase la figura 23.9).

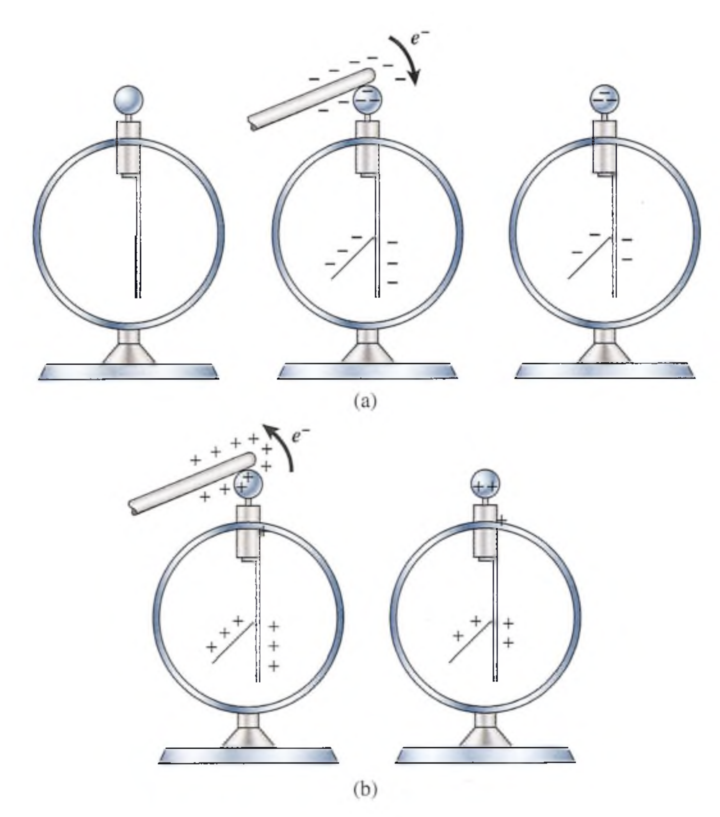


Figura 23.8 Carga del electroscopio por contacto con (a) una barra cargada negativamente y (b) una barra cargada positivamente.

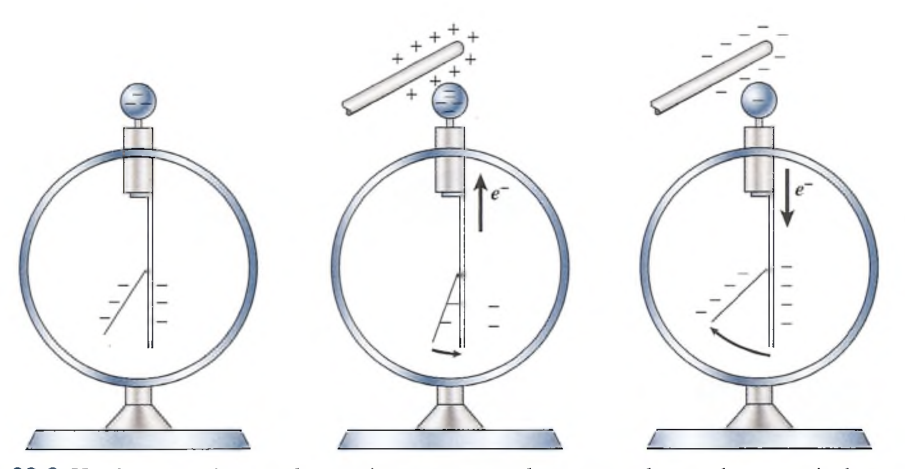


Figura 23.9 Un electroscopio cargado negativamente se puede usar para detectar la presencia de otra carga.

Por ejemplo, considere lo que le sucede a la hoja de un electroscopio cargado negativamente cuando una barra con carga positiva se acerca a la perilla. Algunos electrones se desalojan de la hoja y se desplazan hacia la perilla. Como resultado, la hoja converge. Al acercar más la barra se produce una convergencia proporcional de la hoja mientras mayor número de electrones se atraen hacia la perilla. Esto parece indicar que existe una proporcionalidad directa entre el número de cargas acumuladas en la hoja y en la barra, respecto a la fuerza de repulsión que surge entre ellas. Más aún, debe existir una relación *inversa* entre la separación de la barra cargada y la perilla respecto a la fuerza de atracción de los electrones de la hoja y la barra del electroscopio; esta fuerza se vuelve más fuerte cuando la separación disminuye. Las observaciones anteriores nos ayudarán a comprender la *ley de Coulomb*, que se desarrollará en una sección posterior.

Un razonamiento similar nos mostrará que la hoja de un electroscopio cargado negativamente será repelida más lejos de la barra cuando la perilla esté colocada cerca de un objeto cargado negativamente. Por lo tanto, un electroscopio cargado puede usarse para indicar tanto la polaridad como la presencia de cargas en el espacio circundante.

23.5 Redistribución de carga

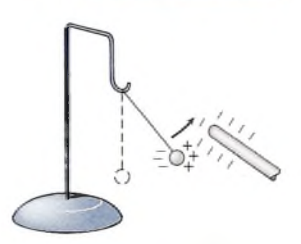


Figura 23.10 Atracción de un cuerpo neutro debido a la redistribución de la carga.

Cuando una barra cargada negativamente se acerca a una esfera de médula de saúco sin cargar existe una atracción inicial, como muestra la figura 23.10. La atracción del objeto sin cargar se debe a la separación de la electricidad positiva y negativa dentro del cuerpo neutro. La proximidad de la barra cargada negativamente repele a los electrones retenidos débilmente hasta el lado opuesto del objeto no cargado, dejando una deficiencia (carga positiva) en el costado cercano y un exceso (carga negativa) en el costado alejado. Puesto que cargas diferentes se encuentran cerca de la barra, la fuerza de atracción excederá a la de repulsión y el objeto eléctricamente neutro será atraído hacia la barra. No se gana ni se pierde carga alguna durante este proceso; simplemente, la carga del cuerpo neutro se redistribuye.

23.6 Carga por inducción

La redistribución de carga a causa de la presencia cercana de un objeto cargado es útil para cargar objetos eléctricamente sin hacer contacto. Este proceso, conocido como ***carga por inducción***, se puede realizar sin ninguna pérdida de carga en el cuerpo cargado. Por ejemplo, consideremos dos esferas metálicas neutras que se tocan entre sí, como se muestra en la figura 23.11. Cuando una barra cargada negativamente se acerca a la esfera de la izquierda (sin tocarla), tiene lugar una redistribución de carga. Los electrones son forzados a desplazarse desde la esfera de la izquierda hasta la esfera de la derecha, a través del punto de contacto. Ahora bien, si las esferas se separan en presencia de la barra de carga, los electrones no pueden regresar a la esfera de la izquierda. A consecuencia de esto, la esfera de la izquierda tendrá una deficiencia de electrones (una ***carga positiva***) y la de la derecha tendrá un exceso de electrones (una ***carga negativa***).

Una carga también se puede inducir en una sola esfera. Este proceso se ilustra con el electroscopio de la figura 23.12. Una barra cargada negativamente se coloca cerca de la perilla

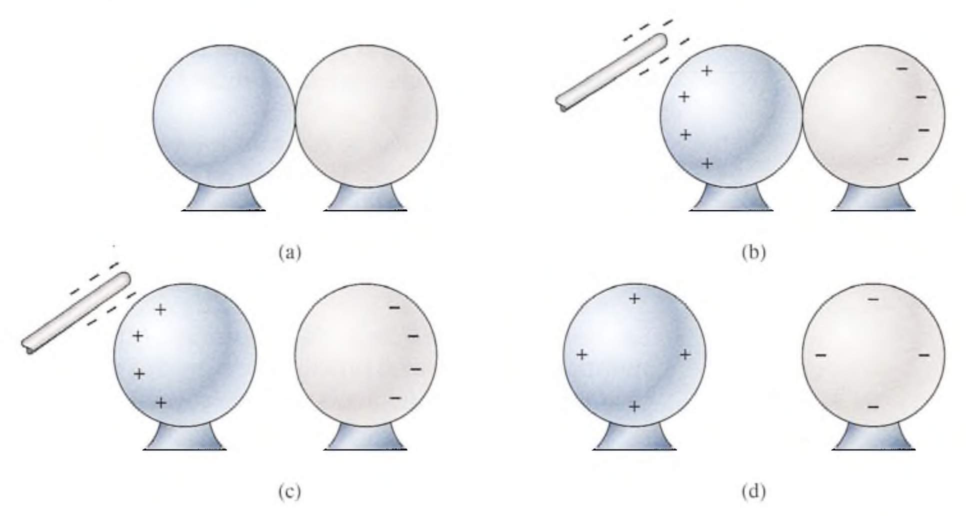


Figura 23.11 Carga de dos esferas metálicas por inducción.

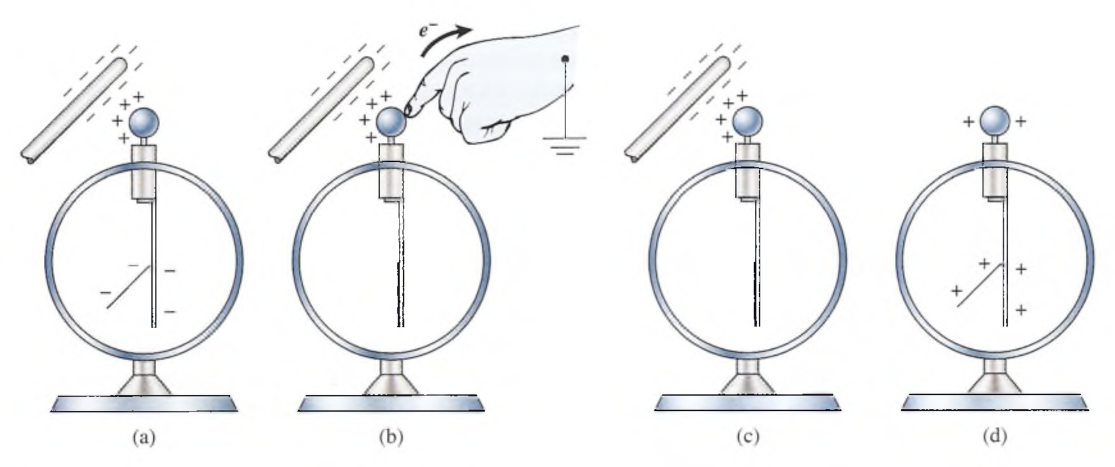


Figura 23.12 Carga de un electroscopio por inducción. Observe que la carga residual es opuesta a la del cuerpo de carga.

de metal, provocando una redistribución de carga. Los electrones repelidos hacen que la hoja se separe, dejando una deficiencia de electrones en la perilla. Al tocar la perilla con un dedo o al conectar un alambre de la perilla a tierra, se proporciona una vía para que los electrones repelidos dejen el electroscopio. El cuerpo o la tierra adquirirán una carga negativa igual a la carga positiva (deficiencia) que quedó en el electroscopio. Cuando se retira la barra cargada, la hoja del electroscopio de nuevo se separa, como muestra la figura. La carga por inducción siempre deja una carga residual que es opuesta a la carga del cuerpo.

23.7 Ley de Coulomb

Como de costumbre, la tarea del físico consiste en medir de forma cuantitativa las interacciones entre los objetos cargados. No es suficiente con establecer que existe una fuerza eléctrica; debemos ser capaces de predecir su magnitud.

La primera investigación teórica acerca de las fuerzas eléctricas entre cuerpos cargados fue realizada por Charles Augustin de Coulomb en 1784. Él llevó a cabo sus investigaciones con una balanza de torsión para medir la variación de la fuerza con respecto a la separación y la cantidad de carga. La separación r entre dos objetos cargados se define como la distancia en línea recta entre sus respectivos centros. La cantidad de carga q se puede considerar como el número de electrones o de protones que hay en exceso, en un cuerpo determinado.

Coulomb encontró que la fuerza de atracción o de repulsión entre dos objetos cargados es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. En otras palabras, si la distancia entre dos objetos cargados se reduce a la mitad, la fuerza de atracción o de repulsión entre ellos se cuadruplicará.

El concepto de cantidad de carga no se comprendía con claridad en la época de Coulomb. No se había establecido aún la unidad de carga y no había forma de medirla, pero en sus experimentos se demostraba claramente que la fuerza eléctrica entre dos objetos cargados es directamente proporcional al producto de la cantidad de carga de cada objeto. Actualmente, estas conclusiones se enuncian en la ***ley de Coulomb:***

> La fuerza de atracción o de repulsión entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las dos cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Para lograr la expresión matemática de la ley de Coulomb consideremos las cargas de la figura 23.13. En dicha figura se indica la fuerza de atracción **F** entre dos cargas contrarias, así como la fuerza de repulsión entre dos cargas similares. En cualquier caso, la magnitud

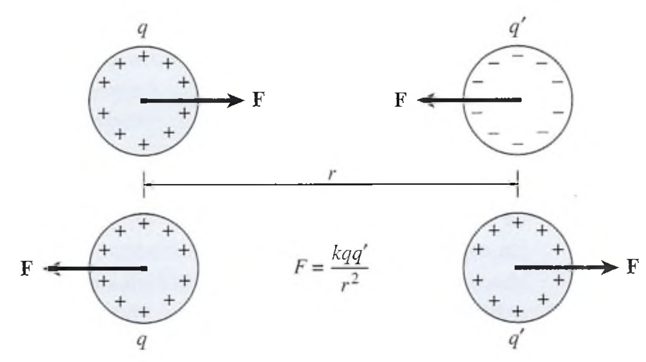


Figura 23.13 Ilustración de la ley de Coulomb.

de la fuerza se determina mediante las magnitudes de las cargas q y q' y por su separación r. Partiendo de la ley de Coulomb, escribimos

$$F \propto \frac{qq'}{r^2}$$

o bien

$$F = \frac{kqq'}{r^2} \tag{23.1}$$

La constante de proporcionalidad k incluye las propiedades del medio que separa los cuerpos cargados y tiene las dimensiones que dicta la ley de Coulomb.

En unidades del SI, el sistema práctico para el estudio de la electricidad, la unidad de carga se expresa en ***coulombs*** (C). En este caso, la cantidad de carga no se define por medio de la ley de Coulomb sino que se relaciona con el flujo de una carga a través de un conductor. Posteriormente veremos que esta velocidad de flujo se mide en *amperes*. Una definición formal del coulomb es la siguiente:

Un coulomb es la carga transferida en un segundo a través de cualquier sección transversal de un conductor, mediante una corriente constante de un ampere.

Puesto que la teoría sobre la corriente eléctrica no se incluye en este capítulo, será suficiente comparar el coulomb con la carga de un electrón.

$$1 \text{ C} = 6.25 \times 10^{18} \text{ electrones}$$

Obviamente el coulomb es una unidad extremadamente grande desde el punto de vista de la mayoría de los problemas en electrostática. La carga de un electrón expresada en coulombs es

$$e^- = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \tag{23.2}$$

donde e^- es el símbolo para el electrón y el signo menos denota la naturaleza de la carga.

Una unidad más conveniente para la electrostática es el ***microcoulomb*** (μC), definido por

$$1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C} \tag{23.3}$$

Puesto que las unidades de fuerza, carga y distancia del SI no dependen de la ley de Coulomb, la constante de proporcionalidad k debe determinarse experimentalmente. Un gran número de experimentos han mostrado que cuando la fuerza está en newtons, la distancia en metros y la carga en coulombs, la constante de proporcionalidad es, en forma aproximada,

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \tag{23.4}$$

Cuando se aplica la ley de Coulomb en unidades del SI, se debe sustituir este valor para k en la ecuación (23.1):

$$F = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\, qq'}{r^2} \tag{23.5}$$

Conviene recordar que **F** representa la fuerza sobre una partícula cargada y es, por tanto, una cantidad vectorial. La *dirección* de la fuerza se determina tan sólo por la naturaleza (+ o −) de las cargas q y q'. Para dos cargas, cada una ejercerá la misma fuerza sobre la otra con la excepción de que las fuerzas estarán en direcciones opuestas (la atracción o repulsión es mutua). Por tanto, primero se debe decidir cuál carga considerar y luego determinar la dirección de la fuerza sobre esa carga debida a la otra carga. La dirección se determina por medio de las leyes de atracción y repulsión; *cargas iguales se repelen y cargas distintas se atraen.* La *magnitud* de la fuerza F se obtiene a partir de la ley de Coulomb al sustituir los valores absolutos para q, q' y r. Las unidades de las cargas deben ser *coulombs* y las de la distancia deben ser *metros* si las fuerzas se van a medir en *newtons*.

Ejemplo 23.1

Dos cargas, $q_1 = -8\mu C$ y $q_2 = +12\mu C$, se colocan a 12 cm de distancia entre sí en el aire. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una tercera carga, $q_3 = -4\mu C$, colocada a medio camino entre las otras dos fuerzas?

Plan: Primero dibujamos una línea recta horizontal e indicamos las posiciones y magnitudes de las tres cargas, como muestra la figura 23.14. Nos centramos en la carga central q_3 e indicamos las direcciones de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan *sobre* q_3 debido a las cargas q_1 y q_2. La ley de Coulomb nos permite obtener las magnitudes de las fuerzas, y su resultante puede calcularse como la suma de vectores.

Solución: Primero se convierte la distancia a metros (12 cm = 0.12 m) y se obtiene el punto medio, es decir, se saca la mitad de 0.12 m, que es igual a 0.6 m. Las cargas se convierten a coulombs ($1\ \mu C = 1 \times 10^{-6}$ C). La fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre q_3 debida a q_1 se calcula a partir de la ley de Coulomb. Recuerde que el signo de la carga se usa sólo para hallar la dirección de las fuerzas. Los valores absolutos sólo se necesitarán para sustitución.

$$F_1 = \frac{kq_1q_3}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-6}\ \text{C})(4 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.06\ \text{m})^2}$$

$$F_1 = 80\ \text{N, repulsión (a la derecha)}$$

De manera similar, la fuerza $\mathbf{F}_2$ en q_3 es igual a

$$F_2 = \frac{kq_2q_3}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-6}\ \text{C})(4 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.06\ \text{m})^2}$$

$$F_2 = 120\ \text{N, atracción (también a la derecha)}$$

Finalmente, la fuerza resultante es la suma de vectores de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

$$F = 80\ \text{N} + 120\ \text{N} = 200\ \text{N, a la derecha}$$

Observe que los signos de las cargas se usaron sólo para determinar la dirección de las fuerzas; no se usaron en la ley de Coulomb.

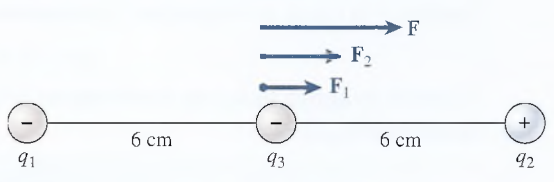


Figura 23.14 Cálculo de la fuerza resultante sobre una carga que está colocada en el punto medio de la distancia entre las otras dos cargas.

Estrategia para resolver problemas

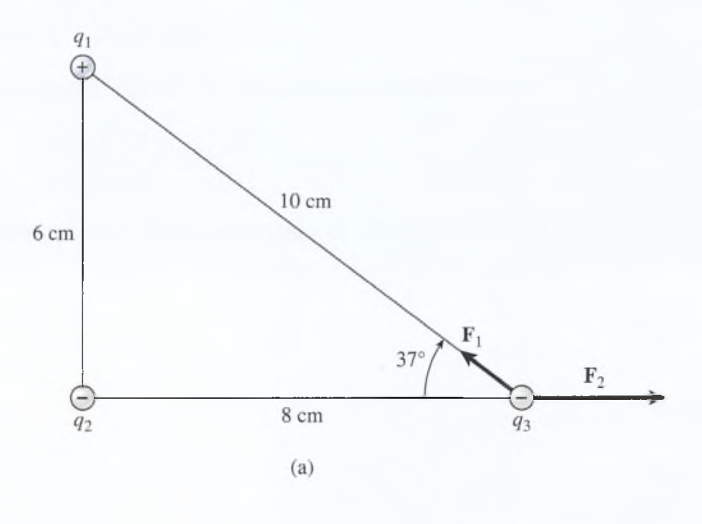
Fuerzas eléctricas y ley de Coulomb

1. Lea el problema, dibuje un esquema y marque en él los datos. Indique las cargas positivas y negativas junto con las distancias conocidas. Las cargas deben estar en *coulombs* y las distancias deben estar en *metros*. Recuerde que 1 μC $= 1 \times 10^{-6}$ C y que 1 nC $= 1 \times 10^{-9}$ C.
2. Tenga cuidado de no confundir la *naturaleza* de la carga (+ o −) con el signo correspondiente a las fuerzas y sus componentes. La atracción o repulsión determina la dirección de las fuerzas eléctricas.
3. La *fuerza resultante* sobre una determinada carga a causa de una o varias cargas vecinas se determina por medio de la suma vectorial de la fuerza que cada carga ejercería si actuara sola. La magnitud de cada fuerza se calcula a partir de la ley de Coulomb; la dirección se determina partiendo del hecho de que cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen. Construya un diagrama de cuerpo libre y prosiga con la suma vectorial como se estudió en los ejemplos del texto. Tal vez le convenga revisar la suma vectorial por el método de las componentes que se estudió en el capítulo 3.
4. Para cargas en equilibrio recuerde que la primera condición para el equilibrio indica que la suma de las componentes en x es cero y que la suma de las componentes en y es cero.

Ejemplo 23.2

Tres cargas, $q_1 = +4 \times 10^{-9}$ C, $q_2 = -6 \times 10^{-9}$ C y $q_3 = -8 \times 10^{-9}$ C, están separadas como muestra la figura 23.15. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre q_3 debida a las otras dos cargas?

Plan: Trazamos un esquema y un diagrama de cuerpo libre, marcando toda la información proporcionada, como se aprecia en la figura 23.15. Consideramos la carga q_3 para calcular de manera independiente la magnitud y la dirección de cada fuerza debida a las otras cargas. La fuerza resultante se determina mediante el método de las componentes. (En la sección 3.12 se incluye un repaso de la suma de vectores.)



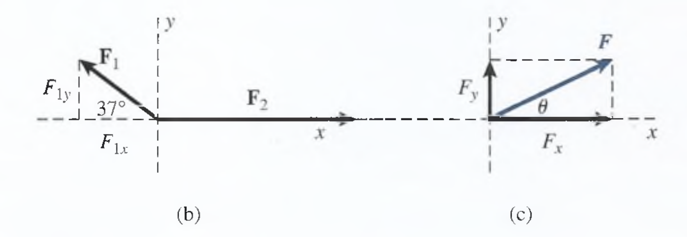


Figura 23.15

Solución: Sea $\mathbf{F}_1$ la fuerza sobre q_3 debida a q_1, y sea $\mathbf{F}_2$ la fuerza sobre q_3 debida a q_2. $\mathbf{F}_1$ es la fuerza de atracción (*cargas distintas*) y $\mathbf{F}_2$ es una fuerza de repulsión (*cargas iguales*), como muestra la figura 23.15. La *magnitud* y la *dirección* de cada fuerza se determinan como sigue:

$$F_1 = \frac{kq_1q_3}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-9} \text{ C})(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0.100 \text{ m})^2}$$
$$= 2.88 \times 10^{-5} \text{ N} = 28.8\ \mu\text{N (37° N del O)}$$
$$F_2 = \frac{kq_2q_3}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-9} \text{ C})(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0.080 \text{ m})^2}$$
$$= 6.75 \times 10^{-5} \text{ N} = 67.5\ \mu\text{N, este}$$

La fuerza resultante se determina usando el método de componentes de la suma de vectores. Las componentes x y y de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se resumen en la tabla 23.1.

Tabla 23.1

Vector	Ángulo ϕ_x	Componente x	Componente y
$F_1 = 28.8\ \mu\text{N}$	37°	$F_{1x} = -(28.8\ \mu\text{N})(\cos 37°)$ $= -23.0\ \mu\text{N}$	$F_{1y} = (28.8\ \mu\text{N})(\text{sen}\, 37°)$ $= 17.3\ \mu\text{N}$
$F_2 = 67.5\ \mu\text{N}$	0°	$F_{2x} = +67.5\ \mu\text{N}$	$F_{2y} = 0\ \mu\text{N}$
F	θ	$F_x = \Sigma F_x = +44.5\ \mu\text{N}$	$F_y = \Sigma F_y = +17.3\ \mu\text{N}$

En la figura 23.15c, aplicamos el teorema de Pitágoras para determinar la magnitud de la fuerza resultante F sobre q_3:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$
$$= \sqrt{(44.5\ \mu\text{N})^2 + (17.3\ \mu\text{N})^2} = 47.7\ \mu\text{N}$$

A continuación, se encuentra la dirección a partir de la función tangente.

$$\tan\theta = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = \left|\frac{17.3\ \mu\text{N}}{44.5\ \mu\text{N}}\right| \quad \text{y} \quad \theta = 213° \text{ N del E}$$

Por consiguiente, la fuerza resultante sobre q_3 es 47.7 μN, dirigida a 21.2° N del E.

Resumen y repaso

Resumen

La electrostática es la ciencia que estudia las cargas en reposo. Hemos visto que existen dos tipos de cargas en la naturaleza. Si un objeto tiene un exceso de electrones, se dice que está cargado *negativamente*; si tiene una deficiencia de electrones, está cargado *positivamente*. La ley de Coulomb fue presentada para proveer una medida cuantitativa de las fuerzas eléctricas que existen entre esas cargas. Los principales conceptos se mencionan a continuación.

- La primera ley de la electrostática establece que *las cargas del mismo signo se repelen entre sí y las cargas de diferente signo se atraen unas a otras.*
- La ley de Coulomb establece que *la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las dos cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (separación) entre las dos cargas.*

$$F = \frac{kqq'}{r^2} \qquad \textit{Ley de Coulomb}$$

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

La fuerza F está en newtons (N) cuando la distancia r está en metros (m) y la carga q se mide en coulombs (C).

- Al resolver los problemas de este capítulo, es importante usar el signo de las cargas para determinar la *dirección* de las fuerzas, y la ley de Coulomb para determinar sus *magnitudes.* La fuerza resultante sobre una carga en particular se calcula con los métodos de la mecánica vectorial.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

23.1. Comente varios ejemplos de electricidad estática, además de los mencionados en el texto.

23.2. ¿Se *crea* alguna carga en el proceso de frotar una varilla de vidrio con un pedazo de seda? Explique su respuesta.

23.3. ¿Cuál es la naturaleza de la carga que aparece en el pedazo de seda de la pregunta 23.2?

23.4. En el laboratorio, un soporte aislado sujeta una esfera metálica eléctricamente cargada. Describa varios procedimientos para determinar la naturaleza de la carga en esa esfera.

23.5. En un experimento de laboratorio se observa que dos cuerpos se atraen entre sí. ¿Es ésta una prueba concluyente de que ambos están cargados? Explique su respuesta.

23.6. Se observa que dos cuerpos se repelen mutuamente con una fuerza eléctrica. ¿Es ésta una prueba concluyente de que ambos están cargados? Explique su respuesta.

23.7. Uno de los principios fundamentales de la física es el principio de la conservación de la carga, según el cual *la cantidad total de carga eléctrica en el universo no cambia.* ¿Puede exponer razones para aceptar esta ley?

23.8. Describa lo que pasa con la hoja de un electroscopio cargado positivamente cuando (a) una barra cargada negativamente se acerca cada vez más a la perilla sin tocarla, (b) una barra cargada positivamente se acerca más y más a la perilla.

23.9. Cuando el electroscopio de hoja se carga por inducción, ¿debemos quitar el dedo antes de retirar la barra con la carga? Explique su respuesta.

23.10. Escriba una lista con las unidades que corresponden a cada parámetro de la ley de Coulomb en unidades del SI.

23.11. La ley de Coulomb sólo es válida cuando la separación r es grande en comparación con los radios de la carga. ¿Cuál es la razón de esta limitación?

23.12. ¿Cuántos electrones se requerirían para impartir a una esfera de metal una carga negativa de (a) 1 C, (b) 1 μC?

Problemas

Sección 23.7 Ley de Coulomb

23.1. Dos esferas, cada una con una carga de 3 μC, están separadas a 20 mm. ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre ellas? Resp. 202.5 N

23.2. Dos cargas puntuales de -3 y $+4$ μC están separadas 12 mm en el vacío. ¿Cuál es la fuerza electrostática entre ellas?

23.3. Una partícula alfa consiste en dos protones ($q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ C) y dos neutrones (sin carga). ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre dos partículas alfa separadas 2 mm entre sí? Resp. 2.30×10^{-10} N

23.4. Suponga que el radio de la órbita del electrón alrededor del protón, en un átomo de hidrógeno, es de 5.2×10^{-11} m aproximadamente. ¿Cuál es la fuerza electrostática de atracción?

23.5. ¿Cuál es la separación de dos cargas de -4 μC si la fuerza de repulsión entre ellas es 200 N? Resp. 26.8 mm

23.6. Dos cargas idénticas separadas 30 mm son sujetas a una fuerza de repulsión de 980 N. ¿Cuál es la magnitud de cada carga?

***23.7.** Una carga de 10 μC y una carga de -6 μC están separadas 40 mm. ¿Qué fuerza existe entre ellas? Las esferas se ponen en contacto unos cuantos segundos y luego se separan de nuevo 40 mm. ¿Cuál es la nueva fuerza? ¿Es de atracción o de repulsión? Resp. 338 N, de atracción; 5.62 N, de repulsión

***23.8.** Dos cargas puntuales se atraen inicialmente entre sí con una fuerza de 600 N. Si su separación se reduce a un tercio de su valor original, ¿cuál es la nueva fuerza de atracción?

23.9. Una carga de $+60$ μC se coloca 60 mm a la izquierda de una carga de $+20$ μC. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga de -35 μC colocada en el punto medio entre las dos cargas? Resp. 1.40×10^4 N, izquierda

23.10. Una carga puntual de $+36$ μC se coloca 80 mm a la izquierda de una segunda carga puntual de -22 μC. ¿Qué fuerza se ejerce sobre una tercera carga de $+10$ μC colocada en el punto medio?

23.11. En el problema 23.10, ¿cuál es la fuerza resultante sobre una tercera carga de $+12$ μC colocada entre las otras cargas y a 60 mm de la carga de $+36$ μC? Resp. 7020 N, derecha

23.12. Una carga de $+6$ μC está 44 mm a la derecha de una carga de -8 μC. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga de -2 μC que se encuentra 20 mm a la derecha de la carga de -8 μC?

***23.13.** Una carga de 64 μC está colocada 30 cm a la izquierda de una carga de 16 μC. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga de -12 μC localizada exactamente 50 mm debajo de la carga 16 μC? Resp. 2650 N, 113.3°

***23.14.** Una carga de $+60$ nC se localiza 80 mm arriba de una carga de -40 nC. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga de -50 nC colocada 45 mm a la derecha de la carga de -40 nC en dirección horizontal?

***23.15.** Tres cargas puntuales, $q_1 = +8$ μC, $q_2 = -4$ μC y $q_3 = +2$ μC, se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero, que mide 80 mm por cada lado. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre la carga de $+8$ μC? Resp. 39 N, 330°

Problemas adicionales

23.16. ¿Cuál debe ser la separación entre dos cargas de $+5$ μC para que la fuerza de repulsión sea de 4 N?

23.17. La fuerza de repulsión entre dos esferas de médula de saúco es de 60 μN. Si cada esfera de médula de saúco tiene una carga de 8 nC, ¿cuál es la separación entre ellas? Resp. 98 mm

23.18. Dos cargas desconocidas idénticas se encuentran sometidas a una fuerza de repulsión recíproca de 48 N cuando la distancia que las separa es de 60 mm. ¿Cuál es la magnitud de cada carga?

23.19. Un objeto contiene un exceso de 5×10^{14} electrones y otro tiene una deficiencia de 4×10^{14} electrones. ¿Cuál es la fuerza que cada uno ejerce sobre el otro si están a 30 mm de distancia entre sí? ¿Se trata de atracción o de repulsión? Resp. 5.12×10^4 N; atracción

23.20. Si fuera posible colocar 1 C de carga en cada una de dos esferas separadas por una distancia de 1 m, ¿cuál sería la fuerza de repulsión en newtons?

23.21. ¿Cuántos electrones es necesario colocar en cada una de dos esferas, separadas entre sí 4 mm, para producir una fuerza de repulsión de 400 N entre ellas? Resp. 5.27×10^{12} electrones

23.22. Una carga de -40 nC se coloca 40 mm a la izquierda de una carga de $+6$ nC. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga de -12 nC colocada 8 mm a la derecha de la carga de $+6$ nC?

23.23. Una carga de 5 μC se localiza 6 cm a la derecha de una carga de 2 μC. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre una carga de −9 nC colocada 2 m a la izquierda de la carga de 2 μC? Resp. 468 mN, derecha

23.24. El mismo número de electrones se coloca en dos esferas de metal separadas 3.0 cm en el aire. ¿Cuántos electrones hay en cada esfera si la fuerza resultante es de 4500 N?

23.25. Una carga de 4 nC se coloca sobre una esfera de 4 g que puede moverse libremente. Una carga puntual fija de 10 μC está a 4 cm de distancia. ¿Cuál es la aceleración inicial de la carga de 4 μC? Resp. 56.25 m/s^2

***23.26.** Calcule la fuerza resultante sobre una carga de +2 μC localizada a 60 mm de distancia de cada una de dos cargas de −4 μC separadas entre sí 80 mm en el aire.

***23.27.** Dos cargas de +25 y +16 μC están separadas por una distancia de 80 mm. Una tercera carga de +60 μC se coloca entre las otras cargas a 30 mm de la carga de +25 μC. Calcule la fuerza resultante sobre la tercera carga. Resp. 1.15×10^4 N

***23.28.** Una esfera de médula de saúco de 0.02 g está suspendida libremente. Se le imparte una carga de +20 μC y se coloca a 0.6 m de una carga de +50 μC. ¿Cuál será la aceleración inicial de la esfera de médula?

***23.29.** Una carga de 4 μC se localiza a 6 cm de una carga de 8 μC. ¿En qué punto de la recta que une las dos cargas tendrá la fuerza resultante el valor de cero? Resp. 2.49 cm de la carga de 4 μC

***23.30.** Una carga de +8 nC se coloca 40 mm a la izquierda de una carga de −14 nC. ¿Dónde se debe colocar una tercera carga para que ésta quede sometida a una fuerza resultante de cero?

***23.31.** Una carga de +16 μC está 80 mm a la derecha de una carga de +9 μC. ¿Dónde se deberá colocar una tercera carga para que la fuerza resultante sea cero? Resp. 34.3 mm a la derecha de la carga de 9 μC

***23.32.** Dos esferas de 3 g están suspendidas de un mismo punto mediante dos hilos delgados de seda de 80 mm con masa insignificante. ¿Qué carga habrá que colocar en cada esfera para que estén separadas en sus posiciones finales por una distancia de 50 mm?

Preguntas para la reflexión crítica

***23.33.** A una pequeña esfera de metal se le imparte una carga de +40 μC y a una segunda esfera colocada a 8 cm de distancia se le imparte una carga de −12 μC. ¿Cuál es la fuerza de atracción entre ambas? Si se permite que las dos esferas se toquen y luego se vuelven a separar 8 cm, ¿qué nueva fuerza eléctrica existe entre ellas? ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión? Resp. 675 N, atracción; 276 N, de repulsión

***23.34.** La carga total sobre dos esferas de metal separadas 50 mm es de 80 μC. Si se repelen entre sí con una fuerza de 800 N, ¿cuál es la carga en cada esfera?

***23.35.** Cuatro esferas pequeñas se colocan en las esquinas de un cuadrado cuyos lados tienen 6 cm de longitud, y a cada una de ellas se aplican cargas de $q = +20$ μC. Demuestre que la fuerza resultante en cada carga tiene una magnitud igual a 1914 N. ¿Cuál es la dirección de la fuerza? ¿Qué cambiaría si cada una de las cargas fuera de $q = -20$ μC? Resp. 1914 N, se alejarían 45° del centro

***23.36.** Dos cargas q_1 y q_2 están separadas por una distancia r. A esta distancia se ejerce sobre ellas una fuerza F. Si la separación inicial disminuye en sólo 40 mm, la fuerza entre las dos cargas se duplica. ¿Cuál era la distancia inicial?

***23.37.** Dos esferas de médula de saúco de 8 g están suspendidas de hilos de seda de 60 cm de longitud, atados a un mismo punto. Cuando a las esferas se les imparten cantidades iguales de carga negativa, éstas se separan y quedan en reposo a 30 cm una de otra. Calcule la magnitud de la carga en cada esfera de médula. Resp. −450 nC

24 El campo eléctrico




Las ventanas inteligentes pueden cambiar una vista clara y transparente en una neblinosa e incluso oscura con sólo encender un interruptor. Partículas diminutas, conocidas como dispositivos de partículas suspendidas, se colocan en medio de dos paneles transparentes de material conductor. Al activar un campo eléctrico entre los paneles las partículas se alinean en línea recta, lo que permite a la luz pasar por ellas. Al inactivar el campo las partículas vuelven a tomar su orientación aleatoria y bloquean la luz. (*Cortesía de Switchlite Privacy Glass®, Saint-Gobian Glass Exprover.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá el *campo eléctrico* y explicará qué factores determinan su magnitud y su dirección.
2. Escribirá y aplicará una expresión que relacione la intensidad del campo eléctrico en un punto con la(s) distancia(s) de la(s) carga(s) conocida(s).
3. Explicará e ilustrará el concepto de líneas del campo eléctrico y analizará las dos reglas que deben seguirse para construirlas.
4. Explicará el concepto de *permitividad* de un *medio* y cómo afecta la intensidad del campo y la construcción de líneas del campo.
5. Escribirá y aplicará la *ley de Gauss* a los campos eléctricos que se forman alrededor de las superficies cuya densidad de carga es conocida.

En nuestro estudio de la mecánica analizamos con profundidad la fuerza y el movimiento. Las leyes de Newton sobre el movimiento se usaron, en general, para describir la aplicación y las consecuencias de fuerzas por *contacto*. Un momento de reflexión sobre el universo como un todo nos convence de la enorme cantidad de objetos que *no* están en contacto.

Los proyectiles experimentan una fuerza hacia abajo que no puede ser explicada en términos de su interacción con partículas de aire; los planetas giran continuamente por el vacío que rodea al Sol; el mismo Sol es arrastrado a lo largo de una trayectoria elíptica por fuerzas que no hacen contacto con él. Incluso en el nivel atómico no hay "cuerdas" que mantengan a los electrones en sus órbitas alrededor del núcleo.

Si en realidad deseamos comprender nuestro universo debemos desarrollar leyes para predecir la magnitud y la dirección de las fuerzas que no se transmiten por contacto. Ya hemos estudiado dos de esas leyes:

1. Ley de Newton de la gravitación universal:

$$F_g = G\frac{m_1m_2}{r^2} \tag{24.1}$$

2. Ley de Coulomb para fuerzas electrostáticas:

$$F_e = k\frac{q_1q_2}{r^2} \tag{24.2}$$

La ley de Newton predice la fuerza que existe entre dos masas separadas por una distancia r; la ley de Coulomb se refiere a la fuerza electrostática, como se estudió en el capítulo 23. Al aplicar ambas leyes conviene comprender ciertas propiedades del espacio que rodea las masas o las cargas.

24.1 Concepto de campo

FÍSICA HOY

Nuestro corazón utiliza un potencial eléctrico para que lata el músculo cardiaco, el cual bombea la sangre por todo el cuerpo. Este potencial crea un campo eléctrico, que puede ser vigilado por medio de un electrocardiograma (ECG).

Tanto el campo eléctrico como la fuerza gravitacional son ejemplos de *fuerzas de acción a distancia*, las cuales resultan extremadamente difíciles de visualizar. Para superar esta dificultad, los físicos de la antigüedad postularon la existencia de un material invisible, al que llamaron *éter*, que supuestamente llenaba todo el espacio. La fuerza de atracción gravitacional podía deberse entonces a esfuerzos en el éter causados por la presencia de diversas masas. Ciertos experimentos de óptica han demostrado que la teoría del éter es insostenible, lo que nos ha obligado a considerar si el espacio en sí mismo tiene propiedades interesantes para el físico.

Se puede afirmar que la sola presencia de una masa altera el espacio que la rodea, y de ese modo produce una fuerza gravitacional sobre otra masa cercana. Esta alteración en el espacio se describe mediante la introducción del concepto de un *campo gravitacional* que rodea a todas las masas. Se puede decir que ese tipo de campo existe en cualquier región del espacio donde una masa de prueba experimentará una fuerza gravitacional. La intensidad del campo en cualquier punto sería proporcional a la fuerza que experimenta una masa dada en ese punto. Por ejemplo, en cada punto en la proximidad de la Tierra, el campo gravitacional podría representarse cuantitativamente con

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{24.3}$$

donde $\mathbf{g}$ = aceleración debida a la fuerza de gravedad
$\mathbf{F}$ = fuerza gravitacional
m = masa de prueba (véase la figura 24.1)

Si $\mathbf{g}$ se conoce en cada punto sobre la Tierra, la fuerza $\mathbf{F}$ que actuará sobre una masa m dada, situada en ese punto, puede determinarse con la ecuación (24.3).

Es posible aplicar, asimismo, el concepto de campo a los objetos cargados eléctricamente. El espacio que rodea a un objeto cargado se altera en presencia de la carga. Podemos postular la existencia de un ***campo eléctrico*** en este espacio.

Se dice que existe un campo eléctrico en una región de espacio en la que una carga eléctrica experimenta una fuerza eléctrica.

Esta definición proporciona una prueba de la existencia de un campo eléctrico. Basta colocar una carga en ese punto. Si se observa una fuerza eléctrica, existe un campo eléctrico en ese punto.

Del mismo modo que la fuerza por unidad de masa constituye una definición cuantitativa de un campo gravitacional, la intensidad de un campo eléctrico puede representarse mediante el concepto de fuerza por unidad de carga. La intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un punto se suele definir en términos de la fuerza $\mathbf{F}$ que experimenta una carga positiva pequeña $+q$

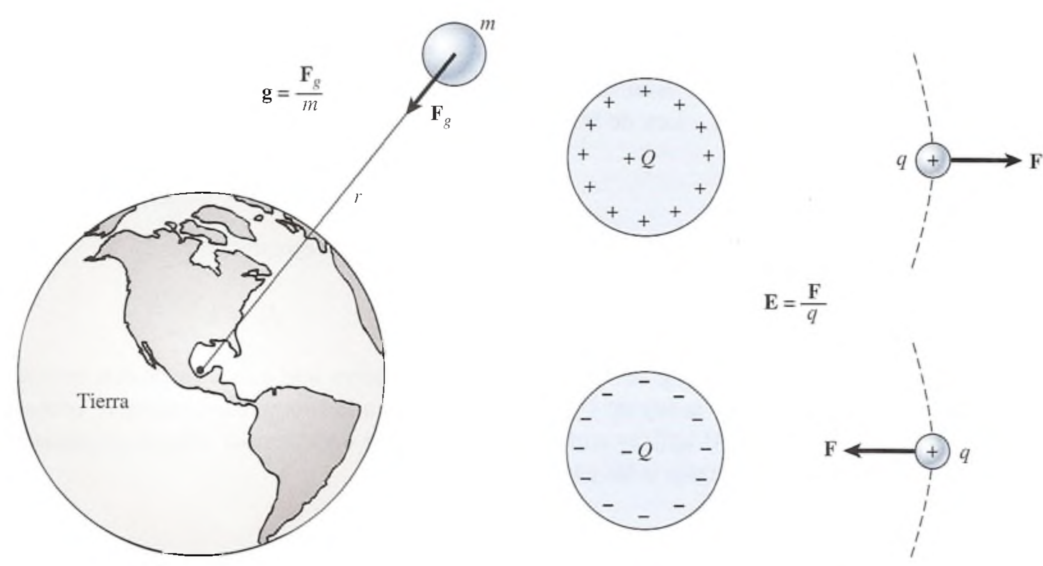


Figura 24.1 El campo gravitacional en cualquier punto sobre la Tierra puede representarse mediante la aceleración **g** que una pequeña masa m experimentaría si nos colocáramos en ese punto.

Figura 24.2 La dirección de la intensidad del campo eléctrico en un punto es la misma que la dirección en que una carga positiva $+q$ se movería cuando fuera colocada en ese punto. Su magnitud es la fuerza por unidad de carga (F/q).

cuando está colocada precisamente en ese punto (véase la figura 24.2). La magnitud de la intensidad del campo eléctrico está dada por

$$E = \frac{F}{q} \tag{24.4}$$

En el sistema métrico, una unidad de ***intensidad del campo eléctrico*** es el newton por coulomb (N/C). La utilidad de esta definición radica en que si se conoce el campo en un punto dado, podemos predecir la fuerza que actuará sobre cualquier carga situada en ese punto.

Puesto que la intensidad del campo eléctrico se define en términos de una carga *positiva*, su dirección en un punto cualquiera es la misma que correspondería a la fuerza electrostática sobre una carga positiva en ese mismo punto.

> La dirección de la intensidad del campo eléctrico **E** en un punto en el espacio es la misma que la dirección en la que una carga positiva se movería si se colocara en ese punto.

Sobre esta base, el campo eléctrico en la vecindad de una carga positiva $+Q$ sería hacia afuera, o alejándose de la carga, como se indica en la figura 24.3a. En la proximidad de una carga negativa $-Q$, la dirección del campo sería hacia dentro, o acercándose a la carga (figura 24.3b).

Cabe recordar que la intensidad del campo eléctrico es una propiedad asignada al *espacio* que rodea a un cuerpo cargado. Alrededor de la Tierra existe un campo gravitacional, haya o no una masa colocada sobre ella. De forma similar, alrededor de un cuerpo cargado existe un campo eléctrico, haya o no una segunda carga localizada en el campo. Si una carga *se coloca* en el campo, experimentará una fuerza **F** dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{24.5}$$

donde $\mathbf{E}$ = intensidad del campo
q = magnitud de la carga colocada en el campo

Si q es positiva, **E** y **F** tendrán la misma dirección; si q es negativa, la fuerza **F** estará en dirección opuesta al campo **E**.

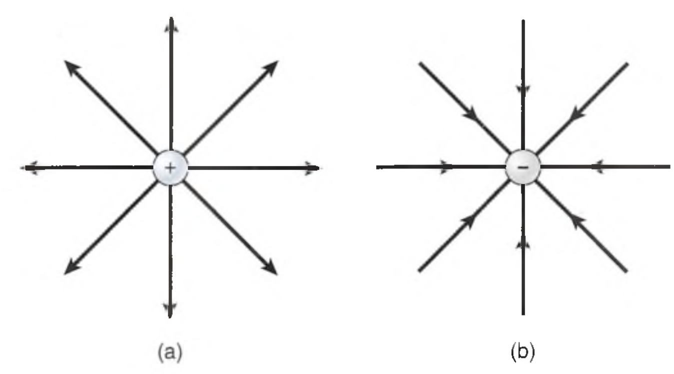


Figura 24.3 (a) El campo en la proximidad de una carga positiva tiene una dirección radial hacia fuera en cualquier punto. (b) El campo se dirige hacia dentro o hacia una carga negativa.

Ejemplo 24.1

La intensidad del campo eléctrico entre dos placas en la figura 24.4 es constante y está dirigida hacia abajo. La magnitud de la intensidad del campo eléctrico es 6×10^4 N/C. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica ejercida sobre un electrón proyectado horizontalmente entre las dos placas?

Plan: La dirección de la intensidad del campo **E** se define en términos de la fuerza sobre una carga de prueba positiva. La carga sobre un electrón es *negativa* ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C), lo que implica que la fuerza sobre el electrón es *hacia arriba* (opuesta a la dirección del campo). La intensidad del campo es la fuerza por unidad de carga, de modo que la magnitud de la fuerza será el producto q_eE.

Solución: Con base en la ecuación (24.5), la fuerza es

$$F = q_eE = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(6 \times 10^4\ \text{N/C})$$
$$= 9.6 \times 10^{-15}\ \text{N} \quad (\textit{hacia arriba})$$

Recuerde que se usa el valor absoluto de la carga. La *dirección* de la fuerza **F** sobre una carga positiva es la misma que la dirección de la intensidad del campo **E**; la fuerza sobre una carga negativa es *opuesta* al campo.

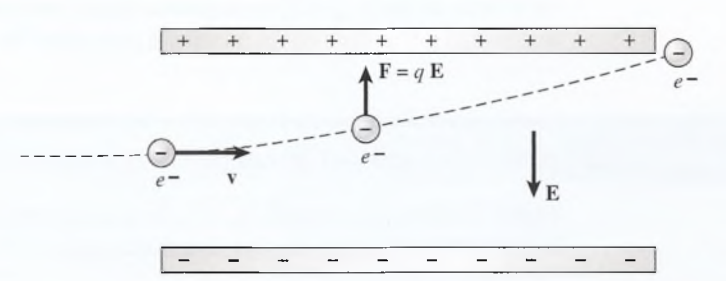


Figura 24.4 Un electrón proyectado en un campo eléctrico de intensidad constante.

Ejemplo 24.2

Puesto que la masa de un electrón es igual a 9.1×10^{-31} kg, demuestre que la fuerza gravitacional sobre el electrón del ejemplo 24.1 puede ser despreciada.

Plan: La fuerza gravitacional es *hacia abajo* y se debe al peso ($W = mg$) del electrón. Para determinar el efecto que esto tendrá en el movimiento del electrón debemos mirar si el peso es significante en comparación con la magnitud de la fuerza del campo eléctrico.

Solución: El peso equivale al producto de la masa del electrón por la gravedad

$$W = mg = (9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)$$
$$W = 8.92 \times 10^{-30}\ \text{N}$$

La fuerza eléctrica es mayor que la fuerza gravitacional por un factor de 1.08×10^{15} y sin duda puede despreciarse en este caso.

24.2 Cálculo de la intensidad del campo eléctrico

Hemos analizado un método para medir la magnitud de la intensidad del campo eléctrico en un punto en el espacio. Se coloca una carga conocida en ese punto y se mide la fuerza resultante. De este modo, la fuerza por unidad de carga es una medida de la intensidad del campo eléctrico en ese punto. La desventaja de este método es que no parece tener una relación clara con la carga Q que crea el campo. Mediante la experimentación se demuestra rápidamente que la magnitud del campo eléctrico que rodea a un cuerpo cargado es directamente proporcional a la cantidad de carga del cuerpo. También se puede demostrar que en los puntos que se alejan cada vez más de la carga Q, una carga de prueba q experimentará fuerzas cada vez menores. La relación exacta se deduce de la ley de Coulomb.

Suponga que deseamos calcular la intensidad del campo E a una distancia r de una sola carga Q, como se muestra en la figura 24.5. La fuerza F que ejerce Q sobre la carga de prueba q en ese punto es, a partir de la ley de Coulomb,

$$F = \frac{kQq}{r^2} \tag{24.6}$$

Sustituyendo este valor de F en la ecuación (24.4) se obtiene

$$E = \frac{F}{q} = \frac{kQq/r^2}{q}$$

$$E = \frac{kQ}{r^2} \tag{24.7}$$

donde k es igual a $9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. La dirección del campo se aleja de Q si Q es positiva y, viceversa, es hacia Q si Q es negativa. Ahora tenemos una relación que nos permite calcular la intensidad del campo en un punto sin necesidad de colocar una segunda carga en ese punto.

Ejemplo 24.3 ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico a una distancia de 2 m de una carga de $-12\ \mu\text{C}$?

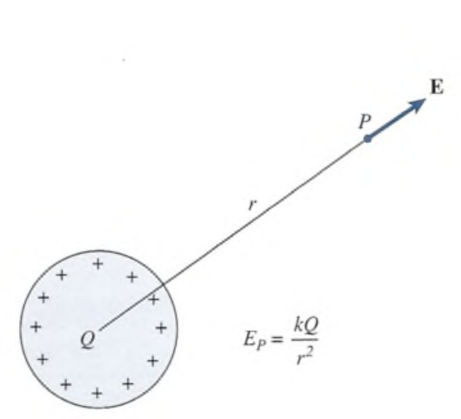
Plan: La carga Q es negativa, así que la dirección del campo será radialmente hacia dentro, hacia la carga. La magnitud se determina con la ecuación (24.7). Use unidades congruentes.

Solución: Al sustituir $r = 0.002$ m y $Q = 12 \times 10^{-6}$ C se obtiene

$$E = \frac{kQ}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.02\ \text{m})^2}$$
$$E = 2.70 \times 10^8\ \text{N/C, hacia } Q$$

Cuando más de una carga contribuye al campo, como en la figura 24.6, el campo resultante es la suma vectorial de las contribuciones de cada carga consideradas independientemente.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots \qquad \textit{Suma vectorial} \tag{24.8}$$



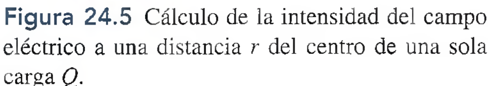


Figura 24.5 Cálculo de la intensidad del campo eléctrico a una distancia r del centro de una sola carga Q.

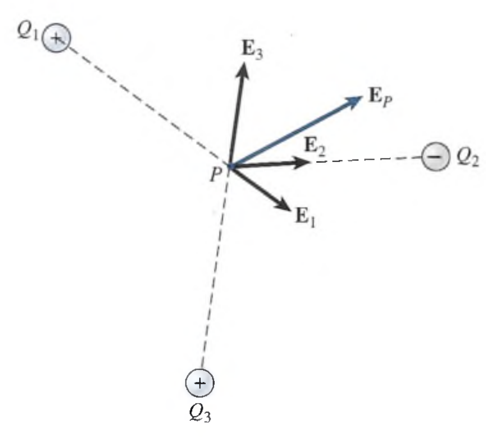


Figura 24.6 El campo en la proximidad de varias cargas es igual a la suma vectorial de los campos debido a las cargas individuales.

La dirección de cada campo se determina considerando la fuerza que experimentaría una carga de prueba positiva en el punto de que se trata; por su parte, la magnitud del campo se halla con la ecuación (24.7). La intensidad eléctrica resultante se calcula entonces mediante el método de componentes de la suma de vectores.

Ejemplo 24.4

Dos cargas puntuales, $q_1 = -6$ nC y $q_2 = +8$ nC, están separadas por una distancia de 12 cm, como se muestra en la figura 24.7. A partir de los datos indicados en esta figura, determine el campo eléctrico (a) en el punto A y (b) en el punto B.

Plan: La intensidad del campo eléctrico es una propiedad del *espacio*. En este ejemplo no hay carga en el punto A ni en el B. Para determinar la dirección del campo en cualquiera de esos puntos debemos imaginar que una pequeña carga positiva de prueba es colocada en el punto y luego convenir que el campo tiene la misma dirección que la fuerza sobre esa carga de prueba. Con base en la figura, se advierte que el campo $\mathbf{E}_1$ en el punto A debido a la carga de -6nC se dirige a la izquierda y que el campo $\mathbf{E}_2$ debido a la carga de $+8$ nC tiene también tal dirección. En ambos casos, ésta es la forma en que se movería una carga de prueba positiva si se colocase en el punto A. La magnitud de cada campo se obtiene al aplicar la ecuación (24.7) y la suma vectorial producirá la intensidad del campo resultante en A. Un razonamiento similar dará el campo en el punto B. Sin embargo, los cálculos son más complejos debido al ángulo de 37° para el vector $\mathbf{E}_2$.

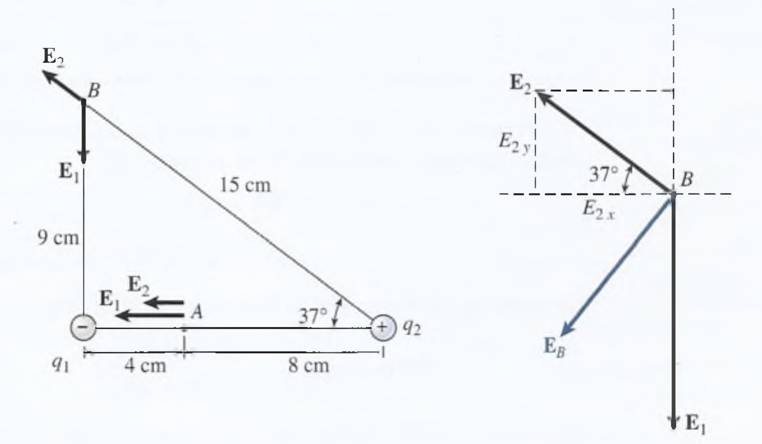


Figura 24.7

Solución (a): El campo $\mathbf{E}_1$ en el punto A debido a q_1 tiene dirección a la *izquierda*. Su magnitud es

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(0.04\ \text{m})^2}$$
$$= 3.38 \times 10^4\ \text{N/C, a la izquierda}$$

Recuerde que el signo de la carga determina la dirección del campo que el signo negativo no se usa al calcular la *magnitud* del campo.

El campo eléctrico $\mathbf{E}_2$ en el punto A debido a q_2 se dirige a la *izquierda* y es igual a

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(0.08\ \text{m})^2}$$
$$= 1.12 \times 10^4\ \text{N/C, a la izquierda}$$

Puesto que los dos vectores, $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$, tienen la misma dirección a la izquierda, el vector resultante es la simple suma de sus magnitudes. Si consideramos negativa la dirección a la izquierda se tiene que

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -3.38 \times 10^4\ \text{N/C} - 1.12 \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$= -4.50 \times 10^4\ \text{N/C (con dirección a la izquierda)}$$

Solución (b): La intensidad del campo $\mathbf{E}_1$ en B debida a q_1 se dirige *hacia abajo* y es igual a

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(0.09\ \text{m})^2}$$
$$= 6.67 \times 10^3\ \text{N/C, hacia abajo}$$

El campo $\mathbf{E}_2$ en B debido a q_2 se *aleja* de q_2 en un ángulo de 37° N del O y está dado por

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(0.15\ \text{m})^2}$$
$$= 3.20 \times 10^3\ \text{N/C, 37° N del O}$$

En la tabla 24.1 se enumeran los componentes empleados para determinar el campo resultante en el punto B.

Tabla 24.1

Vector	Ángulo ϕ_x	Componente en x	Componente en y
$E_1 = 6.67$ kN/C	90°	$E_{1x} = 0$	$E_{1y} = -6.67$ kN/C
$E_2 = 3.20$ kN/C	37°	$E_{2x} = -(3.20\ \text{kN/C})\cos 37°$ $= -2.56$ kN/C	$E_{2y} = (3.20\ \text{kN/C})\ \text{sen}\ 37°$ $= 1.93$ kN/C
E	θ	$E_x = \Sigma E_x = -2.56$ kN/C	$E_y = \Sigma E_y = -4.74$ kN/C

A partir de la figura 24.7, se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la magnitud del campo eléctrico resultante $\mathbf{E}$ en el punto B.

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$
$$= \sqrt{(2.56\ \text{kN/C})^2 + (4.74\ \text{kN/C})^2} = 5.39\ \text{kN/C}$$

En seguida, la dirección se determina con la función tangente

$$\tan\phi = \left|\frac{E_y}{E_x}\right| = \left|\frac{4.74\ \text{kN/C}}{2.56\ \text{kN/C}}\right| \quad \text{y} \quad \phi = 61.6° \text{ al S del O}$$

Por consiguiente, la intensidad del campo eléctrico que resulta en el punto B es de 5.39 kN/C con dirección 61.6° al S del O.

Estrategia para resolver problemas

Campos eléctricos

1. Lea el problema, luego trace una figura y escriba en ella las leyendas pertinentes. Indique las cargas positivas y negativas a lo largo de las distancias dadas. Las cargas deber expresarse en *coulombs* y las distancias en *metros*. Recuerde que $1\ \mu C = 1 \times 10^{-6}$ C y $1\ nC = 1 \times 10^{-9}$ C.
2. Recuerde que el campo eléctrico **E** es una propiedad del *espacio* que nos permite determinar la fuerza **F** que una carga unitaria positiva *q* experimentaría *si* estuviera colocada en un punto determinado del espacio. El campo existe en un *punto* en el espacio independientemente de si esa carga está colocada o no en ese punto.
3. La magnitud del campo eléctrico debido a una sola carga está dada por:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \qquad k = 9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

4. Como se estudió para las fuerzas, debe tenerse cuidado de no confundir la naturaleza de una carga (+ o −) con el signo asignado a los campos eléctricos o a sus componentes. La dirección del campo **E** en un punto determinado coincide con la dirección en la que se movería una carga de prueba *positiva* si se le colocara en ese punto.
5. El *campo eléctrico resultante* debido a cierto número de cargas se determina mediante la suma vectorial de los campos eléctricos debidos a cada carga considerada en forma independiente. Construya un diagrama de cuerpo libre y realice la suma vectorial por el método de las componentes.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots \qquad \textit{Suma vectorial}$$

24.3 Líneas del campo eléctrico

En sus primeras investigaciones sobre el electromagnetismo, Michael Faraday (1791-1867) desarrolló un ingenioso sistema para observar los campos eléctricos, el cual consiste en representar tanto la intensidad como la dirección de un campo mediante líneas imaginarias denominadas ***líneas del campo eléctrico***.

> Las líneas del campo eléctrico son líneas imaginarias trazadas de tal manera que su dirección en cualquier punto es la misma que la dirección del campo eléctrico en ese punto.

Por ejemplo, las líneas trazadas radialmente hacia fuera de la carga positiva en la figura 24.3a representan la dirección del campo en cualquier punto sobre la línea. Las líneas eléctricas próximas a una carga negativa tendrían una forma radial hacia dentro y estarían dirigidas hacia la carga, como se advierte en la figura 24-3b. Después veremos que la densidad de estas líneas en cualquier región del espacio es una medida de la *magnitud* de la intensidad del campo en esa región.

En general, la dirección del campo eléctrico en una región del espacio varía de un lugar a otro; por tanto, normalmente las líneas eléctricas son curvas. Por ejemplo, consideremos la construcción de una línea del campo eléctrico en la región situada entre una carga positiva y una negativa, como se ilustra en la figura 24.8.

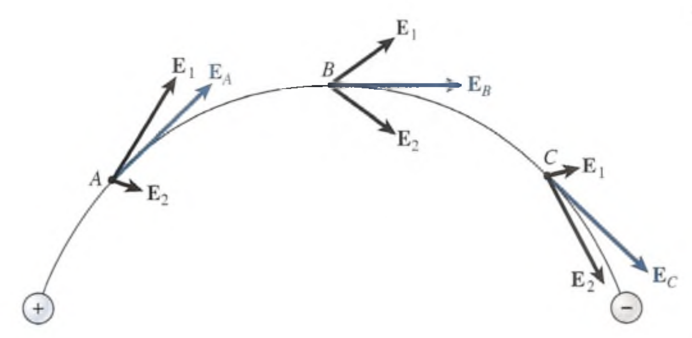


Figura 24.8 La dirección de una línea del campo eléctrico es la misma que la dirección de la intensidad del campo eléctrico resultante en ese punto.

(a) (b)

Figura 24.9 (a) Diagrama de las líneas del campo eléctrico en la región que rodea dos cargas opuestas. (b) Las líneas del campo entre dos cargas positivas.

La dirección de la línea del campo eléctrico en cualquier punto es la misma que la del vector resultante del campo eléctrico en ese punto. Deben seguirse dos reglas al construir líneas del campo eléctrico:

1. La dirección de la línea del campo en cualquier punto es la misma que la dirección en la que se movería una carga positiva si estuviera colocada en ese punto.
2. La separación entre las líneas del campo debe ser tal que estén más cercanas cuando el campo sea fuerte y más alejadas cuando el campo sea débil.

Siguiendo estas reglas generales es posible construir líneas del campo eléctrico para los dos casos comunes representados en la figura 24.9. Como consecuencia de la forma en que se trazan las líneas eléctricas *siempre saldrán cargas positivas y entrarán cargas negativas*. Ninguna línea puede originarse o terminar en el espacio, aunque un extremo de una línea eléctrica puede extenderse hasta el infinito.

24.4 Ley de Gauss

Para cualquier distribución de carga podemos dibujar un número infinito de líneas eléctricas. Es claro que si la separación entre las líneas será una indicación estándar de la intensidad del campo, debemos establecer un límite al número de líneas trazadas para cada situación. Por ejemplo, consideremos las líneas del campo dirigidas radialmente hacia fuera a partir de una carga puntual positiva (véase la figura 24.10). Usaremos la letra N para representar el número de líneas trazadas. Ahora imaginemos que una superficie esférica rodea la carga puntual a una distancia r de la carga. La intensidad del campo en cualquier punto de una esfera así estaría dada por



$$E = \frac{kq}{r^2} \qquad \textbf{(24.9)}$$



Figura 24.10 La intensidad del campo eléctrico a una distancia r de las cargas puntuales es directamente proporcional al número de líneas ΔN que penetran por unidad ΔA de una superficie esférica construida en esa distancia.

Partiendo de la forma en que se trazan las líneas del campo también podemos decir que el campo en una pequeña porción de su área ΔA es proporcional al número de líneas ΔN que penetran en esa área. En otras palabras, la densidad de líneas del campo (líneas por unidad de área) es directamente proporcional a la intensidad del campo. Simbólicamente,

$$\frac{\Delta N}{\Delta A} \propto E_n \qquad \textbf{(24.10)}$$

El subíndice n indica que el campo es normal al área superficial en todas partes. Esta proporcionalidad siempre es válida, independientemente del número total de líneas N que se pueden trazar. Sin embargo, una vez que se elige una constante de proporcionalidad para la ecuación (24-10), se establece automáticamente un límite para el número de líneas que pueden trazarse en cada situación. Se ha encontrado que la elección más conveniente para esta constante de espaciamiento es ϵ_0. Esto se conoce como ***permitividad del espacio libre*** y se define mediante la expresión

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)} \qquad \textbf{(24.11)}$$

donde $k = 9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$ de la ley de Coulomb. Entonces, la ecuación (24.10) puede escribirse como

$$\frac{\Delta N}{\Delta A} = \epsilon_0 E_n \qquad \textbf{(24.12)}$$

o bien

$$\Delta N = \epsilon_0 E_n \Delta A \qquad \textbf{(24.13)}$$

Cuando E_n es constante por toda la superficie, el número total de líneas que se dirigen radialmente hacia fuera de la carga encerrada es

$$N = \epsilon_0 E_n A \qquad \textbf{(24.14)}$$

Se puede notar que la elección de ϵ_0 es conveniente sustituyendo la ecuación (24.11) en la ecuación (24.9):

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (24.14) y recordando que el área de una superficie esférica es $A = 4\pi r^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} N &= \epsilon_0 E_n A \\ &= \frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = q \end{aligned}$$

La elección de ϵ_0 como la constante de proporcionalidad ha dado por resultado que *el número total de líneas que pasan normalmente a través de una superficie es numéricamente igual a la carga contenida dentro de la superficie.* Aunque este resultado se obtuvo usando una superficie esférica, se aplicará a cualquier otra superficie. El planteamiento más general de ese resultado se conoce como ***ley de Gauss:***

> El número total de líneas de fuerza eléctricas que cruzan cualquier superficie cerrada en dirección hacia fuera es numéricamente igual a la carga neta total contenida dentro de esa superficie.

$$N = \sum \epsilon_0 E_n A = \sum q \qquad \textit{Ley de Gauss} \qquad \textbf{(24-15)}$$

La ley de Gauss se utiliza para calcular la intensidad del campo cerca de las superficies de carga. Esto representa una clara ventaja sobre los métodos desarrollados anteriormente debido a que las ecuaciones anteriores se aplican sólo a cargas puntuales. La mejor forma de entender la aplicación de la ley de Gauss es mediante ejemplos.

24.5 Aplicaciones de la ley de Gauss

Puesto que la mayor parte de los conductores cargados tienen grandes cantidades de carga sobre ellos, no resulta práctico considerar las cargas en forma individual. Generalmente se habla de la ***densidad de carga*** σ, definida como la carga por unidad de área superficial.

$$\sigma = \frac{q}{A} \qquad q = \sigma A \qquad \textit{Densidad de carga} \qquad \textbf{(24-16)}$$

Ejemplo 24.5

Calcule cuál es la intensidad del campo eléctrico a una distancia r de una placa infinita de carga positiva, como se representa en la figura 24.11.

Plan: El propósito de aplicar la ley de Gauss es hallar una expresión que relacione el campo eléctrico con la densidad de carga σ. La aplicación de la ley de Gauss suele precisar la elaboración de una superficie geométrica imaginaria que recibe el nombre de ***superficie gaussiana***. La idea es encerrar una carga neta dentro de una superficie cuya geometría es de una simpleza tal que es posible determinar su área sin ningún problema. La elección de una superficie imaginaria está dictada por la forma del cuerpo cargado. En este ejemplo, una elección inteligente es una superficie cilíndrica que penetre en la placa de carga positiva de forma que se proyecte a una distancia r en cualquier lado de la placa. La carga total Σq encerrada por esta superficie debe equivaler a $\Sigma\epsilon_0 EA$ de acuerdo con la ley de Gauss, y usaremos este hecho para determinar una expresión para la intensidad el campo eléctrico a la distancia igual a r.

Solución: Puesto que el diámetro del cilindro es arbitrario, nos será práctico trabajar con la densidad de carga σ como la define la ecuación (24.16). El área A de cada extremo del cilindro es la misma que el área recortada sobre la placa de carga; por tanto, la carga total contenida dentro del cilindro está dada por

$$\sum q = \sigma A$$

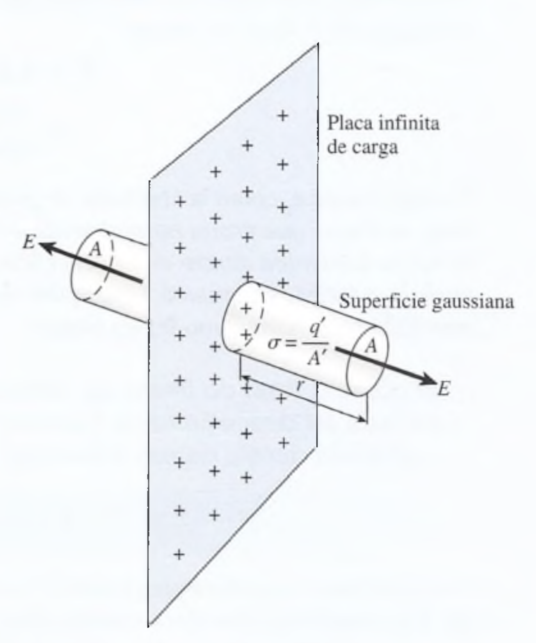
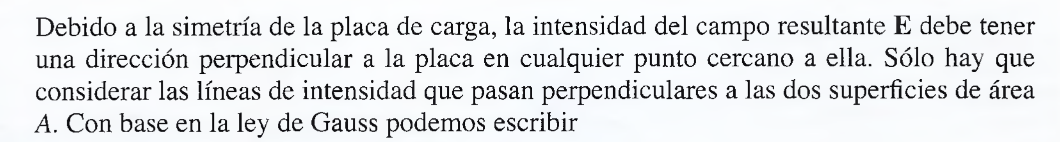


Figura 24.11 Cálculo del campo fuera de una placa infinita de carga positiva.



Debido a la simetría de la placa de carga, la intensidad del campo resultante **E** debe tener una dirección perpendicular a la placa en cualquier punto cercano a ella. Sólo hay que considerar las líneas de intensidad que pasan perpendiculares a las dos superficies de área A. Con base en la ley de Gauss podemos escribir

$$\sum \epsilon_0 EA = \sum q$$

$$\epsilon_0 EA + \epsilon_0 EA = \sigma A$$

$$2\epsilon_0 EA = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.17)}$$

Observe que la intensidad del campo **E** se aleja de la placa en ambos lados y es independiente de la distancia r a la placa.

Antes de suponer que el ejemplo de una placa de carga infinita es poco práctico, debe señalarse que el término *infinito*, en un sentido práctico, implica únicamente que las dimensiones de la placa exceden el punto de interacción eléctrica. En otras palabras, la ecuación (24.17) se aplica cuando el largo y el ancho de la placa son muy grandes en comparación con la distancia r a la placa.

Ejemplo 24.6

Demuestre, utilizando la ley de Gauss, que todo el exceso de carga se halla sobre la superficie de un conductor cargado.

Plan: Primero trazaremos una figura que represente un conductor cargado arbitrario, como el que se muestra en la figura 24.12. Dentro de un conductor así, las cargas tienen libertad de movimiento si experimentan una fuerza resultante. Puesto que cargas como éstas se repelen, podemos suponer con certeza que todas las cargas libres en un conductor llegarán tarde o temprano al reposo. En esta condición, la intensidad del campo eléctrico en el interior del conductor debe ser cero. Si no fuera así, las cargas se moverían. Luego construimos una superficie gaussiana dentro de la superficie del conductor, como aparece en la figura 24.12, y aplicamos la ley de Gauss.

Solución: Para demostrar que toda la carga se halla en la superficie escribimos

$$\sum \epsilon_0 EA = \sum q$$

Sustituyendo $E = 0$, encontramos también que $\Sigma q = 0$ o que ninguna carga está encerrada por esta superficie. Puesto que la superficie gaussiana puede dibujarse tan cerca del borde exterior del conductor como se quiera, concluimos que toda la carga reside sobre la superficie del conductor. Esta conclusión es válida, incluso si el conductor es hueco.

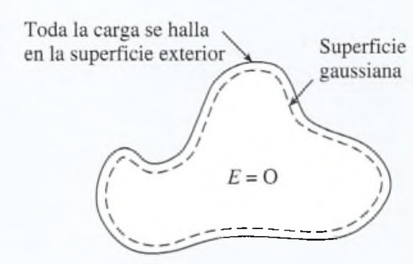


Figura 24.12 Con la ley de Gauss se demuestra que toda la carga se halla en la superficie de un conductor.

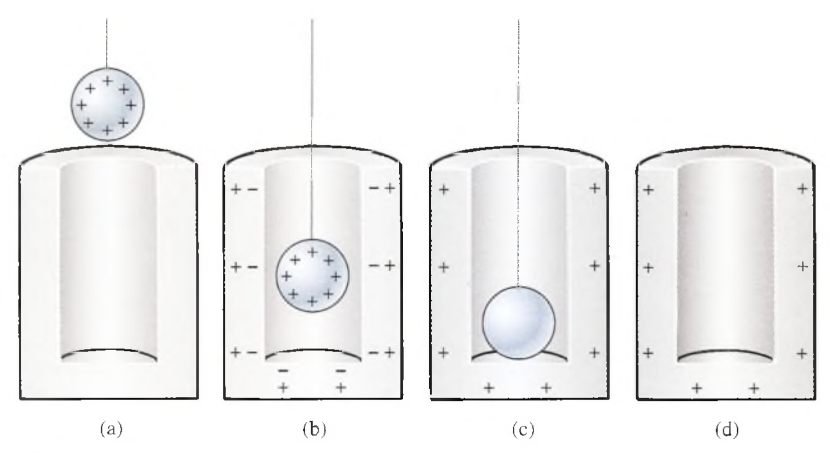


Figura 24.13 El experimento de Faraday demuestra la redistribución de la carga neta sobre las paredes del conductor metálico hueco.

Michael Faraday ideó un experimento interesante a fin de demostrar que la carga se halla en la superficie de un conductor hueco. En este experimento, una esfera cargada positivamente y sostenida con un hilo de seda se introduce en un conductor metálico hueco. Como se observa en la figura 24.13, se produce entonces una redistribución de carga sobre las paredes del conductor, atrayendo los electrones a la superficie interior. Cuando la esfera hace contacto con el fondo del conductor, la carga inducida se neutraliza y deja una carga positiva neta en la superficie exterior. Al realizar la prueba con el electroscopio se demostrará que ninguna carga reside en el interior del conductor y que la carga positiva neta permanece en la superficie exterior.

Ejemplo 24.7

Un *condensador* es un dispositivo electrostático que consta de dos conductores de área A separados por una distancia d (véase la figura 24.14). Si se colocan sobre los conductores cargas iguales y opuestas, habrá un campo eléctrico **E** entre ellos. Deduzca una expresión para calcular el campo eléctrico en términos de la densidad sobre las placas.

Plan: Se construye un cilindro gaussiano, como el que aparece en la figura 24.14, para la superficie interior de cualquier placa. No hay ningún campo en el interior de la placa conductora y la única área donde penetran las líneas del campo es la superficie A', que se proyecta hacia el espacio entre las placas. Podemos aplicar la ley de Gauss a cualquier placa para deducir una expresión para la intensidad el campo eléctrico.

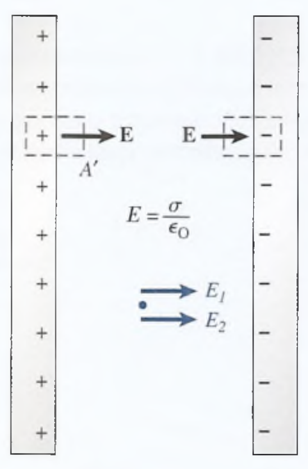


Figura 24.14 Campo eléctrico en la región que se halla entre dos placas con cargas opuestas e iguales a la razón de la densidad de carga σ a la permitividad ϵ_0.

Solución: Reconociendo que $\Sigma q = \sigma A'$ se resuelve para E como sigue:

$$\sum \epsilon_0 EA = \sum q$$
$$\epsilon_0 EA' = \sigma A'$$
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.18)}$$

El mismo resultado se obtendría si se usara el cilindro gaussiano de la derecha. En ese caso, las líneas se dirigirían hacia dentro, lo que indicaría que la carga encerrada es *negativa*.

Observe que el campo entre las dos placas del ejemplo 24.7 es exactamente del doble que el campo debido a una placa delgada de carga, como lo indica la ecuación (24.17). Se puede entender esta relación si se considera que el campo **E** entre las placas es una superposición de los campos formados por la presencia de dos láminas con cargas opuestas.

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

El campo $\mathbf{E}_1$ generado por la placa de carga positiva sigue la misma dirección que el campo $\mathbf{E}_2$ debido a la placa de carga negativa. En la *parte externa* de las dos placas a la izquierda o a la derecha $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ tienen una dirección opuesta y se calculan, lo que hace que la intensidad del campo resultante fuera de las placas sea igual a cero.

Resumen y repaso

Resumen

El concepto de campo eléctrico fue expuesto aquí para describir la región que rodea a una carga eléctrica. Su magnitud se determina por la fuerza que una carga unitaria experimentará en una posición específica y su dirección es la misma que la de la fuerza de una carga positiva en ese punto. Las líneas del campo eléctrico fueron postuladas para dar una imagen visual de los campos eléctricos, y la densidad de esas líneas del campo es un indicio de la intensidad del campo eléctrico. A continuación se resumen los principales conceptos que han de recordarse.

- Se dice que existe un *campo eléctrico* en una región del espacio en la que una carga eléctrica experimentará una fuerza eléctrica. La *magnitud* de la intensidad del campo eléctrico E está determinada por la fuerza F por unidad de carga q.

$$E = \frac{F}{q} \qquad E = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)Q}{r^2}$$

  La unidad métrica para la intensidad del campo eléctrico es el newton por coulomb (N/C). En la ecuación anterior r es la distancia que va de la carga Q al punto de que se trata.

- La intensidad del campo resultante en un punto ubicado en la proximidad de un número de cargas es la suma *vectorial* de las aportaciones que hacen todas las cargas.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots \qquad E = \sum \frac{kQ}{r^2}$$

Suma vectorial

  Cabe insistir en que en este caso se trata de una suma vectorial y no de una suma algebraica. Una vez determinados la magnitud y la dirección de cada vector, la resultante se encuentra a partir de la mecánica vectorial.

- La permitividad del espacio libre ϵ_0 es una constante fundamental que se define así:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

Permitividad

- La ley de Gauss establece que el número neto de líneas del campo eléctrico que cruza cualquier superficie cerrada en dirección hacia fuera es numéricamente igual a la carga total neta dentro de esa superficie.

$$N = \sum \epsilon_0 E_n A = \sum q \qquad \textit{Ley de Gauss}$$

- En las aplicaciones de la ley de Gauss, el concepto de densidad de carga σ como la carga q por unidad de área superficial A se utiliza con frecuencia:

$$\sigma = \frac{q}{A} \qquad q = \sigma A \qquad \textit{Densidad de carga}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

24.1. Algunos textos se refieren a las líneas del campo eléctrico como "líneas de fuerza". Comente si es conveniente esa descripción.

24.2. ¿Puede existir un campo eléctrico en una región del espacio donde una carga eléctrica no estaría sujeta a una fuerza? Explique su respuesta.

24.3. ¿Es necesario colocar una carga en un punto para que exista un campo eléctrico en ese punto? Explique su respuesta.

24.4. Con un procedimiento similar al aplicado para los campos eléctricos, demuestre que la aceleración gravitacional se puede calcular a partir de

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

donde M = masa de la Tierra
r = distancia al centro de la Tierra

24.5. Comente las semejanzas entre los campos eléctricos y los gravitacionales. ¿En qué aspecto son diferentes?

24.6. En la ley de Gauss se eligió la constante ϵ_0 como el factor de proporcionalidad entre la densidad de línea y la intensidad del campo. En sentido teórico, ésta fue una elección acertada porque nos lleva a la conclusión de que el número total de líneas es igual a la carga allí contenida. ¿Resulta práctica esa elección para ilustrar gráficamente las líneas del campo? Según la relación de Gauss, ¿cuántas líneas del campo emanarían de una carga de 1 C?

24.7. Justifique el enunciado siguiente: La intensidad del campo eléctrico sobre la superficie de cualquier conductor cargado debe ir en dirección perpendicular a la superficie.

24.8. Las líneas del campo eléctrico nunca se cruzan entre sí. Explíquelo.

24.9. Supongamos que se conecta un electroscopio a la superficie exterior de una cubeta de hielo de Faraday. Muestre gráficamente qué sucederá con la hoja de oro en cada uno de los pasos ilustrados en la figura 24.13.

24.10. ¿Es posible que una línea del campo eléctrico empiece y termine en el mismo conductor? Comente su respuesta.

24.11. ¿Qué forma adoptaría la ley de Gauss si hubiéramos elegido k como constante de proporcionalidad en vez de la permitividad ϵ_0?

24.12. En la ley de Gauss, demuestre que las unidades de $\epsilon_0 EA$ son dimensionalmente equivalentes a las unidades de carga.

24.13. Demuestre que el campo en la región que está fuera de las dos placas paralelas en la figura 24.14 es igual a cero.

24.14. ¿Por qué la intensidad del campo es constante en la región comprendida entre dos placas cargadas con signo opuesto? Trace un diagrama vectorial del campo que corresponde a cada placa en diversos puntos entre las placas.

Problemas

Sección 24.1 El concepto de campo

24.1. Una carga de $+2\ \mu C$ colocada en un punto P en un campo eléctrico experimenta una fuerza descendente de 8×10^{-4} N. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en ese punto?
Resp. 400 N/C, hacia abajo

24.2. Una carga de -5 nC está colocada en el punto P del problema 24.1. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza sobre la carga de -5 nC?

24.3. Una carga de $-3\ \mu C$ colocada en el punto A experimenta una fuerza descendente de 6×10^{-5} N. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en el punto A?
Resp. 20 N/C, hacia arriba

24.4. En un punto determinado, la intensidad del campo eléctrico es de 40 N/C en dirección al Este. Una carga desconocida recibe una fuerza hacia el Oeste de 5×10^{-5} N. ¿Cuál es la naturaleza y la magnitud de la carga?

24.5. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza que actuaría sobre un electrón ($q = -1.6 \times 10^{-19}$ C) si éste se ubicara en (a) el punto P del problema 24.1?, ¿o (b) en el punto A del problema 24.3?
Resp. (a) 6.40×10^{-17} N, hacia arriba, (b) 3.20×10^{-18} N, hacia abajo

24.6. ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de la intensidad del campo eléctrico entre dos placas horizontales para producir una fuerza ascendente de 6×10^{-4} N sobre una carga de $+60\ \mu C$?

24.7. El campo eléctrico uniforme entre dos placas horizontales es 8×10^4 C. La placa superior está cargada positivamente y la inferior tiene una carga negativa equivalente. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica que actúa sobre un electrón que pasa horizontalmente a través de las placas?
Resp. 1.28×10^{-14} N, hacia arriba

24.8. Calcule la intensidad del campo eléctrico en un punto P, situado 6 mm a la izquierda de una carga de 8 μC. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga de -2 nC colocada en el punto P?

24.9. Determine la intensidad del campo eléctrico en un punto P, situado 4 cm encima de una carga de $-12\ \mu C$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga de $+3$ nC ubicada en el punto P?
Resp. 6.75×10^7 N/C, hacia abajo, 0.2025 N, hacia abajo

Sección 24.2 Cálculo de la intensidad del campo eléctrico y Sección 24.3 Líneas del campo eléctrico

24.10. Calcule la intensidad del campo eléctrico en el punto medio de una recta de 70 mm que une a una carga de $-60\ \mu C$ con otra de $+40\ \mu C$.

24.11. Una carga de 8 nC se ubica 80 mm a la derecha de una carga de $+4$ nC. Determine la intensidad del campo en el punto medio de una recta que une las dos cargas. Resp. 2.25×10^4 N/C, a la izquierda

24.12. Calcule la intensidad del campo eléctrico en un punto colocado 30 mm a la derecha de una carga de 16 nC y 40 mm a la izquierda de una carga de 9 nC.

24.13. Dos cargas iguales de signos opuestos están separadas por una distancia horizontal de 60 mm. El campo eléctrico resultante en el punto medio de la recta es de 4×10^4 N/C. ¿Cuál es la magnitud de cada carga? Resp. 2 nC

***24.14.** Una carga de 20 μC está 4 cm arriba de una carga desconocida q. La intensidad eléctrica en un punto situado 1 cm arriba de la carga de 20 μC es de 2.20×10^9 N/C y se dirige hacia arriba. ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga desconocida?

***24.15.** Una carga de $-20\ \mu C$ se halla 50 mm a la derecha de una carga de 49 μC. ¿Cuál es la intensidad del campo resultante en un punto situado 24 mm directamente arriba de la carga de $-20\ \mu C$?
Resp. 2.82×10^8 N/C, 297.3°

***24.16.** Dos cargas de $+12$ nC y $+18$ nC están separadas por una distancia horizontal de 28 mm. ¿Cuál es la intensidad del campo resultante en un punto ubicado a 20 mm de cada carga y arriba de la recta que une las dos cargas?

***24.17.** Una carga de $+4$ nC se sitúa a $x = 0$, y una carga de $+6$ nC se halla en $x = 4$ cm sobre un eje x. Encuentre el punto donde la intensidad del campo eléctrico resultante es igual a 0. Resp. $x = 1.80$ cm

Secciones 24.4 Ley de Gauss y 24.5 Aplicaciones de la ley de Gauss

24.18. Aplique la ley de Gauss para demostrar que el campo fuera de una esfera sólida cargada, a una distancia r de su centro, está dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

donde Q es la carga total sobre la esfera.

***24.19.** Una carga de $+5$ nC se halla sobre la superficie de una esfera metálica hueca cuyo radio es de 3 cm. Aplique la ley de Gauss para hallar la intensidad del campo eléctrico a una distancia de 1 cm de la superficie de la esfera. ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto ubicado 1 cm dentro de la superficie? Resp. 2.81×10^4 N/C, cero

***24.20.** Dos placas paralelas, ambas de 2 cm de ancho y 4 cm de largo, están colocadas verticalmente de modo que la intensidad del campo entre ambas es de 10 000 N/C hacia arriba. ¿Cuál es la carga en cada placa?

***24.21.** Una esfera de 8 cm de diámetro tiene una carga de 4 μC en su superficie. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en la superficie, 2 cm fuera de la superficie y 2 cm dentro de la superficie? Resp. 2.25×10^7 N/C, 9.99×10^6 N/C, cero

Problemas adicionales

24.22. ¿A qué distancia de una carga puntual de 90 nC, la intensidad del campo será de 500 N/C?

24.23. Se ha determinado que la intensidad del campo eléctrico en un punto del espacio es de 5×10^5 N/C, en dirección al Oeste. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza sobre una carga de -4 μC colocada en ese punto? Resp. 2 N, al Este

24.24. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza sobre una partícula alfa ($q = +3.2 \times 10^{-19}$ C) que pasa a través de un campo eléctrico ascendente cuya intensidad es de 8×10^4 N/C?

24.25. ¿Cuál es la aceleración de un electrón ($e = -1.6 \times 10^{-19}$ C) colocado en un campo eléctrico descendente constante de 4×10^5 N/C? ¿Cuál es la fuerza gravitacional que actúa sobre esta carga si $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg? Resp. 7.03×10^{16} m/s² N, 8.93×10^{-30} N

24.26. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en el punto medio de una recta de 40 mm entre una carga de 6 nC y otra de -9 nC? ¿Qué fuerza actuará sobre una carga de -2 nC colocada en el punto medio?

***24.27.** La densidad de carga en cada una de dos placas paralelas es de 4 μC/m². ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas? Resp. 4.52×10^5 N/C

***24.28.** Una carga de -2 nC se halla en $x = 0$ sobre el eje x. Una carga de $+8$ nC se sitúa en $x = 4$ cm. ¿En qué punto la intensidad del campo eléctrico será igual a 0?

***24.29.** Cargas de -2 y $+4$ μC se ubican en las esquinas de la base de un triángulo equilátero cuyos lados miden 10 cm. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la intensidad del campo eléctrico en la esquina de arriba? Resp. 3.12×10^6 N/C, 150°

24.30. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza que actuaría sobre una carga de -2 μC colocada en el vértice superior del triángulo descrito en el problema 24.29?

***24.31.** Una partícula de 20 mg se encuentra en un campo descendente uniforme de 2000 N/C. ¿Cuántos electrones excedentes habrá que colocar sobre la partícula para que las fuerzas eléctrica y gravitacional se equilibren? Resp. 6.125×10^{11} electrones

***24.32.** Aplique la ley de Gauss para demostrar que la intensidad del campo eléctrico a una distancia R de una línea infinita de carga está dada por

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

donde λ es la carga por unidad de longitud. Construya una superficie gaussiana como la de la figura 24.15.

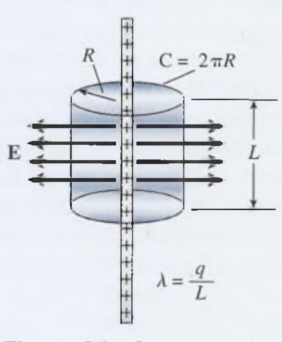


Figura 24.15

***24.33.** Use la ley de Gauss para demostrar que el campo junto a la parte exterior de cualquier conductor sólido está dado por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

***24.34.** ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico a 2 cm de la superficie de una esfera de 20 cm de diámetro, que tiene una densidad de carga superficial de +8 nC/m^2?

***24.35.** Una esfera conductora uniformemente cargada tiene 24 cm de radio y una densidad de carga superficial de +16 $\mu C/m^2$. ¿Cuál es el número total de líneas de campo eléctrico que salen de esa esfera? Resp. 1.16×10^{-5} líneas

***24.36.** Dos cargas de +16 μC y +8 μC están separadas 200 mm en el aire. ¿En qué punto de la recta que une las dos cargas tendrá el campo eléctrico un valor igual a cero?

***24.37.** Dos cargas de +8 nC y −5 nC están separadas 40 mm en el aire. ¿En qué punto de la recta que une las dos cargas la intensidad del campo eléctrico será igual a cero? Resp. 151 mm fuera de la carga de −5 nC

Preguntas para la reflexión crítica

***24.38.** Dos cargas iguales y opuestas, $+q$ y $-q$, están colocadas en las esquinas de la base de un triángulo equilátero cuyos lados tienen una longitud a. Muestre que la magnitud de la intensidad del campo eléctrico en el vértice superior es la misma, con o sin la presencia de una de las cargas. ¿Cuál es el ángulo entre los dos campos producidos en esta forma?

***24.39.** ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la intensidad del campo eléctrico en el centro del cuadrado de la figura 24.16? Suponga que q = 1 μC y que d = 4 cm. Resp. 3.56×10^7 N, 153.4°

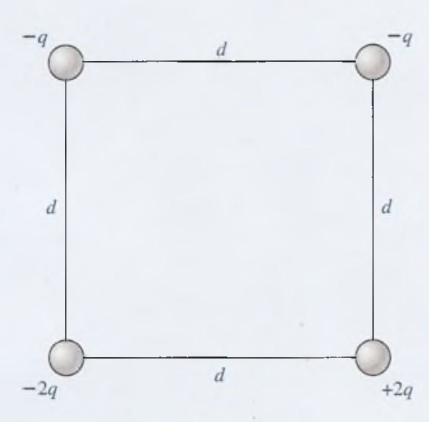


Figura 24.16

***24.40.** La intensidad del campo eléctrico entre las placas de la figura 24.17 es de 4000 N/C. ¿Cuál es la magnitud de la carga sobre la esfera de médula suspendida cuya masa es 3 mg? Resp. 4.24 nC

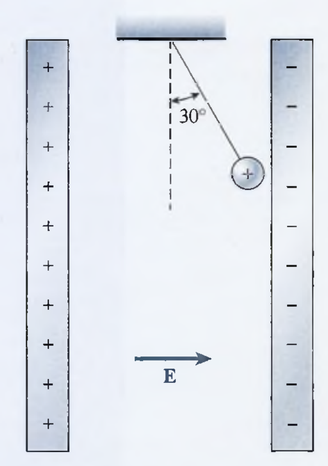


Figura 24.17

***24.41.** Dos esferas concéntricas tienen radios de 20 y 50 cm. La esfera interior tiene una carga negativa de −4 μC y la exterior una positiva de +6 μC. Aplique la ley de Gauss para hallar la intensidad del campo eléctrico a distancias de 40 y 60 cm del centro de las esferas.

***24.42.** La intensidad del campo eléctrico entre las dos placas de la figura 24.4 es de 2000 N/C. La longitud de las placas es de 4 cm y su separación es de 1 cm. Un electrón se proyecta hacia el campo desde la izquierda, con una velocidad horizontal de 2×10^7 m/s. ¿Cuál es la deflexión del electrón hacia arriba en el instante que sale de las placas? Resp. 0.700 mm

25 Potencial eléctrico



Los generadores electrostáticos, como el generador de Van de Graff mostrado aquí, pueden transferir cantidades enormes de carga a un domo de plata. Estos dispositivos producen voltajes altísimos. La repulsión electrostática produce este efecto sorprendente en el cabello de la mujer. (© *Roger Ressmeyer/Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará mediante definiciones y ejemplos su comprensión de los conceptos de *energía potencial eléctrica*, *potencial eléctrico* y *diferencia de potencial eléctrico*.
2. Calculará la energía potencial de una carga conocida a una distancia determinada de otras cargas conocidas, y determinará si la energía es negativa o positiva.
3. Calculará el potencial absoluto en cualquier punto de la vecindad de cierto número de cargas conocidas.
4. Usará sus conocimientos sobre diferencia de potencial para calcular el trabajo necesario para mover una carga conocida desde un punto *A* hasta otro punto *B* en un campo eléctrico creado por una o varias cargas puntuales.
5. Escribirá y aplicará la relación entre la intensidad de campo eléctrico, la diferencia de potencial y la separación de placas paralelas de carga igual pero opuesta.

En nuestro estudio de la mecánica, muchos problemas se simplificaron mediante la introducción de algunos conceptos acerca de la energía. La conservación de la energía mecánica nos permitió predecir ciertas cosas acerca de los estados inicial y final de los sistemas, sin tener que analizar el movimiento entre dichos estados. El concepto de un cambio de energía potencial a cinética nos ahorró el problema de las fuerzas variables.

En electricidad se pueden resolver muchos problemas prácticos si se consideran los cambios que experimenta una carga en movimiento en términos de energía. Por ejemplo, si se requiere una cierta cantidad de trabajo para mover una carga en contra de ciertas fuerzas eléctricas, la carga tendrá un *potencial* o posibilidad de aportar una cantidad equivalente de energía cuando sea liberada. En este capítulo vamos a desarrollar la idea de la *energía potencial eléctrica*.

25.1 Energía potencial eléctrica

Una de las formas más apropiadas de entender el concepto de ***energía potencial eléctrica*** consiste en compararla con la energía potencial gravitacional. En el caso de la energía gravitacional, se considera que la masa m en la figura 25.1 se mueve del nivel A al nivel B. Debe aplicarse una fuerza externa **F** igual al peso $m\mathbf{g}$ para mover la masa en contra de la gravedad. El trabajo realizado por esta fuerza es el producto de mg por h. Cuando la masa m alcanza el nivel B, tiene un potencial para realizar trabajo en relación con el nivel A. El sistema tiene *energía potencial* (*EP*) que es igual al trabajo realizado en contra de la gravedad.

$$EP = mgh$$

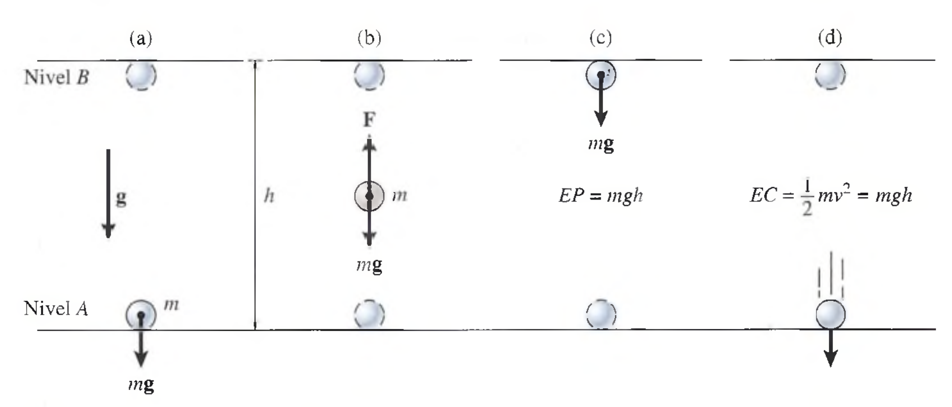


Figura 25.1 Una masa m se eleva contra el campo gravitacional **g**, lo que da por resultado una energía mgh en el nivel B. Cuando se suelta la masa, esta energía se transformará totalmente en energía cinética al ir cayendo hacia el nivel A.

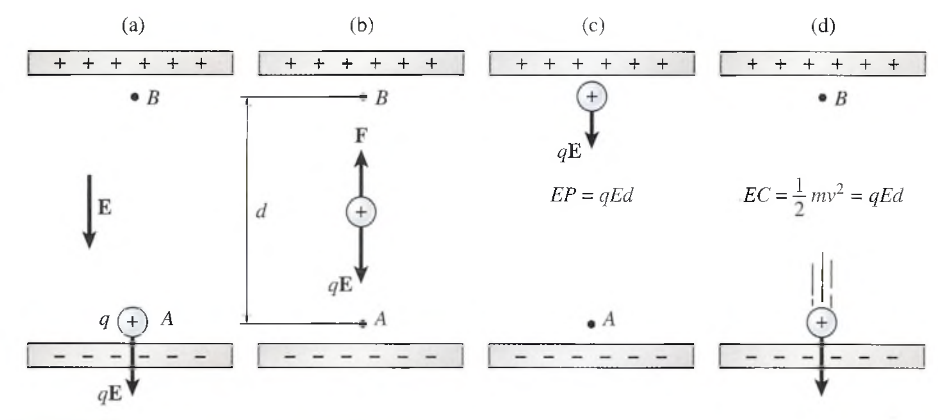


Figura 25.2 Una carga positiva $+q$ se desplaza en contra de un campo eléctrico constante **E** a través de una distancia d. En el punto B la energía potencial será qEd con respecto al punto A. Cuando se suelte, la carga ganará una cantidad equivalente de energía cinética.

FÍSICA HOY

La chispa da luz

En la parte central de un proyector cinematográfico hay un foco que trabaja bajo el mismo principio de un soldador de arco. La corriente directa fluye a través de dos electrodos separados por un vacío estrecho. Una enorme cantidad de luz y calor se produce. El calor se disipa por medio de varios ventiladores que soplan hacia el foco para evitar que explote. Los electrodos se alojan dentro del foco, el cual no contiene oxígeno sino un gas inerte de xenón a alta presión; esto impide que los electrodos se quemen.

Esta expresión representa el potencial para realizar trabajo que se libera cuando la masa m se suelta en el nivel B y desciende la distancia h. Por tanto, la magnitud de la energía potencial en B no depende de la trayectoria que siga la masa para llegar a ese nuevo nivel.

Ahora consideremos una carga positiva $+q$ que se encuentra en reposo en el punto A dentro de un campo eléctrico uniforme **E** constituido entre dos láminas con carga opuesta (véase la figura 25.2). Una fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ actúa hacia abajo sobre la carga. El trabajo realizado en contra del campo eléctrico para mover la carga desde A hasta B es igual al producto de la fuerza qE por la distancia d. Por consiguiente, la energía potencial eléctrica en el punto B en relación con el punto A es

$$EP = qEd \quad \textbf{(25.1)}$$

Cuando la carga se libera, el campo eléctrico desarrollará esta cantidad de trabajo y la carga q tendrá una energía cinética.

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 = qEd$$

cuando retorna al punto A.

Las afirmaciones y las ecuaciones anteriores son válidas independientemente de la trayectoria que siga la carga al moverse. De hecho, se requiere realizar el mismo trabajo contra el campo gravitacional para deslizar una masa hacia arriba por un plano inclinado que si se eleva ésta verticalmente. En forma similar, la energía potencial debida a la carga $+q$ en el punto B es independiente de la trayectoria. Como muestra la figura 25.3, la energía potencial sería la misma si $+q$ se moviera a lo largo de la trayectoria L o de la trayectoria d. El único

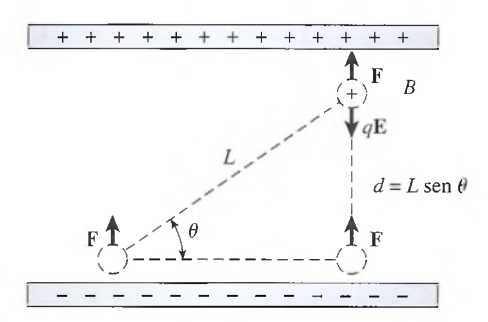


Figura 25.3 La energía potencial en B es independiente de la trayectoria seguida para llegar a B.

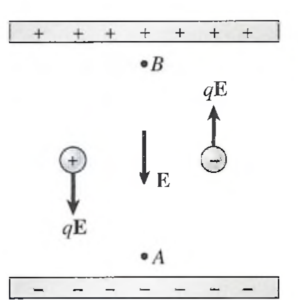


Figura 25.4 Una carga positiva incrementa su energía potencial cuando se desplaza del punto A al punto B; en cambio, una carga negativa *pierde* energía potencial cuando se desplaza de A a B.

trabajo que contribuye a la energía potencial es el trabajo realizado contra la fuerza del campo eléctrico $q\mathbf{E}$. La distancia efectiva que se recorre contra esta fuerza eléctrica descendente es

$$L \text{ sen } \theta = d$$

Por tanto, el trabajo es el mismo para cualquier trayectoria.

Antes de continuar, es preciso señalar una diferencia importante entre la energía potencial gravitacional y la energía potencial eléctrica. En el caso de la gravedad, sólo hay un tipo de masa, y las fuerzas implicadas son siempre fuerzas de atracción. Por tanto, una masa a gran altura siempre tiene una gran energía potencial con respecto a la Tierra. Esto no se cumple en el caso de la energía eléctrica, debido a la existencia de carga negativa. Por ejemplo, en la figura 25.4, una carga positiva tiene una mayor energía potencial en el punto B que en el punto A. Esto es cierto independientemente del punto de referencia elegido para medir la energía, ya que el trabajo se ha realizado en *contra* del campo eléctrico. Por otra parte, si una carga negativa se moviera del punto A al punto B, el trabajo sería realizado *por* el campo. Una carga negativa tendría una *menor* energía potencial en B, que es exactamente lo opuesto a la situación para la carga positiva.

Siempre que una carga positiva se mueve en contra del campo eléctrico, la energía potencial aumenta, y siempre que una carga negativa se mueve en contra del campo eléctrico, la energía potencial disminuye.

La regla anterior es una consecuencia directa del hecho de que la dirección del campo eléctrico se defina en términos de una carga positiva.

25.2 Cálculo de la energía potencial

Si se considera el espacio entre dos placas con carga opuesta, los cálculos para determinar el trabajo se simplifican en forma considerable, ya que el campo eléctrico es uniforme. La fuerza eléctrica que experimenta una carga es constante mientras permanezca entre las placas. Sin embargo, por lo general el campo no será constante y debemos tener en cuenta que la fuerza varía. Por ejemplo, considere el campo eléctrico en la vecindad de una carga positiva Q, como muestra la figura 25.5. El campo se dirige en forma radial hacia afuera, y su intensidad disminuye inversamente con el cuadrado de la distancia que hay desde el centro de la carga. El campo en los puntos A y B es

$$E_A = \frac{kQ}{r_A^2} \qquad E_B = \frac{kQ}{r_B^2}$$

donde r_A y r_B son las distancias respectivas a los puntos A y B.

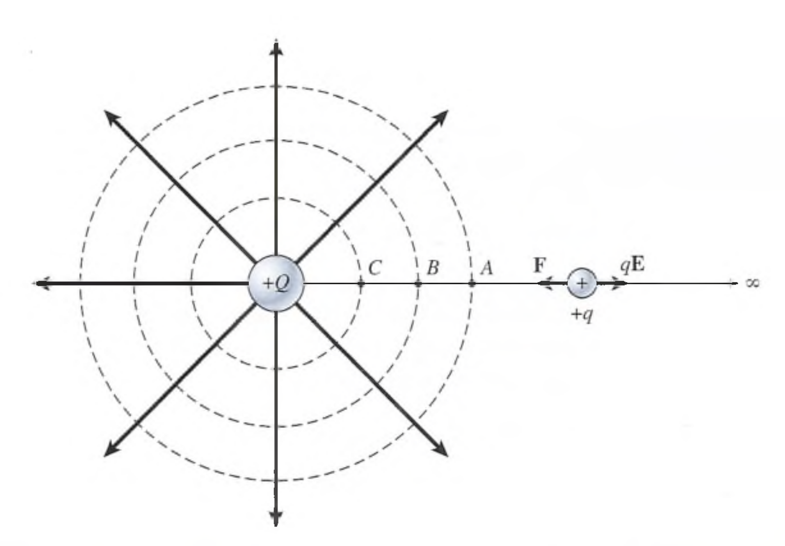


Figura 25.5 La energía potencial debida a una carga colocada en un campo eléctrico es igual al trabajo realizado *contra* las fuerzas eléctricas que transportan la carga desde el infinito hasta el punto en cuestión.

En la figura 25.5 y en el análisis que sigue, usaremos el término infinito para referirnos a puntos que están más allá del punto de interacción eléctrica y muy alejados del mismo. También supondremos que las únicas cargas presentes son aquellas expresamente indicadas en nuestros ejemplos.

La fuerza eléctrica promedio que experimenta una carga $+q$ cuando se desplaza del punto A al punto B es

$$F = \frac{kQq}{r_A r_B} \quad \textbf{(25.2)}$$

Por tanto, el trabajo realizado en contra del campo eléctrico al moverse por la distancia $r_A - r_B$ es igual a

$$\begin{aligned} \text{Trabajo}_{A\rightarrow B} &= \frac{kQq}{r_A r_B}(r_A - r_B) \\ &= kQq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \quad \textbf{(25.3)} \end{aligned}$$

Observe que el trabajo es una función de las distancias r_A y r_B. La trayectoria seguida no tiene importancia. El mismo trabajo se realizaría contra el campo al mover una carga desde cualquier punto sobre el círculo punteado que pasa a través de A, a cualquier punto sobre el círculo que pasa a través de B.

Supongamos ahora que se calcula el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas al mover una carga positiva desde el infinito hasta un punto a una distancia r de la carga Q. Partiendo de la ecuación (25.3), el trabajo está dado por

$$\begin{aligned} \text{Trabajo}_{\infty\rightarrow r} &= kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) \\ &= \frac{kQq}{r} \quad \textbf{(25.4)} \end{aligned}$$

En vista de que ya hemos demostrado que el trabajo realizado contra el campo eléctrico equivale al incremento de la energía potencial, la ecuación (25.4) representa la energía potencial en r con respecto al infinito. A menudo se considera que la energía potencial en el infinito es cero, por lo que la energía potencial de un sistema compuesto por una carga q y otra carga Q separadas por una distancia r es

$$EP = \frac{kQq}{r} \quad \textbf{(25.5)}$$

La energía potencial del sistema es igual al trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas para llevar la carga $+q$ desde el infinito hasta ese punto.

Ejemplo 25.1

Una carga de +2 nC está separada 20 cm de otra carga de +4 μC. (a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial si la carga de 2 nC se mueve a una distancia de 8 cm de la carga de +4 μC?

Plan: La energía potencial de un sistema que contiene dos cargas q_1 y q_2 es el trabajo requerido para colocarlas a una distancia r entre sí. La ecuación (25.5) se puede usar para calcular la energía potencial para r = 20 cm y luego para r = 8 cm. La diferencia será el *cambio* en la energía potencial.

Solución (a): La energía potencial a una distancia r = 20 cm = 0.20 m es

$$\begin{aligned} EP = \frac{kQq}{r} &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-6}\text{ C})(2 \times 10^{-9}\text{ C})}{(0.20 \text{ m})} \\ &= 3.60 \times 10^{-4}\text{ J} \end{aligned}$$

Solución (b): La energía potencial a $r = 8$ cm $= 0.08$ m es

$$EP = \frac{kQq}{r} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-6} \text{ C})(2 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0.08 \text{ m})}$$
$$= 9.00 \times 10^{-4} \text{ J}$$

El *cambio* en energía potencial es

$$\Delta EP = 9.00 \times 10^{-4} \text{ J} - 3.6 \times 10^{-4} \text{ J} = 5.4 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Observe que la diferencia es positiva, lo que indica un *incremento* en energía potencial. Si la carga Q fuera negativa y todos los demás parámetros no cambiaran, la energía potencial habría *disminuido* en esta misma cantidad.

25.3 Potencial eléctrico

Cuando anteriormente estudiamos el concepto de campo eléctrico como fuerza por unidad de carga, se indicó que la principal ventaja de un concepto de ese tipo era que permitía asignar una propiedad eléctrica al espacio. Si se conoce la intensidad del campo en cierto punto, es posible predecir la fuerza sobre una carga situada en ese punto. De igual forma es conveniente asignar otra propiedad al espacio que rodea una carga, y que nos permite predecir la energía potencial debida a otra carga situada en cualquier punto. Esta propiedad del espacio se llama ***potencial*** y se define como sigue:

> El potencial V en un punto situado a una distancia *r* de una carga Q es igual al trabajo por unidad de carga realizado contra las fuerzas eléctricas para transportar una carga positiva $+q$ desde el infinito hasta dicho punto.

En otras palabras, el potencial en determinado punto A, como muestra la figura 25.6, es igual a la *energía potencial por unidad de carga*. Las unidades de potencial se expresan en *joules por coulomb*, y se conocen como ***volt*** (V).

$$V_A(\text{V}) = \frac{EP \text{ (J)}}{q \text{ (C)}} \qquad \textbf{(25.6)}$$

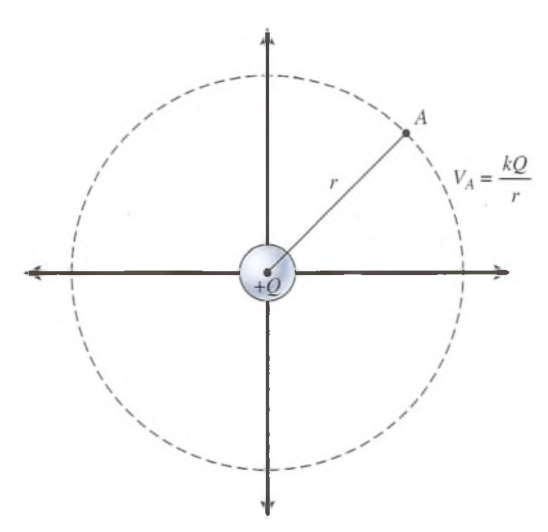


Figura 25.6 Cálculo del potencial a una distancia r de una carga $+Q$

Esto significa que un potencial de *1 volt* en el punto A significa que *si una carga de un coulomb se colocara en A*, la energía potencial sería de un joule. En general, cuando se conoce el potencial en el punto A, la energía potencial debida a la carga q en ese punto se puede determinar a partir de

$$EP = qV_A \tag{25.7}$$

Sustituyendo de la ecuación (25.5) a la ecuación (25.6) nos queda una expresión para calcular directamente el potencial eléctrico:

$$V_A = \frac{EP}{q} = \frac{kQq/r}{q}$$

$$V_A = \frac{kQ}{r} \qquad \textit{Energía potencial eléctrica} \tag{25.8}$$

El símbolo V_A se refiere al potencial eléctrico en el punto A localizado a una distancia r de la carga Q.

A estas alturas podemos observar que el potencial es el mismo en todos los puntos ubicados a iguales distancias de una carga esférica. Por este motivo, las ***líneas punteadas*** que aparecen en las figuras 25.5 y 25.6 se conocen como líneas equipotenciales. Observe que las líneas de igual potencial son siempre perpendiculares a las líneas del campo eléctrico. Si esto no fuera cierto, el trabajo se realizaría mediante una fuerza resultante cuando una carga se desplazara a lo largo de una línea equipotencial. Un trabajo así aumentaría o disminuiría el potencial.

Las líneas equipotenciales siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.

Antes de proponer un ejemplo, es preciso señalar que el potencial eléctrico en un punto dado se define en términos de una carga positiva. Esto significa que el potencial eléctrico será negativo en un punto localizado en el espacio que rodea a una carga negativa. Debemos recordar la siguiente regla:

El potencial debido a una carga positiva es positivo, y el potencial debido a una carga negativa es negativo.

El uso del signo negativo para una carga negativa Q en la ecuación (25.8), resulta en un valor negativo para el potencial.

Ejemplo 25.2

(a) Calcule el potencial eléctrico en el punto A que está a 30 cm de distancia de una carga de $-2\ \mu$C. (b) ¿Cuál es la energía potencial si una carga de $+4$ nC está colocada en A?

Plan: Al principio no hay energía potencial EP debido a que sólo hay *una* carga. Sin embargo, hay potencial eléctrico V en el espacio que rodea a la carga. En la parte (a) usaremos la ecuación (25.8) para calcular el potencial eléctrico a una distancia de 0.30 m de la carga de $-2\ \mu$C. Luego usaremos la ecuación (25.7) para determinar la energía potencial cuando la carga de $+4$ nC se coloca en A.

Solución (a): A partir de la ecuación (25.8) obtenemos

$$V_A = \frac{kQ}{r} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(-2 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.30\ \text{m})}$$
$$= -6.00 \times 10^4\ \text{V}$$

Solución (b): Al resolver la ecuación (25.7) explícitamente para EP, determinamos la energía potencial debida a la colocación de la carga de $+4$ nC.

$$EP = qV_A = (4 \times 10^{-9}\ \text{C})(-6 \times 10^4\ \text{V})$$
$$= -2.40 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

Un valor negativo para la energía potencial significa que, al separar las cargas, el trabajo se debe realizar en *contra* del campo eléctrico. En este ejemplo, una fuerza externa debe suministrar un trabajo de 24×10^{-5} J para poder transportar la carga hasta el infinito.

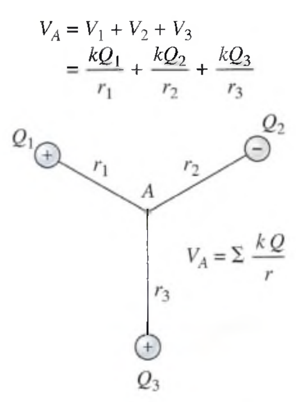


Figura 25.7 Potencial eléctrico en la vecindad de cierto número de cargas.

Ahora consideremos el caso más general, ilustrado en la figura 25.7, que se ocupa del potencial en los alrededores de cierto número de cargas:

El potencial eléctrico en la vecindad de cierto número de cargas es igual a la suma algebraica de los potenciales eléctricos que corresponden a cada carga.

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$
$$= \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \frac{kQ_3}{r_3} + \ldots$$

Recuerde que el potencial eléctrico en la vecindad de una carga positiva es positivo y el potencial eléctricoen la vecindad de una carga negativa es negativo. Esto significa que el signo de la carga se toma en cuenta en los cálculos. En general, el potencial eléctrico en un punto en el espacio cercano a otras cargas está dado por

$$V = \sum \frac{kQ}{r} \tag{25.9}$$

Esta ecuación es una *suma algebraica* puesto que el potencial eléctrico es una cantidad escalar y no una cantidad vectorial, como ocurre con las fuerzas y los campos eléctricos.

Ejemplo 25.3

Dos cargas, $Q_1 = +6\ \mu$C y $Q_2 = -6\ \mu$C, están separadas 12 cm, como muestra la figura 25.8. Calcule el potencial en los puntos *A* y *B*.

Plan: El potencial eléctrico en un punto en particular es la suma algebraica de los potenciales eléctricos debidos a cada carga, con las distancias medidas de cada carga a dicho punto. Los signos de la carga pueden usarse en el proceso de suma para calcular el potencial total.

Solución (a): El potencial eléctrico en *A* se encuentra a partir de la ecuación (25.9).

$$V_A = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2}$$
$$= \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-6}\ \text{C})}{4 \times 10^{-2}\ \text{m}} + \frac{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(-6 \times 10^{-6}\ \text{C})}{8 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 13.5 \times 10^5\ \text{V} - 6.75 \times 10^5\ \text{V}$$
$$= 6.75 \times 10^5\ \text{V}$$

Esto significa que el campo eléctrico realizará un trabajo de 6.75×10^5 J por cada coulomb de carga positiva que transporta de *A* al infinito.

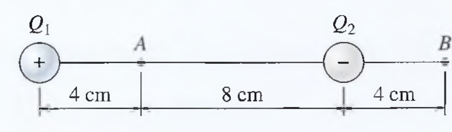


Figura 25.8

Solución (b): El potencial eléctrico en B es

$$V_B = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2}$$
$$= \frac{(9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(6 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{16 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} + \frac{(9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(-6 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{4 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$
$$= 3.38 \times 10^5\ \mathrm{V} - 13.5 \times 10^5\ \mathrm{V}$$
$$= -10.1 \times 10^5\ \mathrm{V}$$

Los valores negativos indican que el campo se mantendrá sobre una carga positiva. Para mover 1 C de carga positiva desde A hasta el infinito, otra fuente de energía debe desarrollar un trabajo de 10.1×10^5 J. El campo desarrollará un trabajo negativo, igual a esta cantidad.

25.4 Diferencia de potencial

En la electricidad práctica, es de escaso interés el trabajo por unidad de carga para trasladar una carga al infinito. Con más frecuencia deseamos conocer los requisitos de trabajo para mover cargas entre dos puntos. Lo anterior conduce el concepto de ***diferencia de potencial***.

> La diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo por unidad de carga positiva que realizan fuerzas eléctricas para mover una pequeña carga de prueba desde el punto de mayor potencial al punto de menor potencial.

Otra forma de expresar el mismo concepto sería afirmar que la diferencia de potencial entre dos puntos es la diferencia en los potenciales en esos puntos. Por ejemplo, si el potencial en cierto punto A es de 100 V y el potencial en otro punto B es de 40 V, la diferencia de potencial es

$$V_A - V_B = 100\ \mathrm{V} - 40\ \mathrm{V} = 60\ \mathrm{V}$$

Esto quiere decir que los 60 J de trabajo serán realizados por el campo sobre cada coulomb de carga positiva que se desplaza desde A hasta B. En general, el *trabajo realizado por un campo eléctrico*, o ***trabajo eléctrico***, para mover una carga q del punto A al punto B se puede determinar a partir de

$$\text{Trabajo}_{A \to B} = q(V_A - V_B) \qquad \textbf{(25.10)}$$

Ejemplo 25.4 ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B en la figura 25.8? Considere el ejemplo 25.3. ¿Cuánto trabajo realiza un campo eléctrico al mover una carga de $-2\ \eta\mathrm{C}$ del punto A al punto B?

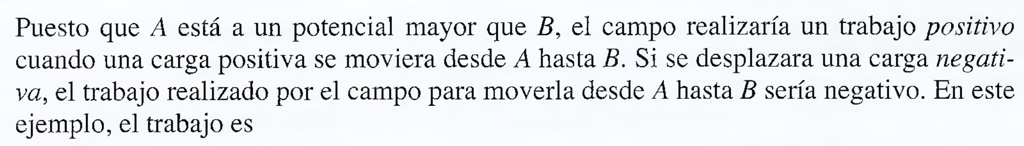
Plan: La diferencia de potencial es simplemente $V_A - V_B$; el trabajo para mover la carga de A a B es el producto de q por la diferencia de potencial.

Solución: Los potenciales en los puntos A y B se calcularon en el ejemplo 25.3. Éstos son

$$V_A = 6.75 \times 10^5\ \mathrm{V} \qquad V_B = -10.1 \times 10^5\ \mathrm{V}$$

Por tanto, la diferencia de potencial entre los puntos A y B es

$$V_A - V_B = 6.75 \times 10^5\ \mathrm{V} - (-10.1 \times 10^5\ \mathrm{V})$$
$$= 16.9 \times 10^5\ \mathrm{V}$$



Puesto que A está a un potencial mayor que B, el campo realizaría un trabajo *positivo* cuando una carga positiva se moviera desde A hasta B. Si se desplazara una carga *negativa*, el trabajo realizado por el campo para moverla desde A hasta B sería negativo. En este ejemplo, el trabajo es

$$\begin{aligned}\text{Trabajo}_{A\to B} &= q(V_A - V_B)\\ &= (-2 \times 10^{-9}\ \text{C})(16.9 \times 10^{5}\ \text{V})\\ &= -3.37 \times 10^{-3}\ \text{J}\end{aligned}$$

Por el hecho de que el trabajo realizado por este campo es negativo, otra fuente de energía debe suministrar el trabajo para mover la carga.

Estrategia para resolver problemas

Potencial eléctrico y energía potencial

1. Lea el problema, luego dibuje y marque una figura. Indique las cargas positivas y negativas junto con las distancias proporcionadas. Las cargas deben expresarse en coulombs y las distancias en metros. Recuerde que $1\ \mu\text{C} = 1 \times 10^{-6}$ C y $1\ \text{nC} = 1 \times 10^{-9}$ C.
2. No olvide que el potencial eléctrico V es una propiedad del *espacio* que nos permite determinar la energía potencial EP cuando una carga q está situada en ese punto. Existe potencial en un *punto* del espacio, independientemente de que la carga esté colocada en ese punto.
3. El potencial absoluto en un punto vecino a un número de cargas es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga:

$$V = \sum \frac{kQ}{r} \qquad k = 9 \times 10^{9}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

4. Solamente son significativos los *cambios* de potencial; además, el punto de referencia para un potencial de cero se puede ubicar en el infinito o en cualquier otro punto. Con mucha frecuencia, se puede elegir como cero en el punto de menor potencial absoluto.
5. El *trabajo* realizado *por* un campo eléctrico al mover una carga q desde un punto A hasta otro punto B es simplemente el producto de la carga por la diferencia de potencial:

$$\text{Trabajo}_{AB} = q(V_A - V_B) \qquad \textit{Trabajo realizado por el campo eléctrico}$$

6. En virtud de que el potencial en la vecindad de una carga positiva es positivo y el potencial cercano a una carga negativa es negativo, los signos de la carga y del potencial se pueden usar algebraicamente.

Regresemos ahora al ejemplo del campo eléctrico uniforme **E** entre dos placas con carga opuesta, como muestra la figura 25.9. Supongamos que las placas están separadas por una distancia d. Una carga q situada en la región comprendida entre las placas A y B experimentará una fuerza dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

El trabajo realizado por esta fuerza para mover la carga q de la placa A a la placa B está dado por

$$Fd = (qE)d$$

Pero este trabajo también es igual al producto de la carga q por la diferencia de potencial $V_A - V_B$ entre las dos placas, así que podemos escribir

$$q(V_A - V_B) = qEd$$

Si se divide entre q y se representa la diferencia de potencial mediante el símbolo V, se obtiene

$$V = Ed \qquad \textbf{(25.11)}$$

La diferencia de potencial entre dos placas con cargas opuestas es igual al producto de la intensidad de campo por la separación de las placas.

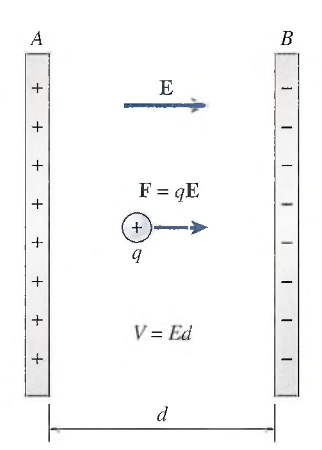


Figura 25.9 Potencial entre dos placas con cargas opuestas.

Ejemplo 25.5 La diferencia de potencial entre dos placas separadas entre sí 5 mm es de 10 kV. Determine la intensidad del campo eléctrico entre las placas.

Solución: Al despejar E en la ecuación (25.11) nos queda

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10 \times 10^3 \text{ V}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2 \times 10^6 \text{ V/m}$$

Como ejercicio adicional, demuestre que el *volt por metro* es equivalente al *newton por coulomb*. El campo eléctrico expresado en volts por metro se conoce a veces como ***gradiente de potencial***.

25.5 Experimento de Millikan de la gota de aceite

Ahora que hemos desarrollado los conceptos de campo eléctrico y diferencia de potencial, estamos listos para describir un experimento clásico diseñado para determinar la unidad de carga más pequeña. Robert A. Millikan, un físico estadounidense, diseñó una serie de experimentos a principios de la década de 1900. Un diagrama esquemático de su aparato se muestra en la figura 25.10. En él se rocían pequeñísimas gotas de aceite en la región situada entre las dos placas metálicas. A partir de moléculas de aire, a través de las cuales se hacen pasar rayos X ionizados, se liberan electrones. Estos electrones se adhieren por sí mismos a las pequeñas gotas de aceite, lo cual da por resultado que éstas tengan una carga negativa neta.

Por medio de un microscopio se puede observar el movimiento descendente de las gotas de aceite, a medida que van cayendo lentamente bajo la influencia de su propio peso y de la fuerza viscosa ascendente provocada por la resistencia del aire (consulte la figura 25.10). Se puede recurrir a las leyes de la hidrostática para calcular la masa m de una gota particular de aceite midiendo su rapidez de caída.

Después de registrar todos los datos necesarios para determinar la masa m, se conecta una batería externa con el fin de establecer un campo eléctrico uniforme **E** entre las placas de

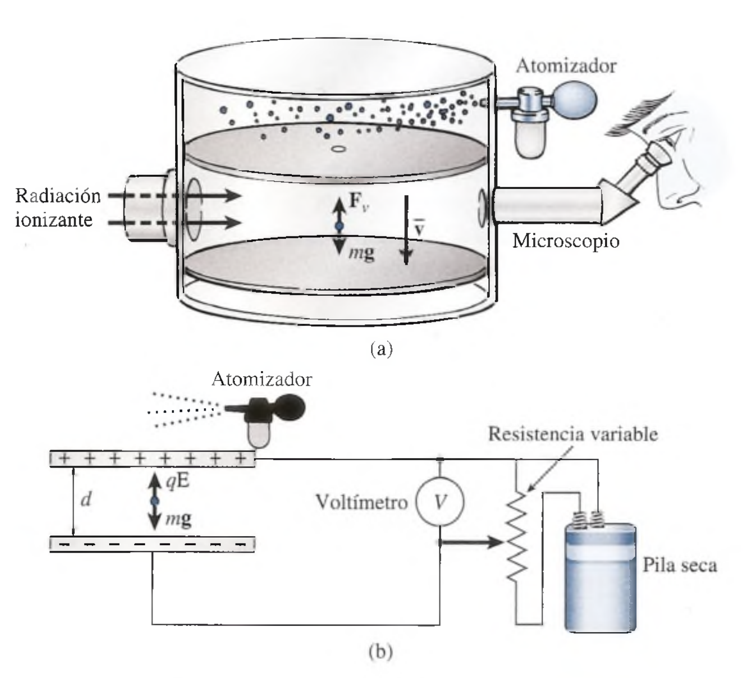


Figura 25.10 Experimento de Millikan de la gota de aceite: (a) La masa m de la gota se determina a partir de su velocidad de caída, en contra de la fuerza viscosa de la resistencia del aire. (b) La magnitud de la carga se puede calcular partiendo de las condiciones de equilibrio que mantienen suspendida la carga entre dos placas con carga opuesta (véase la figura 25.10).

carga opuesta (véase figura 25.10). La magnitud de la intensidad de campo se puede controlar por medio de una resistencia variable intercalada en el circuito eléctrico. El campo se ajusta hasta que la fuerza eléctrica ascendente que actúa sobre la gota sea igual a la fuerza gravitacional descendente, de modo que la gota de aceite quede inmóvil. En estas condiciones

$$qE = mg \tag{25.12}$$

donde q = carga neta de la gota de aceite
m = masa de la gota de aceite
g = aceleración de la gravedad

La intensidad de campo **E**, como se determinó por la ecuación (25.11), es función del voltaje aplicado V y de la separación de las placas d. Por tanto, la ecuación (25.12) se vuelve

$$q\frac{V}{d} = mg$$

y la magnitud de la carga sobre la gota de aceite se determina por

$$q = \frac{mgd}{V} \tag{25.13}$$

La diferencia de potencial V se puede leer directamente en un dispositivo adecuado llamado *voltímetro*, incorporado al circuito. Se conocen los otros parámetros.

Las cargas observadas por Millikan no siempre fueron iguales, pero él demostró que la magnitud de la carga era siempre un múltiplo entero de una cantidad básica de carga. Se supuso que esa carga *mínima* debía ser la carga de un solo electrón y que las otras cantidades resultaban de dos o más electrones. Los cálculos de la carga electrónica por este método nos dan

$$e = 1.6065 \times 10^{-19}\text{ C}$$

lo cual concuerda en gran medida con los valores obtenidos con otros métodos.

25.6 El electrón volt

Consideremos la energía de una partícula cargada que se mueve a través de una diferencia de potencial. Se dispone de varias unidades para expresar la medida de esta energía, pero la mayoría de las unidades que nos son familiares resultan inadecuadas porque son demasiado grandes. Consideremos, por ejemplo, una carga de 1 C acelerada a través de una diferencia de potencial de 1 V. En este caso, su energía cinética será

$$\begin{aligned} EC &= qEd = qV \\ &= (1\text{ C})(1\text{ V}) = 1\text{ C}\cdot\text{V} \end{aligned}$$

Desde luego, el coulomb-volt es un joule. Pero 1 C de carga es demasiado grande cuando se aplica a partículas individuales, y la unidad correspondiente de energía (el joule) es también muy grande. La unidad de energía más conveniente en física atómica y nuclear es el ***electrón volt*** (eV).

El electrón volt es una unidad de energía equivalente a la energía adquirida por un electrón que es acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 volt.

El electrón volt difiere del coulomb-volt en el mismo grado que la diferencia en la carga de un electrón y la carga de 1 C. Para comparar las dos unidades suponga que calculamos la energía en joules adquirida por un electrón que ha sido acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 V:

$$\begin{aligned} EC &= qV \\ &= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(1\text{ V}) \\ &= 1.6 \times 10^{-19}\text{ J} \end{aligned}$$

Por tanto, 1 eV equivale a una energía de 1.6×10^{-19} J.

Resumen y repaso

Resumen

Los conceptos de energía potencial, potencial y diferencia de potencial se han ampliado para incluir los fenómenos eléctricos. Los múltiples problemas referentes al potencial electrostático han sido diseñados como una base para el tema de la corriente eléctrica directa que veremos más adelante. Los elementos esenciales de este capítulo se resumen a continuación:

- Cuando una carga q se mueve en contra de una fuerza eléctrica constante una distancia d, la energía potencial del sistema es:

$$EP = qEd$$

donde E es la intensidad del campo eléctrico constante. Si la carga se libera, adquirirá una energía cinética

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 = qEd$$

mientras recorre la misma distancia de regreso.
- Debido a la existencia de cargas positivas y negativas y a los efectos opuestos que produce un mismo campo, debemos recordar que: *la energía potencial aumenta cuando una carga positiva se mueve contra el campo eléctrico, y la energía potencial disminuye cuando una carga negativa se mueve en contra del mismo campo.*
- En general, la energía potencial ocasionada por una carga q colocada a una distancia r de otra carga Q es igual al trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas al mover la carga $+q$ desde el infinito.

$$EC = \frac{kQq}{r} \qquad \textit{Energía potencial eléctrica}$$

Observe que la distancia r no está elevada al cuadrado como en el caso de la intensidad del campo eléctrico.
- El *potencial* eléctrico V en un punto colocado a una distancia r de una carga Q es igual al trabajo realizado por cada carga unitaria contra las fuerzas eléctricas al traer una carga positiva $+q$ desde el infinito.

$$V = \frac{kQ}{r} \qquad \textit{Potencial eléctrico}$$

- La unidad de potencial eléctrico es el joule por coulomb (J/C), el cual recibe el nuevo nombre de volt (V).

$$1\text{ V} = \frac{1\text{ J}}{1\text{ C}}$$

- El potencial en un punto de la vecindad de cierto número de cargas es igual a la suma algebraica de los potenciales ocasionados por cada carga:

$$V = \sum \frac{kQ}{r} = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \frac{kQ_3}{r_3} + \dots \qquad \textit{Suma algebraica}$$

- La diferencia de potencial entre dos puntos A y B es la diferencia de sus potenciales en esos puntos.

$$V_{AB} = V_A - V_B \qquad \textit{Diferencia de potencial}$$

- El trabajo realizado por un campo eléctrico al mover una carga q del punto A al punto B se puede hallar mediante

$$\text{Trabajo}_{AB} = q(V_A - V_B) \qquad \textit{Trabajo y diferencia de potencial}$$

- La diferencia de potencial entre dos placas con cargas opuestas es igual al producto de la intensidad de campo y la separación entre las placas.

$$V = Ed \qquad E = \frac{V}{d}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

25.1. Indique con claridad la diferencia entre trabajo positivo y negativo. Indique la diferencia entre energía potencial positiva y negativa.

25.2. ¿En el caso de una masa m es posible que la energía potencial se incremente al trasladar la masa a una posición menor? ¿Es posible que un objeto eléctricamente cargado incremente la energía potencial al ser llevado a una posición de potencial más bajo? Explique su respuesta.

25.3. Cite un ejemplo en el cual la energía potencial sea cero en algún punto donde la intensidad del campo eléctrico no sea cero.

25.4. El campo eléctrico en el interior de un conductor electrostático es cero. ¿También el potencial eléctrico dentro del conductor es cero? Explique su respuesta.

25.5. Si se conoce la intensidad del campo eléctrico en algún punto, ¿se puede determinar el potencial eléctrico en ese punto? ¿Qué información se necesita?

25.6. La superficie de cualquier conductor es una superficie equipotencial. Justifique esta afirmación.

25.7. ¿La dirección de la intensidad del campo eléctrico va del potencial más alto al más bajo? Ilustre su respuesta.

25.8. Aplique el concepto de potencial al campo gravitacional y trate de obtener una expresión similar a la ecuación (25.9) para calcular la energía potencial por unidad de masa. Comente las aplicaciones de esa fórmula.

25.9. Demuestre que el volt por metro es dimensionalmente equivalente al newton por coulomb.

25.10. Distinga entre la diferencia de potencial y una diferencia en la energía potencial.

25.11. Una diferencia de potencial de 220 V se mantiene entre los extremos de un alambre largo de alta resistencia. Si el centro del alambre se conecta a tierra ($V = 0$), ¿cuál será la diferencia de potencial entre el punto central y los extremos?

25.12. El potencial debido a una carga negativa es negativo y el potencial debido a una carga positiva es positivo. ¿Por qué? ¿También es cierto que la energía potencial debida a una carga negativa es negativa? Explique su respuesta.

25.13. ¿El potencial es una propiedad asignada al espacio o a una carga? ¿A qué está asignada la energía potencial?

Problemas

Sección 25.1 Energía potencial eléctrica

25.1. Una placa cargada positivamente está 30 mm más arriba que una placa cargada negativamente, y la intensidad del campo eléctrico tiene una magnitud de 6×10^4 N/C. ¿Cuánto trabajo es realizado *por* el campo eléctrico cuando una carga de +4 μC se mueve desde la placa negativa hasta la placa positiva? Resp. −7.20 mJ

25.2. En el problema 25.1, ¿cuánto trabajo se realiza *sobre* o en contra del campo eléctrico? ¿Cuál es la energía potencial eléctrica en la placa positiva?

25.3. La intensidad del campo eléctrico entre dos placas paralelas separadas 25 mm es 8000 N/C. ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico al mover una carga de −2 μC desde la placa negativa hasta la placa positiva? ¿Cuánto trabajo es realizado *por* el campo al llevar la misma carga de regreso a la placa positiva? Resp. $+4.00 \times 10^{-4}$ J, -4.00×10^{-4} J

25.4. En el problema 25.3, ¿cuál es la energía potencial cuando la carga está en (a) la placa positiva y (b) la placa negativa?

25.5. ¿Cuál es la energía potencial de una carga de +6 nC localizada a 50 mm de una carga de +80 μC? ¿Cuál es la energía potencial si la misma carga está a 50 mm de una carga de −80 μC? Resp. +86.4 mJ, −86.4 mJ

25.6. ¿A qué distancia de una carga de −7 μC otra carga de −3 nC tendrá una energía potencial de 60 mJ? ¿Qué fuerza inicial experimentará la carga de −3 nC?

25.7. Una carga de +8 nC se coloca en un punto P, a 40 mm de una carga de +12 μC. ¿Cuál es la energía potencial por unidad de carga en el punto P en joules por coulomb? ¿Sufrirá algún cambio si se quita la carga de 8 nC? Resp. 2.70×10^6 J/C, no

25.8. Una carga de +6 μC se encuentra a 30 mm de otra carga de 16 μC. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?

25.9. En el problema 25.8, ¿cómo cambiará la energía potencial si la carga de 6 μC se coloca a una distancia de sólo 5 mm? ¿Se trata de un incremento o de un decremento de la energía potencial? Resp. 144 J, un incremento

25.10. Una carga de −3 μC se coloca a 6 mm de una carga de −9 μC. ¿Cuál es la energía potencial? ¿Es negativa o positiva?

25.11. ¿Qué cambio se registra en la energía potencial cuando una carga de 3 nC que estaba a 8 cm de distancia de una carga de −6 μC se coloca a 20 cm de distancia de ésta? ¿Hay un incremento o una disminución en la energía potencial? Resp. +1.22 J, incremento

25.12. ¿A qué distancia de una carga de −7 μC se debe colocar una carga de −12 nC para que la energía potencial sea de 9×10^{-5} J?

25.13. La energía potencial de un sistema constituido por dos cargas idénticas es 4.50 mJ cuando la separación entre ellas es de 38 mm. ¿Cuál es la magnitud de cada carga? Resp. 139 nC

Sección 25.3 Potencial y Sección 25.4 Diferencia de potencial

25.14. ¿Cuál es el potencial eléctrico en un punto que se encuentra a 6 cm de una carga de 8.40 μC? ¿Cuál es la energía potencial de una carga de 2 nC colocada en ese punto?

25.15. Calcule el potencial en el punto A que está a 50 mm de una carga de $-40\ \mu C$. ¿Cuál es la energía potencial si una carga de $+3\ \mu C$ se coloca en el punto A? Resp. −7.20 MV, −21.6 J

25.16. ¿Cuál es el potencial en el punto medio de una recta que une una carga de $-12\ \mu C$ con una carga de $+3\ \mu C$ localizada a 80 mm de la primera carga?

25.17. Una carga de +45 nC se encuentra 68 mm a la izquierda de una carga de −9 nC. ¿Cuál es el potencial en un punto que se encuentra 40 mm a la izquierda de la carga de −9 nC? Resp. 12.4 kV

***25.18.** Los puntos A y B se ubican a 68 y 26 mm de una carga de 90 μC. Calcule la diferencia de potencial entre dos puntos A y B. ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico cuando una carga de $-5\ \mu C$ se traslada de A a B?

***25.19.** Los puntos A y B están a 40 y 25 mm de una carga de $+6\ \mu C$. ¿Cuánto trabajo es necesario hacer contra el campo eléctrico (por medio de fuerzas externas) para trasladar una carga de $+5\ \mu C$ del punto A al punto B? Resp. +4.05 J

***25.20.** Una carga de $+6\ \mu C$ se encuentra en $x = 0$ sobre el eje x, y una carga de $-2\ \mu C$ se localiza en $x = 8$ cm. ¿Cuánto trabajo es realizado *por* el campo eléctrico al llevar una carga de $-3\ \mu C$ desde el punto $x = 10$ cm hasta el punto $x = 3$ cm?

Problemas adicionales

25.21. El punto A está a 40 mm arriba de una carga de $-9\ \mu C$ y el punto B se localiza a 60 mm debajo de la misma carga. Una carga de −3 nC se traslada del punto B al punto A. ¿Cuál es el cambio registrado en la energía potencial? Resp. +2.025 mJ

25.22. Dos placas paralelas están separadas 50 mm en el aire. Si la intensidad del campo eléctrico entre las placas es de 2×10^4 N/C, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

25.23. La diferencia de potencial entre dos placas paralelas separadas por 60 mm es de 4000 V. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico entre ellas? Resp. 66.7 kV/m

25.24. Si un electrón se encuentra en la placa de potencial más bajo del problema 25.23, ¿cuál será su velocidad cuando llegue a la placa de potencial más alto? ¿Cuál es esa energía, expresada en electrón volts?

25.25. Demuestre que el gradiente de potencial V/m es equivalente a la unidad N/C para el campo eléctrico.

25.26. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos localizados a 30 y 60 cm de una carga de $-50\ \mu C$?

25.27. El gradiente de potencial entre dos placas paralelas separadas 4 mm es de 6000 V/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? Resp. 24.0 V

25.28. El campo eléctrico entre dos placas separadas 50 mm es de 6×10^5 V/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

25.29. ¿Cuál debe ser la separación de dos placas paralelas si la intensidad de campo es de 5×10^4 V/m y la diferencia de potencial es 400 V? Resp. 8.00 mm

25.30. La diferencia de potencial entre dos placas paralelas es 600 V. Una carga de 6 μC se acelera a lo largo de toda la diferencia de potencial. ¿Cuál es la energía cinética impartida a la carga?

25.31. Calcule la energía cinética de una partícula alfa ($+2e$) que se acelera mediante una diferencia de potencial de 800 kV. Presente su respuesta tanto en electrón volts como en joules. Resp. 1.60 MeV, 2.56×10^{-13} J

25.32. Un acelerador lineal acelera un electrón a través de una diferencia de potencial de 4 MV. ¿Cuál es la energía de un electrón emergente en electrón volts y en joules?

25.33. Un electrón adquiere una energía de 2.8×10^{-15} J al pasar del punto A al punto B. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre esos puntos en volts? Resp. 17.5 kV

***25.34.** Demuestre que la energía potencial total de las tres cargas colocadas en las esquinas del triángulo equilátero que muestra la figura 25.11 está dada por:

$$-\frac{3kq^2}{d}$$

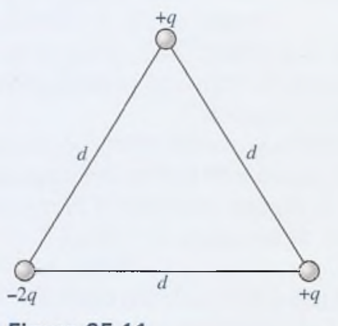


Figura 25.11

***25.35.** Suponga que $q = 1\ \mu C$ y $d = 20$ mm. ¿Cuál es la energía potencial del sistema de cargas de la figura 25.11? Resp. 1.35 J

***25.36.** A cierta distancia de una carga puntual, el potencial es de 1200 V y la intensidad del campo eléctrico en ese punto es de 400 N/C. ¿Cuál es la distancia a la carga y cuál es la magnitud de dicha carga?

Resp. 3 m, 400 nC

***25.37.** Dos grandes placas se encuentran separadas 80 mm y tienen una diferencia de potencial de 800 kV. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que actuaría sobre un electrón colocado en el punto medio entre esas placas? ¿Cuál sería la energía cinética del electrón al moverse de la placa de potencial bajo a la placa de potencial alto?

Resp. 1.60×10^{-12} N, 1.28×10^{-13} J

Preguntas para la reflexión crítica

25.38. La placa *A* tiene un potencial 600 V más alto que la placa *B*, la cual se encuentra 50 mm más abajo que la placa *A*. Una carga de $+2$ μC se desplaza de la placa *A* a la placa *B*. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas? ¿Cuáles son el signo y la magnitud del trabajo realizado por el campo eléctrico? ¿La energía potencial tiene un incremento o un decremento? Responda ahora las mismas preguntas para una carga de -2 μC que se traslada de *A* a *B*.

Resp. 12 kV/m, +1.20 mJ, disminuye, −1.2 mJ, aumenta

25.39. El punto *A* está a una distancia de $x = +a$ a la derecha de una carga de $+4$ μC. El campo eléctrico que se dirige a la derecha en el punto *A* es de 4000 N/C. ¿Cuál es la distancia *a*? ¿Cuál es el potencial en el punto *A*? ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial en el punto $x = -a$? Calcule la fuerza eléctrica y la energía potencial eléctrica cuando una carga de -2 nC se coloca en cada uno de esos puntos.

***25.40.** Los puntos *A*, *B* y *C* representan las esquinas de un triángulo equilátero que mide 100 mm por lado. En la base del triángulo, una carga de $+8$ μC está 100 mm a la izquierda de una carga de -8 μC. ¿Cuál es el potencial en el vértice *C*? ¿Cuál es el potencial en un punto *D* que se encuentra 20 mm a la izquierda de la carga de -8 μC? ¿Cuánto trabajo ha realizado el campo eléctrico al llevar una carga $+2$ μC del punto *C* al punto *D*?

Resp. 0, −2.70 MV, +5.40 J

***25.41.** Dos cargas, de $+12$ y -6 μC, están separadas 160 mm. ¿Cuál es el potencial en el punto medio *A* de la recta que une las dos cargas? ¿En qué punto *B* el potencial eléctrico es igual a cero?

***25.42.** Para las cargas y las distancias que muestra la figura 25.12, calcule el potencial en los puntos *A*, *B* y *C*? ¿Cuánto trabajo es realizado *por* el campo eléctrico al trasladar una carga de $+2$ μC desde *C* hasta *A*? ¿En qué punto *B* el potencial eléctrico es igual a cero?

Resp. $V_A = -600$ V,
$V_B = +600$ V,
$V_C = -300$ V,
trabajo = +0.6 mJ,
trabajo = −2.4 mJ

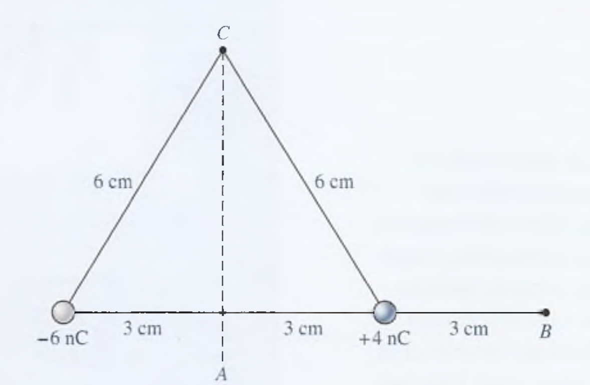


Figura 25.12

***25.43.** Las placas horizontales en el experimento de la gota de aceite de Millikan están separadas 20 mm. El diámetro de una gota de aceite en particular es 4 μm y la densidad del aceite es 900 kg/m³. Suponiendo que dos electrones se unen a la pequeña gota, ¿qué diferencia de potencial debe existir entre las placas para establecer el equilibrio?

26 Capacitancia



Los desfibriladores ventriculares usan grandes condensadores para aplicar un choque de corriente eléctrica al músculo cardiaco hasta que establezca su propio ritmo. Cada año mueren más de 250 000 estadounidenses debido a ataques cardiacos súbitos. Cada minuto que transcurre sin aplicar el desfibrilador, las oportunidades de vida de la víctima de un ataque disminuyen de 10% a 7%. En este capítulo se estudian las propiedades fundamentales de los condensadores. (*Fotografía © vol. 154/ Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá *capacitancia* y aplicará una relación entre *capacitancia*, *voltaje** aplicado y *carga* total.
2. Calculará la capacitancia de un *condensador de placas paralelas* cuando se conoce el área de las placas y su separación en un medio de constante dieléctrica conocida.
3. Escribirá y aplicará expresiones para calcular la *constante dieléctrica* como una función del voltaje, del campo eléctrico o de la capacitancia antes y después de la inserción de un dieléctrico.
4. Calculará la capacitancia equivalente de cierto número de condensadores conectados en *serie* y en *paralelo*.
5. Determinará la energía de un condensador cargado, cuando se cuenta con la información apropiada.

Cualquier conductor cargado puede considerarse un depósito o una fuente de carga eléctrica. Si un alambre conductor se conecta a ese depósito, la carga eléctrica puede transferirse para llevar a cabo un trabajo útil. En numerosas aplicaciones eléctricas se almacenan grandes cantidades de carga en un conductor o en un grupo de conductores. Cualquier aparato diseñado para guardar carga eléctrica se llama *condensador* o *capacitor*. En este capítulo estudiaremos la naturaleza y las aplicaciones de estos dispositivos.

26.1 Limitaciones al cargar un conductor

¿Cuánta carga eléctrica puede contener un conductor? En la práctica, ¿hay un límite en cuanto al número de electrones que pueden transferirse a un conductor o ser transferidos desde él? Suponga que se conecta un gran depósito de cargas positivas y negativas, como la Tierra, a un objeto conductor, como se muestra en la figura 26.1a. La energía necesaria para transferir electrones de la Tierra al conductor puede proporcionarla un aparato eléctrico llamado *batería*. Cargar el conductor es como bombear aire en un tanque vacío de acero (véase la figura 26.1b). Cuanto más aire se bombea al tanque, más aumenta la presión que se opone al flujo de más aire. De forma similar, cuanto más carga Q se transfiere al conductor, el potencial V del conductor se eleva, lo que dificulta transferirle más carga. Se dice que el aumento del potencial V es directamente proporcional a la carga Q que soporta el conductor. Simbólicamente esto se expresa así:

$$V \propto Q$$

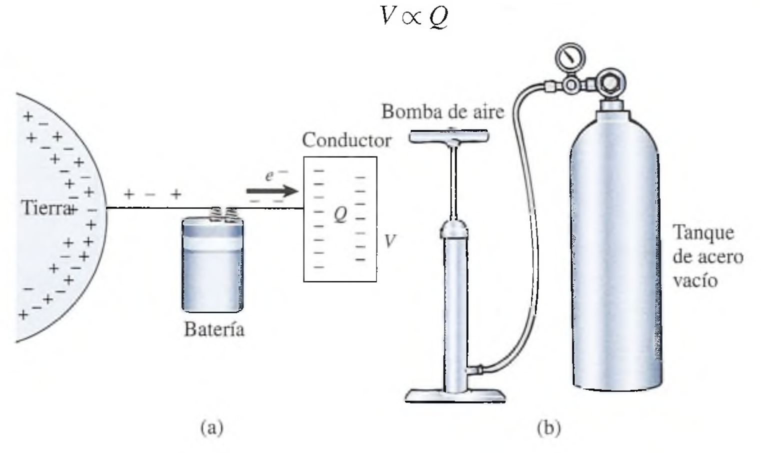


Figura 26.1 La carga de un conductor es como bombear aire a un tanque de acero vacío.

*A la diferencia entre los potenciales de dos puntos de un circuito, se le puede llamar también *voltaje* o *tensión*. Cuando se pasa a través de un elemento de un circuito se produce una *caída de potencial* o un *voltaje negativo*. Y a la diferencia de potencial producida por los generadores, capaz de elevar las cargas eléctricas de un potencial a otro más alto, es decir, una subida de potencial se le conoce como *fuerza electromotriz*. La fuerza electromotriz (fem) de un generador es la diferencia de potencial que se mide en sus bornes (sus puntas) cuando está en circuito abierto, es decir, sin suministrar corriente. Una fuente de voltaje es una fem.

Por tanto, la razón de la cantidad de carga Q al potencial eléctrico V producido será constante para un conductor específico. Esa razón refleja la capacidad del conductor para almacenar carga y se le llama su ***capacitancia C***.

$$C = \frac{Q}{V} \tag{26.1}$$

La unidad de capacitancia es el *coulomb por volt*, que se define como ***farad*** (F). Por consiguiente, *si un conductor tiene una capacitancia de un farad, la transferencia de un coulomb de carga al conductor elevará su potencial un volt.*

Volvamos ahora a la pregunta original acerca de las limitaciones que se presentan cuando se carga un conductor. Se ha dicho que cada conductor tiene una determinada capacitancia C para almacenar carga. El valor de C para un determinado conductor no es una función de la carga que soporta el conductor ni del potencial producido. En principio, la razón Q/V permanecerá constante mientras se añade carga indefinidamente, pero la capacitancia depende del *tamaño* y la *forma* del conductor, así como de la naturaleza del medio que lo rodea, o *medio circundante*.

Suponga que se trata de transferir una cantidad de carga indefinida Q a un conductor esférico de radio r, como se presenta en la figura 26.2. El aire que rodea al conductor es un aislante, a menudo llamado ***dieléctrico***, que contiene unas cuantas cargas en libertad de movimiento. La intensidad del campo eléctrico E y el potencial V en la superficie de la esfera están dados por

$$E = \frac{kQ}{r^2} \qquad \text{y} \qquad V = \frac{kQ}{r}$$

Puesto que el radio r es constante, tanto la intensidad del campo como el potencial en la superficie de la esfera aumentan en proporción directa a la carga Q. Sin embargo, hay un límite para la intensidad del campo que puede haber en un conductor sin que se ionice el aire a su alrededor. Cuando esto sucede, el aire se vuelve esencialmente un conductor y cualquier carga adicional que se coloque en la esfera se "fugará" al aire. Este valor límite de la intensidad del campo eléctrico en el que un material pierde sus propiedades aislantes se conoce como la ***rigidez dieléctrica*** de ese material.

La rigidez dieléctrica de un material es la intensidad del campo eléctrico para la que el material deja de ser un aislante y se convierte en un conductor.

La rigidez dieléctrica para el aire seco a 1 atm de presión es de 3 MN/C, aproximadamente. Puesto que la rigidez dieléctrica de un material varía considerablemente con las condiciones ambientales, como la presión atmosférica y la humedad, es difícil calcular valores exactos.

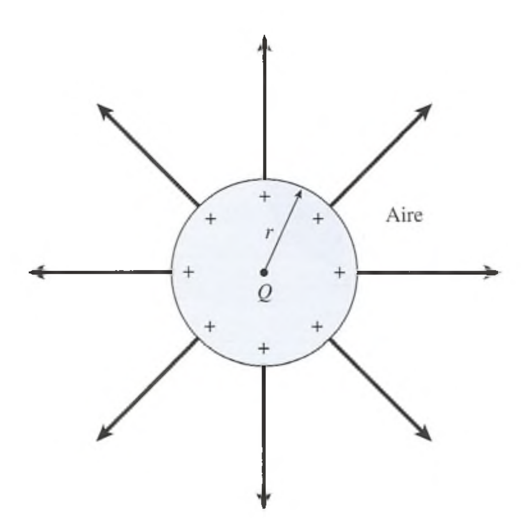


Figura 26.2 La cantidad de carga que puede transferirse a un conductor está limitada por la rigidez dieléctrica del medio circundante.

Ejemplo 26.1 ¿Cuál es la carga máxima que puede transferirse a un conductor esférico cuyo radio es de 50 cm? Suponga que está rodeado de aire.

Plan: La carga máxima queda determinada por la intensidad del campo eléctrico necesario para volver el aire circundante un conductor de electrones. Estableceremos la carga necesaria para alcanzar la rigidez dieléctrica del aire para un radio de 0.5 m.

Solución: Se tiene que $r = 0.50$ m y $E_{\text{máx}} = 3$ MN/C $= 3 \times 10^6$ N/C, de forma que la carga máxima Q será

$$E_{\text{máx}} = \frac{kQ}{r^2} \qquad \text{o} \qquad Q = \frac{r^2 E_{\text{máx}}}{k}$$

$$Q = \frac{(0.5\ \text{m})^2(3 \times 10^6\ \text{N/C})}{(9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)} = 8.33 \times 10^{-5}\ \text{C} \qquad \text{o} \qquad 83.3\ \mu\text{C}$$

En este ejemplo se ilustra la enorme magnitud del coulomb cuando se usa como unidad de carga electrostática.

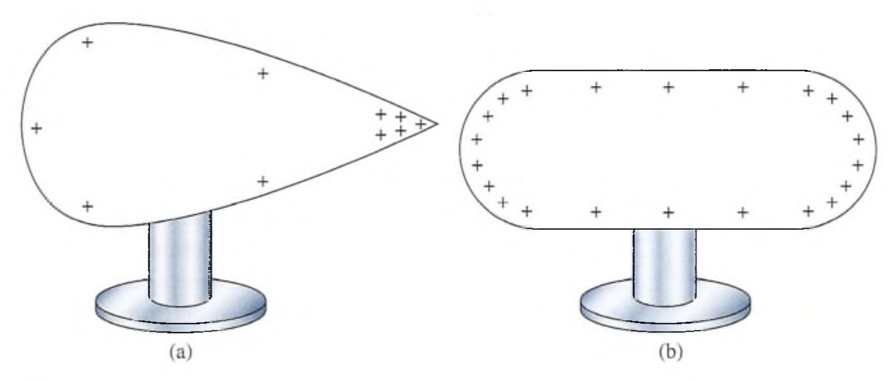


Figura 26.3 La densidad de carga en un conductor es mayor en las regiones donde la curvatura es más grande.

Observe que la cantidad de carga que puede soportar un conductor esférico disminuye con el radio de la esfera. Por tanto, los conductores pequeños generalmente pueden soportar menos carga. Pero la forma del conductor también influye en su capacidad para retener carga. Considere los conductores cargados que se ilustran en la figura 26.3. Si se probaran con un electroscopio, se descubriría que la carga situada en la superficie de un conductor se concentra en los puntos de mayor curvatura. Debido a la mayor densidad de carga en esas regiones, la intensidad del campo eléctrico es también más grande en las regiones donde la curvatura es mayor. Si la superficie se remodela y se le da una forma puntiaguda, la intensidad del campo puede volverse lo suficientemente grande como para ionizar el aire circundante. En esos sitios a veces se produce una lenta fuga de carga que da por resultado una ***descarga de corona***, que se observa como un tenue destello de color violeta cerca del conductor puntiagudo. Es importante eliminar todos los bordes afilados en los equipos eléctricos para minimizar esta fuga de carga.

26.2 El condensador

Cuando varios conductores se colocan cerca unos de otros, el potencial de cada uno se ve afectado por la presencia de los otros. Suponga que una placa A cargada negativamente se conecta a un electroscopio, como se ve en la figura 26.4. La divergencia de la hoja de oro del electroscopio proporciona una medida del potencial del conductor. Ahora imaginemos que otro conductor B se coloca en forma paralela a A, a una corta distancia de él. Cuando el segundo conductor se conecte a tierra, se inducirá en él una carga positiva a medida que los electrones sean forzados a fluir a tierra. La hoja de oro de inmediato se caerá ligeramente, lo que indica un descenso en el potencial del conductor A.

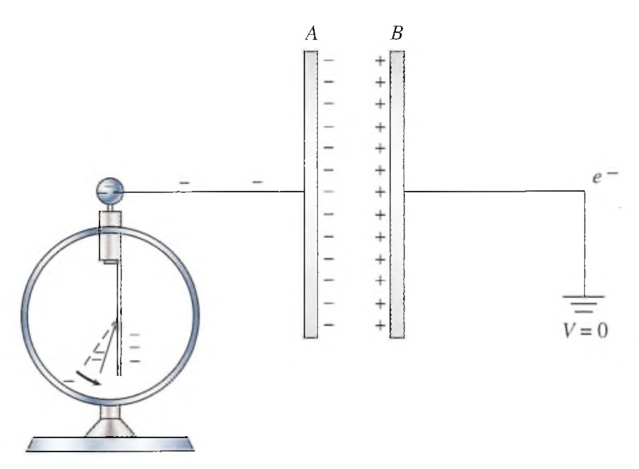


Figura 26.4 Un condensador consta de dos conductores con muy poca separación entre sí.

Debido a la presencia de la carga inducida en B, se requiere menos trabajo para transferir al conductor A unidades de carga adicionales. En otras palabras, la capacitancia del sistema para retener carga se ha incrementado a causa de la proximidad de los dos conductores. Dos conductores de ese tipo, muy próximos uno al otro, transportando cargas iguales y opuestas, constituyen un ***condensador***.

Un condensador está formado por dos conductores, muy cercanos entre sí, que transportan cargas iguales y opuestas.

El condensador más sencillo es el *condensador de placas paralelas*, ilustrado en la figura 26.4. Se puede comprobar que existe una diferencia de potencial entre dichas placas si se conecta a ellas una batería, como se muestra en la figura 26.5. Los electrones se transfieren de la placa A a la B, con lo que se produce una carga igual y opuesta sobre las placas. La capacitancia de este arreglo se define como sigue:

La capacitancia entre dos conductores que tienen cargas iguales y opuestas es la razón de la magnitud de la carga sobre cualquier conductor a la diferencia de potencial resultante entre los dos conductores.

La ecuación para la capacitancia de un condensador es la misma que la ecuación (26.1) para un conductor individual, excepto que en este caso el símbolo V se aplica a la *diferencia de potencial* y el símbolo Q se refiere a la carga en *cualquiera* de los conductores.

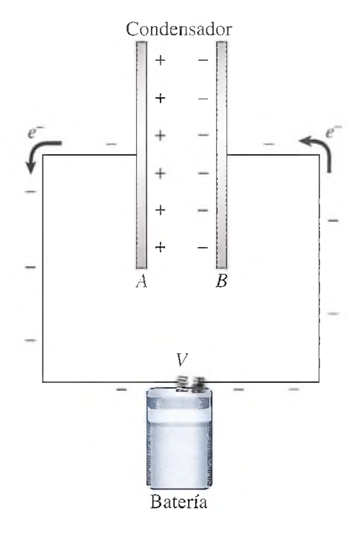


Figura 26.5 Carga de un condensador mediante la transferencia de carga de una placa a otra.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \textbf{(26.2)}$$

$$1\text{ F} = \frac{1\text{ C}}{1\text{ V}}$$

En vista de la enorme magnitud del coulomb como unidad de carga, el farad es una unidad de capacitancia demasiado grande para las aplicaciones prácticas. Por ello, con frecuencia se usan los submúltiplos siguientes:

$$1 \text{ microfarad } (\mu\text{F}) = 10^{-6}\text{ F}$$
$$1 \text{ picofarad } (\text{pF}) = 10^{-12}\text{ F}$$

No es raro encontrar capacitancias de unos cuantos picofarads en ciertas aplicaciones de comunicación eléctrica.

Ejemplo 26.2

Un condensador que tiene una capacitancia de 4 μF está conectado a una batería de 60 V. ¿Qué carga hay en él?

Solución: La carga *en* el condensador se relaciona con la magnitud de la carga en cualquiera de sus placas. De la ecuación (26.2) se tiene que

$$Q = CV = (4\ \mu\text{F})(60\text{ V}) = 240\ \mu\text{C}$$

26.3 Cálculo de la capacitancia

En general, un conductor de gran tamaño puede contener una gran cantidad de carga, y un condensador puede almacenar más carga que un simple conductor debido al efecto inductivo de dos conductores situados muy cerca uno del otro. Cuanto más cerca se encuentran estos conductores es mayor el efecto inductivo y, por tanto, aumenta también la facilidad de transferir una carga adicional de un conductor al otro. Sobre la base de estas observaciones se puede predecir que la *capacitancia de un condensador será directamente proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a su separación.* La relación exacta puede determinarse considerando la intensidad del campo eléctrico entre las placas del condensador.

La intensidad del campo eléctrico entre las placas del condensador cargado que aparece en la figura 26.6 puede determinarse con base en la ecuación

$$E = \frac{V}{d} \qquad \textbf{(26.3)}$$

donde V = diferencia de potencial entre las placas (V)
d = separación entre las placas (m)

Una ecuación alternativa para calcular la intensidad del campo eléctrico se dedujo en el capítulo 24, a partir de la ley de Gauss. En ella se relaciona la intensidad del campo, E, con la densidad de carga, σ, de la manera siguiente:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \qquad \textbf{(26.4)}$$

donde Q = carga en cualquier placa
A = área de cualquier placa
ϵ_0 = permitividad del vacío ($8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$)*

* Las unidades de la permitividad del vacío son $\frac{C^2}{Nm^2}$ o bien $\frac{F}{m}$ como lo demostramos a continuación: $\frac{F}{m} = \frac{C}{Vm} = \frac{C}{\frac{J}{C}m} = \frac{C^2}{Jm} = \frac{C^2}{Nmm} = \frac{C^2}{Nm^2}$.

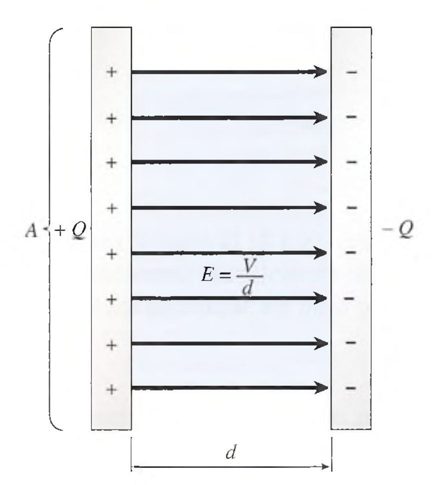


Figura 26.6 La capacitancia es directamente proporcional al área de cualquier placa e inversamente proporcional a la separación que hay entre las placas.

Para un condensador con vacío entre las placas se combinan las ecuaciones (26.3) y (26.4) para obtener

$$\frac{V}{d} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

Considerando que la capacitancia C es la razón de la carga al voltaje podemos reordenar los términos y obtener

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \textbf{(26.5)}$$

El subíndice 0 indica que existe vacío entre las placas del condensador. Para obtener una determinación aproximada también se puede usar la ecuación (26.5) cuando hay aire entre las placas del condensador.

Ejemplo 26.3

Las placas de un condensador en paralelo están separadas entre sí 2 cm a lo ancho y 4 cm a lo largo. ¿Cuál debe ser la separación en el aire de las placas de este condensador si la capacitancia total ha de ser de 4 pF?

Plan: La separación necesaria se determina resolviendo d de la ecuación 26.5, tras calcular el área de cada placa. Recuerde que 1 pF = 1 × 10^{-12} F.

Solución: El área de cada placa se obtiene como sigue:

$$A = (0.02 \text{ m})(0.04 \text{ m}) = 8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad \text{o} \qquad d = \frac{\epsilon_0 A}{C_0}$$

Puesto que $C = 4 \times 10^{-12}$ F y $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C²/N · m², se obtiene que

$$d = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{4 \times 10^{-12} \text{ F}} = 1.77 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La separación entre las placas debe ser de 1.77 mm.

Con frecuencia, los condensadores de placas paralelas están constituidos por un conjunto de placas conectadas en forma alternada, como se observa en la figura 26.7. Si se hace que uno de los juegos de placas se mueva el resultado es un ***condensador variable***. Si se hace gi-

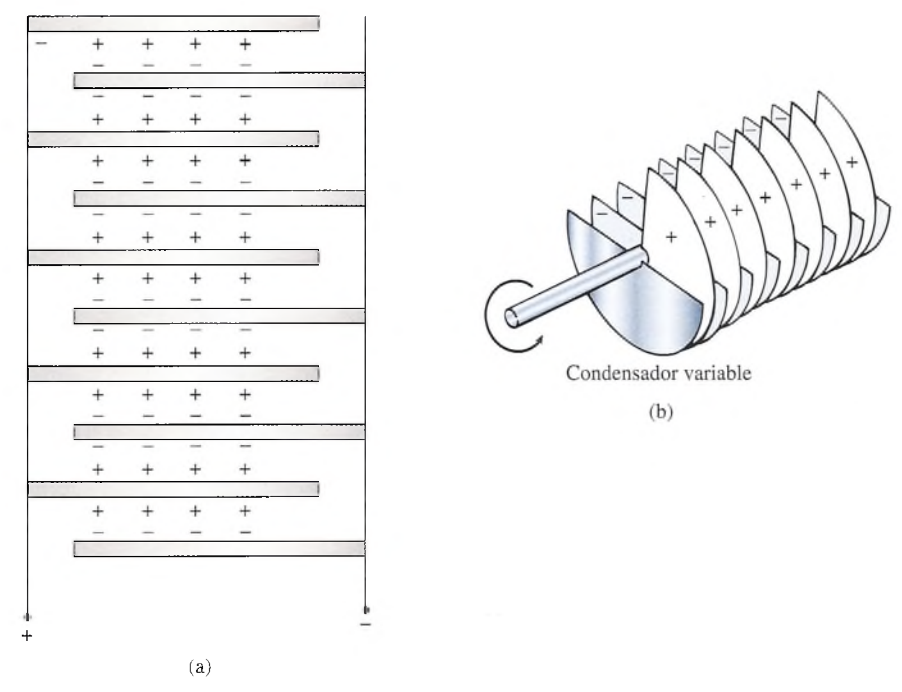


Figura 26.7 (a) Un condensador está formado de varias placas apiladas que alternan las cargas positiva y negativa. (b) En un condensador variable uno de los juegos de placas gira con relación a otro, lo que ocasiona un cambio en el área real.

rar un juego de placas con relación a otro, cambia el área real de las placas del condensador, lo que resulta en una variación en la capacitancia. Los condensadores variables se usan a veces en los circuitos de sintonía de receptores de radio.

26.4 Constante dieléctrica; permitividad relativa

La cantidad de carga que puede colocarse en un conductor en gran medida está determinada por la de la rigidez dieléctrica del medio circundante. De forma similar, la rigidez dieléctrica del material situado entre las placas de un condensador limita su capacidad para almacenar carga. La mayor parte de los condensadores tienen entre las placas un material no conductor, llamado *dieléctrico*, para proporcionar una rigidez *dieléctrica mayor* que la del aire. He aquí algunas de las ventajas de ello:

1. Un material dieléctrico proporciona una pequeña separación de las placas sin que hagan contacto.
2. Un dieléctrico aumenta la capacitancia de un condensador.
3. Se pueden usar altos voltajes sin peligro de que el dieléctrico alcance el punto de ruptura.
4. Un dieléctrico a menudo proporciona una mayor resistencia mecánica.

Entre los materiales dieléctricos comunes se puede mencionar la mica, el papel parafinado, la cerámica y los plásticos. Se pueden arrollar hojas alternadas de chapa metálica y papel parafinado para fabricar un condensador compacto, con una capacitancia de varios microfarads.

Para entender el efecto de un dieléctrico, consideraremos el material aislante de la figura 26.8 colocado entre las placas de un condensador que tienen una diferencia de potencial V. Los electrones en el dieléctrico no tienen la libertad de dejar sus átomos correspondientes, pero sí de desplazarse ligeramente (corrimiento) hacia la placa positiva. Los protones y los electrones de cada átomo se alinean del modo que se indica en la figura. Se dice que el material se ha polarizado y que los átomos forman *dipolos*. Todas las cargas positivas y negativas dentro de la elipse punteada de la figura 26.8a se neutralizan entre sí. Sin embargo, una capa de carga negativa sobre una superficie y una capa de carga positiva sobre la otra no se neutra-

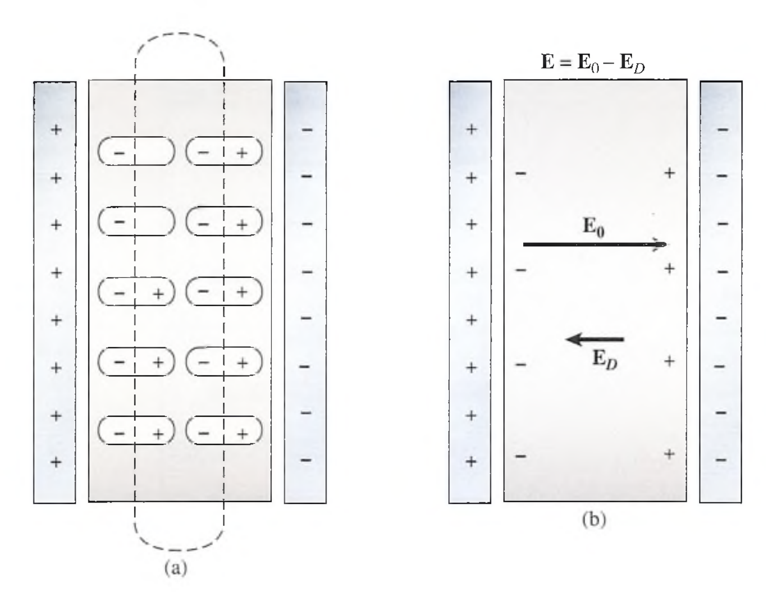


Figura 26.8 (a) La polarización de un dieléctrico cuando se le inserta entre las placas de un condensador. (b) La polarización resulta en una reducción general de la intensidad del campo eléctrico.

lizan. Se establece un campo eléctrico $\mathbf{E}_D$ en el dieléctrico que se *opone* al campo $\mathbf{E}_0$, el cual existiría aun sin el dieléctrico. La intensidad del campo resultante es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_D \tag{26.6}$$

Por tanto, la inserción de un dieléctrico origina una reducción en la intensidad del campo entre las placas del condensador.

Puesto que la diferencia de potencial V entre las placas es proporcional a la intensidad del campo eléctrico, $V = Ed$, una reducción en la intensidad causará una caída en la diferencia de potencial. Este hecho se ilustra con el ejemplo de la figura 26.9. La inserción de un dieléctrico origina una divergencia en la hoja de oro del electroscopio.

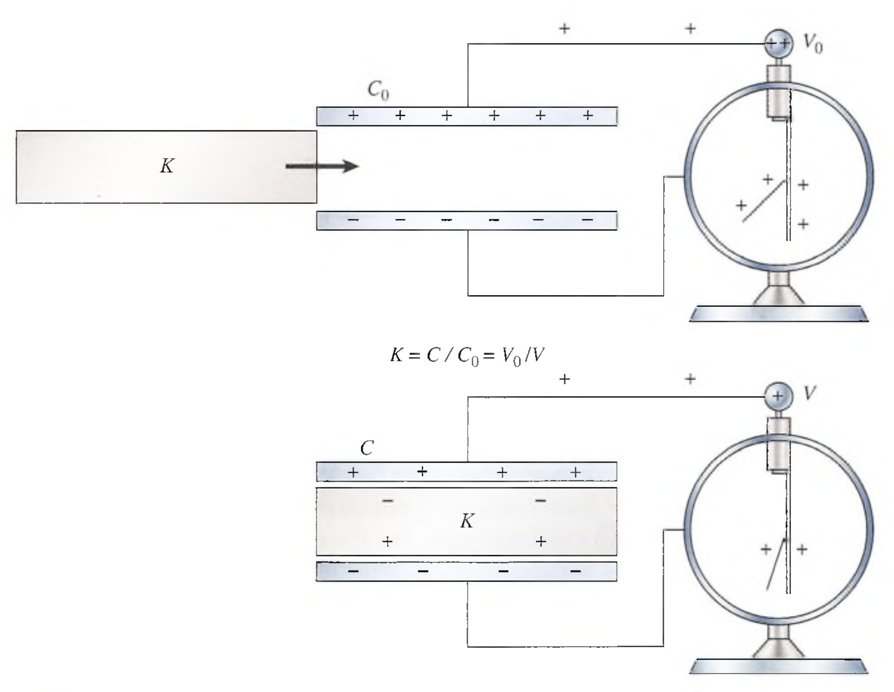


Figura 26.9 La inserción de un dieléctrico entre las placas de un condensador ocasiona una caída en la diferencia de potencia, lo que resulta en una mayor capacitancia.

Tabla 26.1

Constante dieléctrica y rigidez dieléctrica

Material	Constante dieléctrica media	Rigidez dielétrica media, MN/C
Aceite de transformador	4.0	16
Aire seco a 1 atm	1.006	3
Baquelita	7.0	16
Mica	5.0	200
Papel parafinado	2.0	51
Plástico	3.0	28
Plásticos de nitrocelulosa	9.0	250
Teflón	2.0	59
Vidrio	7.5	118

A partir de la definición de capacitancia, $C = Q/V$, se observa que una caída en el voltaje da por resultado un incremento en la capacitancia. Si representamos la capacitancia antes de insertar un dieléctrico por medio de C_0 y la capacitancia después de la inserción por C, la razón C/C_0 mostrará el incremento relativo en la capacitancia. Si bien es cierto que esta razón varía según el material empleado, su valor es constante para un dieléctrico en particular.

La constante dieléctrica K para un material concreto se define como la razón de la capacitancia C de un condensador de acuerdo con el material que hay entre sus placas y la capacitancia C_0 en el vacío.

$$K = \frac{C}{C_0} \tag{26.7}$$

La ***constante dieléctrica*** de diversos materiales aparece en la tabla 26.1 junto con la rigidez dieléctrica de los mismos materiales. Observe que, en el caso del aire, K tiene un valor de 1.0 aproximadamente.

Con base en las proporcionalidades, se demuestra que la constante dieléctrica también puede expresar así:

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} \tag{26.8}$$

donde V_0, E_0 = voltaje y campo eléctrico cuando hay vacío entre las placas del condensador
V, E = valores respectivos después de insertar el material dieléctrico

A partir de la ecuación (26.7), la capacitancia C de un condensador que tiene un dieléctrico entre sus placas es

$$C = KC_0$$

Sustituyendo en la ecuación (26.5) tenemos una relación para calcular directamente C:

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{26.9}$$

donde A es el área de las placas y d es su separación.

La constante ϵ_0 ya ha sido definida anteriormente como la ***permitividad*** en el vacío. Recuerde que al analizar la ley de Gauss vimos que ϵ_0 es en realidad la constante de proporcionalidad que relaciona la densidad de las líneas del campo eléctrico con la intensidad del

campo eléctrico en el vacío. La permitividad ϵ de un dieléctrico es mayor que ϵ_0 por un factor igual a la constante dieléctrica K. En consecuencia,

$$\epsilon = K\epsilon_0 \tag{26.10}$$

Con base en esta relación, se entiende por qué la constante dieléctrica, $K = \epsilon/\epsilon_0$, se conoce a veces como la *permitividad relativa*. Cuando sustituimos la ecuación (26.10) en la ecuación (26.9), la capacitancia para un condensador que contiene un dieléctrico es simplemente

$$C = \epsilon\frac{A}{d} \tag{26.11}$$

Esta relación es la ecuación más general para calcular la capacitancia. Cuando hay espacio vacío o aire entre las placas del condensador, $\epsilon = \epsilon_0$ y la ecuación (26.11) se reduce a la ecuación (26.5).

Ejemplo 26.4

Un determinado condensador tiene una capacitancia de 4 μF cuando sus placas están separadas 0.2 mm por espacio vacío. Se utiliza una batería para cargar las placas a una diferencia de potencial de 500 V y luego se desconecta del sistema. (a) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre las placas si una hoja de mica de 0.2 mm de espesor se inserta entre las placas? (b) ¿Cuál será la capacitancia después de que se inserta el dieléctrico? (c) ¿Cuál es la permitividad de la mica?

Plan: Cuando se inserta el dieléctrico el voltaje del condensador cae debido a la carga inducida en el dieléctrico. Ello produce un descenso en el campo real que hay entre las placas. Por tanto, el voltaje disminuirá a una cantidad determinada por la constante dieléctrica de la mica. Ahora habrá mayor capacitancia para retener carga, o una capacitancia *aumentada*. La permitividad real del dieléctrico es la razón de la capacitancia nueva a la original.

Solución (a): La constante dieléctrica de la mica es $K = 5$. Por tanto, con la ecuación (26.8) resulta

$$K = \frac{V_0}{V} \qquad \text{o} \qquad V = \frac{V_0}{K} = \frac{500\ \text{V}}{5} = 100\ \text{V}$$

Solución (b): De la ecuación (26.7),

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{o} \qquad C = KC_0 = 5(4\ \mu\text{F}) = 20\ \mu\text{F}$$

Solución (c): La permitividad se calcula a partir de la ecuación (26.10):

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \qquad \text{o} \qquad \epsilon = K\epsilon_0 = 5(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)$$

$$\epsilon = 44.2 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

Cabe notar que la carga en el condensador es la misma antes y después de la inserción, ya que la fuente de voltaje no permanece conectada al condensador.

Ejemplo 26.5

Suponga que la fuente de voltaje permanece conectada al condensador de 4 μF del ejemplo 26.4. ¿Cuál será el aumento de la carga como resultado de la inserción de una hoja de mica?

Plan: El voltaje permanece a 500 V cuando se inserta el dieléctrico. Puesto que la capacitancia aumenta debido a éste, debe resultar un incremento en la carga. La carga será la diferencia entre la carga final y la inicial.

Solución: La carga inicial en el condensador era

$$Q_0 = C_0V_0 = (4\ \mu\text{F})(500\ \text{V}) = 2\,000\ \mu\text{C}$$

Al insertar la mica la capacitancia aumenta de 4μF a 20 μF ($K = 5$):

$$Q = CV = (20\ \mu\text{F})(500\ \text{V}) = 10\,000\ \mu\text{C}$$

Por tanto, el *incremento* en la carga es

$$\Delta Q = 10\,000\ \mu\text{C} - 2000\ \mu\text{C} = 8000\ \mu\text{C}$$

Estos 8 000 μC se deben a la capacitancia aumentada al mismo voltaje.

26.5 Condensadores en paralelo y en serie

A menudo los circuitos eléctricos están formados por dos o más condensadores conectados en grupo. Para conocer el efecto de esta agrupación es conveniente recurrir al diagrama del circuito, en el que los dispositivos eléctricos se representan mediante símbolos. En la figura 26.10 se ilustran cuatro de los símbolos más comunes relacionados con los condensadores. El extremo de mayor potencial de una batería se indica mediante una línea más larga. El extremo de mayor potencial de un condensador se representa con una línea recta, en tanto que con una línea curva se denota el lado de menor potencial. Una flecha indica un condensador variable. Una conexión a *tierra* es una conexión eléctrica entre los alambres de un aparato y su chasís metálico o cualquier otro depósito grande de cargas positivas y negativas.

En primer lugar, consideremos el efecto de un grupo de condensadores conectados a lo largo de una sola trayectoria, como se muestra en la figura 26.11. Ese tipo de conexión, en la que la placa positiva de un condensador está conectada a la placa negativa de otro, recibe el nombre de ***conexión en serie***. La batería mantiene la diferencia de potencial V entre la placa

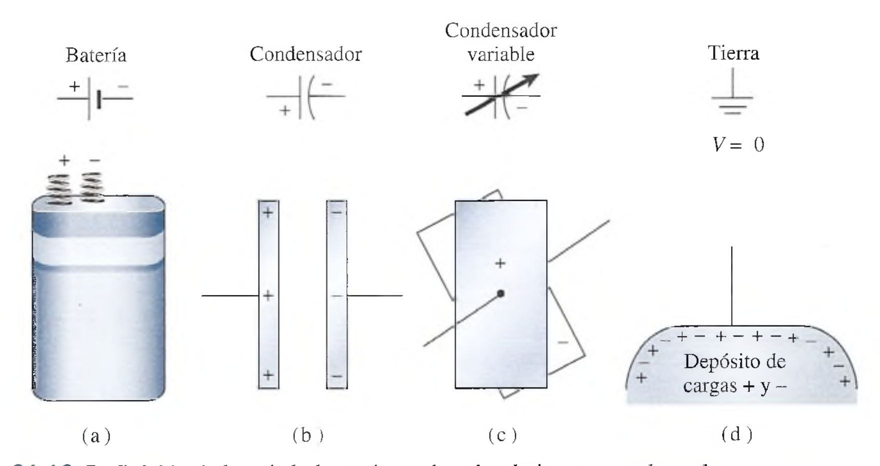


Figura 26.10 Definición de los símbolos más usados al trabajar con condensadores.

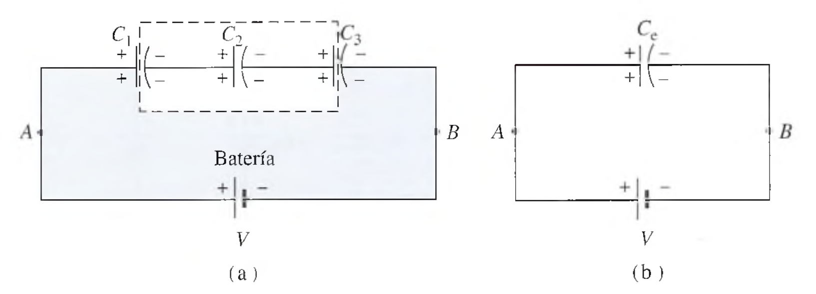


Figura 26.11 Cálculo de la capacitancia equivalente de un grupo de condensadores conectados en serie.

positiva de C_1 y la negativa de C_3, transfiriendo electrones de una a la otra. La carga no puede pasar entre las placas de un condensador; por tanto, toda la carga que se halla dentro del paralelogramo punteado en la figura 26.11a es carga inducida; debido a ello, la carga en cada condensador es idéntica. Escribimos

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

donde Q es la carga efectiva transferida por medio de la batería.

Los tres condensadores pueden reemplazarse por una capacitancia equivalente C_e sin que cambie el efecto externo. Ahora conviene deducir una expresión para calcular esta capacitancia equivalente en el caso de conexiones en serie. Puesto que la diferencia de potencial entre A y B es independiente de la trayectoria, el voltaje de la batería debe ser igual a la suma de las caídas de potencial a través de cada condensador

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \qquad \textbf{(26.12)}$$

Si recordamos que la capacitancia C se define por la razón Q/V, la ecuación (26.12) queda

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Para una conexión en serie, $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$, así que podemos dividir entre la carga, como sigue

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad \textit{Conexión en serie} \qquad \textbf{(26.13)}$$



¿Sabe usted cuánto tiempo pasan los satélites expuestos a la luz solar para cargar sus baterías? Los de órbita terrestre baja requieren 60 min de luz del Sol por cada 35 min de oscuridad. Los de órbita terrestre geosíncrona (GEO), que se hallan mucho más distantes de nuestro planeta, pasan menos tiempo en las sombra proyectada por la Tierra. Por cada 1.2 horas de oscuridad requieren 22.8 horas de luz solar. Durante el periodo de oscuridad la potencia que necesitan para funcionar procede completamente de las baterías.

La capacitancia efectiva total para *dos* condensadores en serie es

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad \textbf{(26.14)}$$

Se deja como ejercicio la deducción de la ecuación 26.14.

Ahora consideremos un grupo de condensadores conectados de tal modo que la carga pueda compartirse entre dos o más conductores. Cuando varios condensadores se conectan directamente a la misma fuente de potencial, como en la figura 26.12, se dice que están conectados en *paralelo*. Con base en la definición de capacitancia, la carga en cada condensador paralelo es

$$Q_1 = C_1 V_1 \qquad Q_2 = C_2 V_2 \qquad Q_3 = C_3 V_3$$

La carga total Q es igual a la suma de las cargas individuales.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad \textbf{(26.15)}$$

La capacitancia equivalente del circuito completo es $Q = CV$, de modo que la ecuación (26.15) se transforma en

$$CV = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 \qquad \textbf{(26.16)}$$

Para una ***conexión en paralelo***,

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

ya que todos los condensadores están conectados a la misma diferencia de potencial. Por tanto, dividiendo entre los voltajes la ecuación (26.16) se obtiene

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad \textit{Conexión en paralelo} \qquad \textbf{(26.17)}$$

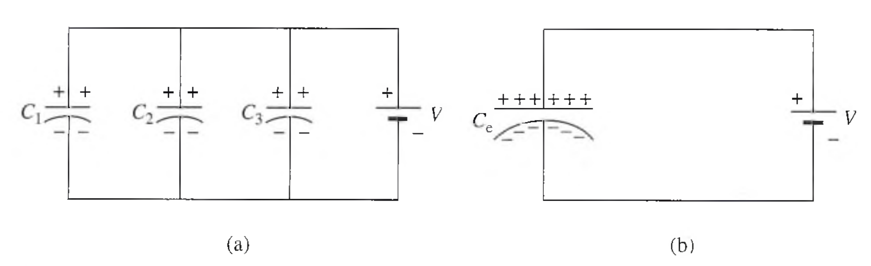


Figura 26.12 Capacitancia equivalente de un conjunto de condensadores conectados en paralelo.

Ejemplo 26.6

(a) Determine la capacitancia equivalente del circuito que aparece en la figura 26.13a. (b) Determine la carga de cada condensador. (c) ¿Cuál es el voltaje que hay en el condensador de 4 μF?

Plan: Empezaremos en la región más alejada de la fuente de voltaje usando las reglas para combinar condensadores en paralelo y en serie. De esta forma, obtendremos circuitos cada vez más sencillos hasta obtener una sola capacitancia equivalente en serie con la fuente. La carga en toda la red y a través de cada condensador que hay en ella se determina con base en el hecho de que $Q = CV$ y el conocimiento de cómo se distribuye el voltaje en condensadores conectados en serie y en paralelo.

Solución (a): Los condensadores de 4 y de 2 μF están en serie. Su capacitancia combinada se determina a partir de la ecuación (26.14).

$$C_{2,4} = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{(2\ \mu\text{F})(4\ \mu\text{F})}{2\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F}}$$
$$= 1.33\ \mu\text{F}$$

Estos dos condensadores pueden sustituirse por su capacitancia equivalente, como se muestra en la figura 26.13b. Los dos condensadores restantes están conectados en paralelo; por tanto, la capacitancia equivalente es

$$C_e = C_3 + C_{2,4} = 3\ \mu\text{F} + 1.33\ \mu\text{F}$$
$$= 4.33\ \mu\text{F}$$

Solución (b): La carga total dentro de la red es

$$Q = C_e V = (4.33\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 520\ \mu\text{C}$$

La carga Q_3 en el condensador de 3 μF es

$$Q_3 = C_3 V = (3\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 360\ \mu\text{C}$$

El resto de la carga,

$$Q - Q_3 = 520\ \mu\text{C} - 360\ \mu\text{C} = 160\ \mu\text{C}$$

debe depositarse en los condensadores en serie. Luego

$$Q_2 = Q_4 = 160\ \mu\text{C}$$

Para comprobar estos valores para Q_2 y Q_4, la capacitancia equivalente de las dos series de condensadores se multiplica por la caída de voltaje correspondiente:

$$Q_{2,4} = C_{2,4}\, V = (1.33\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 160\ \mu\text{C}$$

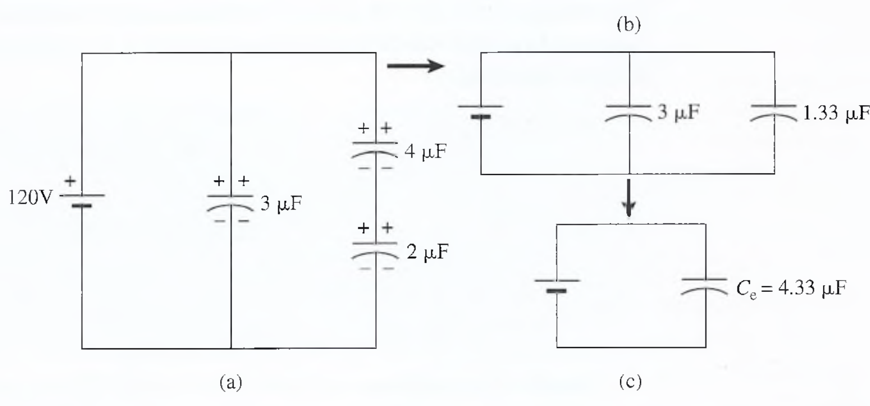


Figura 26.13 Simplificación de un problema sustituyendo valores equivalentes por capacitancia.

Solución (c): el voltaje a través del condensador de 4 μF es

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{160\ \mu\text{C}}{4\ \mu\text{F}} = 40\text{ V}$$

Los 80 V restantes corresponden a la caída de voltaje a través del condensador de 2 μF.

En la tabla 26.2 se resumen los datos generales acerca de los condensadores conectados en serie y en paralelo.

Tabla 26.2

Circuitos condensadores

Tipo de circuito	Circuitos en serie	Circuitos en paralelo
Carga Q	$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$
Voltaje V	$V = V_1 + V_2 + V_3$	$V = V_1 = V_2 = V_3$
Capacitancia equivalente	$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$	$C_e = C_1 + C_2 + C_3$
Capacitancia para dos elementos	$C_e = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$	$C_e = C_1 + C_2$

26.6 Energía de un condensador cargado

Considere un condensador que estaba descargado inicialmente. Cuando una fuente de diferencia de potencial se conecta a él, la diferencia de potencial entre las placas se incrementa en la medida que se transfiere carga. A medida que se acumula más y más carga en el condensador, se vuelve cada vez más difícil transferir una carga adicional. Supongamos ahora que se representa con Q la carga total transferida y la diferencia de potencial final con V. La *diferencia* de potencial promedio a través de la cual se mueve la carga se expresa de este modo:

$$V_{av} = \frac{V_{\text{final}} + V_{\text{inicial}}}{2} = \frac{V + 0}{2} = \frac{1}{2}V$$

Puesto que la carga total transferida es Q, el trabajo total realizado en contra de las fuerzas eléctricas es igual al producto de Q por la diferencia de potencial promedio V_{prom}. Por tanto,

$$\text{Trabajo} = Q\left(\frac{1}{2}V\right) = \frac{1}{2}QV$$

Este trabajo equivale a la energía potencial electrostática de un condensador cargado. Si partimos de la definición de la capacitancia ($Q = CV$), esta energía potencial puede escribirse de diversas maneras:

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} \qquad \textbf{(26.18)}$$

Cuando C se expresa en farads, V en volts y Q en coulombs, la energía potencial estará expresada en joules. Estas ecuaciones se aplican por igual a todos los condensadores, independientemente de cómo estén construidos.

Resumen y repaso

Resumen

El almacenamiento de cargas eléctricas es un proceso necesario cuando se requiere suministrar grandes cantidades de energía eléctrica para satisfacer la demanda de un mundo industrial moderno. En este capítulo estudiamos los principios básicos que determinan la cantidad de carga que es posible almacenar en los condensadores. Hemos analizado la inserción de condensadores en los circuitos eléctricos y los factores que afectan la distribución de la carga en esos circuitos. A continuación se resumen los conceptos fundamentales.

- La capacitancia es la razón de la carga Q al potencial V para un conductor concreto. En el caso de dos placas con cargas opuestas, la Q se refiere a la carga en cada placa y la V a la diferencia de potencial entre ellas.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad 1 \text{ farad (F)} = \frac{1 \text{ coulomb (C)}}{1 \text{ volt (V)}}$$

Capacitancia

- La rigidez dieléctrica es el valor de E para el cual un material específico deja de ser aislador y se convierte en conductor. En el caso del aire, dicho valor es

$$E = \frac{kQ}{r^2} = 3 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Rigidez dieléctrica del aire

- En un condensador de placas paralelas, el material que se encuentra entre las placas se conoce como dieléctrico. La inserción de dicho material produce un efecto en el campo eléctrico y el potencial entre las placas. Por tanto, su presencia cambia la capacitancia. La constante dieléctrica K para un material en particular es la razón de la capacitancia con el dieléctrico C a la capacitancia para un vacío C_0.

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad K = \frac{V_0}{V} \qquad K = \frac{E_0}{E}$$

Constante dieléctrica

- La permitividad de un dieléctrico es mayor que la permitividad de un vacío por un factor igual a la constante dieléctrica. Por esta razón, K se conoce a veces como la *permitividad relativa*.

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \qquad \epsilon = K\epsilon_0$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

- La capacitancia de un condensador de placas paralelas depende del área superficial A de cada placa, de la separación entre las placas, d, y de la permitividad o constante dieléctrica. La ecuación general es

$$C = \epsilon\frac{A}{d} \qquad C = K\epsilon_0\frac{A}{d}$$

Capacitancia

Para un vacío, $K = 1$ en la relación anterior.

- Los condensadores se pueden conectar en serie, como se muestra en la figura 26.11, o en paralelo, como en la figura 26.12.

  a. Para *conexiones en serie*, la carga de cada condensador es igual que la carga total, la diferencia de potencial a través de la batería es igual a la suma de las caídas de voltaje en cada condensador, y la capacitancia neta se halla mediante

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Conexiones en serie

  b. En *conexiones en paralelo*, la carga total es igual a la suma de las cargas a través de cada condensador, la caída de voltaje a través de cada condensador es igual que la caída correspondiente a través de la batería, y la capacitancia efectiva es igual a la suma de las capacitancias individuales

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$V_B = V_1 = V_2 = V_3$$

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3$$

Conexiones en paralelo

- La energía potencial almacenada en un condensador cargado se determina mediante cualquiera de las relaciones siguientes:

$$U = \frac{1}{2}QV \qquad U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad U = \frac{Q^2}{2C}$$

Cuando C se expresa en *farads*, V en *volts* y Q en *coulombs*, la energía potencial estará expresada en *joules*.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

26.1. Comente varios factores que limitan la capacidad de un conductor para almacenar carga.

26.2. Se bombea aire de un depósito de metal a otro, lo que crea un vacío parcial en uno de ellos y alta presión en el otro. Al quitar la bomba, la energía potencial se almacena. La energía es liberada si los dos depósitos vuelven a conectarse entre sí y ambos llegan a estar a la misma presión. ¿En qué forma se asemeja a la carga y la descarga de un condensador este ejemplo mecánico?

26.3. Con frecuencia se ve que saltan chispas de las correas de impulsión de cuero de las máquinas. Explique por qué.

26.4. La botella de Leyden es un condensador que consiste en un frasco de vidrio forrado por dentro y por fuera con papel de estaño, como se muestra en la figura 26.14. El contacto con el forro interior se realiza mediante una cadena de metal conectada a la varilla metálica central. Con base en la figura, explique cómo se carga el condensador. ¿Qué función desempeña el alambre a tierra? ¿Qué propósito tiene el vidrio?

26.5. ¿Se puede considerar que un rayo es la descarga de un condensador? Explique su respuesta.

26.6. Comente la afirmación siguiente: la permitividad es la medida de la facilidad con la que un dieléctrico permite el establecimiento de líneas de campo eléctrico dentro del propio dieléctrico.

26.7. Un dieléctrico con mayor permitividad da lugar al almacenamiento de mayores cantidades de carga. Explique esta situación.

26.8. Establezca la diferencia entre la rigidez dieléctrica de un material y su constante dieléctrica. ¿Qué parte desempeña cada una en el diseño de un condensador?

26.9. El término *voltaje de ruptura* se usa a menudo en electrónica en relación con los condensadores. ¿Cómo definiría usted ese término? ¿En qué aspectos se distingue de la rigidez dieléctrica?

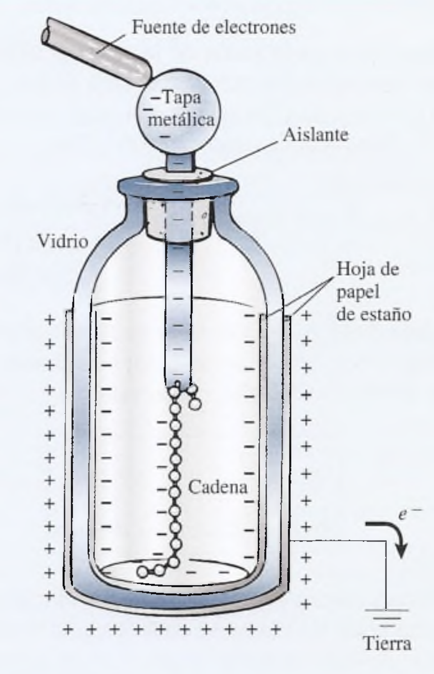


Figura 26.14 La botella de Leyden.

26.10. Si dos cargas puntuales están rodeadas por un dieléctrico, ¿aumentará o disminuirá la fuerza que cada una ejerce sobre la otra?

26.11. La unidad de permitividad es el $C^2/N \cdot m^2$. Demuestre que la permitividad puede expresarse como farad por metro.

26.12. Demuestre que cada una de las expresiones de la energía potencial, como aparecen en la ecuación (26.18), proporciona una unidad de energía apropiada (el joule).

Problemas

Sección 26.2 El condensador

26.1. ¿Cuál es la carga máxima que puede acumularse en una esfera metálica de 30 mm de diámetro rodeada de aire? Resp. 75 nC

26.2. ¿Cuánta carga puede acumularse en una esfera metálica de 40 mm de radio si está sumergida en aceite de transformador cuya rigidez dieléctrica es de 16 MV/m?

26.3. ¿Cuál sería el radio de una esfera de metal en el aire si ésta pudiera contener teóricamente una carga de 1 C? Resp. 54.8 m

26.4. Un condensador de placas paralelas de 28 μF está conectado a una fuente de diferencia de potencial de 120 V. ¿Cuánta carga se almacenará en este condensador?

26.5. Una diferencia de potencial de 110 V se aplica a través de las placas de un condensador de placas paralelas. Si la carga total en cada placa es de 1200 μC, ¿cuál es la capacitancia? Resp. 10.9 μF

26.6. Determine la capacitancia de un condensador de placas paralelas si en cada placa se acumula una carga de 1600 μC cuando la diferencia de potencial es de 80 V.

26.7. ¿Qué diferencia de potencial se requiere para almacenar una carga de 800 μC en un condensador de 40 μF? Resp. 20 V

26.8. Escriba una ecuación para el potencial en la superficie de una esfera de radio r en función de la permitividad del medio circundante. Demuestre que la capacitancia de una esfera semejante está dada por $C = 4\pi\epsilon r$.

***26.9.** Un condensador esférico tiene un radio de 50 mm y está rodeado por un medio cuya permitividad es de $3 = 10^{-11}$ C^2/N · m^2. ¿Cuánta carga se puede transferir a esta esfera con una diferencia de potencial de 400 V? Resp. 4.71×10^{-14} C

Sección 26.3 Cálculo de la capacitancia

26.10. Entre las placas de un condensador de 5 μF hay una separación de 0.3 mm de aire. ¿Cuál será la carga en cada placa si hay una diferencia de potencial de 400 V? ¿Cuál es el área de cada placa?

26.11. Las placas de un condensador están separadas 3 mm y tienen un área de 0.04 m^2. ¿Cuál es la capacitancia si el dieléctrico es aire? Resp. 118 pF

26.12. Las placas de un condensador tienen un área de 0.034 m^2 y una separación de aire de 2 mm. La diferencia de potencial entre las placas es de 200 V. ¿Cuál es la capacitancia y cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas? ¿Cuánta carga hay en cada placa?

26.13. Un condensador, cuyas placas tienen un área de 0.06 m^2 y una separación de 4 mm entre ellas, tiene una diferencia de potencial de 300 V cuando el dieléctrico es el aire. ¿Cuál es la capacitancia con los dieléctricos aire ($K = 1$) y mica ($K = 5$)? Resp. 133 pF, 664 pF

26.14. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico para la mica y el aire en el problema 26.13?

26.15. Determine la capacitancia de un condensador de placas paralelas si el área de cada placa es de 0.08 m^2, la separación entre las placas es de 4 mm y el dieléctrico es (a) aire o (b) papel recubierto de parafina ($K = 2$)? Resp. (a) 177 pF, (b) 354 pF

26.16. Las dos placas paralelas de un condensador tienen una separación de 4.0 mm y el área de cada una de ellas es de 0.03 m^2. El dieléctrico es vidrio ($K = 7.5$) y el voltaje de las placas es de 800 V. ¿Cuál es la carga en cada placa y cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas?

***26.17.** Se desea fabricar un condensador de placas paralelas con capacitancia de 2.0 nF, utilizando mica ($K = 5$) como dieléctrico, de modo que pueda soportar una diferencia de potencial máxima de 3000 V. La rigidez dieléctrica de la mica es de 200 MV/m. ¿Cuál es el área mínima que pueden tener las placas del condensador? Resp. 6.78×10^{-4} m^2

Sección 26.5 Condensadores en paralelo y en serie

26.18. Calcule la capacitancia equivalente de un condensador de 6 μF y otro de 12 μF conectados (a) en serie y (b) en paralelo.

26.19. Determine la capacitancia efectiva de un condensador de 6 μF y otro de 15 μF conectados (a) en serie y (b) en paralelo. Resp. 4.29 μF, 21.0 μF

26.20. ¿Cuál es la capacitancia equivalente para condensadores de 4, 7 y 12 μF conectados (a) en serie y (b) en paralelo?

26.21. Determine la capacitancia equivalente para condensadores de 2, 6 y 8 μF conectados (a) en serie y (b) en paralelo. Resp. 1.26 μF, 16 μF

26.22. Dos condensadores de 20 y 60 μF están conectados en paralelo. Después la pareja se conecta en serie con un condensador de 40 μF. ¿Cuál es la capacitancia equivalente?

***26.23.** Si se establece una diferencia de potencial de 80 V a través del grupo de condensadores del problema 26.22, ¿cuál será la carga en el condensador de 40 μF? ¿Cuál será la carga en el condensador de 20 μF? Resp. 2136 μC, 534 μC

***26.24.** Calcule la capacitancia equivalente de un circuito en el cual un condensador de 6 μF está conectado en serie con dos condensadores en paralelo cuyas capacitancias son 5 y 4 μF.

***26.25.** ¿Cuál es la capacitancia equivalente para el circuito ilustrado en la figura 26-15? Resp. 6.00 μF

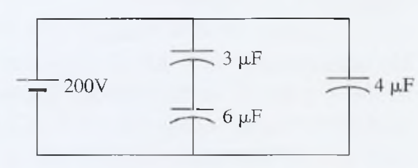


Figura 26.15

***26.26.** ¿Cuál es la carga en el condensador de 4 μF de la figura 26.15? ¿Cuál es el voltaje a través del condensador de 6 μF?

***26.27.** Un condensador de 6 y otro de 3 μF están conectados en serie con una batería de 24 V. ¿Cuáles son la carga y el voltaje a través de cada condensador?

Resp. $V_3 = 16.0$ V, $Q = 48.0\ \mu$C, $V_6 = 8.00$ V, $Q_6 = 48.0\ \mu$C

***26.28.** Si los condensadores de 6 y 3 μF del problema 26.27 se vuelven a conectar en paralelo con una batería de 24 V, ¿cuáles serán la carga y el voltaje a través de cada condensador?

***26.29.** Calcule la capacitancia equivalente para todo el circuito mostrado en la figura 26.16. ¿Cuáles es la carga total sobre la capacitancia equivalente?

Resp. 1.74 μF, 20.9 μF

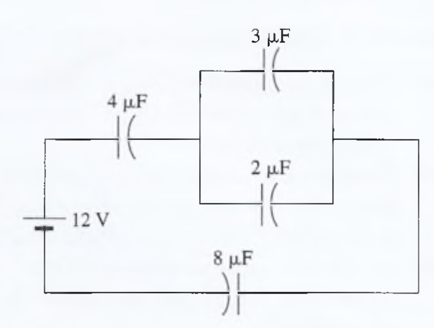


Figura 26.16

***26.30.** ¿Cuáles son la carga y el voltaje a través de cada uno de los condensadores de la figura 26.16?

Sección 26.6 Energía de un condensador cargado

26.31. ¿Cuánta energía potencial se encuentra almacenada en el campo eléctrico de un condensador de 200 μF cuando éste se carga con un voltaje de 2400 V?

Resp. 576 J

26.32. ¿Cuál es la energía almacenada en un condensador de 25 μF cuando la carga en cada una de sus placas es de 2400 μC? ¿Cuál es el voltaje a través del condensador?

26.33. ¿Cuánto trabajo se requiere para cargar un condensador hasta una diferencia de potencial de 30 kV si hay 800 μC en cada placa? Resp. 12.0 J

***26.34.** Las placas paralelas de un condensador tienen un área de 4 cm^2 y una separación de 2 mm. Un dieléctrico cuya constante es $K = 4.3$ se coloca entre las placas y el condensador se conecta a una batería de 100 V. ¿Cuánta energía se almacena en el condensador?

Problemas adicionales

26.35. ¿Cuál es el voltaje de ruptura de un condensador con dieléctrico de vidrio ($K = 7.5$) si la separación entre sus placas es de 4 mm? La rigidez dieléctrica promedio es de 118 MV/m. Resp. 472 kV

26.36. Un condensador tiene una diferencia de potencial de 240 V, placas con un área de 5 cm^2 y una separación entre ellas de 3 mm. ¿Cuáles son la capacitancia y el campo eléctrico que existe entre las placas? ¿Cuál es la carga en cada placa?

26.37. Suponga que el condensador del problema 26.36 se desconecta de la batería de 240 V y luego se inserta mica ($K = 5$) entre las placas. ¿Cuáles son los nuevos valores de voltaje y campo eléctrico? Si se vuelve a conectar la batería de 240 V, ¿cuál será la carga sobre las placas?

Resp. 48.0 V, 1.60×10^4 V/m, 1.78 nC

26.38. Un condensador de 6 μF se carga con una batería de 24 V y luego se desconecta. Cuando se inserta un dieléctrico, el voltaje cae a 6 V. ¿Cuál es la carga total en el condensador después que la batería se ha conectado de nuevo?

26.39. Un condensador está formado por 30 placas paralelas, cada una de 20×20 cm. Si entre cada placa hay una separación de 2 mm de aire seco, ¿cuál es la capacitancia total? Resp. 5.13 nF

***26.40.** Cuatro condensadores, A, B, C y D, tienen capacitancias de 12, 16, 20 y 26 μF, respectivamente. Los condensadores A y B están conectados en paralelo. Después, la combinación se conecta en serie con C y D. ¿Cuál es la capacitancia efectiva?

***26.41.** Considere el circuito ilustrado en la figura 26.17. ¿Cuál es la capacitancia equivalente del circuito? ¿Cuáles son la carga y el voltaje a través del condensador de 2 μF? Resp. 6.00 μF, 18 μC, 9.00 V

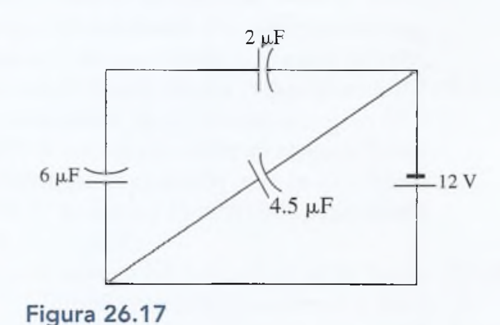


Figura 26.17

***26.42.** Dos condensadores idénticos de 20 μF, A y B, se conectan en paralelo con una batería de 12 V. ¿Cuál es la carga en cada condensador si se inserta una

lámina de porcelana ($K = 6$) entre las placas del condensador B y la batería permanece conectada?

***26.43.** Tres condensadores, A, B y C, tienen capacitancias de 2, 4 y 6 μF, respectivamente. Calcule la capacitancia equivalente si los tres están conectados en serie con una fuente de 800 V. ¿Cuáles son la carga y el voltaje a través del condensador de 4 μF?
Resp. 1.09 μF, 873 μC, 218 V

***26.44.** Supongamos que los condensadores del problema 26.43 se conectan nuevamente en paralelo con la fuente de 800 V. ¿Cuál es ahora la capacitancia equivalente? ¿Cuáles son la carga y el voltaje a través del condensador de 4 μF?

***26.45.** Demuestre que la capacitancia total de un condensador con placas múltiples que contenga N placas separadas entre sí por aire está dada por:

$$C_0 = \frac{(N-1)\epsilon_0 A}{d}$$

donde A es el área de cada placa y d es la separación entre cada una de ellas.

***26.46.** La densidad de energía u de un condensador se define como la energía potencial (EP) por unidad de volumen (Ad) del espacio comprendido entre las placas. Con esta definición y varias fórmulas de este capítulo encuentre la siguiente relación para hallar la densidad de energía u:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

donde E es la intensidad del campo eléctrico entre las placas.

***26.47.** Un condensador entre cuyas placas hay una separación de 3.4 mm está conectado a una batería de 500 V. Aplique la relación obtenida en el problema 26.46 para calcular la densidad de energía entre las placas. Resp. 95.7 mJ/m^3

Preguntas para la reflexión crítica

26.48. Cierto condensador tiene una capacitancia de 12 μF cuando sus placas tiene una separación de 0.3 mm de espacio vacío. Una batería de 400 V carga las placas y después se desconecta del condensador. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de las placas si se inserta una lámina de baquelita ($K = 7$) entre las placas? (b) ¿Cuál es la carga total en las placas? (c) ¿Cuál es la capacitancia con el dieléctrico insertado? (d) ¿Cuál es la permitividad de la baquelita? (e) ¿Cuánta carga adicional puede acumularse en el condensador si la batería de 400 V se vuelve a conectar?
Resp. (a) 57.1 V, (b) 4800 μC, (c) 84.0 μF, (d) 6.20×10^{-11} C^2/N m^2, (e) 28.8 mC

***26.49.** Un desfibrilador médico usa un condensador para reanimar a las víctimas de ataques cardiacos. Suponga que un condensador de 65 μF de uno de esos aparatos se carga hasta 1500 V. ¿Cuál es la energía total almacenada? Si 25% de esa energía pasa a través de una víctima en 3 ms, ¿que potencia se descarga?

***26.50.** Considere tres condensadores de 10, 20 y 30 μF. Muestre cómo podrían conectarse para producir la máxima y la mínima capacitancia equivalente y escriba una lista de esos valores. Trace en un diagrama la conexión que daría como resultado una capacitancia equivalente a 27.5 μF. Presente una conexión capaz de producir una capacitancia combinada de 22.0 μF.
Resp. 60 μF, 7.5 μF

***26.51.** Un condensador de aire de 4 μF está conectado a una fuente de diferencia de potencial de 500 V. Después, el condensador se desconecta de la fuente y se inserta una lámina de mica ($K = 5$) entre las placas. ¿Cuál es el nuevo voltaje en el condensador? Suponga que se vuelve a conectar la batería de 500 V y calcule la carga final en el condensador. ¿En qué porcentaje se incrementa la energía total en el condensador a causa del dieléctrico?

***26.52.** Un condensador de 3 μF y otro de 6 μF están conectados en serie a una batería de 12 V. ¿Cuál es la energía total del sistema? ¿Cuál es la energía total si la conexión se realiza en paralelo? ¿Cuál es la energía total para cada una de esas conexiones si se usa mica ($K = 5$) como dieléctrico en cada uno de los condensadores? Resp. 0.144 mJ, 0.648 mJ, 0.720 mJ, 3.24 mJ

27 Corriente y resistencia



La distribución de la energía eléctrica sigue siendo una tarea difícil pero muy importante en tiempos modernos. La potencia generada por el agua de las presas, la combustión del carbón u otras fuentes deben distribuirse continuamente a lo largo de grandes distancias para su uso en la industria y en nuestros hogares. Para superar la resistencia eléctrica en cables largos se requieren voltajes altos, de 100 000 a 700 000 volts, hasta que los transformadores reduzcan el voltaje a los 120 o 240 V disponibles en los puntos de uso. En este capítulo comenzamos el análisis de la corriente eléctrica, la resistencia y la potencia para la corriente continua, y posteriormente aplicaremos algunas de las mismas relaciones a la corriente alterna. (*Fotografía © vol. 14 PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará por medio de definiciones y ejemplos que ha comprendido los conceptos de *corriente eléctrica* y *fuerza electromotriz*.
2. Escribirá y aplicará la *ley de Ohm* para resolver problemas que impliquen resistencia eléctrica.
3. Calculará la *potencia disipada* como función del voltaje, la corriente y la resistencia.
4. Definirá la *resistividad* de un material y resolverá problemas similares a los que se presentan en este texto.
5. Definirá el *coeficiente de temperatura de la resistencia* y calculará el cambio en la resistencia que ocurre con un cambio de temperatura.

Ahora dejaremos el estudio de la electrostática e iniciaremos el de las cargas en movimiento. Nos hemos interesado en fuerzas, campos eléctricos y energías potenciales en su relación con conductores cargados. Por ejemplo, un exceso de electrones, distribuidos uniformemente sobre una superficie esférica aislada, permanecerá en reposo. Sin embargo, si se conecta un alambre de la esfera a tierra, los electrones fluirán por el alambre hasta la tierra. El flujo de carga constituye una *corriente eléctrica*. En este capítulo se ofrecen las bases para el estudio de la corriente continua y la resistencia eléctrica.

27.1 El movimiento de la carga eléctrica

Empezaremos nuestro análisis de cargas en movimiento considerando la descarga de un condensador o capacitor. La diferencia de potencial V entre las dos placas de un condensador, como muestra la figura 27.1a, se manifiesta en un electroscopio. La carga total Q en cualquiera de las placas está dada por

$$Q = CV$$

donde C es la capacitancia. Si se proporciona una trayectoria, los electrones de una de las placas se trasladarán a la otra, con lo que disminuye la carga neta y se origina una caída en la diferencia de potencial. De modo que una caída en el potencial, como indica el abatimiento de la hoja del electroscopio, significa que la carga ha sido transferida. Cualquier conductor que se use para conectar las placas de un condensador hará que éste se descargue, pero la rapidez de descarga varía considerablemente dependiendo del tamaño, la forma, el material y la temperatura del conductor.

Si se conecta un alambre corto y delgado entre las placas del condensador, como se ve en la figura 27.1b, la hoja del electroscopio cae instantáneamente, indicando una rápida transferencia de carga. Esta corriente, que existe por un corto tiempo, se conoce como ***corriente transitoria***. Si se reemplaza el alambre corto y delgado con uno igual de delgado y del mismo material, pero largo, se observará una caída gradual de la hoja del electroscopio (figura 27.1c). Dicha oposición al flujo de electricidad se llama ***resistencia eléctrica***. Una descripción cuantitativa de la resistencia eléctrica se presentará en una sección posterior. Aquí se menciona sólo para ilustrar que la rapidez con la que fluye la carga a través de un conductor, varía. A esta rapidez se le llama ***corriente eléctrica***.

La corriente eléctrica I es la rapidez del flujo de carga Q que pasa por un punto dado P en un conductor eléctrico.

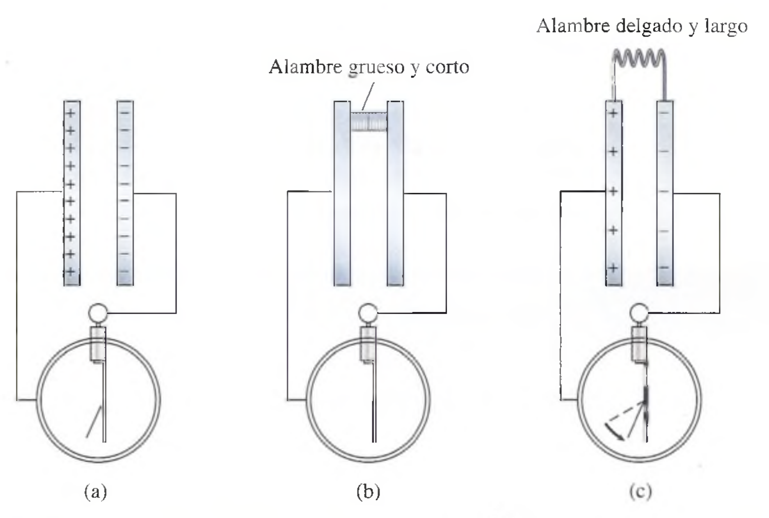


Figura 27.1 (a) Un condensador cargado es una fuente de corriente. (b) Si las placas del condensador se unen por medio de un alambre grueso y corto, el condensador se descarga instantáneamente. (c) Un alambre delgado y largo permite que la descarga sea gradual.

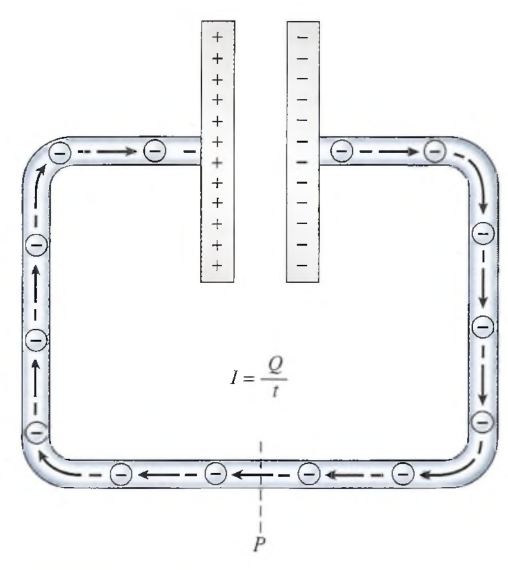


Figura 27.2 La corriente se origina a partir del movimiento de los electrones y es una medida de la cantidad de carga que pasa por un punto dado en una unidad de tiempo.

$$I = \frac{Q}{t} \quad (27.1)$$

La unidad de corriente eléctrica es el *ampere*. Un ***ampere*** (A) representa un flujo de carga con la rapidez de *un coulomb por segundo*, al pasar por cualquier punto.

$$1\text{ A} = \frac{1\text{ C}}{1\text{ s}}$$

En el ejemplo de la descarga de un condensador, la corriente se produce por el movimiento de los electrones, como se ilustra en la figura 27.2. Las cargas positivas contenidas en el alambre están fuertemente unidas y no se pueden mover. El campo eléctrico creado en el alambre debido a la diferencia de potencial entre las placas, provoca que los electrones libres en el alambre experimenten un impulso hacia la placa positiva. Los electrones en repetidas ocasiones se desvían o se detienen debido a procesos relacionados con las impurezas y a los movimientos térmicos de los átomos. En consecuencia, el movimiento de los electrones no es acelerado, sino un proceso de arrastre o de difusión. La velocidad promedio de arrastre de los electrones es normalmente de 4 m/h. Esta velocidad de carga, que es una *distancia* por unidad de tiempo, no se debe confundir con el concepto de corriente, la cual es la *cantidad* de carga por unidad de tiempo.

Para comprender el flujo de corriente es útil hacer una analogía con el agua que fluye a través de una tubería. La razón del flujo de agua en galones por minuto es análoga a la razón de flujo de carga en coulombs por segundo. Para una corriente de 1 A, 6.25×10^{18} electrones (1 C) fluyen pasando por un punto dado cada segundo. Del mismo modo que el tamaño y la longitud de la tubería afectan el flujo de agua, así el tamaño y la longitud de un conductor afectan el flujo de electrones.

Ejemplo 27.1

¿Cuántos electrones pasan por un punto en 5 s si se mantiene en un conductor una corriente constante de 8 A?

Solución: A partir de la ecuación (27.1),

$$\begin{aligned} Q &= It = (8\text{ A})(5\text{ s}) \\ &= (8\text{ C/s})(5\text{ s}) = 40\text{ C} \\ &= (40\text{ C})(6.25 \times 10^{18}\text{ electrones/C}) \\ &= 2.50 \times 10^{20}\text{ electrones} \end{aligned}$$

27.2 La dirección de la corriente eléctrica

Hasta ahora hemos analizado tan sólo la magnitud de la corriente eléctrica. La selección de la dirección es algo arbitrario, siempre que se aplique la definición en forma consistente. El flujo de carga originado por un campo eléctrico en un gas o en un líquido consiste en un flujo de iones positivos en la dirección del campo o un flujo de electrones opuesto a la dirección del campo. Como hemos visto, la corriente en un material metálico consiste en electrones que fluyen en contra de la dirección del campo. Sin embargo, una corriente formada por partículas negativas que se mueven en una dirección, es eléctricamente la misma que una corriente formada por cargas positivas que se mueven en la dirección opuesta.

Hay ciertas razones para preferir el movimiento de la carga positiva como un indicador de la dirección. En primer lugar, todos los conceptos presentados para la electrostática —por ejemplo, el campo eléctrico, la energía potencial y la diferencia de potencial— se definieron en términos de cargas positivas. Un electrón fluye en dirección contraria al campo eléctrico y "sube la pendiente de potencial" desde la placa negativa hasta la placa positiva. Si definimos la corriente como un flujo de carga *positiva*, la pérdida en energía a medida que la carga encuentra resistencia será de más a menos o "baja la pendiente de potencial". Por convención, se considerarán todas las corrientes como un flujo de carga positiva.

> La dirección de la corriente convencional siempre es la misma que la dirección en la que se moverían las cargas positivas, incluso si la corriente real consiste en un flujo de electrones.

En la figura 27.3 se indica el flujo de electrones y la corriente convencional para un conductor de alambre metálico. La línea en zigzag se usa para indicar la resistencia eléctrica R. Observe que la corriente convencional fluye desde la placa positiva del condensador y neutraliza la carga negativa de la otra placa. La corriente convencional sigue la misma dirección que el campo eléctrico **E**, que produce la corriente.

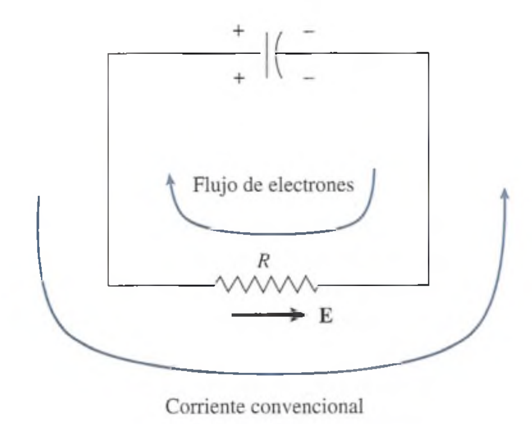


Figura 27.3 En un conductor metálico, la dirección de la corriente convencional es opuesta a la del flujo real de electrones.

27.3 Fuerza electromotriz

Las corrientes que se han estudiado en las secciones anteriores se llamaron *corrientes transitorias* debido a que sólo existen por un corto tiempo. Una vez que el condensador se descarga completamente, ya no habrá una diferencia de potencial que promueva el flujo de una carga adicional. Si existiera algún medio para mantener al condensador continuamente cargado, se lograría mantener una corriente continua. Esto requeriría que los electrones se suministraran en forma continua a la placa negativa para reemplazar a los que han salido; es decir, debe suministrarse energía para reemplazar la energía perdida por la carga en el circuito externo.

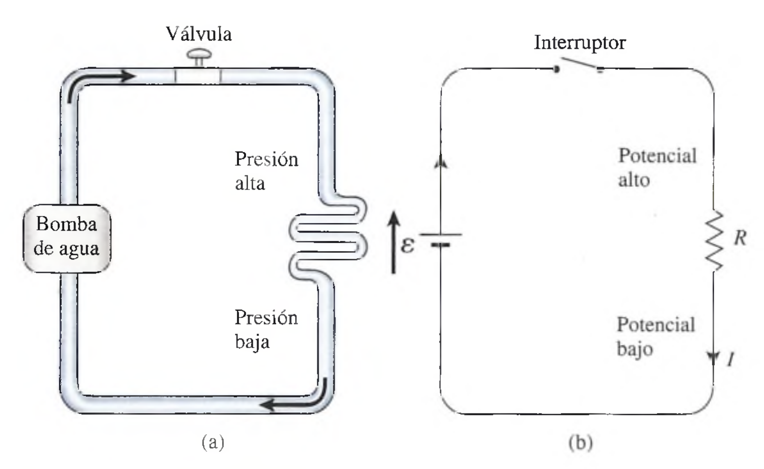


Figura 27.4 La analogía mecánica de una bomba de agua resulta útil para explicar la función de una fuente de fem en un circuito eléctrico.

De este modo, se podría mantener la diferencia de potencial entre las placas, permitiendo un flujo de carga continuo. Un dispositivo que tiene la capacidad de mantener la diferencia de potencial entre dos puntos se llama una ***fuente de fuerza electromotriz*** (fem).

Las fuentes de fem más conocidas son la batería y el generador. La batería convierte la energía química en energía eléctrica, y el generador transforma la energía mecánica en energía eléctrica.

Una fuente de fuerza electromotriz (fem) es un dispositivo que convierte la energía química, mecánica u otras formas de ella en la energía eléctrica necesaria para mantener un flujo continuo de carga eléctrica.

En un circuito eléctrico, la fuente de fem se representa casi siempre por medio del símbolo $\mathscr{E}$.

La función de una fuente de fem en un circuito eléctrico es similar a la de una bomba de agua para mantener el flujo continuo de agua a través de una tubería. En la figura 27.4a, la bomba de agua debe realizar el trabajo necesario sobre cada unidad de volumen de agua, para reemplazar la energía perdida por cada unidad de volumen que fluye a través de los tubos. En la figura 27.4b, la fuente de fem debe trabajar sobre cada unidad de carga que pasa a través de ella para elevarla a un mayor potencial. Este trabajo debe suministrarse con una rapidez igual a la rapidez con que se pierde la energía al fluir a través del circuito.

Por convención, hemos supuesto que la corriente consiste en un flujo de carga positiva, aunque en la mayoría de los casos se trata de electrones con su carga negativa. Por tanto, la carga pierde energía al pasar a través del resistor de un potencial alto a un potencial bajo. En la analogía hidráulica, el agua pasa de la presión alta a la baja. Cuando la válvula de intercepción se cierra, existe presión pero no hay flujo de agua. En forma similar, cuando el interruptor eléctrico se *abre*, hay fem pero no corriente.

Puesto que la ***fem*** es trabajo por unidad de carga, se expresa en la misma unidad que la diferencia de potencial: el *joule por coulomb*, o *volt*.

Una fuente de fem de 1 volt realizará un joule de trabajo sobre cada coulomb de carga que pasa a través de ella.

Por ejemplo, una batería de 12 V realiza un trabajo de 12 J sobre cada coulomb de carga transferido del extremo de bajo potencial (terminal $-$) al extremo de alto potencial (terminal $+$).Casi siempre se dibuja una flecha ($\uparrow$) junto al símbolo $\mathscr{E}$ de la fem para indicar la dirección en la cual la fuente, si actuara sola, haría que una carga positiva se moviera a través del circuito externo. La corriente convencional fluye alejándose de la terminal $+$ (positiva) de la batería, y la carga positiva hipotética fluye "pendiente abajo" a través de la resistencia externa hacia la terminal $-$ (negativa) de la batería.

En las siguientes secciones se usarán a menudo diagramas de circuito, como el de la figura 27.4b, para describir los sistemas eléctricos. Gran parte de los signos que usaremos con ese propósito están definidos en la figura 27.5.

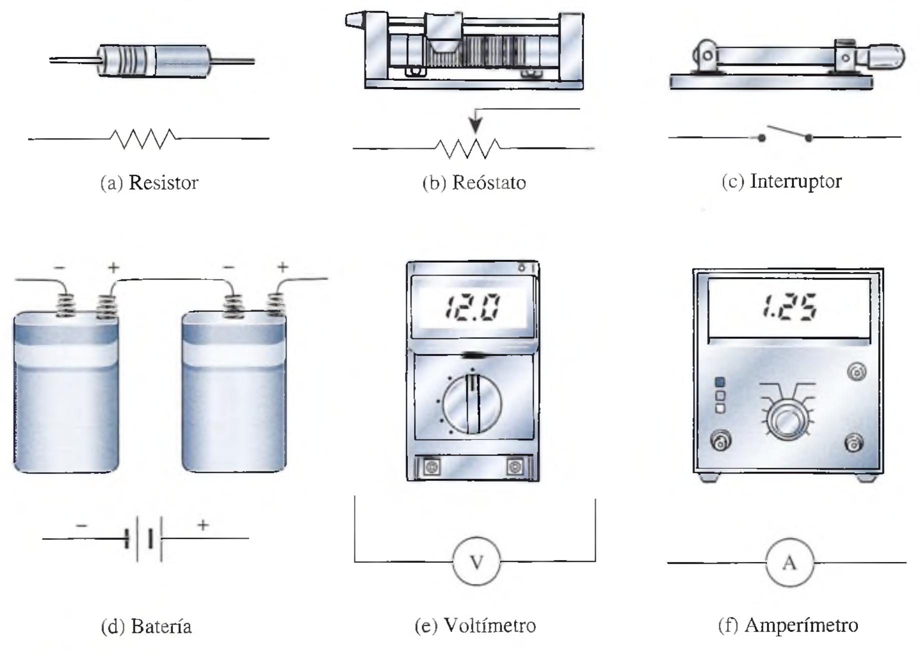


Figura 27.5 Símbolos convencionales que se usan en diagramas de circuitos eléctricos.

27.4 Ley de Ohm; resistencia

La ***resistencia*** (R) se define como la oposición a que fluya la carga eléctrica. Aunque la mayoría de los metales son buenos conductores de electricidad, todos ofrecen cierta oposición a que el flujo de carga eléctrica pase a través de ellos. Esta resistencia eléctrica es fija para gran número de materiales específicos, de tamaño, forma y temperatura conocidos. Es independiente de la fem aplicada y de la corriente que pasa a través de ellos.

El primero en estudiar cuantitativamente los efectos de la resistencia para limitar el flujo de carga fue Georg Simon Ohm, en 1826. Él descubrió que *para un resistor dado, a una temperatura particular, la corriente es directamente proporcional al voltaje aplicado*. Así como la rapidez de flujo de agua entre dos puntos depende de la diferencia de altura que haya entre ambos, la rapidez de flujo de la carga eléctrica entre dos puntos depende de la diferencia de potencial que existe entre ellos. Esta proporcionalidad se conoce, en general, como la ***ley de Ohm:***

> La corriente que circula por un conductor dado es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre sus puntos extremos.

Por tanto, la corriente I que se observa con un voltaje V es un indicio de la resistencia. Matemáticamente, la resistencia R de un conductor dado se puede calcular a partir de

$$R = \frac{V}{I} \qquad V = IR \qquad \textit{Ley de Ohm} \qquad \textbf{(27.2)}$$

Cuanto mayor sea la resistencia R, tanto menor será la corriente I para un voltaje dado V. La unidad de medición de la resistencia es el ***ohm,*** cuyo símbolo es la letra griega mayúscula *omega* (Ω). Dada la ecuación (27.2),

$$1\ \Omega = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A}}$$

Una resistencia de *un ohm* permitirá una corriente de *un ampere* cuando se aplica a sus terminales una diferencia de potencial de *un volt*.

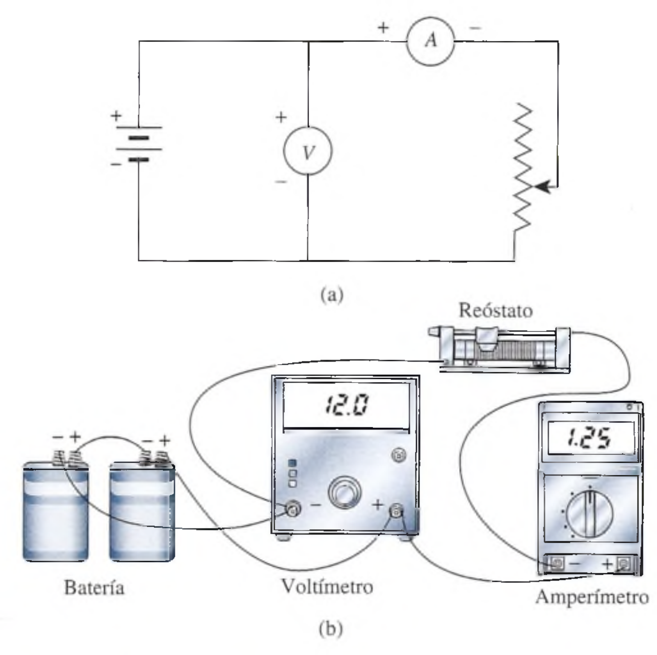


Figura 27.6 (a) Diagrama de un circuito que permite estudiar la ley de Ohm. (b) Diagrama ilustrativo que muestra de qué modo se conectan los diversos elementos de un circuito en el laboratorio.

FÍSICA HOY

Robots y la ley de Ohm

En 1854, el año en que George Simon Ohm murió, lord Kelvin descubrió que la resistencia de un alambre cambia cuando se tensa (estira).

Los ingenieros primero usaron este fenómeno para analizar

Continúa

Hay cuatro dispositivos que se usan a menudo en el laboratorio para estudiar la ley de Ohm. Ellos son: la batería, el voltímetro, el amperímetro y el reóstato. Como su nombre lo indica, el ***voltímetro*** y el ***amperímetro*** son dispositivos para medir el voltaje y la corriente. El ***reóstato*** es simplemente un resistor variable. Un contacto que se puede deslizar cambia el número de espiras de la resistencia a través de la cual fluye la carga. En la figura 27.6 se ilustra una colección de laboratorio de estos aparatos eléctricos. Conviene que estudie el diagrama del circuito de la figura 27.6a y que justifique las conexiones eléctricas que se aprecian en la figura 27.6b. Note que el voltímetro está conectado en paralelo con la batería: positivo con positivo y negativo con negativo; mientras que el amperímetro, el cual debe leer la corriente a través del circuito, está conectado en serie: positivo a negativo a positivo a negativo.

Ejemplo 27.2

El contacto del reóstato está en la posición que muestra la figura 27.6. La lectura del voltímetro indica 6.00 V y la del amperímetro, 400 mA. ¿Cuál es la resistencia a través del reóstato? ¿Cuál será la lectura del amperímetro si la resistencia se duplica?

Plan: Conocemos la corriente I y el voltaje V, así que podemos aplicar la ley de Ohm para calcular la resistencia eléctrica. Recuerde usar las unidades básicas del SI de volts y amperes. No tomaremos en cuenta ninguna otra resistencia.

Solución (a): Resolvemos la ley de Ohm para la resistencia R y sustituimos los valores conocidos

$$R = \frac{V}{I} = \frac{6.00\text{ V}}{0.400\text{ A}}; \qquad R = 15.0\ \Omega$$

Solución (b): Al duplicar la resistencia, sustituimos $R = 30.0\ \Omega$ para obtener

$$I = \frac{V}{R} = \frac{6.00\text{ V}}{30.0\ \Omega}; \qquad R = 0.200\text{ A} = 200\text{ mA}$$

27.5 Potencia eléctrica y pérdida de calor

Hemos visto que la carga eléctrica gana energía en una fuente generadora de fem y pierde energía cuando pasa a través de una resistencia externa. Dentro de la fuente de fem, el trabajo es realizado *por la fuente* elevando la energía potencial de la carga. Cuando la carga pasa a través del circuito externo, el trabajo es realizado *por* la carga sobre los componentes del circuito. En el caso de un resistor puro, la energía se disipa en forma de calor. Si se conecta un motor al circuito, la pérdida de energía se divide entre el calor y el trabajo útil realizado. En cualquier caso, la energía ganada en la fuente de fem debe igualar la energía perdida en el circuito completo.

Examinemos con más detalle el trabajo que se realiza dentro de la fuente de fem. Por definición, se desarrolla *un joule* de trabajo por cada *coulomb* de carga que se mueve a través de una diferencia de potencial de *un volt*. Por tanto,

$$\text{Trabajo} = Vq \tag{27.3}$$

donde q es la cantidad de carga transferida durante un tiempo t. Pero $q = It$, así que la ecuación (27.3) se transforma en

$$\text{Trabajo} = VIt \tag{27.4}$$

donde I es la corriente en *coulombs por segundo*. Este trabajo representa la energía ganada debido a una carga que pasa a través de la fuente de fem durante el tiempo t. Una cantidad equivalente de energía se disipará en forma de calor a medida que la carga se mueve a través de una resistencia externa.

La rapidez con la cual se disipa el calor en un circuito eléctrico se conoce como *potencia disipada*. Cuando la carga fluye en forma continua a través de un circuito, esta potencia disipada está dada por

$$P = \frac{\text{trabajo}}{t} = \frac{VIt}{t} = VI \tag{27.5}$$

Cuando V está expresada en volts e I se expresa en amperes, la potencia disipada se mide en watts. Se demuestra que el producto del voltaje por la corriente da una unidad de potencia en la siguiente forma:

$$(\text{V})(\text{A}) = \frac{\text{J}}{\text{C}}\frac{\text{C}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$$

La ecuación (27.5) se puede expresar en de otras maneras usando la ley de Ohm ($V = IR$). Al sustituir V se puede escribir

$$P = VI = I^2R \tag{27.6}$$

La sustitución de I en la ecuación (27.6) nos da otra expresión:

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \tag{27.7}$$

La relación expresada por la ecuación (27.6) se utiliza con tanta frecuencia en trabajos de electricidad, que la pérdida de calor en el alambrado eléctrico se conoce a menudo como una pérdida "I-cuadrada-R".

FÍSICA HOY

Continuación

las tensiones en las superficies estructurales. Por ejemplo, al vigilar la corriente a través de un alambre de metal fino montado a lo largo de un puente, las máquinas pueden indicar tensión en el cable con base en la variación de resistencia del alambre. Este dispositivo se conoce como *galga extensiométrica*.

Los investigadores que buscan formas de imitar las complejas capacidades de la mano humana han usado una versión de un indicador de tensión para dar a los robots un sentido del tacto. Las manos robóticas, equipadas con una fuerza sobrehumana, tienen la habilidad de romper suavemente un huevo en un tazón. No obstante, un robot todavía necesita algún tipo de sensor del tacto para poder "ver" con sus manos.

Uno de los diseños de sensores más prometedores consiste en un chip electrónico impreso con una red metálica fina y cubierto por una hoja delgada de goma conductora. Al hacer presión en el hule cambia la resistencia del chip y se transmite una "imagen" de la tensión a la piel robótica.

Ejemplo 27.1

Un ventilador de una oficina pequeña tiene una etiqueta en la base que indica 120 V, 55 W. ¿Cuál es la corriente de operación de este ventilador y cuál es su resistencia eléctrica? Si el ventilador se deja trabajando durante la noche 8 h, ¿cuánta energía se pierde? Suponga que las leyes presentadas para la corriente directa en este capítulo también se aplican al circuito de la oficina.

Plan: Consideramos que la potencia disipada es igual al producto del voltaje y la corriente. Por tanto, podemos resolver para el amperaje y sustituir los valores conocidos. La resistencia

se determina al aplicar la ley de Ohm o usar otra forma de la ecuación de la energía. La pérdida de energía se basa en la definición de potencia como la energía gastada por unidad de tiempo.

Solución: Dado que $V = 120$ V y $P = 55$ W, resolvemos para la corriente I como sigue:

$$P = VI \qquad \text{o} \qquad I = \frac{P}{V} = \frac{55 \text{ W}}{120 \text{ V}}$$

$$I = 0.458 \text{ A} = 458 \text{ mA}$$

La resistencia puede calcularse a partir de la ley de Ohm, pero usaremos la ecuación (27.7).

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad \text{o} \qquad R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120 \text{ V})^2}{55 \text{ W}}$$

$$R = 262 \ \Omega$$

Como 1 h = 3 600 s, convertimos el tiempo de 8 h a 2.88×10^4 s. Considerando que la potencia es igual al trabajo (energía) por unidad de tiempo, resolvemos para la pérdida de energía como sigue:

$$\text{Trabajo} = Pt = (55\text{W})(2.88 \times 10^4 \text{ s})$$
$$\text{Trabajo} = 1.58 \times 10^6 \text{ J}$$

Esta pérdida de energía podría expresarse como (0.055 kW)(8 h) o 0.440 kW · h. A una tarifa normal, podría costar alrededor de 25 centavos.

27.6 Resistividad

Al igual que la capacitancia es independiente del voltaje y de la cantidad de carga, la resistencia de un conductor es independiente de la corriente y del voltaje. Tanto la capacitancia como la resistencia son propiedades inherentes a un conductor. La resistencia de un alambre que tiene un área de sección transversal uniforme, como el que muestra la figura 27.7, se determina por los cuatro factores siguientes:

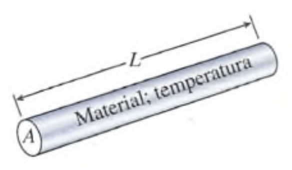




Figura 27.7 La resistencia de un alambre depende de la clase de material, su longitud, el área de su sección transversal y su temperatura.

1. Tipo de material
2. Longitud
3. Área de sección transversal
4. Temperatura

Ohm, el físico alemán que descubrió la ley que ahora lleva su nombre, informó también que *la resistencia de un conductor a una temperatura dada es directamente proporcional a su longitud, e inversamente proporcional al área de su sección transversal y depende del material del cual está hecho*. Para un conductor dado, a una temperatura determinada, la resistencia se puede calcular a partir de

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{27.8}$$

donde R = resistencia
l = longitud
A = área

La constante de proporcionalidad ρ es una propiedad del material llamada ***resistividad***, dada por

$$\rho = \frac{RA}{L} \tag{27.9}$$



Un polígrafo, o detector de mentiras, mide la resistividad de la piel. La piel se vuelve menos resistiva cuando una persona suda, lo cual ocurre de manera inconsciente cuando se dice una mentira.

Tabla 27.1

Resistividades y coeficientes de temperatura a 20°C

Material/Propiedades	Resistividad $\Omega \cdot m$	Coeficiente de temperatura de la resistencia 1/°C
Aluminio	2.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Constantán	49×10^{-8}	—
Cobre	1.72×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Hierro	9.5×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Nicromo	100×10^{-8}	0.4×10^{-3}
Oro	2.4×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Plomo	10×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Plata	1.6×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Tungsteno	5.5×10^{-8}	4.5×10^{-3}

La resistividad varía considerablemente de acuerdo con el tipo de material y también se ve afectada por cambios de temperatura. Cuando R está en ohms, A en metros cuadrados y L en metros, la unidad de resistividad es el ohm-metro ($\Omega \cdot$ m):

$$\frac{(\Omega)(\mathrm{m}^2)}{\mathrm{m}} = \Omega \cdot \mathrm{m}$$

En la tabla 27.1 se muestra la resistividad de algunos metales muy comunes.

Ejemplo 27.4

Un alambre de cobre de 20 m de longitud tiene 0.8 mm de diámetro. Los extremos del alambre se colocan a través de las terminales de una batería de 1.5 V. ¿Qué corriente pasa por el alambre?

Plan: Calcularemos el área del alambre y luego calcularemos la resistencia de la longitud y la resistividad del cobre. Con la ley de Ohm obtendremos la corriente.

Solución: El área del alambre es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(8 \times 10^{-4})^2}{4}; \qquad A = 5.03 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}^2$$

Resolvemos para la resistencia usando la ecuación (27.8).

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m})(20\ \mathrm{m})}{5.03 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}^2}; \qquad R = 0.684\ \Omega$$

Finalmente, a partir de la ley de Ohm,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1.5\ \mathrm{V}}{0.684\ \Omega}; \qquad I = 2.19\ \mathrm{A}$$

27.7 Coeficiente de temperatura de la resistencia

Para la mayoría de los conductores metálicos, la resistencia tiende a aumentar con un incremento de temperatura. Cuando aumenta el movimiento atómico y molecular en el conductor, se obstaculiza el flujo de carga. El incremento en la resistencia para la mayoría de los metales es aproximadamente lineal cuando se compara con los cambios de temperatura. Los expe-

rimentos han mostrado que el aumento en la resistencia ΔR es proporcional a la resistencia inicial R_0 y al cambio en la temperatura Δt. Podemos escribir

$$\Delta R = \alpha R_0 \Delta t \qquad \textbf{(27.10)}$$

La constante α es una característica del material y se conoce como ***coeficiente de temperatura de la resistencia***. La ecuación para definir α se puede determinar al resolver la ecuación (27.10):

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} \qquad \textbf{(27.11)}$$

El coeficiente de temperatura de la resistencia es el cambio en la resistencia, por unidad de resistencia, por cada grado de cambio en la temperatura.

Puesto que las unidades de ΔR y R_0 son las mismas, la unidad del coeficiente α es grados inversos (1/°C). Los coeficientes de varios materiales comunes se proporcionan en la tabla 27.1.

Ejemplo 27.5 Un alambre de hierro tiene una resistencia de 200 Ω a 20°C. ¿Cuál será su resistencia si se calienta a 80°C?

Plan: Primero se calcula el cambio en la resistencia tomando de la tabla 27.1 el cambio de temperatura y el coeficiente de temperatura para el hierro.

Solución: El cambio en la resistencia ΔR se determina a partir de la ecuación (27.10).

$$\begin{aligned} \Delta R &= \alpha R_0 \Delta t \\ &= (0.005/\text{C}°)(200\ \Omega)(80°\text{C} - 20°\text{C}) \\ &= 60\ \Omega \end{aligned}$$

Por tanto, la resistencia a 80°C es

$$R = R_0 + \Delta R = 200\ \Omega + 60\ \Omega = 172\ \Omega$$

El incremento en la resistencia de un conductor a causa de la temperatura es lo suficientemente grande como para medirlo con facilidad. Este hecho se aprovecha en los termómetros de resistencia para medir temperaturas con bastante exactitud. Debido al alto punto de fusión de algunos metales, los termómetros de resistencia se pueden usar para medir temperaturas extremadamente altas.

27.8 Superconductividad

En 1911, el físico holandés Heike Kamerlingh-Onnes realizaba experimentos con la resistividad de metales a bajas temperaturas. Usando helio líquido como medio de enfriamiento, fue capaz de enfriar metales por debajo de 4.2 K (−269°C). Mientras que algunos metales, como el platino y el oro, mantenían una resistividad constante a bajas temperaturas, otros metales, como el mercurio, mostraban una resistencia nula cuando estaban por debajo de la *temperatura crítica o de transición*, como muestra la figura 27.8. Este fenómeno de resistencia cero o conductividad infinita se conoce como ***superconductividad***. Al cabo de muchos años de estudio, se habían clasificado ya en la categoría de superconductores más de veintiséis elementos y gran variedad de aleaciones, compuestos y semiconductores, cada uno con una temperatura de transición característica (T_C).

Además de sus propiedades eléctricas, los superconductores también presentan propiedades magnéticas extraordinarias cuando están por debajo de su temperatura de transición. Cuando los superconductores están sometidos a un campo magnético, expulsan todo el flujo magnético de su interior, es decir, tienen un diamagnetismo perfecto. Una consecuencia de este fenómeno, que se conoce como el *efecto Meissner-Ochsenfeld*, se muestra en la figura 27.9. Cuando se acerca el imán al superconductor, el diamagnetismo perfecto (véase el capítulo 29) rechaza al imán y éste se eleva por encima del superconductor.

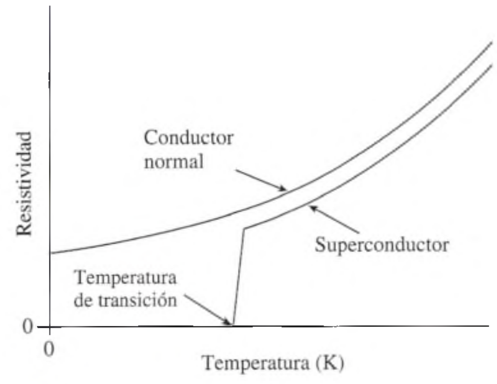


Figura 27.8 El cambio en la resistividad como función de la temperatura se presenta para conductores metálicos y normales y para superconductores. Observe que, en su temperatura de transición crítica, la resistividad de un superconductor decrece bruscamente hasta llegar a cero.



Figura 27.9 La levitación de una pequeña pieza de metal se logra cuando un material superconductor se enfría hasta la temperatura del nitrógeno líquido. (*Cortesía de Science Kit & Boreal Laboratories.*)

Hasta 1986, la temperatura de transición más alta que se había registrado era 23 K (−250°C) y correspondía a la aleación niobio-germanio. En ese año se realizaron experimentos en los cuales se demostró que los materiales cerámicos, que generalmente tenían propiedades aislantes, alcanzaban temperaturas de transición de aproximadamente 90 K (−183°C). Estos nuevos superconductores de alta temperatura tienen una inmensa importancia tecnológica, principalmente en virtud de que el nitrógeno líquido, con una temperatura de ebullición de 77 K (−196°C), se puede usar como refrigerante. El nitrógeno líquido se consigue fácilmente, es menos costoso y más fácil de manejar que el helio o el hidrógeno líquidos. Un grupo de investigadores de

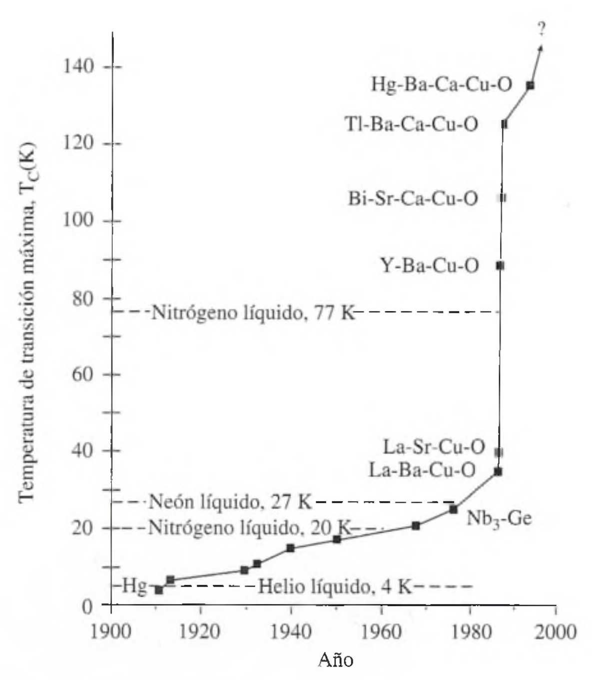


Figura 27.10 Gráfica que describe el rápido progreso de la experimentación sobre superconductores desde la investigación de Bednorz y Müller en 1986. El punto más reciente indica la temperatura de transición de 135 K, que se logró en 1993 con un compuesto de mercurio, bario, calcio, cobre y oxígeno.

Suiza fue capaz de lograr temperaturas de transición cercanas a 135 K (−138°C). Andreas Schilling, Marco Cantoni, J.D. Guo y Hans Ott realizaron esta hazaña en 1993 usando un compuesto de mercurio, calcio, bario, cobre y oxígeno. Se cree posible lograr superconductores con una temperatura de transición igual a la temperatura ambiente. La figura 27.10 muestra el rápido avance de las investigaciones a partir de 1986, cuando J. Georg Bednorz y Karl Alex Müller informaron acerca de superconductividad a una temperatura de transición de 30 K.

Las aplicaciones prácticas de los superconductores ya se han vislumbrado y están en desarrollo. Los imanes que usan bobinas superconductoras pueden generar campos mayores y tienen costos de operación más baratos que los imanes convencionales, debido a que la resistividad cero de los superconductores significa que no hay pérdida de energía a causa del calentamiento de la resistencia. En realidad, puede existir una corriente persistente en un superconductor sin aplicar una diferencia de potencial. En la actualidad, estos imanes ya forman parte de diversos instrumentos, entre los cuales figuran supercolisionadores, acumuladores de energía magnética y sistemas de diagnóstico médico, por ejemplo, que permiten obtener imágenes por resonancia magnética (IRM). Las bobinas superconductoras se usan en los devanados de motores y generadores, y en aplicaciones potenciales que incluyen líneas subterráneas para la transmisión de fuerza electromotriz.

Otra aplicación es el vehículo de levitación magnética (MAGLEV). En estos vehículos se aplica el principio de levitación descrito anteriormente en la figura 27.9. Los imanes superconductores montados en el vehículo en movimiento se localizan sobre hojas de metal normales. Los imanes en movimiento originan corrientes inducidas (corrientes parásitas) en la hoja de metal. Esas pequeñas corrientes inducidas se generan alrededor del campo magnético, el cual repele a los imanes en movimiento. En Japón ya se construyó un tren prototipo en el cual se usa helio líquido como agente enfriador.

Cabe señalar que en la mayoría de las aplicaciones antes mencionadas no se utilizan superconductores de alta temperatura (Tipo II). Los antiguos superconductores (Tipo I) son más flexibles y tienen la capacidad de transportar más corriente que los nuevos superconductores de cerámica. Sin embargo, unos pequeños aparatos que se conocen como dispositivos superconductores de interferencia cuántica o *SQUID* (*S*uperconducting *Q*uantum *I*nterference *D*evices) y se fabrican a base de superconductores de alta temperatura, se utilizan actualmente en la fabricación de dispositivos muy sensibles para realizar mediciones electrónicas y también en componentes de computadora.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo presentamos el *ampere* como unidad de corriente eléctrica y comentamos las diversas cantidades que afectan su magnitud. La ley de Ohm describe matemáticamente la relación entre corriente, resistencia y voltaje aplicado. También aprendimos los factores que influyen en la resistencia eléctrica y aplicamos esos conceptos a la resolución de problemas básicos de electricidad elemental. Los puntos principales se resumen a continuación:

- La corriente eléctrica I es la rapidez de flujo de la carga Q que pasa por un punto dado de un conductor:

$$I = \frac{Q}{t} \qquad 1 \text{ ampere (A)} = \frac{1 \text{ coulomb (C)}}{1 \text{ segundo (s)}}$$

- Por convención, la *dirección* de la corriente eléctrica es la misma dirección en la cual se moverían las cargas *positivas*, aun cuando la corriente real consista en un flujo de electrones cargados negativamente.
- La ley de Ohm establece que *la corriente producida en un conductor dado es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre sus extremos:*

$$R = \frac{V}{I} \qquad V = IR \qquad \textit{Ley de Ohm}$$

El símbolo R representa la resistencia en ohms (Ω) definida como

$$1 \text{ ohm } (\Omega) = \frac{1 \text{ volt (V)}}{1 \text{ ampere (A)}}$$

- La potencia eléctrica en watts está dada por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$P = VI \qquad P = I^2R \qquad P = \frac{V^2}{R} \qquad \textit{Potencia}$$

- La resistencia de un alambre depende de cuatro factores: (a) el tipo de *material*, (b) la *longitud*, (c) el *área* de su sección transversal y (d) la *temperatura*. Si introducimos una propiedad del material conocida como su *resistividad* ρ, podemos escribir

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad \rho = \frac{RA}{L} \qquad \textit{Unidades del SI para } \rho : \Omega \cdot \text{m}$$

- El *coeficiente de temperatura de la resistencia* α es el cambio de resistencia por resistencia unitaria por el cambio de temperatura en grados.

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} \qquad \Delta R = \alpha R_0 \Delta t$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

27.1. Explique con claridad la diferencia entre flujo de electrones y corriente convencional. Cite algunas razones para preferir la corriente convencional.

27.2. Use la analogía mecánica de agua que fluye por una tubería y describa el flujo de una carga a través de conductores de diferentes longitudes y áreas de sección transversal.

27.3. Un reóstato está conectado a través de las terminales de una batería. ¿Cómo se determinan las terminales positiva y negativa en el reóstato?

27.4. ¿La fuerza electromotriz es realmente una *fuerza*? ¿Cuál es la función de una fuente de fem?

27.5. ¿Cuál es el error en el siguiente enunciado? La resistividad de un material es directamente proporcional a su longitud.

27.6. Aplique la ley de Ohm para comprobar las ecuaciones (27.6) y (27.7).

Problemas

Sección 27.1 El movimiento de la carga eléctrica
Sección 27.2 La dirección de la corriente eléctrica
Sección 27.3 Fuerza electromotriz
Sección 27.4 Ley de Ohm; resistencia

27.1. ¿Cuántos electrones circulan cada segundo por un punto dado, en un alambre que conduce una corriente de 20 A? ¿Cuánto tiempo se necesita para que pasen 40 C de carga por ese punto?
Resp. 1.25×10^{20} electrones, 2 s

27.2. Si 600 C de carga pasan por un punto dado en 3 s, ¿cuál es la corriente eléctrica en amperes?

27.3. Calcule la corriente en amperes cuando 690 C de carga pasan por un punto dado en 2 min.
Resp. 5.75 A

27.4. Si existe una corriente de 24 A durante 50 s, ¿cuántos coulombs de carga han pasado por el alambre?

27.5. ¿Cuál es la caída del potencial a través de un resistor de 4 Ω cuando pasa por él una corriente de 8 A?
Resp. 32.0 V

27.6. Encuentre la resistencia de un reóstato si la caída de potencial es de 48 V y la corriente es de 4 A.

27.7. Calcule la corriente que pasa por un resistor de 5 Ω, a través del cual hay una caída de potencial de 40 V.
Resp. 8.00 A

27.8. Un fusible de 2 A es incorporado a un circuito con una batería que en sus terminales tiene un voltaje de 12 V. ¿Cuál es la resistencia mínima para un circuito que contenga este fusible?

27.9. ¿Cuánta fem se requiere para que pasen 60 mA a través de una resistencia de 20 kΩ? Si se aplica esa misma fem a una resistencia de 300 Ω, ¿cuál será la nueva corriente? Resp. 1200 V, 4 A

Sección 27.5 Potencia eléctrica y pérdida de calor

27.10. Un cautín utiliza 0.75 A a 120 V. ¿Cuánta energía utilizará en 15 minutos?

27.11. Una lámpara eléctrica tiene un filamento de 80 Ω conectado a una línea de 100 V cd. ¿Cuánta corriente pasa por el filamento? ¿Cuál es la potencia disipada en watts? Resp. 1.38 A, 151.25 W

27.12. Suponga que el costo de la energía en una vivienda es de ocho centavos por kilowatt-hora. Una familia se va de vacaciones durante dos semanas y deja encendida una sola lámpara de 80 W. ¿Cuál será el costo?

27.13. Un generador de 120 V cd suministra 2.4 kW a un horno eléctrico. ¿Cuánta corriente le proporciona? ¿De cuánto es la resistencia? Resp. 20 A, 6 Ω

27.14. Un resistor irradia calor a razón de 250 W cuando la diferencia de potencial a través de sus extremos es 120 V. ¿Cuál es su resistencia?

27.15. Un motor de 120 V consume una corriente de 4.0 A. ¿Cuántos joules de energía eléctrica utiliza en 1 h? ¿Cuántos kilowatts-hora?
Resp. 1.73 MJ, 0.48 kWh

27.16. Un secador doméstico para el cabello tiene una potencia nominal de 2000 W y fue construido para operar conectado a una toma de 120 V. ¿Cuál es su resistencia?

Sección 27.6 Resistividad

27.17. ¿Qué longitud de alambre de cobre ($\rho = 1.78 \times 10^{-8}$ Ω m) de 1.2 mm de diámetro se necesita para fabricar un resistor de 20 Ω a 20°C? ¿Qué longitud de alambre de nicromo se requiere? ($\rho = 100 \times 10^{-8}$ Ω · m) Resp. 1270 m, 22.6 m

27.18. Un trozo de alambre de cobre ($\rho = 1.78 \times 10^{-8}$ Ω · m) de 3.0 m tiene una sección transversal de 4 mm^2 a 20°C. ¿Cuál es la resistencia eléctrica de ese alambre?

27.19. Halle la resistencia de 40 m de alambre de tungsteno cuyo diámetro es de 0.8 mm a 20°C. ($\rho = 5.5 \times 10^{-8}$ Ω · m) Resp. 4.37 Ω

27.20. Un alambre tiene 3 mm de diámetro y 150 m de longitud. Su resistencia es de 3.00 Ω a 20°C. ¿Cuál es su resistividad?

27.21. ¿Cuál es la resistencia de 200 ft de alambre de hierro ($\rho = 9.5 \times 10^{-8}$ W · m) con un diámetro de 0.002 in a 20°C? Resp. 2857.0 Ω

***27.22.** Un alambre de nicromo tiene una longitud de 40 m a 20°C. ¿Cuál es su diámetro si la resistencia total es de 5 Ω? ($\rho = 100 \times 10^{-8}$ Ω · m)

***27.23.** Una fuente de 115 V de fem está conectada a un elemento calefactor formado por una bobina de alambre de nicromo ($\rho = 100 \times 10^{-8}$ Ω · m) de 1.20 mm^2 de sección transversal. ¿Cuál debe ser la longitud del alambre para que la potencia disipada sea de 800 W? Resp. 19.84 m

Sección 27.7 Coeficiente de temperatura de la resistencia

27.24. Un alambre de cierta longitud ($\alpha = 0.0065$/°C) tiene una resistencia de 4.00 Ω a 20°C. ¿Cuál es su resistencia a 80°C?

27.25. Si la resistencia de un conductor es 100 Ω a 20°C y 116 Ω a 60°C, ¿cuál es el coeficiente de temperatura de su resistividad? Resp. 4.00×10^{-3}/°C

27.26. Un trozo de alambre de cobre ($\alpha = 0.0043$/°C) tiene una resistencia de 8 Ω a 20°C. ¿Cuál será su resistencia a 90°C? ¿Y a −30°C?

***27.27.** Los devanados de cobre de un motor sufren un incremento de 20 por ciento en su resistencia respecto a su valor de 20°C. ¿Cuál es la temperatura de operación? (α = 0.0043/°C) Resp. 66.5°C

***27.28.** ¿Qué temperatura producirá un aumento de 25 por ciento en la resistividad del cobre a 20°C? (α = 0.0039/°C)

Problemas adicionales

27.29. Una turbina hidráulica suministra 2 000 kW a un generador eléctrico con 80 por ciento de eficiencia y que produce un voltaje terminal de salida de 1 200 V. ¿Cuánta corriente se genera y cuál es la resistencia eléctrica? Resp. 1.33 kA, 0.900 Ω

27.30. Un radiador de calefacción de 110 V consume una corriente de 6.0 A. ¿Cuánta energía calorífica, en joules, se irradia en 1 h?

27.31. Una línea de conducción eléctrica tiene una resistencia total de 4 kΩ. ¿Cuál es la potencia disipada a través de la línea si la corriente se reduce a 6.0 mA? Resp. 0.144 W

27.32. Un alambre tiene una resistividad de 2×10^{-8} Ω m a 20°C. Si su longitud es 200 m y su sección transversal es de 4 mm^2, ¿cuál será su resistencia eléctrica a 100°C? Suponga que α = 0.005/°C para este material.

27.33. Calcule la resistividad de un alambre hecho de una aleación desconocida si su diámetro es de 0.7 mm y se sabe que 30 m del alambre tienen una resistencia de 4.0 Ω. Resp. 5.13×10^{-8} Ω

27.34. La resistividad de un alambre dado es 1.72×10^{-8} Ω m a 20°C. Se conecta una batería de 6 V a una bobina de 20 m de este alambre, cuyo diámetro es de 0.8 mm. ¿Cuál es la corriente en el alambre?

27.35. Un resistor se usa como termómetro. Su resistencia a 20°C es 26.00 Ω y su resistencia a 40°C es 26.20 Ω. ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistencia para este material? Resp. 3.85×10^{-4}/°C

***27.36.** ¿Qué longitud de alambre de cobre tiene a 20°C la misma resistencia que 200 m de alambre de hierro a 20°C? Suponga que ambos alambres tienen la misma sección transversal.

***27.37.** La potencia disipada en cierto alambre a 20°C es de 400 W. Si α = 0.0036/°C, ¿en qué porcentaje aumentará la potencia disipada cuando la temperatura de operación sea 68°C? Resp. 17.3 por ciento

Preguntas para la reflexión crítica

27.38. Un resistor de 150 Ω a 20°C tiene una potencia nominal máxima de 2.0 W. ¿Cuál es el voltaje máximo que se puede aplicar a través del resistor sin exceder la potencia máxima permitida? ¿Cuál es la corriente con este voltaje?

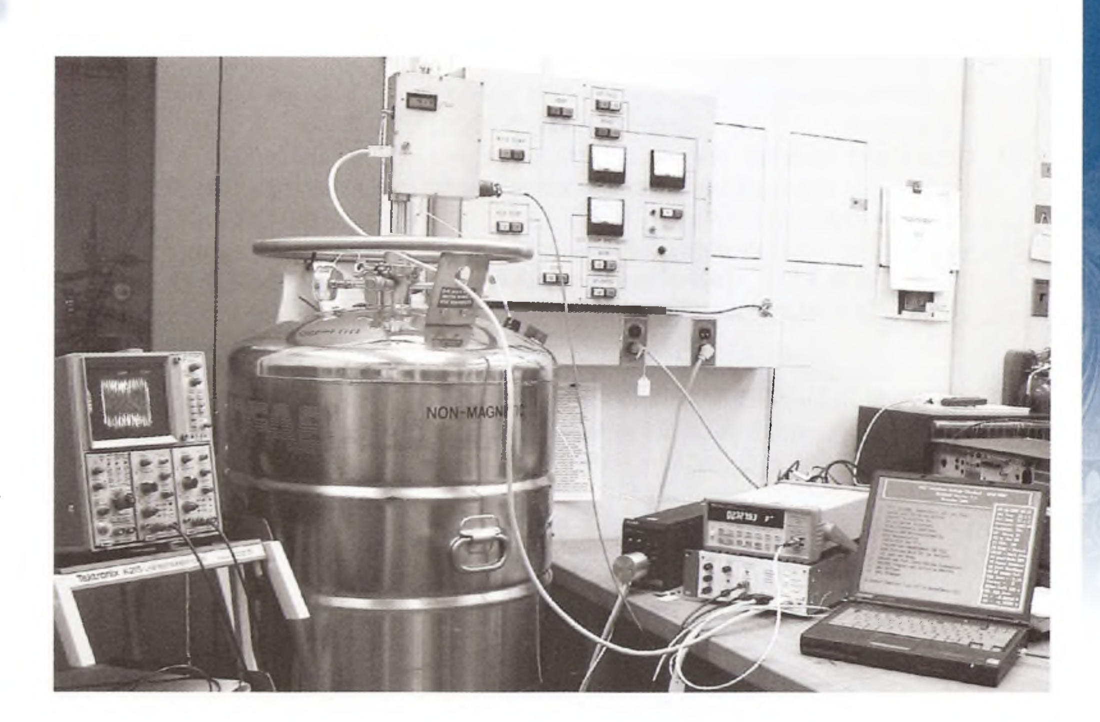
27.39. La corriente eléctrica del hogar es alterna, pero se le aplican las mismas fórmulas. Suponga que el motor de un ventilador que forma parte del sistema de enfriamiento de una casa funciona a 10 A nominales para 120 V. ¿Cuánta energía se requiere para que el ventilador funcione las 24 h? Al costo de 9 centavos por kilowatt-hora, ¿cuál es el costo de mantener este ventilador funcionando continuamente durante 30 días? Resp. 103.68 MJ, $77.76

***27.40.** La potencia consumida en un alambre eléctrico (α = 0.004/ °C) es de 40 W a 20 °C. Si todos los demás factores son constantes, ¿cuál será el consumo de potencia cuando (a) se duplique la longitud, (b) se duplique el diámetro, (c) se duplique la resistividad y (d) se duplique la temperatura absoluta? Resp. (a) 80 W, (b) 10 W, (c) 80 W, (d) 86.9 W

***27.41.** ¿Cuál debe ser el diámetro de un alambre de aluminio para que tenga la misma resistencia que un tramo de alambre de cobre de la misma longitud y 2.0 mm de diámetro? ¿Qué longitud de alambre de nicromo se necesita para tener la misma resistencia que 2 m de alambre de hierro con la misma sección transversal?

***27.42.** Un alambre de hierro (α = 0.0065/°C) tiene una resistencia de 6.00 Ω a 20°C y un alambre de cobre α = 0.0043/°C tiene una resistencia de 5.40 Ω a 20°C. ¿A qué temperatura tendrán los dos alambres la misma resistencia? Resp. −18.0°C

28 Circuitos de corriente continua



Con el fin de conservar el volt legal en Estados Unidos y de difundirlo como una norma internacionalmente sistemática y precisa para medir el voltaje se emplean circuitos eléctricos complejos, así como diversos instrumentos y aparatos. (*Cortesía del Nacional Institute of Standards and Technology.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Determinará la resistencia efectiva de cierto número de resistores (o resistencias) conectadas en *serie* y en *paralelo.*
2. Escribirá y aplicará ecuaciones relacionadas con el *voltaje*, la *corriente* y la *resistencia* para un circuito que contenga resistores conectados en serie y en paralelo.
3. Resolverá problemas que impliquen fem de una batería, la *diferencia de potencial en sus terminales*, la *resistencia interna* y la *resistencia de la carga.*
4. Escribirá y aplicará las *leyes de Kirchhoff* para redes eléctricas similares a las que aparecen en este texto.

Se usan dos tipos de corriente: la ***corriente directa*** (cd), que es el flujo continuo de carga en una sola dirección, y la *corriente alterna* (ca), que es el flujo de una carga que cambia continuamente tanto en magnitud como en dirección. En este capítulo analizaremos la corriente, el voltaje y la resistencia de circuitos de cd. Gran parte de los métodos y procedimientos se aplican también a los circuitos de ca. Las variaciones requeridas para las corrientes alternas surgen lógicamente a partir de una base firme en el estudio de la cd.

28.1 Circuitos simples; resistores en serie

Un circuito eléctrico consiste en cierto número de ramas unidas entre sí, de modo que al menos una de ellas cierre la trayectoria que se proporciona a la corriente. El circuito más sencillo consta de una sola fuente de fem unida a una sola resistencia externa, como se muestra en la figura 28.1. Si $\mathscr{E}$ representa la fem y R indica la resistencia total, la ley de Ohm queda como

$$\mathscr{E} = IR \qquad \textbf{(28.1)}$$

donde I es la corriente que circula por el circuito. Toda la energía que se gana mediante una carga que pasa a través de la fuente de fem se pierde debido al flujo a través de la resistencia.

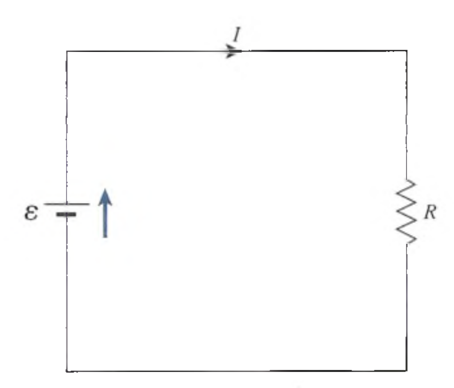


Figura 28.1 Un circuito eléctrico simple.

Considere la adición de ciertos elementos al circuito. Se dice que dos o más elementos están en ***serie*** si tienen *un* solo punto en común que no está conectado a un tercer elemento. La corriente puede fluir únicamente por una sola trayectoria por los elementos en serie. Los resistores R_1 y R_2 de la figura 28.2a están en serie porque el punto A es común a ambas. Los resistores de la figura 28.2b, sin embargo, no están en serie, ya que el punto B es común a tres ramales de corriente. Al entrar en tal unión, la corriente eléctrica puede seguir dos trayectorias distintas.

Suponga que tres resistores (R_1, R_2 y R_3) están conectadas en serie y encerrados en una caja, la cual se indica con la parte sombreada en la figura 28.3. La resistencia efectiva R de los tres resistores se determina a partir de la fem (V) y de la corriente (I), registrados en los instrumentos de medición. Con base en la ley de Ohm

$$R = \frac{V}{I} \qquad \textbf{(28.2)}$$

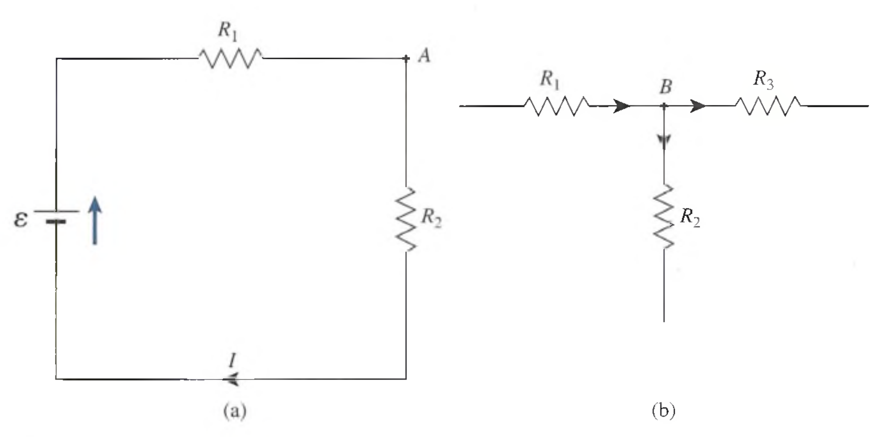


Figura 28.2 (a) Resistores conectados en serie. (b) Resistores no conectados en serie.

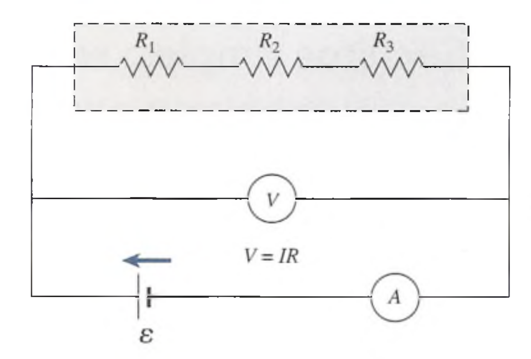


Figura 28.3 Método del voltímetro-amperímetro para medir la resistencia efectiva de varios resistores conectados en serie.

¿Cuál es la relación de R respecto a los tres resistencias internas? La corriente que circula por cada resistor debe ser idéntica, puesto que existe una sola trayectoria. En consecuencia,

$$I = I_1 = I_2 = I_3 \tag{28.3}$$

Aprovechando este hecho y considerando que la ley de Ohm se aplica por igual a cualquier parte del circuito, escribimos

$$V = IR \qquad V_1 = IR_1 \qquad V_2 = IR_2 \qquad V_3 = IR_3 \tag{28.4}$$

El voltaje externo (V) representa la suma de las energías perdidas por unidad de carga al pasar por cada resistencia. Por consiguiente,

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Por último, si sustituimos a partir de la ecuación (28.4) y dividimos entre la corriente se obtiene

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \qquad \textit{En serie} \tag{28.5}$$

Para resumir lo que se ha aprendido acerca de los resistores conectados en *serie* tenemos que:

1. La corriente es igual en cualquier parte de un circuito en serie.
2. La fem a través de cierto número de resistencias en serie es igual a la suma de los voltajes correspondientes a cada una de ellas.
3. La resistencia efectiva de cierto número de resistores en serie es equivalente a la suma de las resistencias individuales.

Ejemplo 28.1

Las resistencias R_1 y R_2 de la figura 28.2a son de 2 y de 4 Ω. Si la fuente de fem mantiene una diferencia de potencial constante de 12 V, ¿qué corriente se suministra al circuito externo? ¿Cuál es la caída de potencial a través de cada resistor?

Plan: Las resistores están conectados en serie, de forma que cada uno porta la misma corriente, determinada por el voltaje suministrado y la suma de ambas resistencias. Con la aplicación de la ley de Ohm a cada resistor se obtiene la caída en cada elemento.

Solución: Para resistores en serie la resistencia equivalente es

$$R_e = R_1 + R_2 = 2\ \Omega + 4\ \Omega; \qquad R_e = 6\ \Omega$$

La corriente I que pasa por todo el circuito y por cada resistor es:

$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{12\ \text{V}}{6\ \Omega} \qquad \text{o} \qquad I = 2\ \text{A}$$

Las caídas de voltaje en cada resistor son

$$V_1 = IR_1 = (2\ \text{A})(2\ \Omega);\quad V_1 = 4\ \text{V}$$
$$V_2 = IR_2 = (2\ \text{A})(4\ \Omega);\quad V_2 = 8\ \text{V}$$

Observe que la suma de las caídas de voltaje ($V_1 + V_2$) es igual a 12 V, la fem total aplicado.

28.2 Resistores en paralelo

Hay varias limitaciones en la operación de los circuitos en serie. Si falla un solo elemento de un circuito en serie al proporcionar una trayectoria para el flujo, todo el circuito queda abierto y la corriente se interrumpe. Sería muy molesto que todos los aparatos eléctricos de una casa dejaran de funcionar cada vez que un foco se fundiera. Más aún, cada elemento de un circuito en serie se añade al total de la resistencia del circuito limitando, por tanto, la corriente total que puede ser suministrada. Estas objeciones pueden superarse si se proporcionan otras trayectorias para la corriente eléctrica. Este tipo de conexión, en la que la corriente puede dividirse entre dos o más elementos, se denomina ***conexión en paralelo***.

Un ***circuito en paralelo*** es aquel en el que dos o más componentes se conectan a dos puntos comunes del circuito. Por ejemplo, en la figura 28.4, los resistores R_2 y R_3 están en paralelo, pues ambos tienen en común los puntos A y B. Observe que la corriente I, suministrada por una fuente de fem, se divide entre los resistores R_2 y R_3.

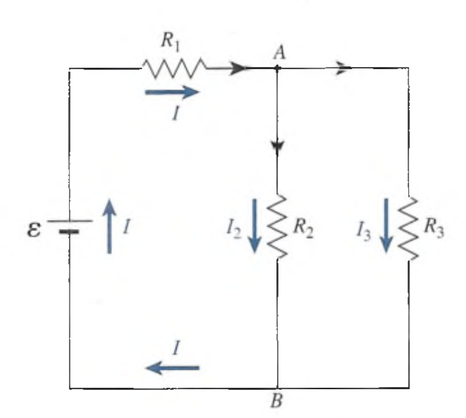


Figura 28.4 Los resistores R_2 y R_3 están conectados en paralelo.

Para obtener una expresión para la resistencia equivalente R de cierto número de resistencias conectadas en paralelo seguiremos un procedimiento similar al expuesto para las conexiones en serie. Suponga que se colocan tres resistores (R_1, R_2 y R_3) dentro de una caja, como aparece en la figura 28.5.

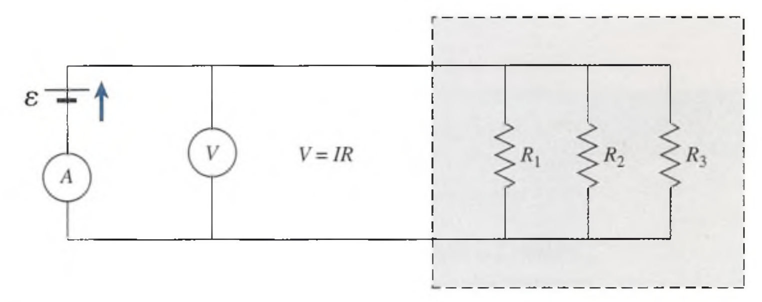


Figura 28.5 Cálculo de la resistencia equivalente de cierto número de resistores conectados en paralelo.

La corriente total I suministrada a la caja está determinada por su resistencia efectiva y el voltaje aplicado:

$$I = \frac{V}{R} \tag{28.6}$$

En una conexión en paralelo, la caída de voltaje a través de cada resistor es igual y equivalente a la caída de voltaje total.

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \tag{28.7}$$

Esta aseveración se comprueba cuando consideramos que la misma energía debe perderse por unidad de carga, independientemente de la trayectoria seguida en el circuito. En este ejemplo, la carga puede fluir por cualquiera de los tres resistores. Por tanto, la corriente total suministrada se divide entre ellos.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \tag{28.8}$$

Al aplicar la ley de Ohm a la ecuación (28.8) se obtiene

$$\frac{V}{R} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$$

Pero los voltajes son iguales, y podemos dividir la expresión anterior entre ellos

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \textit{En paralelo} \tag{28.9}$$

En suma, para resistores en paralelo:

1. La corriente total en un circuito en paralelo es igual a la suma de las corrientes en los ramales individuales.
2. Las caídas de voltaje a través de todos los ramales del circuito en paralelo deben ser de igual magnitud.
3. El recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de los recíprocos de las resistencias individuales conectadas en paralelo.

En caso de tener sólo dos resistores en paralelo,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Al resolver algebraicamente esta ecuación para R se obtiene una fórmula simplificada para calcular la resistencia equivalente

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{28.10}$$

La resistencia equivalente de dos resistores conectados en paralelo es igual a su producto dividido entre su suma.

Ejemplo 28.2

El voltaje total aplicado al circuito de la figura 28.6 es de 12 V, y las resistencias R_1, R_2 y R_3 son de 4, 3 y 6 Ω, respectivamente. (a) Determine la resistencia equivalente del circuito. (b) Determine la corriente que pasa por cada resistor.

Plan: La mejor forma de abordar un problema que contiene resistores tanto en serie como en paralelo es reducir el circuito separándolo en partes hasta su forma más sencilla. En la

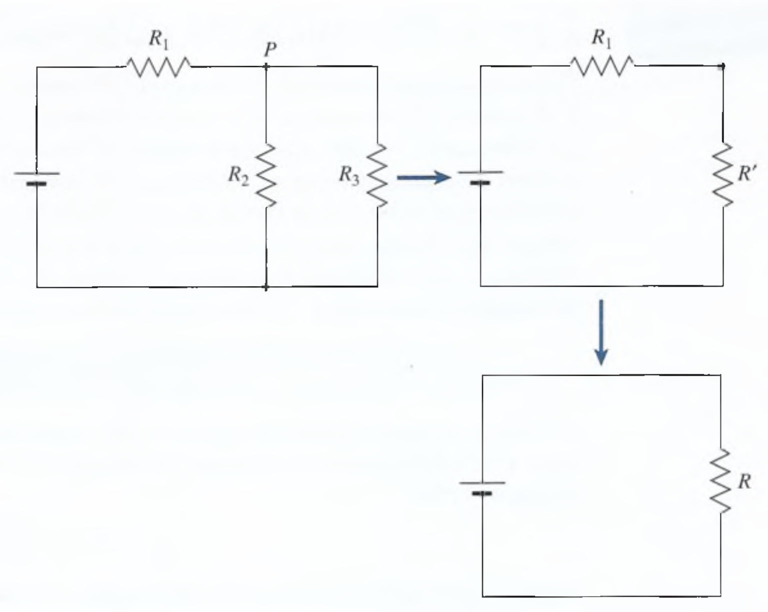


Figura 28.6 Reducción de un circuito complejo a un circuito equivalente simple.

figura 28.6 se muestra este método. Los dos resistores en paralelo, R_2 y R_3, se combinan para formar la resistencia equivalente R', que luego se combina en serie con R_1 para formar una sola resistencia equivalente, R_e, para todo el circuito. Después, con la ley de Ohm se obtendrá la corriente suministrada por la fuente de fem. Por último, al considerar los voltajes y las resistencias de cada resistor se determinará la corriente de cada elemento.

Solución (a): La resistencia equivalente R' de los resistores en paralelo se halla con la ecuación (28.10)

$$R' = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{(3\ \Omega + 6\ \Omega)}; \qquad R' = 2\ \Omega$$

Esta resistencia equivalente R' está en serie con R_1, de modo que con la ecuación (28.5) se determina la resistencia equivalente de todo el circuito

$$R_e = R_1 + R' = 4\ \Omega + 2\ \Omega; \qquad R_e = 6\ \Omega$$

Solución (b): La corriente total suministrada por la fuente de fem es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12\ \text{V}}{6\ \Omega}; \qquad I = 2\ \text{A}$$

Como las resistencias R_1 y R' están conectadas en *serie*, tienen la misma corriente que procede de la fuente de fem, que es igual a 2 A

$$I_1 = 2\ \text{A} \qquad \text{e} \qquad I' = 2\ \text{A}$$

Cuando toda la corriente (2 A) llega al punto P, se divide y parte pasa por R_2 y el resto por R_3. Estas corrientes se hallan con la ley de Ohm

$$I_2 = \frac{V'}{R_2} = \frac{4\ \text{V}}{3\ \Omega}; \qquad I_2 = 1.33\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{V'}{R_3} = \frac{4\ \text{V}}{6\ \Omega}; \qquad I_3 = 0.667\ \text{A}$$

Observe que $I_2 + I_3 = 2$ A, que es la corriente total.

28.3 Fem y diferencia de potencial terminal

En los problemas anteriores hemos supuesto que toda resistencia al flujo de corriente se debe a elementos de un circuito que son externos a la fuente de fem. Sin embargo, esto no es del todo cierto, ya que hay una resistencia inherente a cada fuente de fem. Esta ***resistencia interna*** se representa con el símbolo r y se muestra esquemáticamente como una pequeña resistencia en serie con la fuente de fem (véase la figura 28.7). Cuando una corriente I fluye por un circuito hay una pérdida de energía a través de la carga externa R_L y hay también una pérdida de calor debida a la resistencia interna. Por consiguiente, el voltaje real (V_T) entre las terminales de una fuente de fem $\mathscr{E}$ con una resistencia interna r se expresa así:

$$V_T = \mathscr{E} - Ir \tag{28.11}$$

El voltaje aplicado a la carga externa es, en consecuencia, menor que la fem por una cantidad igual a la caída de potencial interno. Puesto que $V_T = IR_L$, la ecuación (28.11) puede escribirse de nuevo como

$$V_T = IR_L = \mathscr{E} - Ir \tag{28.12}$$

Si resolvemos esta ecuación para la corriente I se obtiene

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_L + r} \tag{28.13}$$

La corriente en un circuito simple que contiene una sola fuente de fem es igual a la fem $\mathscr{E}$ dividida entre la resistencia total del circuito (incluida la resistencia interna).

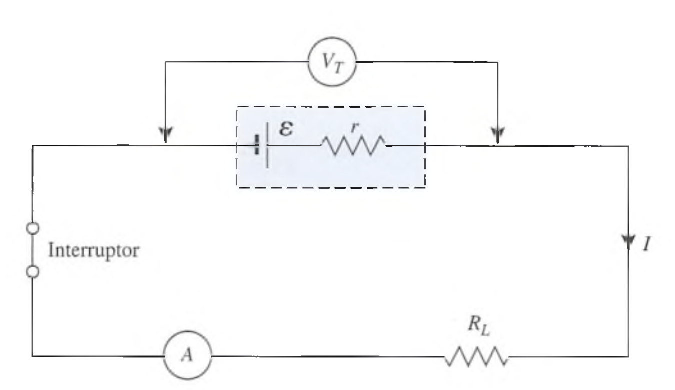


Figura 28.7 Resistencia interna.

Ejemplo 28.3

Una resistencia de carga de 8 Ω se conecta a una batería de 12 V cuya resistencia interna es de 0.2 Ω. (a) ¿Qué corriente se entrega a la carga? (b) ¿Cuál será la lectura del voltímetro colocado en las terminales de la batería mientras la carga está conectada?

Plan: La corriente suministrada al circuito es la razón de la fem a la resistencia total, incluida la resistencia interna de la batería. Una vez que establezcamos la corriente podemos determinar la caída de voltaje a través de la resistencia interna y restarla de la fem para hallar el voltaje terminal de la batería.

Solución (a): La corriente entregada se encuentra con la ecuación (28.13)

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_L + r} = \frac{12\ \text{V}}{8\ \Omega + 0.2\ \Omega} = 1.46\ \text{A}$$

Solución (b): el voltaje en las terminales es

$$V_T = \mathscr{E} - Ir = 12\text{ V} - (1.46\text{ A})(0.2\ \Omega)$$
$$= 12\text{ V} - 0.292\text{ V} = 11.7\text{ V}$$

Como comprobación, podemos calcular la caída de voltaje a través de la carga R_L:

$$V_T = IR_L = (1.46\text{ A})(8\ \Omega) = 11.7\text{ V}$$

28.4 Medición de la resistencia interna

La resistencia interna de una batería se puede medir en el laboratorio con un voltímetro, un amperímetro y una resistencia de valor conocido. Un voltímetro es un instrumento que tiene una resistencia sumamente alta. Cuando se le conecta directamente a las terminales de una batería de ésta sale una corriente insignificante. Es evidente, a partir de la ecuación (28.11), que para una corriente de cero este voltaje en las terminales es igual a la fem ($V_T = \mathscr{E}$). De hecho, la fem de una batería suele llamarse diferencia de potencial a "circuito abierto". Por tanto, es posible medir la fem con un voltímetro. Si se conecta una resistencia de valor conocido al circuito puede determinarse la resistencia interna midiendo la corriente suministrada al circuito.

Ejemplo 28.4

Al conectar un voltímetro a las terminales de una batería se obtiene una lectura a circuito abierto de 1.5 V. Se conecta entonces a la batería una pequeña lámpara que tiene una resistencia de 3.5 Ω y se mide entonces una corriente de 400 mA. ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? A medida que pasa el tiempo, esa resistencia aumenta y la luz de la lámpara va palideciendo. Si en una lectura tomada mucho tiempo después marca sólo 350 mA, ¿cuál es el aumento Δr de la resistencia interna?

Plan: Primero determinaremos la resistencia interna inicial con la ecuación (28.13) usando el valor conocido de la fem, la corriente original y la resistencia externa. La resistencia externa final se calcula a partir de la misma relación, sustituyendo la corriente más pequeña que se tiene con el paso del tiempo. La diferencia de esos valores representa el aumento de la resistencia interna.

Solución: Con base en la ecuación (28.13), resolvemos para la resistencia original r_1 como sigue

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_L + r_1} \qquad \text{o} \qquad r_1 = \frac{\mathscr{E} - IR_L}{I}$$

$$r_1 = \frac{1.5\text{ V} - (0.400\text{ A})(3.5\ \Omega)}{0.400\text{ A}}; \qquad r_1 = 0.250\ \Omega$$

Ahora, la resistencia después de cierto tiempo se obtiene cuando $I = 0.350$ A

$$r_2 = \frac{1.5\text{ V} - (0.350\text{ A})(3.5\ \Omega)}{0.350\text{ A}}; \qquad r_2 = 0.786\ \Omega$$

El aumento de la resistencia es la diferencia $(r_2 - r_1)$

$$\Delta r = 0.786\ \Omega - 0.250\ \Omega = 0.536\ \Omega$$

28.5 Inversión de la corriente mediante una fuente de fem

En una batería, la energía química se convierte en energía eléctrica para mantener un flujo de corriente en un circuito eléctrico. Un generador desempeña una función similar, ya que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. En cualquier caso, el proceso es reversible. Si una fuente de mayor fem se conecta en dirección opuesta a una fuente de menor fem, la corriente circulará a través de esta última de su terminal positiva a su terminal negativa. Invertir el flujo de carga de esta forma da por resultado una pérdida de energía a medida que la corriente eléctrica se transforma en energía química o mecánica.

Considere el proceso de cargar una batería, como se muestra en la figura 28.8. Mientras la carga fluye a través de la fuente de mayor fem, $\mathscr{E}_1$, ésta gana energía. El voltaje en las terminales para $\mathscr{E}_1$ es

$$V_1 = \mathscr{E}_1 - Ir_1$$

de acuerdo con la ecuación (28.12). El voltaje de salida se reduce debido a la resistencia interna r_1.

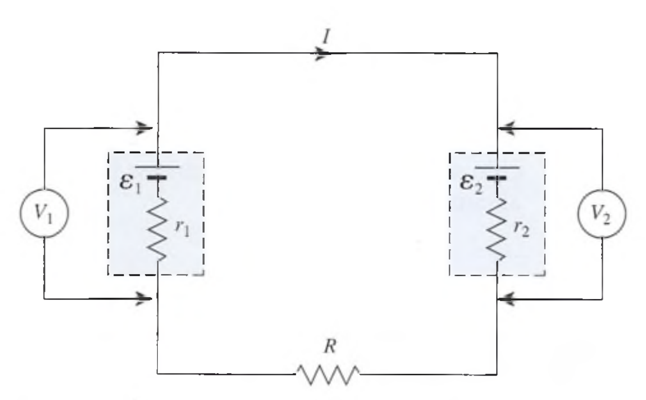


Figura 28.8 Inversión de la corriente mediante una fuente de fem.

La energía se pierde de dos maneras mientras se fuerza la carga a través de la batería contra de su dirección de salida normal:

1. La energía eléctrica en una cantidad igual a $\mathscr{E}_2$ se almacena como energía química en la batería.
2. La energía se pierde debido a la resistencia interna de la batería.

Por tanto, el voltaje V_2 en las terminales, que representa la caída total de potencial en la batería, se expresa así:

$$V_2 = \mathscr{E}_2 + Ir_2 \qquad \textbf{(28.14)}$$

donde r_2 es la resistencia interna. Observe que en este caso el voltaje en las terminales es *mayor* que la fem de la batería. El resto del potencial suministrado por la fuente de mayor fem se pierde por la resistencia externa R.

A lo largo de todo el circuito la pérdida de energía debe ser igual a la energía ganada. Entonces, se puede escribir

Energía ganada por unidad de carga = energía perdida por unidad de carga

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 + Ir_1 + Ir_2 + IR$$

Al resolver para la corriente I se obtiene

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R}$$

La corriente suministrada a un circuito eléctrico continuo es igual a la fem neta dividida entre la resistencia total del circuito, incluida la resistencia interna.

$$I = \frac{\sum \mathscr{E}}{\sum R} \tag{28.15}$$

A fin de aplicar la ecuación (28.15), se considera negativa una fem cuando la corriente fluye contra de su dirección de salida normal.

Ejemplo 28.5

Suponga los siguientes valores para los parámetros del circuito que aparece en la figura 28.8: $\mathscr{E}_1 = 12$ V, $\mathscr{E}_2 = 6$ V, $r_1 = 0.2\ \Omega$, $r_2 = 0.1\ \Omega$ y $R = 4\ \Omega$. (a) ¿Qué corriente hay en el circuito? (b) ¿Cuál es el voltaje en las terminales de la batería de 6 V?

Plan: La corriente suministrada debe ser igual a la razón de la caída neta de voltaje en todo el circuito ($\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$) a la resistencia total hallada ($r_1 + r_2 + R$). Tras determinar la corriente es posible aislar la batería de 6 V y encontrar el voltaje en las terminales. Se pierde energía en esta batería debido a la resistencia interna y a la energía necesaria para contrarrestar la fuga natural de fem. Por tanto, la batería $\mathscr{E}_2$ está cargándose y la aplicable es la ecuación (28.15).

Solución (a): de la ecuación (28.15), la corriente resulta ser

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{12\text{ V} - 6\text{ V}}{0.2\ \Omega + 0.1\ \Omega + 4\ \Omega}$$

$$= \frac{6\text{ V}}{4.3\ \Omega} = 1.40\text{ A}$$

Solución (b): el voltaje en las terminales de la batería que está siendo cargada es, con base en la ecuación (28.14),

$$V_2 = \mathscr{E}_2 + Ir_2$$
$$= 6\text{ V} + (1.4\text{ A})(0.1\ \Omega)$$
$$= 6.14\text{ V}$$

28.6 Leyes de Kirchhoff

Una red eléctrica es un circuito complejo que consta de cierto número de trayectorias cerradas o mallas por donde circula corriente. Es complicado aplicar la ley de Ohm cuando se trata de redes complejas que incluyen varias mallas y varias fuentes de fem. En el siglo XIX, el científico alemán Gustav Kirchhoff desarrolló un procedimiento más directo para analizar circuitos de ese tipo. Su método se apoya en dos leyes: la ***primera y la segunda leyes de Kirchhoff.***

Primera ley de Kirchhoff: La suma de las corrientes que entran en una unión es igual a la suma de las corrientes que salen de esa unión.

$$\sum I_{\text{entrante}} = \sum I_{\text{saliente}} \tag{28.16}$$

Segunda ley de Kirchhoff: La suma de las fem alrededor de cualquier malla cerrada de corriente es igual a la suma de todas las caídas de *IR* alrededor de dicha malla.

$$\sum \mathscr{E} = \sum IR \tag{28.17}$$

Un ***nodo*** es cualquier punto en un circuito donde confluyen tres o más alambres. La primera ley simplemente establece que la carga debe fluir continuamente; no se puede acumular en un nodo.

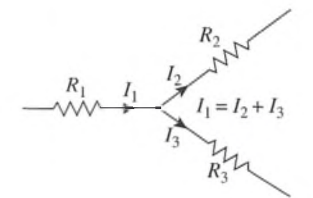


Figura 28.9 La suma de las corrientes que entran en un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de él.

En la figura 28.9, si llegan 12 C de carga al nodo cada segundo, entonces deben salir 12 C de carga cada segundo. La corriente suministrada a cada ramal es inversamente proporcional a la resistencia de ese ramal.

La segunda ley no es sino otra forma de postular la conservación de la energía. Si se parte de cualquier punto del circuito y se sigue por cualquier trayectoria o malla cerrada, la energía que se gana por unidad de carga debe ser igual a la energía que se pierde por unidad de carga. La energía se gana gracias a la conversión de energía química o mecánica en energía eléctrica mediante una fuente de fem. La energía se puede perder, ya sea en forma de caídas de potencial IR o en el proceso de invertir la corriente mediante una fuente de fem. En el último caso, la energía eléctrica se convierte en la energía química necesaria para cargar una batería o la energía eléctrica se convierte en energía mecánica para el funcionamiento de un motor.

Al aplicar las reglas de Kirchhoff han de seguirse procedimientos bien definidos. Los pasos del procedimiento general se presentarán considerando el ejemplo planteado en la figura 28.10a.

1. Elija una dirección de la corriente para cada malla de la red.

Las tres mallas que podrían considerarse están representadas en la figura 28.10b, c y d. Si consideramos todo el circuito mostrado en la figura 28-10a, se supone que la corriente I_1 fluye en contrasentido a las manecillas del reloj en la parte superior de la malla, se supone que I_2 circula a la izquierda en el ramal del centro y que I_3 fluye contra las manecillas del reloj en la malla inferior. Si las suposiciones son correctas, la solución al problema nos dará un valor positivo para la corriente; si son incorrectas, un valor negativo indicará que la corriente en realidad circula en dirección opuesta.

2. Aplicar la primera ley de Kirchhoff para escribir una ecuación de la corriente para todos y cada uno de los nodos.

Escribir la ecuación de la corriente para *cada* nodo sería duplicar la ecuación. En nuestro ejemplo, hay dos nodos que se indican como m y n. La ecuación de la corriente para m es

$$\sum I_{\text{entrante}} = \sum I_{\text{saliente}}$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \tag{28.18}$$

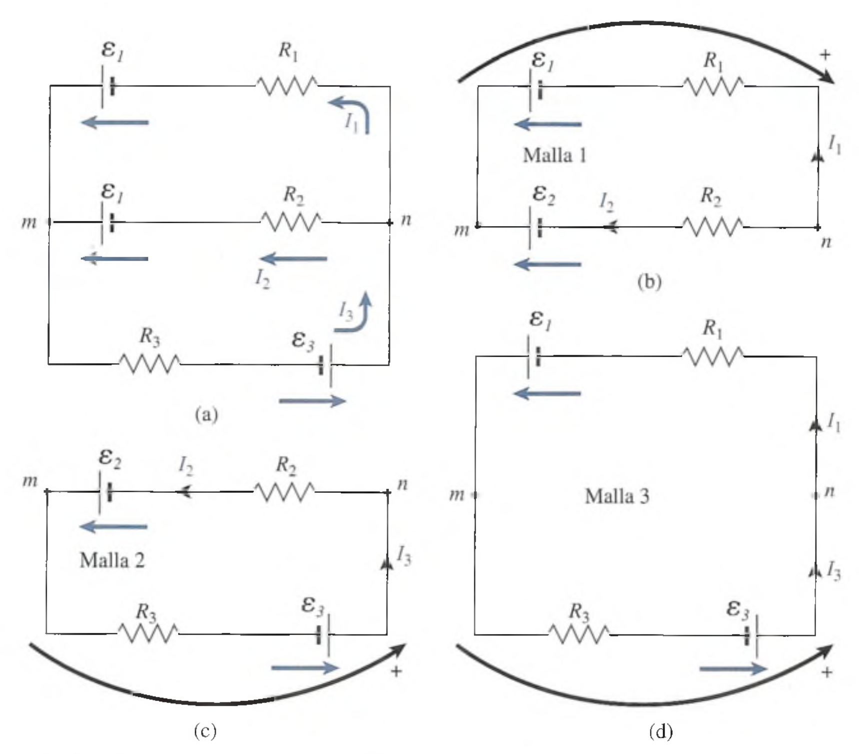


Figura 28.10 Aplicación de las leyes de Kirchhoff a un circuito complejo.

Resultaría la misma ecuación si se considerara el nodo n, y no se obtendría ninguna nueva información.

3. Indique, mediante una flecha pequeña junto al símbolo de cada fem, la dirección en la que la fuente, si actuara sola, haría que una carga positiva circulara por el circuito.

En nuestro ejemplo, $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ se dirigen a la izquierda y $\mathscr{E}_3$ a la derecha.

4. Aplique la segunda ley de Kirchhoff ($\Sigma\, \mathscr{E} = \Sigma\, IR$) para cada una de las mallas. Habrá una ecuación para cada malla.

Al aplicar la segunda regla de Kirchhoff hay que partir de un punto específico de la malla y hacer un *seguimiento* de ésta en una dirección consistente hasta volver al punto de partida. La elección de una *dirección de seguimiento* es arbitraria; sin embargo, una vez establecida se convierte en la dirección positiva (+) para la convención de signos. (Las direcciones de seguimiento de las tres mallas de nuestro ejemplo están indicadas en la figura 28.10.) Se aplican las siguientes convenciones de signos:

1. Cuando se suman las fems en toda una malla, el valor asignado a la fem es positivo si su salida (véase el paso 3) coincide con la dirección del seguimiento; se considera negativo si la salida es en contra de esa dirección.
2. Una caída de potencial IR se considera positiva cuando se supone que la corriente sigue la dirección del seguimiento y negativa cuando se supone que se opone a ella.

Vamos a aplicar la segunda ley de Kirchhoff a cada malla del ejemplo.

Malla 1 Partiendo del punto m y en un seguimiento contra las manecillas del reloj se tiene

$$-\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = -I_1R_1 + I_2R_2 \tag{28.19}$$

Malla 2 Partiendo del punto m y en un seguimiento contra las manecillas del reloj se tiene

$$\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_2 = -I_3R_3 + I_2R_2 \tag{28.20}$$

Malla 3 Partiendo del punto m y haciendo el seguimiento contra las manecillas del reloj se tiene

$$\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_1 = I_3R_3 + I_1R_1 \tag{28.21}$$

Si la ecuación de la malla 1 se resta de la ecuación de la malla 2, se obtiene la ecuación para la malla 3, lo que demuestra que la ecuación de la última malla no arroja información nueva.

Ahora se tienen tres ecuaciones independientes que incluyen sólo tres cantidades desconocidas. Se pueden resolver simultáneamente para determinar las incógnitas, y es posible usar la tercera ecuación para comprobar los resultados.

Ejemplo 28.6

Determine las corrientes desconocidas que se muestran en la figura 28.11 usando las leyes de Kirchhoff.

Plan: Es indispensable trazar y marcar un diagrama, como el de la figura 28.11, escribiendo todos los datos que se tienen e indicando la dirección de salida normal para cada fem y las direcciones supuestas para el flujo de corriente en cada circuito. Elegiremos el nodo denotado con m y aplicaremos la primera ley de Kirchhoff para obtener una ecuación que suponga las tres corrientes desconocidas. Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a ciertas mallas de corriente será posible obtener al menos otras dos ecuaciones independientes. Es posible resolver las tres ecuaciones simultáneamente para hallar los valores de las corrientes.

Solución: La suma de las corrientes que entran en el nodo m deben equivaler a la suma de las que salen de él; por tanto

$$\sum I_{\text{entrante}} = \sum I_{\text{saliente}}$$

$$I_2 = I_1 + I_3 \tag{28.22}$$

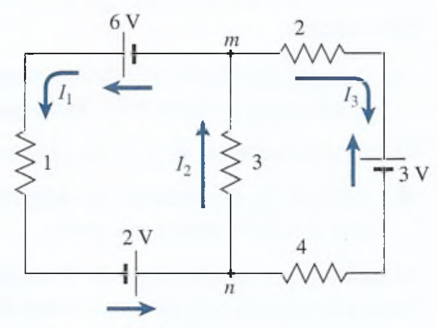


Figura 28.11

A continuación, la dirección de la salida positiva se indica en la figura, junto a cada fuente de fem. Puesto que hay tres incógnitas, necesitamos al menos otras dos ecuaciones a partir de la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff. Si partimos de *m* y tomamos dirección contraria a la de las manecillas del reloj por la malla de la izquierda, escribimos la ecuación del voltaje

$$\sum \mathscr{E} = \sum IR$$
$$6\text{ V} + 2\text{ V} = I_1(1\ \Omega) + I_2(3\ \Omega)$$
$$8\text{ V} = (1\ \Omega)I_1 + (3\ \Omega)I_2$$

Al dividir entre 1 Ω y trasponer se obtiene

$$I_1 + 3I_2 = 8\text{ A} \tag{28.23}$$

La unidad *ampere* surge del hecho de que

$$1\text{ V}/\Omega = 1\text{ A}$$

Puede llegarse a otra ecuación del voltaje partiendo de *m* y siguiendo contra las manecillas del reloj por la malla de la derecha:

$$-3\text{ V} = I_3(2\ \Omega) + I_3(4\ \Omega) + I_2(3\ \Omega)$$

El signo negativo resulta de que la salida de la fuente está en dirección contraria a la de seguimiento. Simplificando queda

$$2I_3 + 4I_3 + 3I_2 = -3\text{ A}$$
$$6I_3 + 3I_2 = -3\text{ A}$$
$$I_2 + 2I_3 = -1\text{ A} \tag{28.24}$$

Las tres ecuaciones que deben resolverse simultáneamente para I_1, I_2 e I_3 son

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad \text{(Ec. 28.22)}$$
$$I_1 + 3I_2 = 8\text{ A} \qquad \text{(Ec. 28.23)}$$
$$I_2 + 2I_3 = -1\text{ A} \qquad \text{(Ec. 28.24)}$$

A partir de la ecuación (28.22) se observa que

$$I_1 = I_2 - I_3$$

la cual, si se sustituye en la ecuación (28.23), resulta en

$$(I_2 - I_3) + 3I_2 = 8\text{ A}$$
$$4I_2 - I_3 = 8\text{ A} \tag{28.25}$$

Ahora se pueden resolver las ecuaciones (28.23) y (28.24) simultáneamente eliminando I_3 de ambas mediante una suma:

$$\begin{array}{rl} (28.24): & I_2 + 2I_3 = -1\text{ A} \\ 2 \times (28.25): & 8I_2 - 2I_3 = 16\text{ A} \\ \hline & 9I_2 = 15\text{ A} \\ & I_2 = 1.67\text{ A} \end{array}$$

Sustituyendo $I_2 = 1.67$ A en las ecuaciones (28.23) y (28.24) se obtienen los valores para las otras corrientes:

$$I_1 = 3\text{ A} \qquad I_3 = -1.33\text{ A}$$

El valor negativo obtenido para I_3 indica que la dirección supuesta para la corriente es incorrecta. En realidad, la corriente fluye en dirección contraria a la supuesta. Sin embargo, al resolver problemas el signo menos debe conservarse hasta que se hayan determinado todas las incógnitas.

Como una comprobación de los resultados anteriores, podemos escribir otra ecuación del voltaje aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla exterior. Partiendo de m y siguiendo una dirección contraria a la de las manecillas del reloj se obtiene

$$(6 + 2 + 3)\text{ V} = I_1(1\ \Omega) - I_3(4\ \Omega) - I_3(2\ \Omega)$$
$$I_1 - 6I_3 = 11\text{ A}$$

Sustituyendo para I_1 e I_3 se obtiene

$$3\text{ A} - (6)(-1.33\text{ A}) = 11\text{ A}$$
$$11\text{ A} = 11\text{ A} \qquad \textit{Comprobación}$$

Observe de nuevo que en los cálculos se usó el valor negativo para I_3 y, no obstante, indica una suposición incorrecta.

Resumen y repaso

Resumen

El conocimiento de los circuitos de corriente directa es esencial como introducción a la tecnología eléctrica. Casi todos los estudios avanzados se basan en las ideas presentadas en este capítulo. A continuación se presenta un resumen de los hechos importantes que debe recordar.

- Los resistores pueden conectarse en serie o en paralelo. Enseguida se resumen los datos relevantes acerca de la corriente, el voltaje y las resistencias equivalentes.

Circuitos simples

	Circuitos en serie	**Circuitos paralelos**
Tipo de circuito	o-WW-WW-WW-o	(tres resistores en paralelo)
Corriente, I	$I = I_1 = I_2 = I_3$	$I = I_1 + I_2 + I_3$
Voltaje, V	$V = V_1 + V_2 + V_3$	$V = V_1 = V_2 = V_3$
Resistencia equivalente	$R = R_1 + R_2 + R_3$	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$
Resistencia para dos elementos	$R = R_1 + R_2$	$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

- La corriente suministrada a un circuito eléctrico es igual a la fem neta dividida entre la resistencia total del circuito, incluidas las resistencias internas.

$$I = \frac{\sum \mathscr{E}}{\sum R}$$

por ejemplo, $$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R_L}$$

El ejemplo corresponde a dos baterías opuestas de resistencias internas r_1 y r_2 cuando la resistencia de la carga del circuito es R_L.

- Según las leyes de Kirchhoff, la corriente que entra en un nodo debe ser igual a la corriente que sale de él, y la fem neta en cualquier circuito cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de IR. En forma simbólica,

$$\sum I_{\text{entrante}} = \sum I_{\text{saliente}}$$
$$\sum \mathscr{E} = \sum IR \qquad \textit{Leyes de Kirchhoff}$$

- Los siguientes pasos se deben aplicar para resolver circuitos con la ley de Kirchhoff (véase la figura 28.10):

Paso 1 *Suponga una dirección de la corriente para cada malla de la red.*

Paso 2 *Aplique la primera ley de Kirchhoff para escribir una ecuación de la corriente para todos los nodos, excepto uno* ($\sum I_{ent} = \sum I_{sal}$).

Paso 3 *Indique con una pequeña flecha la dirección en que cada fem, si actuara sola, haría que se moviera una carga positiva.*

Paso 4 *Aplique la segunda ley de Kirchhoff* ($\sum \mathscr{E} = \sum IR$) *para escribir una ecuación para todas las mallas de corriente que le sea posible.* Elija en forma arbitraria la dirección de seguimiento que considerará positiva. Se estima que una fem es positiva cuando su sentido de salida es el mismo que la dirección de seguimiento antes descrito. Una caída de IR se considera positiva cuando la dirección de la corriente supuesta es igual a la dirección de seguimiento elegida por usted.

Paso 5 *Resuelva las ecuaciones simultáneamente para determinar las cantidades desconocidas.*

Conceptos clave

circuito paralelo 551
conexión en paralelo 551
conexión en serie 549
corriente directa 548
nodo o unión 557
primera ley de Kirchhoff 557
resistencia interna 554
segunda ley de Kirchhoff 557

Preguntas de repaso

28.1. Justifique la afirmación siguiente: la resistencia efectiva de un grupo de resistores conectados en paralelo es menor que la de cualquiera de las resistencias consideradas individualmente.

28.2. Comente las ventajas y desventajas de conectar las luces del árbol de navidad (a) en serie, (b) en paralelo.

28.3. ¿Qué significa la diferencia de potencial a "circuito abierto" de una batería?

28.4. Señale con claridad la diferencia entre la fem y la diferencia de potencial en las terminales.

28.5. Muchos artefactos y aparatos eléctricos para el hogar se han diseñado para funcionar con el mismo voltaje. ¿Cómo se deben conectar esos dispositivos en un circuito eléctrico?

28.6. ¿Los elementos conectados en serie deben estar diseñados para funcionar con una corriente constante o con un voltaje constante?

28.7. En un circuito eléctrico, se desea reducir la resistencia efectiva agregando resistencias. ¿Esas resistencias deben conectarse en paralelo o en serie?

28.8. Describa un método adecuado para medir la resistencia de un carrete de alambre utilizando un voltímetro, un amperímetro, un reóstato y una fuente de fem. Trace el diagrama del circuito propuesto. (El reóstato se usa para ajustar la corriente a los límites requeridos por el amperímetro.)

28.9. Se sabe la fem de una batería. Describa un procedimiento de laboratorio para determinar su resistencia interna.

28.10. Compare las fórmulas para calcular la capacitancia equivalente con las fórmulas elaboradas en este capítulo para resistencias en serie y en paralelo.

28.11. ¿Es posible que el voltaje terminal de una batería sea alguna vez mayor que su fem? Explique su respuesta.

28.12. Resuelva explícitamente la ecuación (28.9) para la resistencia equivalente R.

28.13. Explique con claridad la diferencia entre fem (potencial a circuito abierto) y el voltaje terminal de una batería. ¿Qué significa potencial de electrodo? ¿Cómo afecta al potencial de electrodo una corriente de descarga externa?

28.14. El grado de carga que existe en una batería de almacenamiento fabricada a base de plomo y ácido se puede determinar por medio de un hidrómetro, un dispositivo que indica la densidad relativa (comparándola con la del agua pura) de la solución electrolítica. Explique en qué forma esta información indica el estado de la carga de una batería de almacenamiento.

28.15. La fem de una batería de plomo y ácido varía según el estado de su carga. En un instante, la densidad de la solución electrolítica resulta ser de 1.29 g/cm^3; en otro momento, la densidad es de sólo 1.11 g/cm^3. Compare las fuerzas electromotrices de la batería en las dos situaciones que hemos descrito.

28.16. Explique por qué una batería de automóvil se "agota" más rápidamente en una mañana fría que en un día normal.

28.17. Las baterías de plomo y ácido nunca deben dejarse descargadas durante largos periodos. ¿Por qué no es recomendable esta práctica?

28.18. Como parte del mantenimiento de rutina, a veces se agrega agua destilada a las baterías (acumuladores) de plomo y ácido. ¿Por qué es necesario hacerlo? ¿Por qué el agua debe estar destilada? Si se derrama el ácido de una batería, ¿qué precauciones se deben tomar para sustituirlo?

Problemas

Sección 28.2 Resistencias en serie y en paralelo

En esta sección, desprecie la resistencia interna de las baterías.

28.1. Un resistor de 5 Ω está conectado en serie con otra de 3 Ω y una batería de 16 V. ¿Cuál es la resistencia efectiva y cuál es la corriente en el circuito?
Resp. 8.00 Ω, 2.00 A

28.2. Un resistor de 15 Ω está conectado en paralelo con uno de 30 Ω y una fuente de fem de 30 V. ¿Cuál es la resistencia efectiva y cuál es la corriente total suministrada?

28.3. En el problema 28.2, ¿cuál es la corriente en los resistores de 15 y 30 Ω? Resp. 2.00 A, 1.00 A

28.4. ¿Cuál es la resistencia equivalente de resistores de 2, 4 y 6 W conectados primero en serie y luego en paralelo?

28.5. Un resistor de 18 Ω y otro de 9 Ω se conectan primero en paralelo, y después en serie, con una batería de 24 V. ¿Cuál es la resistencia efectiva de cada conexión? Sin considerar la resistencia interna, ¿cuál es la corriente total que suministra la batería en cada caso?
Resp. 6.00 Ω, 27.0 Ω; 4.00 A, 0.899 A

28.6. Un resistor de 12 Ω y otro de 8 Ω se conectan primero en paralelo y después en serie con una fuente de fem de 28 V. ¿Cuáles son la resistencia efectiva y la corriente total en cada caso?

28.7. Una resistor de 8 Ω y otro de 3 Ω se conectan primero en paralelo y después en serie con una fuente de 12 V. Halle la resistencia efectiva y la corriente total con cada conexión.
Resp. 2.18 Ω, 5.50 A; 11.0 Ω, 1.09 A

28.8. Si tiene tres resistores de 80, 60 y 40 Ω, calcule su resistencia efectiva cuando están conectados en serie y cuando los conecta en paralelo.

28.9. Tres resistores de 4, 9 y 11 Ω se conectan primero en serie y después en paralelo. Calcule la resistencia efectiva de cada conexión. Resp. 24.0 Ω. 2.21 Ω

***28.10.** Un resistor de 9 Ω está conectado en serie con dos resistores en paralelo de 6 y 12 Ω. ¿Cuál es la diferencia de potencial en las terminales si la corriente total que suministra la batería es de 4 A?

***28.11.** En el circuito descrito en el problema 28.10, ¿cuál es el voltaje a través del resistor de 9 Ω y cuál es la corriente que pasa por el resistor de 6 Ω?
Resp. 36.0 V, 2.67 A

***28.12.** Encuentre la resistencia equivalente del circuito que aparece en la figura 28.12.

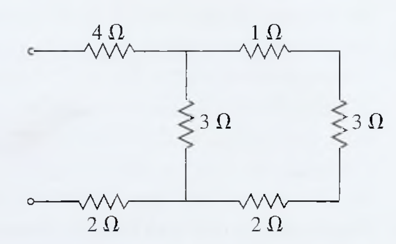


Figura 28.12

***28.13.** Determine la resistencia equivalente del circuito que se muestra en la figura 28.13. Resp. 2.22 Ω

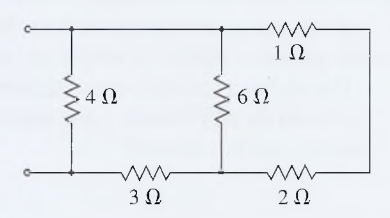


Figura 28.13

***28.14.** Si se aplica una diferencia de potencial de 24 V al circuito ilustrado en la figura 28.12, ¿cuáles serán la corriente y el voltaje a través del resistor de 1 Ω?

***28.15.** Si se aplica una diferencia de potencial de 12 V a los extremos libres en la figura 28.13, ¿cuáles serán la corriente y el voltaje a través del resistor de 2 Ω?
Resp. 1.60 A, 3.20 V

Sección 28.3 FEM y diferencia de potencial en las terminales

28.16. Una resistencia de carga de 8 Ω está conectada en serie con una batería de 18 V cuya resistencia interna es 1.0 Ω. ¿Cuánta corriente se suministra y cuál es el voltaje en las terminales?

28.17. Una resistencia de 6 Ω se conecta a través de una batería de 12 V que tiene una resistencia interna de 0.3 Ω. ¿Cuánta corriente se suministra al circuito? ¿Cuál es la diferencia de potencial en las terminales?
Resp. 1.90 A, 11.4 V

28.18. Dos resistores, de 7 y 14 Ω, están conectados en paralelo con una batería de 16 V cuya resistencia interna es 0.25 Ω. ¿Cuál es la diferencia de potencial en las terminales y cuánta corriente es suministrada al circuito?

28.19. La diferencia de potencial a circuito abierto de una batería es de 6 V. La corriente suministrada a un resistor de 4 Ω es de 1.40 A. ¿Cuál es entonces la resistencia interna? Resp. 0.286 Ω

28.20. Un motor de cd extrae 20 A de una línea de 120 V cd. Si la resistencia interna es 0.2 Ω, ¿cuál es la fem del motor?

28.21. En el caso del motor del problema 28.20, ¿cuánta potencia eléctrica se extrae de la línea? ¿Qué parte de esa potencia se disipa a causa de las pérdidas por calentamiento? ¿Qué potencia es transmitida por el motor? Resp. 2400 W, 2320 W, 80 W

28.22. Dos resistores de 2 y 6 Ω están conectados en serie con una batería de 24 V cuya resistencia interna es de 0.5 Ω. ¿Cuál es el voltaje en las terminales y la potencia disipada por la resistencia interna?

***28.23.** Determine la corriente total y la corriente que pasa por cada resistor de la figura 28.21 cuando $\mathcal{E} = 24$ V, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$ y $r = 0.4\ \Omega$.
Resp. $I = 15$ A, $I_1 = 2$ A, $I_2 = 4\ \Omega$, $I_3 = 6$ A, $I_4 = 9$ A

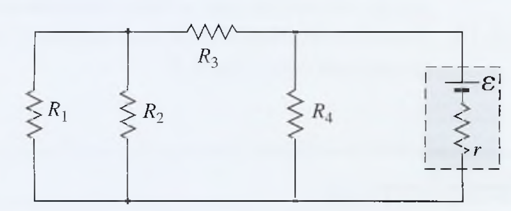


Figura 28.14

***28.24.** Determine la corriente total y la corriente en cada uno de los resistores de la figura 28.14 cuando $\mathcal{E} = 50$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$ y $r = 0.4\ \Omega$.

Sección 28.6 Leyes de Kirchhoff

28.25. Aplique la segunda ley de Kirchhoff a la malla de corriente de la figura 28.15. ¿Cuál es el voltaje neto en la malla? ¿Cuál es la caída de *IR* neta? ¿Cuál es la corriente en la malla? Resp. 16 V, 16 V, 2.00 A

28.26. Responda las mismas preguntas del problema 28.25 cuando la polaridad de la batería de 20 V se invierte, es decir, cuando su nueva dirección de salida es a la izquierda.

***28.27.** Aplique las leyes de Kirchhoff y resuelva para obtener las corrientes en todo el circuito mostrado en la figura 28.16. Resp. 190 mA, 23.8 mA, 214 mA

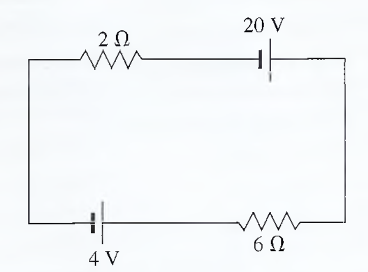


Figura 28.15

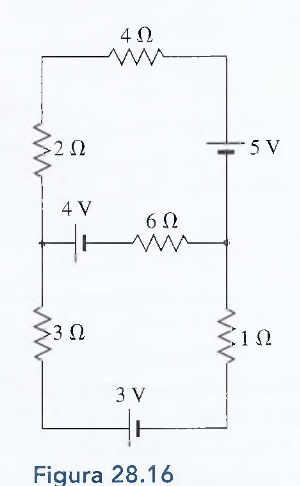


Figura 28.16

***28.28.** Aplique las leyes de Kirchhoff y resuelva para hallar las corrientes de la figura 28.17.

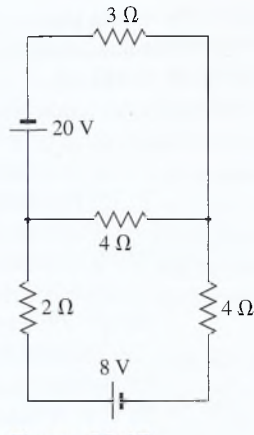


Figura 28.17

***28.29.** Aplique las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura 28.18. Halle las corrientes en cada ramal. Resp. 536 mA, 732 mA, 439 mA, 634 mA

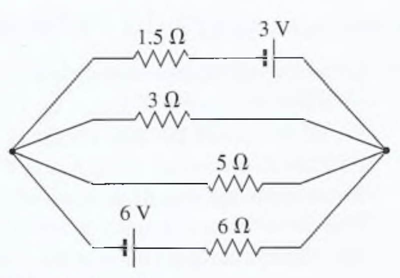


Figura 28.18

Problemas adicionales

28.30. La corriente en un circuito de una sola malla es de 6.0 A cuando la resistencia total del mismo circuito es R. Cuando se conecta en serie con R un resistor de 2 Ω, la corriente cae a 4 A. ¿Cuál es la resistencia R?

28.31. Tres elementos con resistencias de 3, 6 y 9 Ω se conectan primero en serie y después en paralelo con una fuente de diferencia de potencial de 36 V. Si se desprecia la resistencia interna, ¿qué cantidad de corriente sale de la terminal positiva de la fuente? Resp. 2.00 A, 22.0 A

28.32. Tres resistores de 3 Ω cada uno están conectados en paralelo. A continuación, esta combinación se conecta en serie con otro resistor de 3 Ω. ¿Cuál es el valor de la resistencia equivalente?

***28.33.** Tres resistores de 4, 8 y 12 Ω se conectan en serie con una batería. Un interruptor permite conectar o desconectar la batería del circuito. Cuando el interruptor se abre, un voltímetro conectado a través de las terminales de la batería presenta una lectura de 50 V. Cuando el interruptor se cierra, la lectura del voltímetro es 48 V. ¿Cuál es el valor de la resistencia interna de la batería? Resp. 1.00 Ω

***28.34.** El generador de la figura 28.19 produce una fem de $\mathcal{E}_1 = 24$ V y tiene una resistencia interna de 0.2 Ω.

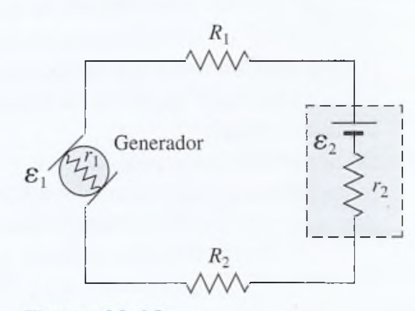


Figura 28.19

El generador se usa para cargar una batería de $\mathscr{E}_2$ = 12 V que tiene una resistencia interna de 0.3 Ω. Suponga que R_1 = 4 Ω y R_2 = 6 Ω. ¿Cuál es el voltaje en las terminales del generador? ¿Cuál es el voltaje en las terminales de la batería?

***28.35.** ¿Cuánta potencia se consume para recargar la batería del problema 28.34? Demuestre que la potencia suministrada por el generador es igual a la potencia disipada ocasionada por la resistencia más la potencia que se consume para recargar la batería.
Resp. 27.4 W = 13.7 W + 13.7 W

***28.36.** Suponga que los parámetros del circuito ilustrado en la figura 28.8 tienen los siguientes valores: $\mathscr{E}_1$ = 100 V, $\mathscr{E}_2$ = 20 V, r_1 = 0.3 Ω, r_2 = 0.4 Ω y R = 4 Ω. ¿Cuáles son los voltajes V_1 y V_2 en las terminales? ¿Cuál es la potencia disipada registrada a través del resistor de 4 Ω?

***28.37.** Resuelva para las corrientes en cada ramal de la figura 28.20. Resp. 1.20 A, 0.600 A, 0.600 A

***28.38.** Si la corriente en el resistor de 6 Ω de la figura 28.21 es 2 A, ¿cuál es la fem de la batería? Si se desprecia la resistencia interna, ¿cuál es la potencia disipada a través del resistor de 1 Ω?

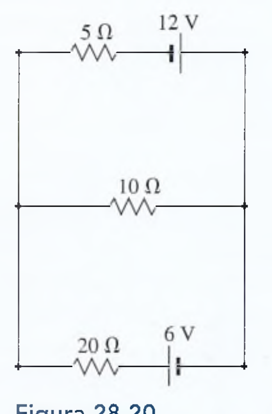


Figura 28.20

Figura 28.21

Preguntas para la reflexión crítica

***28.39.** Una lámpara de tres intensidades usa dos resistores, un filamento de 50 W y otro de 100 W. Un interruptor de tres pasos permite conectar en serie cada uno de esos elementos y ofrece una tercera posibilidad al conectar los dos filamentos en paralelo. Trace el diagrama de un conjunto de interruptores con el que sea posible cumplir las mismas funciones. Suponga que el voltaje en la casa es de 120 V. ¿Cuáles son las resistencias de cada uno de los filamentos? ¿Cuál es la potencia de la combinación en paralelo?
Resp. 288 Ω, 144 Ω, 150 W

***28.40.** El circuito ilustrado en la figura 28.7 consta de una batería de 12 V, un resistor de 4 Ω y un interruptor. Cuando la batería está nueva, su resistencia interna es 0.4 de Ω y se coloca un voltímetro en las terminales de la batería. ¿Cuáles serán las lecturas del voltímetro cuando el interruptor esté abierto y cuando esté cerrado? Después de un largo periodo, el experimento se repite y se observa que la lectura con el circuito abierto sigue siendo la misma, pero que el voltaje en las terminales se ha reducido en 10%. ¿Cómo explica usted que el voltaje en las terminales sea más bajo? ¿Cuál es la resistencia interna de la batería vieja?

***28.41.** Se tienen tres resistores de 3, 9 y 18 Ω. Enumere todas las resistencias equivalentes posibles que pueden obtenerse con diferentes formas de conexión.
Resp. 2.00 Ω, 2.70 Ω, 6.30 Ω, 9.00 Ω, 11.6 Ω, 20.2 Ω y 30.0 Ω

***28.42.** Tomando como referencia la figura 28.14, suponga que $\mathscr{E}$ = 24 V, R_1 = 8 Ω, R_2 = 3 Ω, R_3 = 2 Ω, R_4 = 4 Ω y r = 0.5 Ω. ¿Cuánta corriente suministra al circuito descrito la batería de 24 V? ¿Cuáles son el voltaje y la corriente en la resistencia de 8 Ω?

***28.43.** ¿Cuál es la resistencia efectiva del circuito externo de la figura 28.22 si se desprecia la resistencia interna? ¿Cuánta corriente pasa por la resistencia de 1 Ω? Resp. 6.08 Ω, 2.58 A

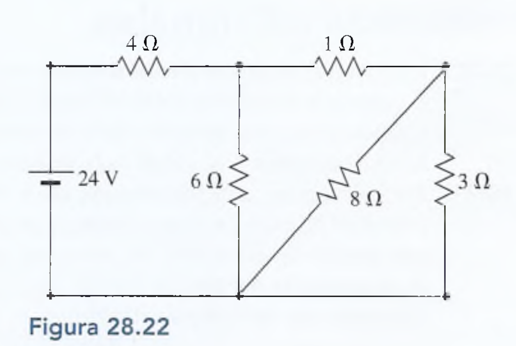
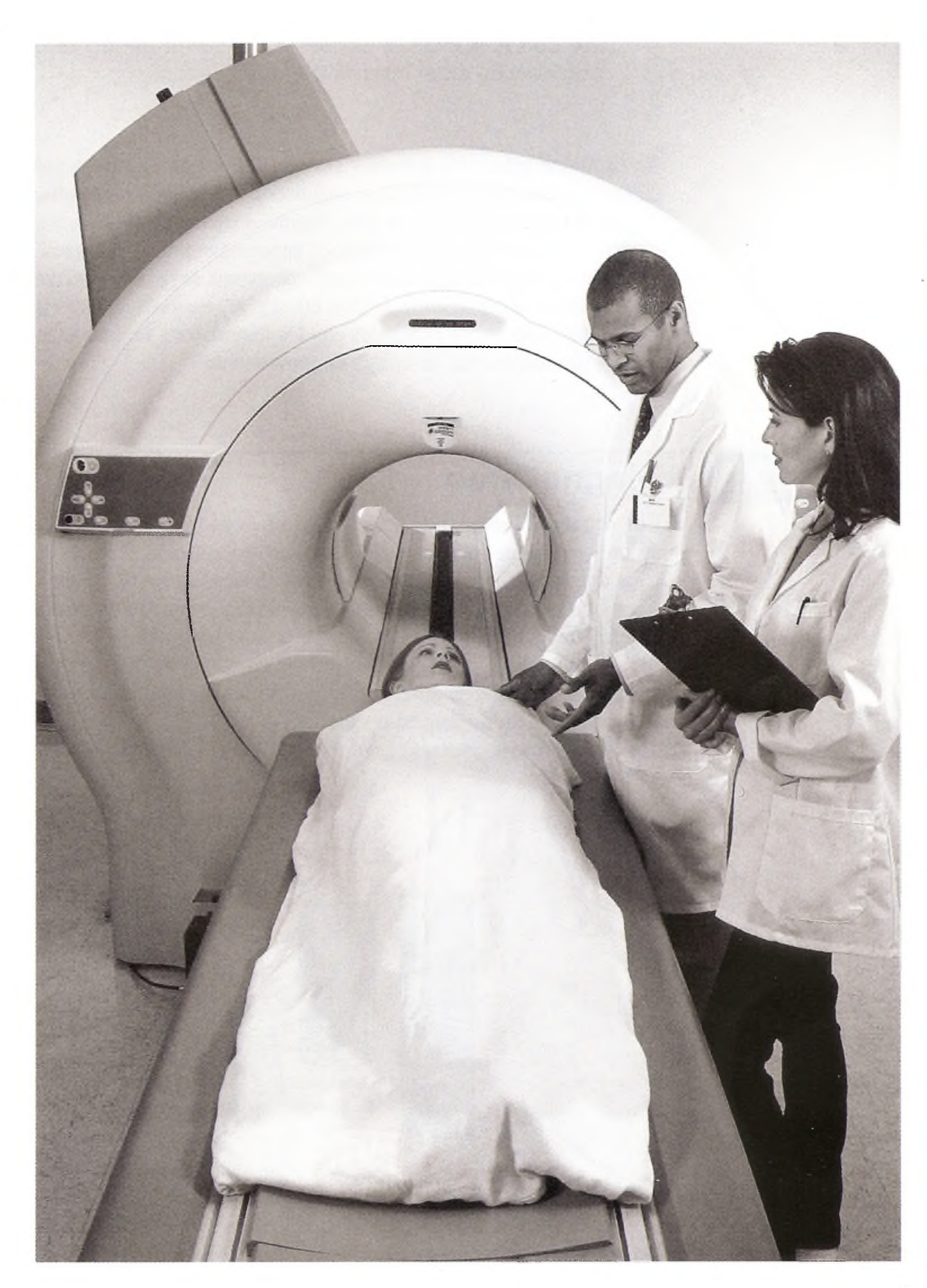


Figura 28.22

29 Magnetismo y campo magnético



Los instrumentos para obtener imágenes de resonancia magnética (MRI, por sus siglas en inglés) utilizan campos magnéticos fuertes combinados con pulsos de radiofrecuencia (RF) para diagnosticar muchos problemas médicos, como esclerosis múltiple, tumores e infecciones del cerebro, la espina o de articulaciones. (*Fotografía © vol. 275/ Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará, mediante definiciones y ejemplos, su comprensión acerca de estos temas: *magnetismo*, *inducción*, *retentividad*, *saturación* y *permeabilidad*.
2. Escribirá y aplicará una ecuación que permita relacionar la fuerza magnética sobre una carga en movimiento, con su velocidad, su carga y su dirección, en un campo conocido de densidad de flujo magnético.
3. Determinará la fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente colocado en un campo conocido *B*.
4. Calculará la densidad de flujo magnético (a) a una distancia conocida del alambre conductor de la corriente, (b) en el centro de una espira de corriente o bobina y (c) en el interior de un solenoide.

En capítulos anteriores hemos visto que las cargas eléctricas ejercen fuerzas entre sí. En este capítulo se estudiarán las fuerzas magnéticas. Una fuerza magnética se puede originar por la presencia de cargas eléctricas en movimiento, y una fuerza eléctrica se puede generar a causa de un campo magnético en movimiento. El funcionamiento de motores eléctricos, generadores, transformadores, interruptores, televisores, receptores de radio y la mayoría de los medidores eléctricos depende de la relación entre fuerzas eléctricas y magnéticas. Iniciaremos este capítulo estudiando los efectos magnéticos asociados con los materiales y terminaremos analizando los efectos magnéticos producidos por las cargas en movimiento.

29.1 Magnetismo

Los primeros fenómenos magnéticos observados se relacionaron con fragmentos de piedra de imán o magnetita (un óxido de hierro) encontrada cerca de la antigua ciudad de Magnesia hace aproximadamente 2 000 años. Se observó que estos *imanes naturales* atraían pequeños trozos de hierro no magnetizado. Esta fuerza de atracción se conoce como ***magnetismo***, y al objeto que ejerce una fuerza magnética se le llama ***imán***.

Si una barra imantada se introduce en un recipiente que contenga limaduras de hierro y enseguida se retira, se aprecia que los minúsculos fragmentos de hierro se adhieren más fuertemente a las áreas pequeñas cercanas a los extremos (véase la figura 29.1). Estas regiones donde parece concentrarse la fuerza del imán se llaman ***polos magnéticos***.

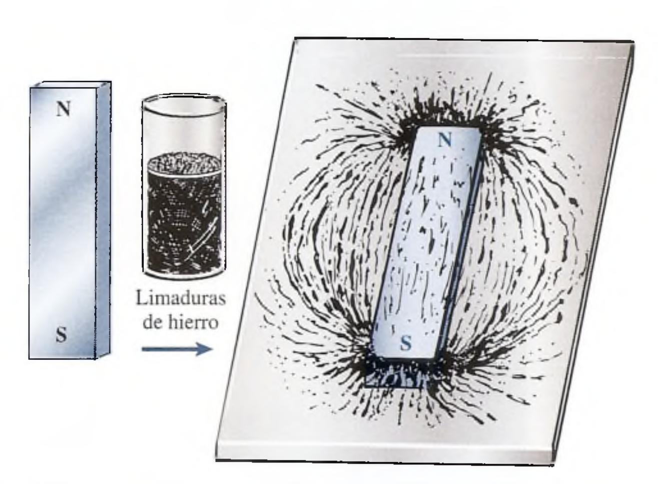


Figura 29.1 La intensidad de un imán se concentra en la región cercana a sus extremos.

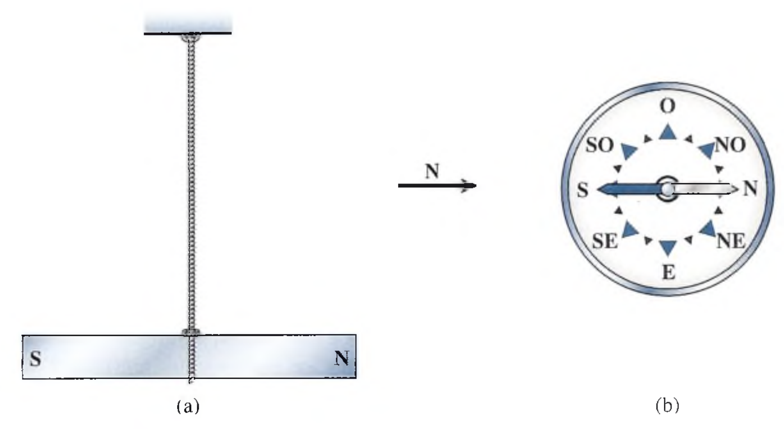


Figura 29.2 (a) Una barra de imán suspendida tenderá a permanecer en reposo en una dirección norte-sur. (b) Carátula de una brújula.

FÍSICA HOY

Un descubrimiento reciente de grandes zonas de materiales magnéticos en Marte, realizado por la nave espacial Mars Global Surveyor, indica que el planeta una vez tuvo un campo magnético muy parecido al que tiene la Tierra hoy en día. Debido a que los campos magnéticos, en general, actúan para proteger a los planetas de muchas formas de radiación cósmica, este descubrimiento tiene implicaciones importantes para las posibilidades de encontrar evidencia de vida pasada en la superficie marciana. El estudio del campo magnético antiguo también proporciona información importante sobre la estructura interior, la temperatura y la composición de Marte en el pasado. La presencia de campos magnéticos también sugiere que una vez Marte fue un planeta más dinámico como la Tierra de lo que es ahora. (Fuente: NASA.)

No se sabe cuáles son las causas del campo magnético de la Tierra. Como ocurre con muchos fenómenos físicos, conocemos las propiedades y la existencia del campo, pero no su origen. Por siglos, los marineros han guiado sus barcos con brújulas, cuyo material magnetizado se encuentra en forma natural o puede fabricarse. En la actualidad, los científicos creen que los movimientos de los iones dentro del centro líquido del planeta causan este fenómeno.

Cuando cualquier material magnético se suspende de un cordel, gira alrededor de un eje vertical. En la figura 29.2 se ilustra cómo se alinea el imán en una dirección Norte-Sur. El extremo que apunta hacia el Norte se llama el *polo norte* (N) del imán. Su opuesto, el extremo que ve al sur se llama *polo sur* (S) del imán. La polarización del material magnético es lo que cuenta para su aprovechamiento como brújula para la navegación. La brújula consiste en una aguja ligera imantada que se apoya sobre un soporte con poca fricción.

Se puede demostrar fácilmente que los polos norte y sur del imán son diferentes. Cuando se acerca al imán suspendido por la cuerda otra barra imantada, como muestra la figura 29.3, los dos polos norte o los dos polos sur se repelen entre sí, mientras que el polo norte de uno y el polo sur de otro se atraen mutuamente. La ***ley de la fuerza magnética*** establece que:

Polos magnéticos iguales se repelen y polos magnéticos diferentes se atraen.

No existen polos aislados. No importa cuántas veces se rompa un imán por la mitad, cada pieza resultante será un imán, con un polo norte y un polo sur. No se conoce una sola partícula que sea capaz de crear un campo magnético de manera similar a como un protón o electrón crean un campo eléctrico.

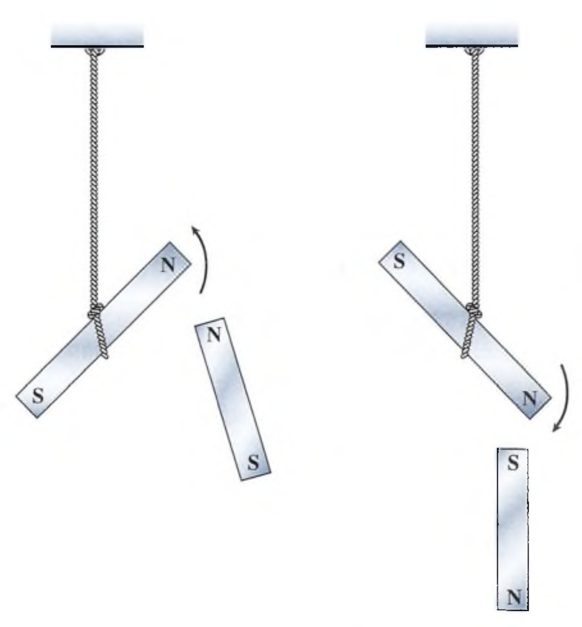


Figura 29.3 Los polos iguales se repelen entre sí; los polos diferentes se atraen.

La atracción que ejercen los imanes sobre el hierro no magnetizado y las fuerzas de interacción que surgen entre los polos magnéticos actúan a través de todas las sustancias. En la industria, los materiales ferrosos que han sido desechados y se arrojan a la basura pueden separarse para reutilizarlos por medio de imanes.

29.2 Campos magnéticos

Todo imán está rodeado por un espacio, en el cual se manifiestan sus efectos magnéticos. Dichas regiones se llaman ***campos magnéticos***. Así como las líneas del campo eléctrico fueron útiles para describir los campos eléctricos, las líneas de campo magnético, llamadas ***líneas de flujo***, son muy útiles para visualizar los campos magnéticos. La dirección de una línea de flujo en cualquier punto tiene la misma dirección de la fuerza magnética que actuaría sobre un polo norte imaginario aislado y colocado en ese punto (véase la figura 29.4a). De acuerdo con esto, las líneas de flujo magnético *salen* del polo norte de un imán y *entran* en el polo sur. A diferencia de las líneas de campo eléctrico, las líneas de flujo magnético no tienen puntos iniciales o finales; forman espiras continuas que pasan a través de la barra metálica, como muestra la figura 29.4b. Las líneas de flujo en la región comprendida entre dos polos iguales o diferentes se ilustran en la figura 29.5.

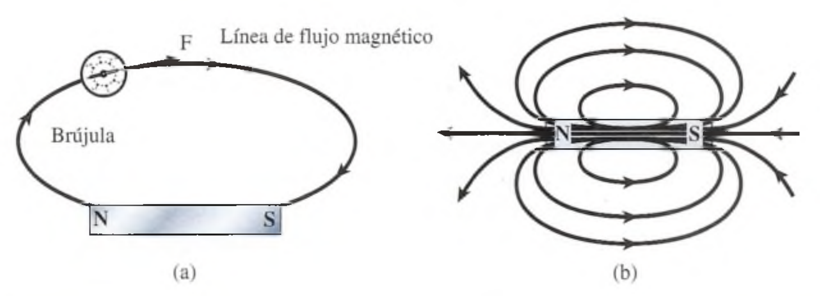


Figura 29.4 (a) Las líneas de flujo magnético están en la dirección de la fuerza que se ejerce sobre un polo norte independiente. (b) Las líneas de flujo cercanas a una barra imantada.

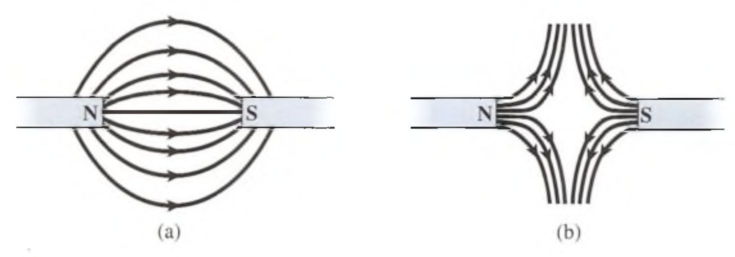


Figura 29.5 (a) Líneas de flujo magnético entre dos polos magnéticos diferentes. (b) Líneas de flujo magnético entre dos polos iguales.

29.3 La teoría moderna del magnetismo

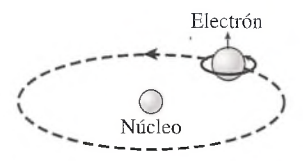


Figura 29.6 Dos tipos de movimiento del electrón son los que originan las propiedades magnéticas.

En general se acepta que el magnetismo de la materia es el resultado del movimiento de los electrones en los átomos de las sustancias. De ser así, el magnetismo es una propiedad de la *carga en movimiento* y está estrechamente relacionado con el fenómeno eléctrico. De acuerdo con la teoría clásica, los átomos individuales de una sustancia magnética son, en efecto, diminutos imanes con polos norte y sur. La polaridad magnética de los átomos se basa principalmente en el espín de los electrones y se debe, sólo en parte, a sus movimientos orbitales alrededor del núcleo. La figura 29.6 ilustra los dos tipos de movimiento de los electrones. No deben tomarse muy en serio los diagramas de este tipo, ya que aún se ignoran muchos aspectos relacionados con el movimiento de los electrones. No obstante, creemos firmemente que los campos magnéticos de todas las partículas deben ser causados por cargas en movimiento, y tales modelos nos ayudan a describir tales fenómenos.

(a) (b)

Figura 29.7 (a) Los dominios magnéticos en un material magnetizado se encuentran orientados al azar. (b) La orientación preferida de los dominios en un material magnetizado.

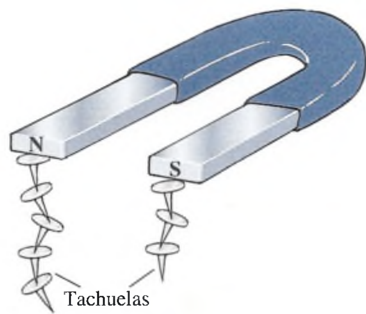


Figura 29.8 Inducción magnética.

Los átomos en un material magnético están agrupados en microscópicas regiones magnéticas conocidas como ***dominios***. Se piensa que todos los átomos dentro de un dominio están polarizados magnéticamente a lo largo de un eje cristalino. En un material no magnetizado, estos dominios se orientan en direcciones al azar, como indican las flechas de la figura 29.7a. Se usa un punto para indicar que una flecha está dirigida hacia afuera del papel, y una cruz indica una dirección hacia adentro del papel. Si un gran número de dominios se orientan en la misma dirección, como muestra la figura 29.7b, el material mostrará fuertes propiedades magnéticas.

Esta teoría del magnetismo es muy útil porque ofrece una explicación para gran número de los efectos magnéticos observados en la materia. Por ejemplo, una barra de hierro no magnetizada se puede transformar en un imán simplemente sosteniendo otro imán cerca de ella o en contacto con ella. Este proceso, llamado ***inducción magnética***, se muestra en la figura 29.8. Las tachuelas se convierten, por inducción, en imanes temporalmente. Observe que las tachuelas de la derecha se magnetizaron, a pesar de que en realidad no se han puesto en contacto con el imán. La inducción magnética se explica por medio de la teoría del dominio. La introducción de un campo magnético provoca la alineación de los dominios, y eso da por resultado la magnetización.

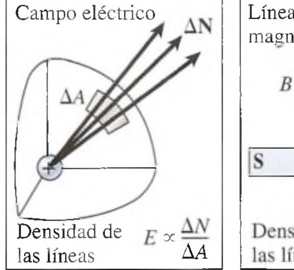
El magnetismo inducido es, a menudo, sólo temporal, y cuando se retira el campo, los dominios gradualmente se vuelven a desorientar. Si los dominios permanecen alineados en cierto grado después de que el campo se ha eliminado, se dice que el material está *permanentemente* magnetizado. La capacidad de retener el magnetismo se conoce como ***retentividad***.

Otra propiedad de los materiales magnéticos que se explica fácilmente a la luz de la teoría del dominio es la ***saturación magnética***. Tal parece que existe un límite para el grado de magnetización que experimenta un material. Una vez que se ha alcanzado dicho límite, ningún campo externo, por fuerte que sea, puede incrementar la magnetización. Se piensa que todos sus dominios ya se han alineado.

29.4 Densidad de flujo y permeabilidad

En el capítulo 24 se estableció que las líneas de campo eléctrico se dibujan de modo que su espaciamiento en cualquier punto permita determinar la fuerza del campo eléctrico en ese punto (consulte la figura 29.9). El número de líneas ΔN dibujadas a través de la unidad de área ΔA es directamente proporcional a la intensidad del campo eléctrico E.

$$\frac{\Delta N}{\Delta A} = \epsilon E \tag{29.1}$$



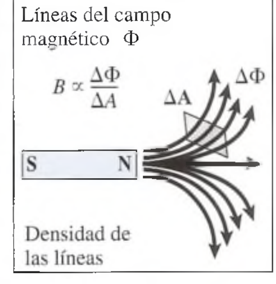


Figura 29.9 De igual forma en que el campo eléctrico es proporcional a la densidad de líneas del campo eléctrico, el campo magnético es proporcional a la densidad de las líneas de flujo del campo magnético.

La constante de proporcionalidad ϵ, que determina el número de líneas dibujadas, es la permitividad del medio a través del cual pasan las líneas.

Se puede realizar una descripción análoga de un campo magnético considerando al flujo magnético Φ que pasa a través de una unidad de área perpendicular $A_{\perp}$. A esta razón B se le llama ***densidad de flujo magnético***.

La densidad de flujo magnético en una región de un campo magnético es el número de líneas de flujo que pasan a través de una unidad de área perpendicular en esa región.

$$B = \frac{\Phi \text{ (flujo)}}{A_{\perp} \text{ (área)}} \tag{29.2}$$

La unidad del flujo magnético en el SI es el ***weber*** (Wb). La unidad de densidad de flujo debe ser entonces webers por metro cuadrado, que se redefine como ***tesla*** (T). Una antigua unidad que todavía se usa hoy es el *gauss* (G). En resumen,

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ G} \tag{29.3}$$

Ejemplo 29.1

Una espira rectangular de 10 cm de ancho y 20 cm de largo forma un ángulo de 30° respecto al flujo magnético en la figura 29.10. Si la densidad de flujo es 0.3 T, calcule el flujo magnético Φ que penetra la espira.

Plan: El área efectiva penetrada por el flujo es la componente del área que es perpendicular al flujo. Si θ se elige como el ángulo que forma el plano de la espira con el campo **B**, esta componente es simplemente A sen θ. La definición del campo **B** como densidad de flujo se usará para calcular el flujo Φ que penetra en esa componente de área.

Solución: El área de la espira rectangular es

$$A = (0.10\text{m})(0.20\text{m}) = 0.020\text{m}^2$$

A partir de la ecuación (29.2), la magnitud del campo **B** se define como el flujo por unidad de área perpendicular al campo. Por tanto, escribimos

$$B = \frac{\Phi}{A \operatorname{sen} \theta} \qquad \text{o} \qquad \Phi = BA \operatorname{sen} \theta$$

El flujo magnético en webers se determina por sustitución.

$$\Phi = (0.3 \text{ T})(0.02 \text{ m}^2) \operatorname{sen} 30^\circ$$
$$= 3 \times 10^{-3} \text{ Wb} = 3 \text{ mWb}$$

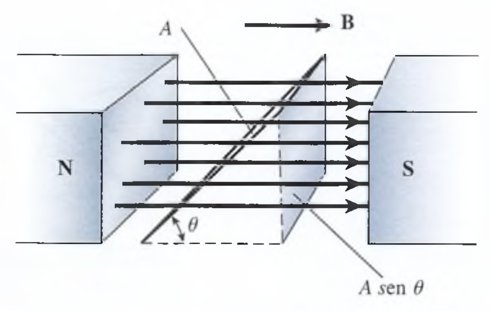


Figura 29.10 Cálculo del flujo magnético a través de una espira rectangular.

La densidad de flujo en cualquier punto ubicado en un campo magnético se ve afectada fuertemente por la naturaleza del medio o por la naturaleza del material que se ha colocado en dicho medio. Por esta razón, es conveniente definir un nuevo vector de campo magnético, la *intensidad del campo magnético* **H**, la cual no depende de la naturaleza de un medio. En cualquier caso, el número de líneas establecidas por unidad de área es directamente proporcional a la intensidad del campo magnético **H**. Podemos escribir

$$B = \frac{\Phi}{A_\perp} = \mu H \qquad \textbf{(29.4)}$$

donde la constante de proporcionalidad μ es la ***permeabilidad*** del medio a través del cual pasan las líneas de flujo. La ecuación (29.4) es exactamente análoga a la ecuación (29.1), la cual se desarrolló para el caso de los campos eléctricos. Puede pensarse en la permeabilidad de un medio como una característica que constituye la medida de su capacidad para establecer líneas de flujo magnético. Cuanto mayor sea la permeabilidad del medio, más líneas de flujo pasarán a través de la unidad de área.

La permeabilidad del espacio libre (vacío) se denota por μ_0 y tiene la siguiente magnitud en unidades del SI:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A} \cdot \text{m} = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}$$

El significado completo de la unidad weber por ampere-metro se verá más adelante. Para su determinación se emplean las unidades de Φ, A y H de la ecuación (29.4). Por tanto, en el caso del vacío, se puede escribir así:

$$B = \mu_0 H \qquad \textit{Vacío} \qquad \textbf{(29.5)}$$

Si un material no magnético, como el vidrio, se coloca en un campo magnético como el que se muestra en la figura 29.11, la distribución del flujo no cambia apreciablemente en relación con la que se ha establecido para el vacío. Sin embargo, cuando un material altamente permeable, como el hierro dulce, se coloca en el mismo campo, la distribución del flujo se altera considerablemente. El material permeable se puede magnetizar por inducción, lo que da por resultado una mayor intensidad de campo para esa región. Por este motivo, la densidad de flujo B también se conoce como *inducción magnética*.

Los materiales magnéticos se clasifican de acuerdo con su permeabilidad, comparada con la que le corresponde al espacio vacío. La razón de la permeabilidad del material respecto a la correspondiente al vacío se llama ***permeabilidad relativa*** y se expresa en esta forma:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad \textbf{(29.6)}$$

Analizando las ecuaciones (29.5) y (29.6) se observa que la permeabilidad relativa de un material es una medida de su capacidad para modificar la densidad de flujo de un campo a partir de su valor en el vacío.

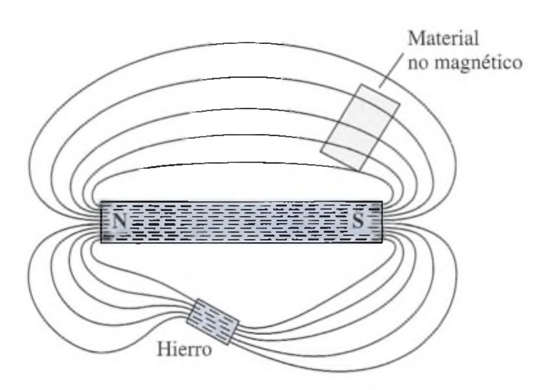


Figura 29.11 Un material permeable se magnetiza por inducción, lo que da por resultado una mayor densidad de flujo en esa región.

Los materiales con una permeabilidad relativa ligeramente menor que la unidad tienen la propiedad de ser repelidos por un imán fuerte. Se dice que tales materiales son ***diamagnéticos***, y la propiedad recibe el nombre de *diamagnetismo*. Por otra parte, los materiales con una permeabilidad ligeramente mayor que la del vacío se dice que son ***paramagnéticos***. Estos materiales son atraídos débilmente por un imán poderoso.

Sólo unos cuantos materiales, como hierro, cobalto, níquel, acero y aleaciones de estos metales, tienen permeabilidades extremadamente altas, que van desde algunos cientos hasta varios miles de veces mayores que la correspondiente al espacio vacío. De dichos materiales, que son fuertemente atraídos por un imán, se dice que son ***ferromagnéticos***.

29.5 Campo magnético y corriente eléctrica

Aunque la teoría moderna del magnetismo sostiene que un campo magnético resulta del movimiento de cargas, la ciencia no siempre ha aceptado esta idea. Es demasiado fácil demostrar que un poderoso imán no ejerce ninguna fuerza sobre la carga estática. En el transcurso de una demostración, en 1820, Hans Oersted presentó un experimento para que sus estudiantes observaran que las cargas en *movimiento* y los imanes tampoco interactuaban. Colocó la aguja magnética de una brújula cerca de un conductor, como se aprecia en la figura 29.12. Para su sorpresa, cuando envió la corriente a través del alambre, una fuerza giratoria actuó sobre la aguja de la brújula hasta que ésta apuntó en una dirección perpendicular al alambre. Más aún, la magnitud de la fuerza dependía de la orientación relativa de la aguja de la brújula y la dirección de la corriente. La máxima fuerza de giro se presentó cuando el alambre y la aguja estaban en posición paralela antes de que circulara la corriente. Si inicialmente estaban en posición perpendicular, no se experimentaba ninguna fuerza. Evidentemente, se establece un campo magnético debido a la carga en movimiento a través del conductor.

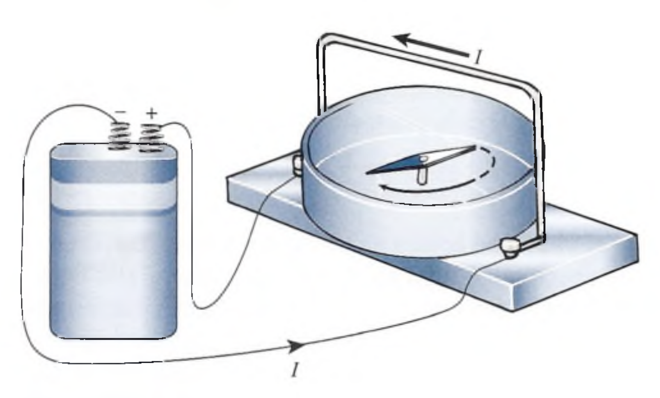


Figura 29.12 Experimento de Oersted.

En el mismo año que Oersted hizo su descubrimiento, Ampère encontró que existen fuerzas entre dos conductores por donde circula una corriente. Dos alambres por los que fluía corriente en la misma dirección se atraían entre sí, mientras que corrientes con direcciones opuestas originaban una fuerza de repulsión. Unos cuantos años después, Faraday descubrió que el movimiento de un imán al acercarse o alejarse de un circuito eléctrico produce una corriente en el circuito. La relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos ya no se puso en duda. Actualmente, todos los fenómenos magnéticos pueden explicarse en términos de cargas eléctricas en movimiento.

29.6 Fuerza sobre una carga en movimiento

Investiguemos los efectos de un campo magnético observando la fuerza magnética ejercida sobre una carga que pasa a través del campo. Para estudiar estos efectos, es útil imaginar un tubo de iones positivos como el de la figura 29.13. Dicho tubo nos permite inyectar un ion positivo de carga y velocidad constantes en un campo de densidad de flujo magnético **B**. Orientando el tubo en varias direcciones, podemos observar la fuerza ejercida sobre la carga en movimiento. La observación más importante es que dicha carga experimenta una fuerza que es perpendicular tanto a la densidad de flujo magnético **B**, como a la velocidad **v** de la carga en movimiento. Observe que cuando el flujo magnético se dirige de izquierda a derecha y la carga se mueve hacia donde está el lector, la carga se desvía hacia arriba. Si se invierte la polaridad de los imanes, se provoca que la carga se desvíe hacia abajo.

La dirección de la fuerza magnética **F** sobre una carga positiva en movimiento con una velocidad **v** en un campo de densidad de flujo **B**, puede considerarse mediante la ***regla del tornillo de rosca derecha*** (véase la figura 29.14):

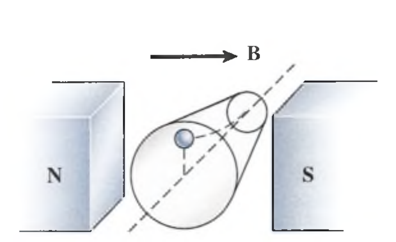


Figura 29.13 La fuerza magnética **F** sobre una carga en movimiento es perpendicular tanto a la densidad de flujo **B** como a la velocidad de carga **v**.

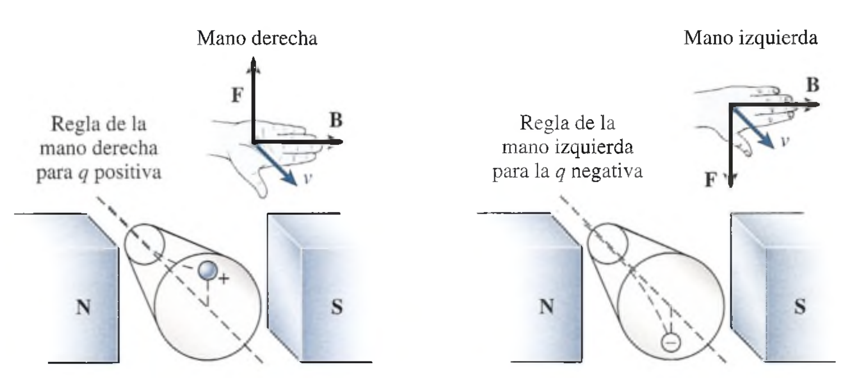


Figura 29.14 Uso de las *reglas de la mano derecha* y *la mano izquierda* para determinar la dirección de la fuerza magnética en una carga en movimiento. Los dedos apuntan en la dirección del campo **B** y el pulgar en la dirección de la carga en movimiento. La palma abierta está de cara a la dirección de la fuerza magnética. La mano derecha se usa para cargas positivas y la izquierda para cargas negativas.

La regla de la mano derecha: Extienda la mano derecha con los dedos apuntando en la dirección del campo **B** y el pulgar apuntando en la dirección de la velocidad **v** de la carga en movimiento. La palma abierta está de cara a la fuerza magnética **F** sobre una carga positiva.

Si la carga en movimiento es *negativa*, la dirección de la fuerza se determina siguiendo el mismo procedimiento pero usando la mano *izquierda*. De esta manera la dirección de la fuerza magnética es *opuesta* a la dirección para una carga positiva.

Consideremos ahora la magnitud de la fuerza sobre una carga en movimiento. La experimentación ha mostrado que la magnitud de la fuerza magnética es directamente proporcional a la magnitud de la carga q y a su velocidad **v**. El tubo de ion positivo indicará, por medio de mayores desviaciones, si alguno de estos parámetros aumenta.

Se observará una variación no esperada en la fuerza magnética si el tubo del ion se hace girar lentamente respecto a la densidad de flujo magnético **B**. Como indica la figura 29.15, para una carga dada con velocidad constante **v**, la magnitud de la fuerza varía con el ángulo

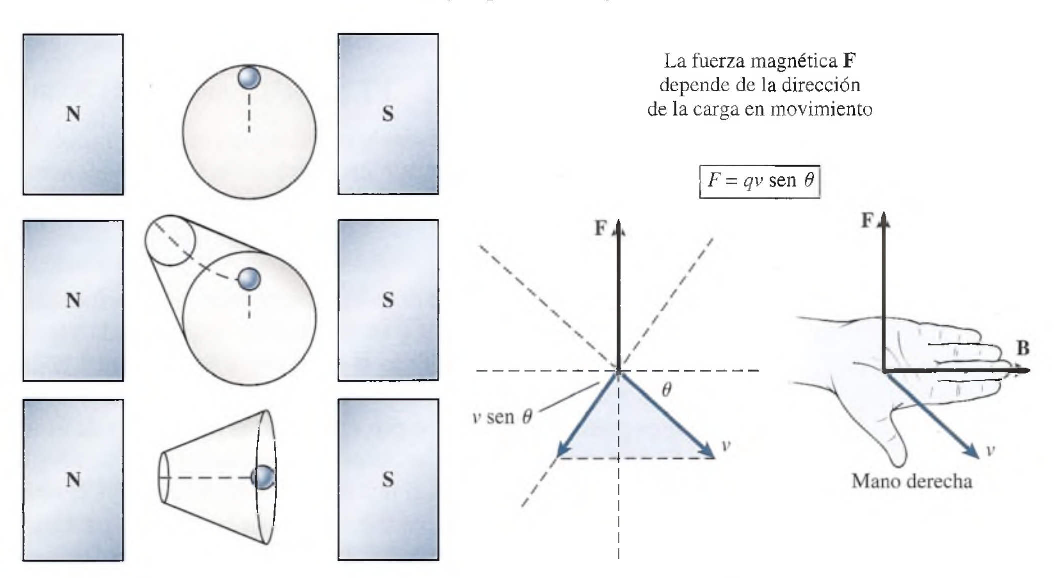


Figura 29.15 La magnitud de la fuerza magnética adquiere su valor máximo cuando la trayectoria es perpendicular al campo y su valor mínimo cuando es paralela al mismo.

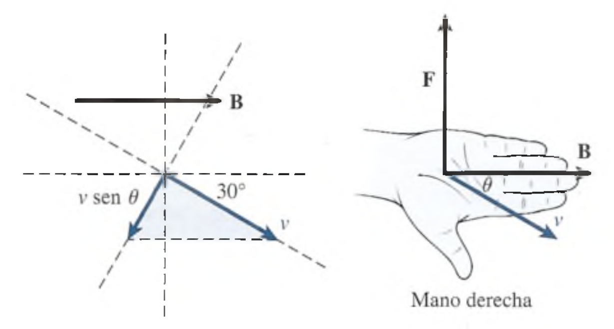


Figura 29.16 La fuerza magnética en una carga positiva que se mueve a 30° respecto al campo **B**.

que forma el tubo con el campo. La desviación de la partícula es máxima cuando la velocidad de la carga es perpendicular al campo. Cuando el tubo se hace girar lentamente hacia **B**, la desviación de la partícula disminuye gradualmente. Por último, cuando la velocidad de la carga tiene una dirección paralela a **B**, no ocurre ninguna desviación, lo que indica que la fuerza magnética ha caído hasta cero. Claramente la magnitud de la fuerza es función no sólo de la magnitud de la carga y de su velocidad, sino que también varía con el ángulo θ entre **v** y **B**. Esta variación se explica al establecer que la fuerza magnética es proporcional a la componente de la velocidad, **v** sen θ, perpendicular a la dirección del campo. (Consulte la figura 29.16.)

Las observaciones anteriores se resumen por la proporcionalidad

$$F \propto qv \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(29.7)}$$

Si se eligen las unidades apropiadas, la constante de proporcionalidad puede igualarse con la densidad de flujo magnético B del campo causante de la fuerza. En realidad, esta proporcionalidad se usa a menudo para *definir* la densidad de flujo magnético como una razón constante:

$$B = \frac{F}{qv \operatorname{sen} \theta} \qquad \textbf{(29.8)}$$

Un campo magnético que tenga una densidad de flujo equivalente a 1 tesla (1 weber por metro cuadrado), ejercerá una fuerza igual a 1 newton sobre una carga de 1 coulomb que se mueva en forma perpendicular al campo, con una velocidad de 1 metro por segundo.

Como consecuencia de la ecuación (29.8), se observa que

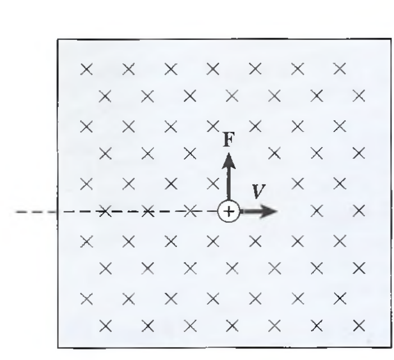
$$1 \text{ T} = 1\text{N}/(\text{C} \cdot \text{m/s}) = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m} \qquad \textbf{(29.9)}$$

Estas relaciones entre unidades son útiles para resolver problemas que incluyan fuerzas magnéticas. Despejando la fuerza F en la ecuación (29.8), obtenemos

$$F = qvB \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(29.10)}$$

que es la forma más útil para calcular directamente las fuerzas magnéticas. La fuerza F está en newtons cuando la carga q se expresa en coulombs, la velocidad v se mide en metros por segundo y la densidad de flujo **B** se expresa en teslas. El ángulo θ indica la dirección de **v** respecto a **B**. La fuerza **F** *siempre* es perpendicular tanto a **v** como a **B**. La dirección de estos vectores puede determinarse por medio de la aplicación de la regla de la mano derecha.

Cuando se representan vectores tridimensionales gráficamente, resulta útil la convención de utilizar cruces (X) para indicar una dirección *hacia* el papel. Estos símbolos podrían considerarse el "inicio" de las flechas de vector. Usaremos puntos (·) para indicar puntas de flecha de vector que apuntan *hacia fuera* del papel. En la figura 29.17 se muestran dos ejemplos de este tipo. Para probar su comprensión del tema, verifique que la fuerza sobre la carga positiva es ascendente y la que la fuerza en la carga negativa se dirige hacia la derecha.



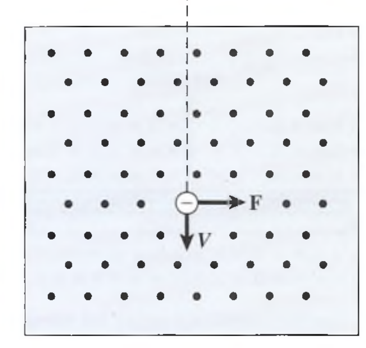


Figura 29.17 La dirección del campo **B** se indica por medio de cruces (hacia el papel) y puntos (hacia fuera del papel). Verifique que la dirección de la fuerza sobre la carga positiva sea ascendente y que la dirección de la fuerza sobre la carga negativa se dirija hacia la derecha.

Ejemplo 29.2

Un electrón se proyecta de izquierda a derecha en un campo magnético dirigido verticalmente hacia abajo. La velocidad del electrón es de 2×10^6 m/s, y la densidad de flujo magnético del campo es 0.3 T. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre el electrón.

Plan: La carga del electrón es 1.6×10^{-19} C, la magnitud de la fuerza sobre el electrón se calcula a partir de la ecuación (29.10) y la dirección se determina al aplicar la *regla de la mano izquierda*. Se usa la mano izquierda porque la carga de un electrón es *negativa*.

Solución: El electrón se mueve en una dirección perpendicular a **B**. Por tanto, sen $\theta = 1$; resolvemos para la fuerza en la siguiente forma:

$$F = qvB \text{ sen } 90° = (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(2 \times 10^6\text{ m/s})(0.3\text{ T})(1)$$
$$F = 9.60 \times 10^{-14}\text{ N}$$

La aplicación de la regla de la *mano izquierda* para un electrón muestra que la dirección de la fuerza es hacia *afuera de la página*, o hacia el lector. (Para una carga positiva como un protón o una partícula alfa, sería hacia adentro de la página.)

29.7 Fuerza sobre un conductor por el que circula una corriente

Cuando una corriente eléctrica I circula por un conductor que yace en un campo magnético **B**, cada carga q que fluye a través del conductor experimenta una fuerza magnética **F**. Estas fuerzas se transmiten al conductor como un todo, originando que cada unidad de longitud experimente una fuerza. Si la cantidad total de carga q pasa a través de la longitud L del alambre (figura 29.17) con una velocidad media v, podemos escribir

$$F = q\bar{v}B$$

La velocidad media para cada carga que recorre la longitud L en el tiempo t es L/t. Entonces, la fuerza neta sobre la longitud completa es

$$F = q\frac{L}{t}B$$

Ahora bien, como $I = q/t$, reordenamos y simplificamos para obtener

$$F = ILB$$

donde I representa la corriente en el alambre.

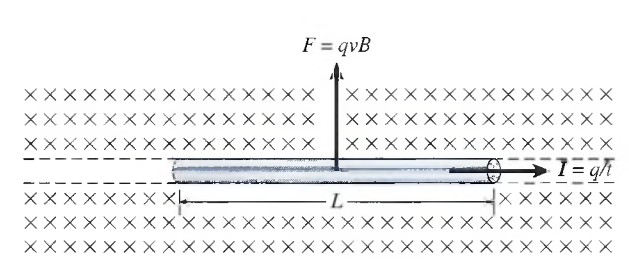


Figura 29.18 Fuerza magnética sobre un conductor por el cual fluye una corriente.

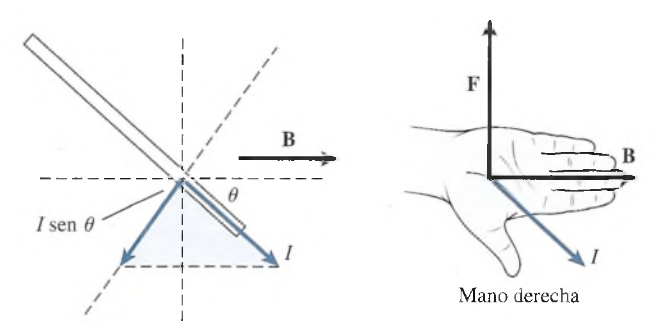


Figura 29.19 La fuerza magnética sobre un conductor por el cual circula una corriente. La corriente está dirigida a un ángulo θ respecto al campo **B**.

Del mismo modo que la magnitud de la fuerza sobre una carga en movimiento varía según la dirección de la velocidad, así la fuerza **F** sobre un conductor por el que fluye corriente depende del ángulo θ que forma la corriente respecto al campo **B**. En general, si un alambre de longitud l forma un ángulo θ con el campo **B**, como se ilustra en la figura 29.19 dicho alambre experimentará una fuerza **F** dada en newtons por

$$F = ILB \text{ sen } \theta \tag{29.11}$$

donde I es la corriente que circula por el alambre expresada en *amperes*, B es el campo magnético expresado en *teslas*, L es la longitud del alambre en *metros* y θ es el ángulo que forma el alambre con respecto al campo **B**.

La dirección de la fuerza magnética sobre un conductor a través del cual fluye corriente puede determinarse mediante la regla de la mano derecha, en la misma forma que cuando se trata de una carga en movimiento (ya que una corriente *está* moviendo la carga). Como muestra la figura 29.19, cuando el pulgar apunta en la dirección de la corriente **I** y los dedos apuntan en la dirección del campo magnético **B**, la palma de la mano está de cara a la dirección de la fuerza magnética **F**. La dirección de la fuerza *siempre* es perpendicular tanto a **I** como a **B**.

Ejemplo 29.3

El alambre de la figura 29.19 forma un ángulo de 30° respecto a un campo **B** de 0.2 T, cuyo valor es de 0.2 T. Suponiendo que la longitud del alambre sea 8 cm y que pase a través de él una corriente de 4 A, determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el alambre.

Plan: La magnitud de la fuerza se determina al sustituir directamente en la ecuación (29.11) y la dirección de la fuerza se obtiene al aplicar la regla de la mano derecha.

Solución: La longitud se convierte en metros (L = 8 cm = 0.08 m).

$$F = ILB \text{ sen } \theta = (4 \text{ A})(0.08 \text{ m})(0.2 \text{ T}) \text{ sen } 30°$$
$$F = 0.032 \text{ N}$$

La aplicación de la regla de la mano derecha muestra que la dirección de la fuerza es *ascendente*. Si la dirección de la corriente se invirtiera, la fuerza sería descendente.

29.8 Campo magnético de un conductor largo y recto

El experimento de Oersted demostró que una carga eléctrica en movimiento, o una corriente, originan un campo magnético en el espacio que la rodea. Hasta ahora hemos estudiado la fuerza que ese tipo de campo ejercerá sobre un segundo conductor por el que circula corriente o sobre una carga en movimiento en el campo. A continuación se empezará a calcular los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas.

Primero hay que examinar la densidad de flujo que rodea a un conductor largo y recto que transporta una corriente constante. Si se esparcen limaduras de hierro sobre el papel que rodea al conductor, como se aprecia en la figura 29.20, se alinearán en círculos concéntricos

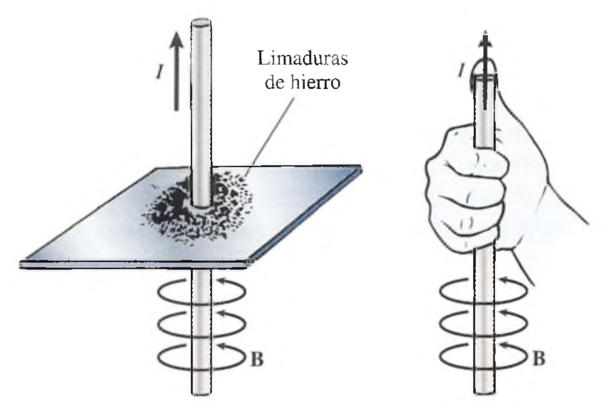


Figura 29.20 *La regla de la mano derecha:* Agarre el conductor con la mano derecha; apunte el pulgar en la dirección de *I*. Los dedos envuelven al conductor en la dirección del campo circular **B**.

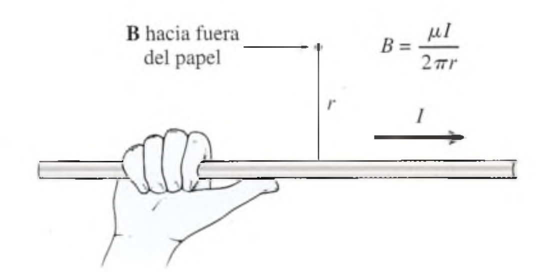


Figura 29.21 El campo magnético **B** a una distancia perpendicular *r* de un conductor largo por el que fluye corriente.

alrededor del conductor.Una investigación similar del área que rodea al conductor con una brújula magnética ratificará que el campo magnético es circular y que está dirigido en el sentido del avance de las manecillas del reloj, como se ve a lo largo de la dirección de la corriente convencional (positiva). Ampère ideó un método conveniente para determinar la dirección del campo que rodea a un conductor recto, que recibió el nombre de ***regla del pulgar de la mano derecha*** (consulte la figura 29.20).

Si el conductor se toma con la mano derecha de modo que el pulgar apunte en la dirección de la corriente convencional, los demás dedos que sujetan al conductor indicarán la dirección del campo magnético.

La inducción magnética, o densidad de flujo, a una distancia perpendicular *d* de un conductor largo y recto por el que circula una corriente *I*, como muestra la figura 29.21, se puede calcular a partir de

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \qquad \textit{Conductor largo} \qquad \textbf{(29.12)}$$

donde μ es la permeabilidad del medio que rodea al conductor. En los casos especiales del vacío, el aire y los medios no magnéticos, la permeabilidad μ_0 es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A} \qquad \textbf{(29.13)}$$

Cuando se usa esta constante con la ecuación (29.12), es necesario que la corriente esté en amperes, el campo en teslas y la distancia desde el conductor en metros.

Ejemplo 29.4

Determine el campo magnético **B** en el aire a una distancia de 5 cm de un alambre largo por el que circula una corriente de 8 A.

Plan: La magnitud del campo se calcula a partir de la ecuación (29.12) y la dirección se determina por la regla del pulgar de la mano derecha.

Solución: Al sustituir r = 5 cm = 0.005 m e I = 8 A, obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(8\ \text{A})}{2\pi(0.05\ \text{m})}$$

$$B = 3.2 \times 10^{-5}\ \text{T}$$

Si el medio que rodea no es el aire o un vacío, se debe considerar que la permeabilidad difiere de μ_0.

29.9 Otros campos magnéticos

Si un alambre se curva para darle la forma de una espira y sus extremos se conectan a una fuente de corriente, como aparece en la figura 29.22a, se establece un campo magnético semejante al de un imán de barra. La regla del pulgar de la mano derecha seguirá siendo muy útil para conocer la dirección del campo de una manera aproximada, pero en este caso las líneas de flujo no serán de forma circular. La densidad de flujo magnético varía considerablemente de un punto a otro.

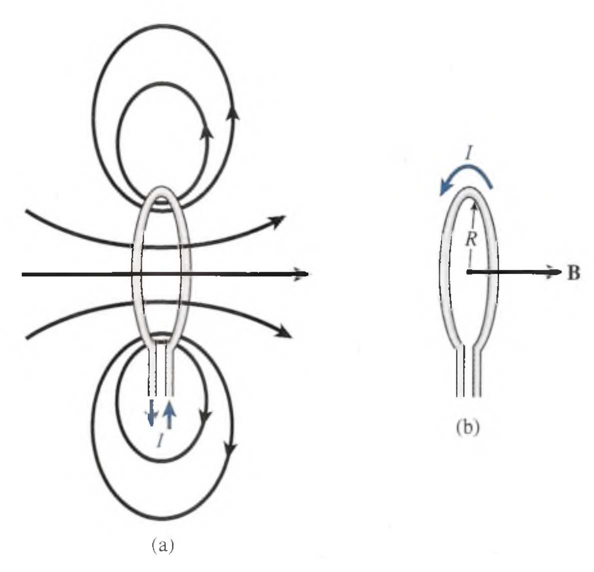


Figura 29.22 El campo magnético en el centro de una espira circular.

La inducción magnética en el centro de una espira circular de radio r que transporta una corriente I se calcula por medio de esta expresión:

$$B = \frac{\mu I}{2r} \qquad \textit{Centro de la espira} \qquad \textbf{(29.14)}$$

La dirección B es perpendicular al plano de la espira. Si el alambre forma parte de una bobina con N vueltas, la ecuación (29.13) adopta esta forma:

$$B = \frac{\mu NI}{2r} \qquad \textit{Centro de la bobina} \qquad \textbf{(29.15)}$$

Un ***solenoide*** consiste en un devanado de muchas vueltas de alambre, enrolladas en forma helicoidal, como se muestra en la figura 29.23. La inducción magnética en el interior de

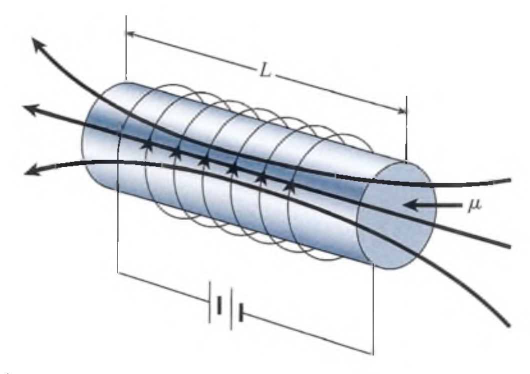


Figura 29.23 El solenoide.

un solenoide está dada por

$$B = \frac{\mu NI}{L} \qquad \textit{Solenoide} \qquad \textbf{(29.16)}$$

donde N es el número de espiras, I es la corriente en amperes y L es la longitud del solenoide en metros.

Ejemplo 29.5

Un solenoide se construye devanando 400 vueltas de alambre en un núcleo de hierro de 20 cm. La permeabilidad relativa del hierro es de 13 000. ¿Qué corriente se requiere para producir una inducción magnética de 0.5 T en el centro del solenoide?

Plan: Dado que se nos proporcionó la permeabilidad relativa, necesitamos multiplicar por μ_0 para encontrar el valor de μ que usaremos en la ecuación (29.16), lo cual nos permitirá resolver para la corriente I.

Solución: La permeabilidad relativa es 13 000, así que partiendo de la ecuación (29.6), tenemos

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad \text{o} \qquad \mu = \mu_r\mu_0 = (13{,}000)(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T} \cdot \text{m/A})$$

$$\mu = 1.63 \times 10^{-2}\,\text{T} \cdot \text{m/A}$$

Como $N = 400$ vueltas, $L = 0.20$ m y $B = 0.5$ T, resolvemos la ecuación (29.16) para la corriente I.

$$B = \frac{\mu NI}{L} \qquad \text{o} \qquad I = \frac{BL}{\mu N}$$

$$I = \frac{(0.5\,\text{T})(0.20\,\text{m})}{(1.63 \times 10^{-2}\,\text{T} \cdot \text{m/A})(400)}; \qquad I = 0.0153\,\text{A}$$

Un tipo particular de solenoide, llamado *toroide*, se emplea a menudo para estudiar efectos magnéticos. Como se verá en la siguiente sección, el toroide consta de una bobina de alambre en forma de rosca, devanado en forma muy compacta. La densidad de flujo magnético en el núcleo de un toroide también se calcula por medio de la ecuación (29.16).

29.10 Histéresis

Hemos visto que las líneas de flujo magnético son más numerosas en un solenoide con núcleo de hierro que en un solenoide en aire. La densidad de flujo está relacionada con la permeabilidad μ del material del que está hecho el núcleo del solenoide. Recuerde que la intensidad de campo H y la densidad de flujo B se relacionan entre sí según la ecuación

$$B = \mu H$$

Al comparar esta relación con la ecuación (29.16) se ve que, para un solenoide,

$$H = \frac{NI}{L} \qquad \textbf{(29.17)}$$

Observe que la intensidad magnética es independiente de la permeabilidad del núcleo. Es tan sólo función del número de espiras N, de la corriente I y de la longitud del solenoide L. La intensidad magnética se expresa en *amperes por metro*.

Es posible estudiar las propiedades magnéticas de la materia observando la densidad de flujo B producido, ya sea como una función de la corriente magnetizante o bien como función de la intensidad magnética H. Esto se puede hacer con más facilidad cuando a la sustancia se le da una forma toroidal, como se muestra en la figura 29.24. El campo magnético originado por una corriente en el devanado magnetizante se confina por completo al toroide. A este dispositivo se le llama a menudo *anillo de Rowland*, en honor a J. H. Rowland, quien lo utilizó para estudiar las propiedades de muchos materiales.

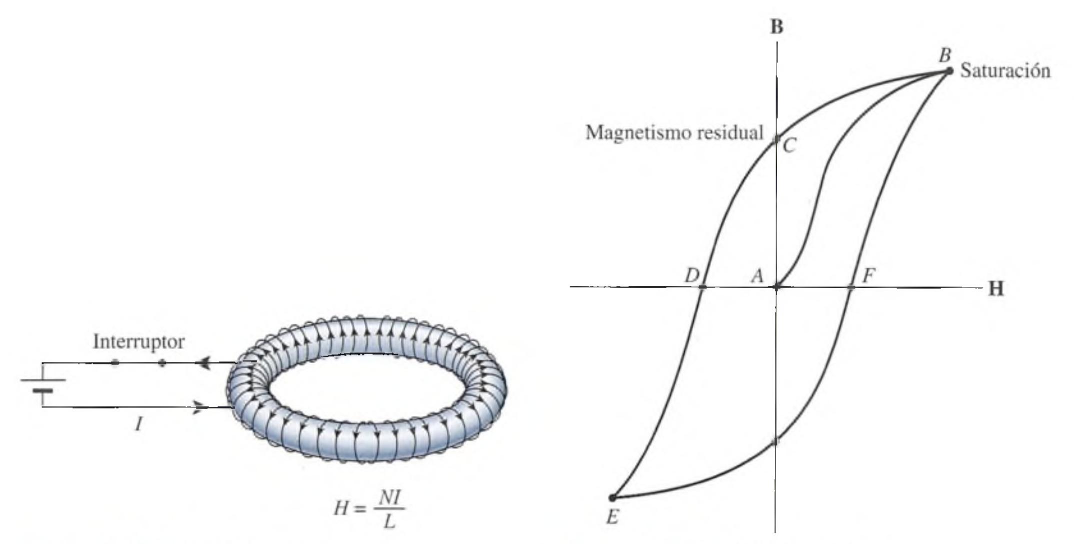


Figura 29.24 Anillo de Rowland.

Figura 29.25 Ciclo de histéresis.

Suponga que empezamos a estudiar las propiedades magnéticas de un material con un anillo de Rowland no magnetizado moldeado con la misma sustancia. Inicialmente, $B = 0$ y $H = 0$. El interruptor se cierra, y la corriente magnetizante I aumenta gradualmente, produciendo una intensidad magnética dada por

$$H = \frac{NI}{L}$$

donde L es la circunferencia del anillo. Puesto que el material está sometido a una intensidad magnética H cada vez mayor, *la densidad de flujo* B se incrementa hasta que el material se *satura*. Consulte la curva *AB* de la figura 29.25. Si ahora la corriente se disminuye en forma gradual hasta cero, la densidad de flujo B a través del núcleo no retorna a cero, sino que retiene cierta intensidad magnética, como se ilustra mediante la curva *BC* (esto en esencia corresponde al magnetismo residual). La pérdida de la restitución magnética se conoce como ***histéresis***.

Histéresis es el retraso de la magnetización respecto a la intensidad magnética.

La única forma de hacer que la densidad de flujo B dentro del anillo vuelva a cero es invirtiendo la dirección de la corriente a través del devanado. Este procedimiento desarrolla la intensidad magnética H en dirección opuesta, como muestra la curva *CD*. Si continúa la magnetización para aumentar en dirección negativa, el material al cabo del tiempo se saturará de nuevo con una polaridad invertida. (Consulte la curva *DE*.) Reduciendo la corriente a cero nuevamente y luego incrementándola en la dirección positiva, se obtiene la curva *EFB*. A la curva completa se le llama ***ciclo de histéresis***.

El área encerrada por un ciclo de histéresis es una indicación de la cantidad de energía que se pierde (en forma de calor), sometiendo a un material determinado a un ciclo de magnetización completo. La eficiencia de un gran número de dispositivos electromagnéticos está basada en la selección de materiales magnéticos con baja histéresis. Por otra parte, en el caso de los materiales que se desea mantener bien magnetizados, es necesario que éstos tengan una histéresis elevada.

Resumen y repaso

Resumen

Hemos visto que los campos magnéticos son generados por cargas en movimiento. En este principio fundamental se apoya gran parte de lo que se verá a continuación en el estudio del electromagnetismo. El funcionamiento de motores eléctricos, generadores, transformadores y una variedad interminable de instrumentos industriales requiere el conocimiento de los campos magnéticos. Los principales conceptos se resumen a continuación.

- La densidad de flujo magnético **B** en una región de un campo magnético es el número de líneas de flujo que pasan a través de una unidad de área perpendicular al flujo.

$$B = \frac{\Phi}{A_\perp} = \frac{\Phi}{A \operatorname{sen} \theta} \qquad \textit{Densidad de flujo magnético}$$

donde Φ = flujo, Wb
A = área de unidad m^2
θ = ángulo que forma el plano del área respecto al flujo
B = densidad de flujo magnético, T ($1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$)

- La densidad de flujo magnético **B** es proporcional a la intensidad del campo magnético **H**. La constante de proporcionalidad es la permeabilidad del medio en el cual existe el campo.

$$B = \frac{\Phi}{A_\perp} = \mu H \qquad \textit{Para el vacío} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}$$

- La *permeabilidad relativa* μ_r es la razón μ/μ_0. Podemos escribir

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad \text{donde} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad \textit{Permeabilidad relativa}$$

- Un campo magnético de densidad de flujo igual a 1 T ejercerá una fuerza de 1 N sobre una carga de 1 C que se mueve en dirección perpendicular al campo con una velocidad de 1 m/s. El caso general aparece descrito en la figura 29.16, donde la carga se mueve formando un ángulo θ respecto al campo.

$$F = qvB \operatorname{sen} \theta \qquad B = \frac{F}{qv \operatorname{sen} \theta} \qquad \textit{Fuerza magnética sobre una carga en movimiento}$$

La dirección de la fuerza magnética se puede determinar por medio de la regla de la mano derecha, como se aprecia en la figura 29.14.

- La fuerza **F** sobre un alambre por el cual circula una corriente I formando un ángulo θ con una densidad de flujo B se calcula mediante

$$F = ILB \operatorname{sen} \theta \qquad \textit{Fuerza magnética sobre un conductor}$$

donde L es la longitud del conductor.

- Presentamos a continuación las ecuaciones que corresponden a muchos campos magnéticos comunes:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad \textit{Alambre largo} \qquad B = \frac{\mu I}{2R} \quad \textit{Centro de una espira}$$

$$B = \frac{\mu N I}{2R} \quad \textit{Centro de una bobina} \qquad B = \frac{\mu N I}{L} \quad \textit{Solenoide}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

29.1. ¿Cómo puede averiguar con seguridad si un trozo de acero está magnetizado? Si lo está, ¿cómo se puede determinar su polaridad?

29.2. En general, los materiales magnéticos de alta permeabilidad tienen baja retentividad. ¿Por qué cree usted que esto es verdad?

29.3. La Tierra actúa como un enorme imán que tiene uno de sus polos en el círculo Ártico y el otro en la región Antártica. ¿Puede justificar la siguiente afirmación: el Polo Norte geográfico está en realidad cerca del Polo Sur magnético? Explique su respuesta.

29.4. Si se coloca una barra de hierro en posición paralela a la dirección norte-sur y se golpea con un martillo uno de sus extremos, la barra se convierte en un imán temporal. Explique la situación.

29.5. Cuando un imán de barra se rompe en varios trozos, cada uno de éstos se convierte en un imán con sus polos norte y sur. Tal parece que un polo aislado no puede existir. Explique lo anterior mediante la teoría del dominio del magnetismo.

29.6. Si los imanes se calientan o pasa por ellos una corriente eléctrica, la intensidad de campo se reduce. Explique por qué.

29.7. La fuerza de un imán en forma de U se conserva mucho más tiempo si una placa de hierro, llamada *armadura*, se coloca a través de los polos norte y sur. Explique la razón.

29.8. Un alambre colocado en dirección norte-sur conduce una corriente eléctrica de sur a norte. ¿Qué le ocurre a la aguja de una brújula si ésta se coloca (a) encima del alambre, (b) debajo del alambre y (c) al lado derecho del alambre?

29.9. Aplique la regla del pulgar de la mano derecha y la regla de la mano derecha para explicar por qué dos alambres adyacentes experimentan una fuerza de atracción cuando las corrientes fluyen en el mismo sentido. Ilustre su argumentación con dibujos.

29.10. Explique por medio de diagramas la repulsión que se produce entre dos alambres adyacentes por los que fluyen corrientes en sentidos opuestos.

29.11. Se hace pasar una corriente eléctrica por una bobina circular colocada en el plano del papel. Determine el sentido del flujo magnético cerca del centro de la bobina cuando la corriente circula en contrasentido a la de las manecillas del reloj.

29.12. Cuando se proyecta un haz de electrones de izquierda a derecha hacia un campo **B** dirigido hacia el papel, el haz se desvía siguiendo una trayectoria circular. ¿Los electrones se desplazarán en el sentido de las manecillas del reloj o en contrasentido? ¿Por qué es circular su trayectoria? ¿Qué ocurriría si fuera un haz de protones?

29.13. Un protón pasa a través de una región del espacio sin sufrir desviaciones. ¿Se puede afirmar positivamente que no existe un campo magnético en esa región? Explique su respuesta.

29.14. Para proteger a muchos instrumentos eléctricos sensibles de los efectos del magnetismo se recubren con material ferromagnético. Explique por qué.

29.15. Si B se expresa en teslas y μ está expresado en tesla · metros por ampere, ¿cuál es la unidad que corresponde a H en el SI?

29.16. El acero templado tiene un ciclo de histéresis grueso, mientras que el hierro dulce tiene un ciclo delgado. ¿Cuál de esos materiales se debe usar para fabricar un imán permanente? ¿Cuál debe usarse si se desea obtener una magnetización temporal intensa?

Problemas

Sección 29.1 Magnetismo

29.1. Una espira rectangular tiene un área de 200 cm^2 y el plano de la espira forma un ángulo de 41° con un campo magnético de 0.28 T. ¿Cuál es el flujo magnético que penetra la espira?

Resp. 3.67×10^{-3} Wb

29.2. Una bobina de alambre de 30 cm de diámetro está en dirección perpendicular a un campo magnético de 0.6 T. Si la bobina gira hasta formar un ángulo de 60° con ese campo, ¿cómo cambiará el flujo?

29.3. Un campo horizontal constante de 0.5 T atraviesa una espira rectangular de 120 mm de largo y 70 mm de ancho. Determine cuál será el flujo magnético que atraviesa la espira cuando su plano forme los siguientes ángulos con el campo **B**: 0°, 30°, 60° y 90°.

Resp. 0, 2.10 mWb, 3.64 mWb, 4.20 mWb

29.4. Un flujo de 13.6 mWb pasa a través de una espira de alambre de 240 mm de diámetro. Encuentre la magnitud de la densidad de flujo magnético si el plano de la bobina es perpendicular al campo.

29.5. Un campo magnético de 50 μWb pasa a través de una espira perpendicular de alambre cuya área es 0.78 m^2. ¿Cuál es la densidad de flujo magnético?

Resp. 64.1 μT

29.6. Una espira rectangular de 25 × 15 cm está orientada de manera que su plano forma un ángulo θ con un campo **B** de 0.6 T. ¿Cuál es el ángulo θ si el flujo magnético que pasa por la espira es de 0.015 Wb?

Sección 29.6 La fuerza sobre una carga en movimiento

29.7. Un protón ($q = +1.6 \times 10^{-19}$ C) se inyecta de derecha a izquierda en un campo **B** de 0.4 T dirigido hacia la parte superior de una hoja de papel. Si la velocidad del protón es de 2×10^6 m/s, ¿cuáles son la magnitud y el sentido de la fuerza magnética sobre el protón? Resp. 1.28×10^{-13} N, hacia la hoja

29.8. Una partícula alfa ($+2e$) se proyecta en un campo magnético de 0.12 T con una velocidad de 3.6×10^6 m/s. ¿Cuál es la fuerza magnética sobre la carga en el instante en que la dirección de su velocidad forma un ángulo de 35° con el flujo magnético?

29.9. Un electrón se mueve a una velocidad de 5×10^5 m/s formando un ángulo de 60° al norte de un campo **B** dirigido al este. El electrón experimenta una fuerza de 3.2×10^{-18} N dirigido hacia adentro de la página. ¿Cuáles son la magnitud de **B** y la dirección de la velocidad? Resp. 46.2 μT, v es 60° S del E

29.10. Un protón ($+1e$) se mueve verticalmente hacia arriba a una velocidad de 4×10^6 m/s. Pasa a través de un campo magnético de 0.4 T dirigido hacia la derecha. ¿Cuáles son la magnitud y el sentido de la fuerza magnética?

29.11. Si un electrón sustituye al protón del problema 29.10, ¿cuáles serán la magnitud y la dirección de la fuerza magnética?
Resp. 2.56×10^{-13} N, hacia fuera de la hoja

***29.12.** Una partícula con carga q y masa m se proyecta hacia el interior de un campo **B** dirigido hacia una hoja de papel. Si la partícula tiene una velocidad v, demuestre que será desviada y seguirá una trayectoria circular de radio igual a:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Elabore un diagrama del movimiento, suponiendo que una carga positiva entre al campo **B** de izquierda a derecha. *Indicación:* La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular.

***29.13.** Un deuterón es una partícula nuclear formada por un protón y un neutrón unidos entre sí por fuerzas nucleares. La masa del deuterón es de 3.347×10^{-27} kg, y su carga es de $+1e$. Se ha observado que un deuterón proyectado dentro de un campo magnético cuya densidad de flujo es de 1.2 T viaja en una trayectoria circular de 300 mm de radio. ¿Cuál es la velocidad del deuterón? Véase el problema 29.12. Resp. 1.72×10^7 m/s

Sección 29.7 Fuerza sobre un conductor por el cual circula corriente

29.14. Un alambre de 1 mm de longitud conduce una corriente de 5.00 A en dirección perpendicular a un campo magnético **B** de 0.034 T. ¿Cuál es la fuerza magnética sobre el alambre?

29.15. Un alambre largo conduce una corriente de 6 A en una dirección 35° al norte de un campo magnético de 0.04 T dirigido hacia el este. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza sobre cada centímetro del alambre? Resp. 1.38 mN hacia la hoja

29.16. Un trozo de alambre de 12 cm conduce una corriente de 4.0 A formando un ángulo de 41° al norte de un campo **B** dirigido al este. ¿Cuál deberá ser la magnitud del campo **B** para que produzca una fuerza de 5 N sobre ese trozo de alambre? ¿Cuál es la dirección de la fuerza?

29.17. Un trozo de alambre de 80 mm forma un ángulo de 53° al sur respecto a un campo **B** de 2.3 T dirigido al oeste. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente en ese alambre si experimenta una fuerza de 2 N dirigida hacia fuera de la hoja? Resp. 13.6 A

***29.18.** La densidad lineal de cierto alambre es 50.0 g/m. Un segmento de este alambre conduce una corriente de 30 A en dirección perpendicular al campo **B**. ¿Qué magnitud deberá tener el campo magnético para que el alambre quede suspendido, equilibrando su peso?

Sección 29.9 Otros campos magnéticos

29.19. ¿Cuál es la inducción magnética **B** en el aire en un punto localizado a 4 cm de un alambre largo que conduce una corriente de 6 A? Resp. 30 μT

29.20. Calcule la inducción magnética que existe en el aire a 8 mm de un alambre largo que conduce una corriente de 14.0 A.

29.21. Una bobina circular con 40 vueltas de alambre en el aire tiene 6 cm de radio y está en el mismo plano de la hoja. ¿Qué corriente deberá pasar por la bobina para producir una densidad de flujo de 2 mT en su centro? Resp. 4.77 A

29.22. Si la dirección de la corriente en la bobina del problema 29.21 es en el sentido de las manecillas del reloj, ¿cuál es la dirección del campo magnético en el centro de la espira?

29.23. Un solenoide de 30 cm de longitud y 4 cm de diámetro tiene un devanado de 400 vueltas de alambre enrolladas estrechamente en un material no magnético. Si la corriente en el alambre es de 6 A, calcule la inducción magnética a lo largo del centro del solenoide. Resp. 10.1 mT

29.24. Una bobina circular con 60 vueltas tiene 75 mm de radio. ¿Qué corriente deberá existir en la bobina para que se produzca una densidad de flujo de 300 μT en el centro de la bobina?

***29.25.** Una espira circular de 240 mm de diámetro conduce una corriente de 7.8 A. Si la sumergimos en un medio de permeabilidad relativa 2.0, ¿cuál será la inducción magnética en el centro? Resp. 81.7 μT

***29.26.** Una espira circular de 50 mm de radio que se encuentra en el mismo plano que la hoja conduce una corriente de 15 A en contrasentido a las manecillas del reloj. Está sumergida en un medio cuya permeabilidad relativa es de 3.0. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la inducción magnética en el centro de la espira?

Problemas adicionales

29.27. Una carga de $+3\ \mu C$ se proyectó con una velocidad de 5×10^5 m/s sobre el eje x positivo perpendicular a un campo **B**. Si la carga experimenta una fuerza ascendente de 6.0×10^{-3} N, ¿cuáles tendrán que ser la magnitud y la dirección del campo **B**?

Resp. 4.00 mT, hacia adentro del papel.

29.28. Una carga desconocida se proyecta a una velocidad de 4×10^5 m/s de derecha a izquierda en un campo **B** de 0.4 T dirigido hacia fuera de una hoja de papel. La fuerza perpendicular de 5×10^{-3} N hace que la partícula se mueva en círculo en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga?

29.29. Una carga de -8 nC se proyecta hacia arriba a 4×10^5 m/s en un campo **B** de 0.60 T dirigido hacia la hoja. El campo produce una fuerza ($F = qvB$) que también es una fuerza centrípeta (mv^2/R). Esta fuerza hace que la carga negativa se mueva en un círculo de 20 cm de radio. ¿Cuál es la masa de la carga, y ésta se mueve en el sentido de las manecillas del reloj o en contrasentido?

Resp. 2.40×10^{-15} kg en el sentido de las manecillas del reloj

29.30. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo **B** 6 cm por arriba de un largo trozo de alambre que conduce una corriente de 9 A en dirección hacia fuera de la hoja? ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo **B** 6 cm *debajo* del alambre?

29.31. Un trozo de alambre de 24 cm de longitud forma un ángulo de 32° por encima de un campo horizontal **B** de 0.44 T sobre el eje x positivo. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente necesaria para producir una fuerza de 4 mN dirigida hacia fuera de la hoja? Resp. 71.5 mA, 212°

***29.32.** Un selector de velocidad es un dispositivo (figura 29.26) que aprovecha los campos cruzados **E** y **B** para seleccionar los iones que se mueven a una misma velocidad v. Los iones positivos de carga q son proyectados hacia los campos perpendiculares a distintas velocidades. Los iones que tienen velocidad suficiente para hacer que la fuerza magnética sea igual y opuesta a la fuerza eléctrica pasan a través de la rendija del fondo sin desviarse. Demuestre que la rapidez de esos iones se puede calcular a partir de

$$v = \frac{E}{B}$$

29.33. ¿Cuál es la velocidad de los protones ($+1e$) inyectados en un selector de velocidad (véase el problema 29.32) si $E = 3 \times 10^5$ V/m y $B = 0.25$ T?

Resp. 1.20×10^6 m/s

***29.34.** Un solo ion de Li^7 cargado ($+1e$) se acelera a través de una diferencia de potencial de 500 V y después penetra en ángulos rectos en un campo magnético de 0.4 T. El radio de la trayectoria circular resultante es de 2.13 cm. ¿Cuál es la masa del ion de litio?

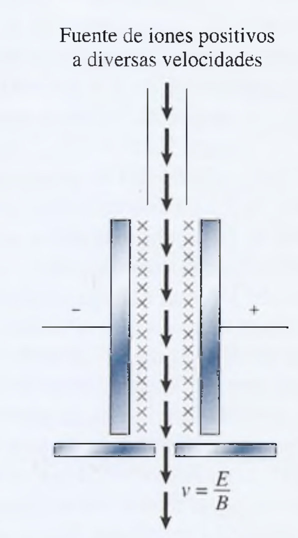


Figura 29.26 El selector de velocidad.

***29.35.** Un solo ion de sodio cargado ($+1e$) se mueve a través de un campo **B** a una velocidad de 4×10^4 m/s. ¿Cuál tendrá que ser la magnitud del campo **B** para que el ion describa una trayectoria circular de 200 mm de radio? (La masa de ion es 3.818×10^{-27} kg.)

Resp. 4.77 mT

***29.36.** Las secciones transversales de dos alambres paralelos se muestran en la figura 29.27, colocadas a 8 cm de distancia entre sí en el aire. El alambre de la izquierda conduce una corriente de 6 A hacia fuera de la hoja y el alambre de la derecha transporta una corriente de 4 A hacia la página. ¿Cuál es la inducción magnética resultante en el punto medio A

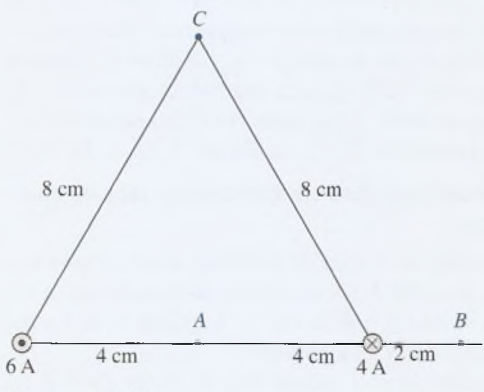


Figura 29.27

ocasionada por ambos alambres? (*Sugerencia:* Para hallar el campo resultante, superponga los campos generados por cada alambre.)

***29.37.** ¿Cuál es el campo magnético resultante en el punto *B* localizado 2 cm a la derecha del alambre que conduce 4 A? Resp. 28.0 μT, hacia abajo

***29.38.** Dos alambres paralelos (véase la figura 29.28) por los cuales circulan las corrientes I_1 e I_2 están separados por una distancia *d*. Demuestre que la fuerza por unidad de longitud *F*/*L* que cada alambre ejerce sobre el otro se calcula mediante

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}$$

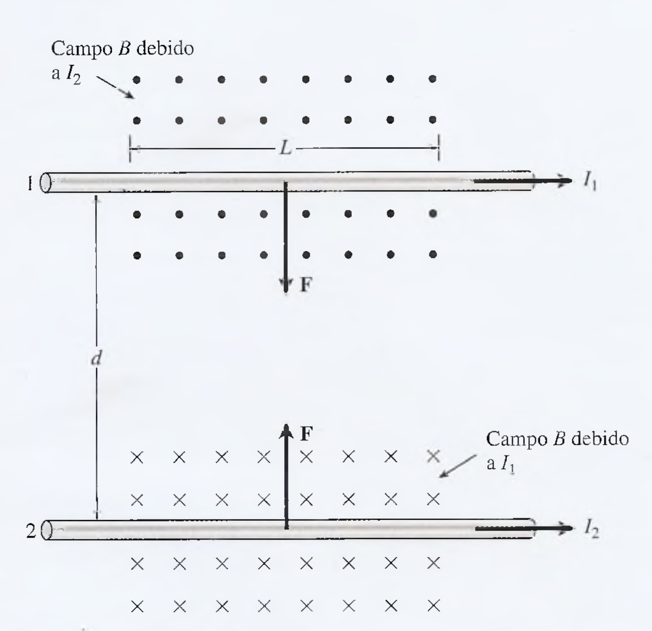


Figura 29.28 Dos alambres paralelos que transportan una corriente constante ejercen una fuerza entre sí.

***29.39.** Dos alambres tendidos en un plano horizontal conducen corrientes paralelas de 15 A cada uno y están separados 200 mm en el aire. Si ambas corrientes se dirigen a la derecha, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la densidad de flujo en un punto intermedio entre los alambres? Resp. 0

***29.40.** ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud que ejerce cada uno de los alambres del problema 29.39 sobre el otro? ¿Es de atracción o de repulsión?

***29.41.** Un solenoide de 20 cm de longitud y 220 vueltas conduce una corriente de bobina de 5 A. ¿Cuál tendrá que ser la permeabilidad relativa del núcleo para producir una inducción magnética de 0.2 T en el centro de la bobina? Resp. 28.9

***29.42.** Un trozo de alambre de 1 m está fijo e inmovilizado y conduce una corriente de 6 A en dirección este. Otro trozo de alambre de 1 m se localiza 2 cm arriba del alambre fijo. Si el alambre superior tiene una masa de 40 g, ¿cuáles tendrán que ser la magnitud y la dirección de la corriente en dicho alambre superior para que su peso quede equilibrado por la fuerza magnética debida al campo del alambre fijo?

***29.43.** ¿Cuál es el campo magnético resultante en el punto C de la figura 29.27? Resp. 21.8 μT, 96.6°

Preguntas para la reflexión crítica

***29.44.** Un campo magnético de 0.4 T se dirige hacia la hoja. Se inyectan tres partículas al campo en dirección ascendente, cada una con una velocidad de 5×10^5 m/s. Se observa que la partícula 1 se mueve en dirección de las manecillas del reloj formando un círculo de 30 cm de radio, la partícula 2 se sigue desplazando en línea recta y la partícula 3 se mueve en contrasentido a las manecillas del reloj en un círculo de 40 cm de radio. ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga por unidad de masa (*q*/*m*) para cada una de las partículas?
Resp. −4.17 MC/kg, cero, +3.12 MC/kg

***29.45.** Una corriente de 4.0 A fluye a través de las bobinas circulares de un solenoide en contrasentido a las manecillas del reloj cuando se observa a lo largo del eje *x* positivo, el cual está alineado con el núcleo de aire del solenoide. ¿Cuál es la dirección del campo **B** a lo largo del eje central? ¿Cuántas vueltas por metro de longitud se requieren para producir un campo **B** de 0.28 T? Si el núcleo de aire se sustituye por un material cuya permeabilidad relativa sea de 150, ¿cuánta corriente se necesitaría para producir el mismo campo de 0.28 T anterior?

***29.46.** El plano de una espira de 50 cm de largo y 25 cm de ancho que conduce corriente es paralelo a un campo **B** de 0.3 T que se dirige a lo largo del eje *x* positivo. Los segmentos de 50 cm son paralelos al campo y los segmentos de 25 cm son perpendiculares al campo. Cuando se mira desde arriba, la corriente de 6 A se mueve en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la espira. Haga un dibujo en el cual muestre las direcciones del campo **B** y las

direcciones de las corrientes en cada segmento de alambre. (a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que actúa en cada segmento del alambre? (b) ¿Cuál es el momento de torsión resultante sobre la espira que conduce la corriente?

Resp. (a) 0.450 N (arriba), −0.450 N (abajo); (b) 0.225 N m, en contrasentido a las manecillas del reloj sobre el eje +z

***29.47.** Considere los dos alambres de la figura 29.29, en la cual el punto indica que la corriente se dirige hacia fuera de la hoja de papel y la cruz indica que la corriente se dirige hacia la hoja. ¿Cuál es la densidad de flujo resultante en los puntos *A*, *B* y *C*?

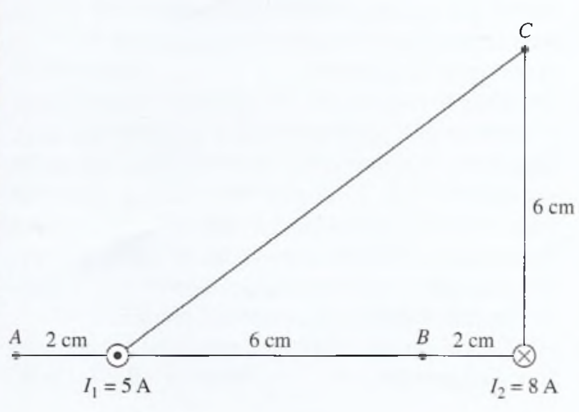


Figura 29.27

***29.48.** Dos alambres paralelos largos *A* y *B* están fijos a una distancia de 10 cm entre sí, en el aire, y conducen corrientes de 6 A y 4 A, respectivamente, en direcciones opuestas. (a) Determine la densidad de flujo neta en un punto intermedio entre los alambres. (b) ¿Cuál es la fuerza magnética por unidad de longitud sobre un tercer alambre colocado en el punto medio entre *A* y *B*, que conduce una corriente de 2 A en la misma dirección que A?

Resp. (a) 40 μT; (b) 80 μN/m, hacia A



30 Fuerza y momentos de torsión en un campo magnético



Simulador de cabina del Airbus A-320: una gran variedad de galvanómetros de escala móvil proporcionan a los pilotos información sobre diversas medidas físicas importantes. Esos instrumentos se basan en el principio que dicta que el momento de torsión es proporcional a la corriente eléctrica. (*Fotografía © Taxi/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Determinará la dirección de la fuerza magnética sobre un conductor por el que circula una corriente en un campo B conocido.
2. Escribirá y aplicará ecuaciones para calcular el momento de torsión magnético de una bobina o de un solenoide cuyas áreas, número de espiras y corrientes se conocen, al ser colocados en un campo magnético de densidad de flujo que también se conoce.
3. Explicará con esquemas la función de cada parte de un *galvanómetro* de laboratorio y describirá cómo puede convertirse en un amperímetro y en un voltímetro.
4. Calculará la *resistencia multiplicadora* necesaria para incrementar los límites de un voltímetro de corriente directa (cd) que contiene un galvanómetro de sensibilidad constante.
5. Calculará la *resistencia en derivación* necesaria para incrementar la amplitud de un galvanómetro o de un amperímetro de sensibilidad constante.
6. Explicará el funcionamiento de un *motor de corriente directa* (cd) simple y analizará la función de cada una de sus partes prestando atención especial al *conmutador de anillo partido*.

Hemos visto que al colocarlo en un campo magnético, un conductor por el que circula corriente experimenta una fuerza perpendicular tanto a la corriente (I) como a la inducción magnética (B). Una bobina suspendida en un campo magnético experimenta sobre sus costados un *momento de torsión* debido a fuerzas magnéticas equivalentes y de sentidos opuestos. En este capítulo estudiaremos el galvanómetro, el voltímetro, el amperímetro y el motor de corriente directa como aplicaciones de las fuerzas electromagnéticas.

30.1 Fuerza y momento de torsión en una espira

Un conductor por el que circula corriente suspendido en un campo magnético (véase la figura 30.1) experimentará una fuerza magnética dada por

$$F = BIL \operatorname{sen} \theta = BI_{\perp}L \tag{30.1}$$

donde $I_{\perp}$ se refiere a la corriente perpendicular al campo **B** y L es la longitud del conductor. La dirección de la fuerza se determina por medio de la regla del tornillo de rosca derecha.

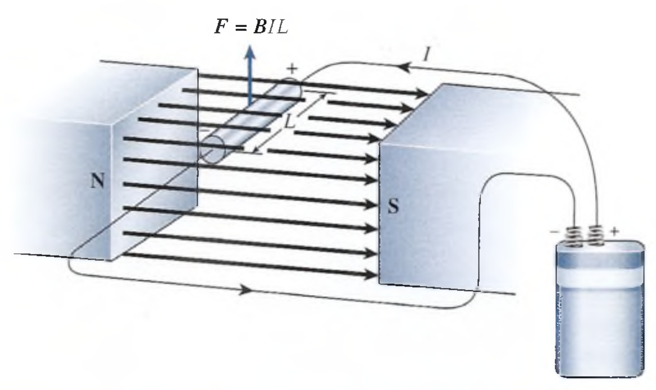


Figura 30.1 La fuerza ejercida sobre un conductor por el que circula corriente tiene una dirección perpendicular al campo magnético, la cual está dada por la regla del tornillo de rosca derecha.

Ahora examinemos las fuerzas que actúan sobre una espira rectangular por la que fluye una corriente y que se encuentra suspendida en un campo magnético, como se muestra en la figura 30.2. La longitud de los lados son a y b, y la corriente I circula por la espira como ahí se indica. (No se muestra la fuente de fem ni los conductores por donde llega la corriente para simplificar.) Los lados mn y op de la espira tienen una longitud a perpendicular a la inducción magnética **B**. Por tanto, sobre los lados actúan fuerzas de igual magnitud y de sentido opuesto.

$$F = BIa \tag{30.2}$$

La fuerza se dirige hacia arriba para el segmento mn y hacia abajo para el segmento op.

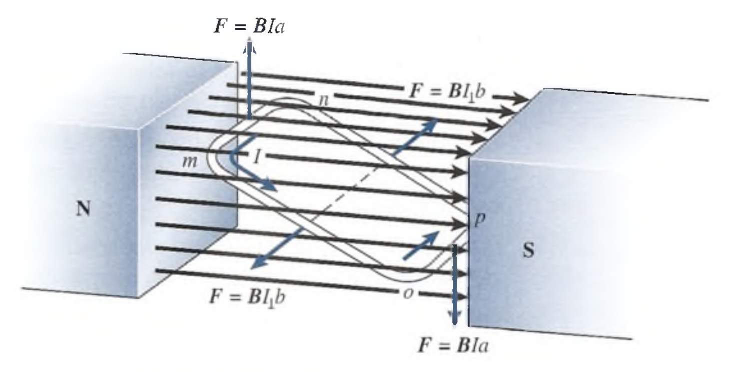


Figura 30.2 Fuerzas magnéticas sobre una espira por la que circula corriente.

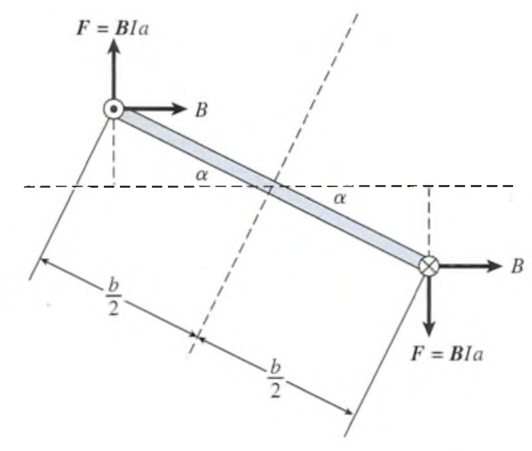


Figura 30.3 Cálculo del momento de torsión sobre una espira por la que fluye corriente.

FÍSICA HOY

Adelantos en la identificación de billetes

¿Se ha preguntado alguna vez cómo reconocen un billete de un dólar las máquinas expendedoras o de cobro? Los primeros artefactos de ese tipo usaban un cabezal magnético similar al de un reproductor de cintas de audio, para "leer" el cambio que se producía en un campo magnético cuando el dólar pasaba por sus rodillos. Esto era posible porque la tinta de los billetes de un dólar tenía un alto contenido de hierro. Más tarde, las máquinas utilizaron una celda fotoeléctrica para leer la luz procedente de un diodo instalado en el lado opuesto y transmitida a través del billete. La tecnología más reciente mide la capacitancia del billete. Esta nueva tecnología puede detectar marcas de agua o los hilos de seguridad adulterados que contienen los billetes falsificados.

Con un razonamiento similar se demuestra que en los otros dos lados también actúan fuerzas iguales y opuestas, las cuales tienen una magnitud de

$$F = BIb \operatorname{sen} \alpha$$

donde α es el ángulo que los lados np y mo forman con el campo magnético.

Es evidente que la espira se encuentra en equilibrio de traslación, puesto que la fuerza resultante sobre ella tiene un valor de cero. Sin embargo, las fuerzas no concurrentes sobre los lados de longitud a producen un momento de torsión que tiende a hacer girar la bobina en el sentido de las manecillas del reloj. Como se observa en la figura 30.3, cada fuerza produce un momento de torsión igual a

$$\tau = BIa\frac{b}{2} \cos \alpha$$

En virtud de que el momento de torsión es igual al doble de este valor, el momento de torsión resultante puede determinarse a partir de

$$\tau = BI(a \times b) \cos \alpha \tag{30.3}$$

Puesto que $a \times b$ es el área A de la espira, la ecuación (30.3) puede escribirse como

$$\tau = BIA \cos \alpha \tag{30.4}$$

Observe que el momento de torsión es máximo cuando $\alpha = 0°$, esto es, cuando el plano de la espira es paralelo al campo magnético. Cuando la bobina gira alrededor de su eje, el ángulo α crece, con lo que se reduce el efecto rotacional de las fuerzas magnéticas. Cuando el plano de la espira es perpendicular al campo, el ángulo $\alpha = 90°$ y el momento de torsión resultante es cero. La cantidad de movimiento de la bobina hará que ésta rebase ligeramente este punto; sin embargo, la dirección de las fuerzas magnéticas asegurará su oscilación hasta que alcance el equilibrio con el plano de la espira perpendicular al campo.

Si la espira se reemplaza con una bobina devanada en forma muy compacta, con N espiras de alambre, la ecuación general para calcular el momento de torsión resultante es

$$\tau = NIBA \cos \alpha \tag{30.5}$$

Esta ecuación se aplica a cualquier circuito completo de área A, y su uso no se restringe a espiras rectangulares. Cualquier espira plana obedece la misma relación.

Ejemplo 30.1

Una bobina rectangular formada por 100 espiras de alambre tiene un ancho de 16 cm y una longitud de 20 cm. La bobina está montada en un campo magnético uniforme de densidad de flujo de 8 mT, y una corriente de 20 A circula por el devanado. Cuando la bobina forma un ángulo de 30° con el campo magnético, ¿cuál es el momento de torsión que tiende a hacer girar la bobina?

Solución: Sustituyendo en la ecuación (30.5) se obtiene

$$\tau = NBIA \cos \alpha$$
$$= (100 \text{ espiras})(8 \times 10^{-3} \text{ T})(20 \text{ A})(0.16 \text{ m} \times 0.20 \text{ m})(\cos 30°)$$
$$= 0.443 \text{ N} \cdot \text{m}$$

30.2 Momento de torsión magnético sobre un solenoide

La relación expresada por la ecuación (30.5) se aplica para calcular el momento de torsión sobre un solenoide de área A que tiene N vueltas de alambre. Sin embargo, al aplicar esta relación debemos recordar que el ángulo α es el que cada espira de alambre forma con el campo. Es el *complemento* del ángulo θ entre el eje del solenoide y el campo magnético (véase la figura 30.4). Por tanto, otra ecuación para calcular el momento de torsión de un solenoide sería:

$$\tau = NBIA \text{ sen } \theta \qquad \textit{Solenoide} \qquad \textbf{(30.6)}$$

Compruebe que sen θ es igual a cos α observando la figura.

La acción del solenoide en la figura 30.4 también se puede explicar en términos de polos magnéticos. Aplicando la regla del pulgar de la mano derecha a cada espira de alambre se demuestra que el solenoide actuará como electroimán, con polos norte y sur como se indica en la figura.

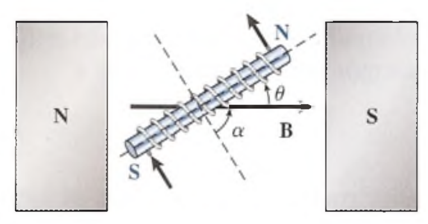


Figura 30.4 Momento de torsión magnético sobre un solenoide. El ángulo α es el que forma cada espira de alambre con el campo **B**. El ángulo θ es el que se halla entre el eje del solenoide y ese mismo campo. Recuerde que $\theta + \alpha + 90°$.

30.3 El galvanómetro

Cualquier dispositivo usado para medir una corriente eléctrica se llama ***galvanómetro***. Funciona a partir del principio según el cual el ***momento de torsión magnética*** es proporcional a la corriente. Las partes esenciales se muestran en la figura 30.5a. Una bobina de alambre, arrollada en torno de un núcleo de hierro dulce, se apoya sobre cojinetes hechos de alguna piedra preciosa, y se coloca entre los polos de un imán permanente. Su movimiento rotacional está restringido por un par de resortes en espiral, que sirven también como conductores de la corriente a la bobina. De acuerdo con la dirección de la corriente que se va a medir, la bobina y la aguja indicadora girarán en dirección en favor o en contra del avance de las manecillas del reloj. Los imanes permanentes se modelan para suministrar un *campo radial* uniforme de modo que el momento de torsión sea directamente proporcional a la corriente que hay en la bobina. La ***sensibilidad*** de un galvanómetro queda determinada por el momento de torsión del resorte, la fricción de los cojinetes y la intensidad del campo magnético. Una sensibilidad común puede ser de escalas de división de 50 μA. En general, la posición cero de la escala se ubica en el centro, como se observa en la figura 30.5b.

En ciertas aplicaciones, el galvanómetro puede utilizarse como un voltímetro de cd y como un amperímetro de cd, y es magnífico para estudiar circuitos de laboratorio que contribuyen a reforzar nuestros conocimientos de las relaciones que hay entre la corriente, el voltaje y la resistencia. En las secciones 30.4 y 30.5 se ofrece una explicación pormenorizada de esas aplicaciones, junto con una exposición de cómo es posible cambiar los límites de ese instrumento.

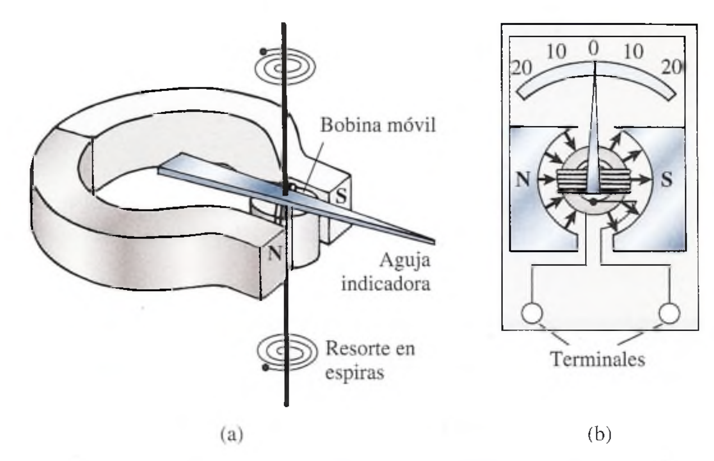


Figura 30.5 El galvanómetro de laboratorio. La posición de equilibrio (para una corriente igual a cero) es tal que la aguja indicadora se ubica en el centro, de modo que la desviación puede ocurrir hacia cualquier lado.

Sin embargo, cabe señalar que los aparatos digitales son más precisos y menos complicados que los antiguos dispositivos analógicos. Son varias las ventajas que brindan estos instrumentos. Los medidores digitales incluyen una batería para encender las pantallas, así que extraen una corriente despreciable del circuito en comparación con los basados en galvanómetros. Cuando se emplean para medir el voltaje, los aparatos digitales pueden ofrecer una resistencia enorme, en general del orden de 10 MΩ, lo que implica que el circuito no se alterará de manera significativa. Por añadidura, se elimina el problema que surge cuando un galvanómetro se sujeta mal. El dispositivo digital se limita a indicar un valor negativo para una polaridad y otro positivo para la otra.

30.4 El voltímetro de cd

Un ***voltímetro*** es un instrumento que se usa para medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito. En esta sección indicaremos cómo puede usarse un galvanómetro analógico para el mismo propósito. La diferencia de potencial a través del galvanómetro es muy pequeña, incluso cuando se produce una desviación grande en el instrumento. Por tanto, si se usa un galvanómetro para medir voltajes, éste debe convertirse en un instrumento de alta resistencia. Suponga que se desea medir la caída de voltaje a través de la batería de la figura 30.6. Este voltaje debe medirse sin perturbar en forma apreciable la corriente que fluye por el circuito. Dicho de otro modo, el voltímetro debe tomar una corriente insignificante. Para lograrlo, se coloca una ***resistencia multiplicadora*** R_m en serie con el galvanómetro como una parte integral del voltímetro de cd.

Observe que el galvanómetro que se utiliza en el voltímetro se ajusta de modo que su posición de equilibrio se encuentre en el extremo izquierdo de la escala. Esto permite tener un mayor límite en la escala, pero lamentablemente requiere que la corriente pase a través de la bobina en una sola dirección. La *sensibilidad* del galvanómetro se determina por la corriente I_g necesaria para una ***desviación de toda la escala*** (desviación máxima de la aguja), como aparece en la figura 30.6.

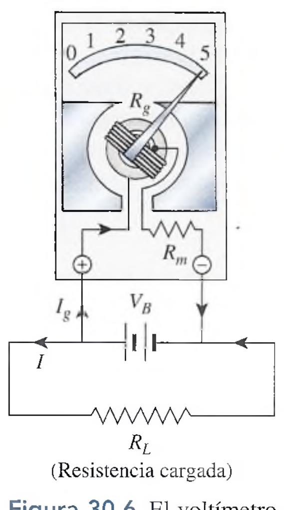


Figura 30.6 El voltímetro de cd.

Suponga que la bobina del galvanómetro tiene una resistencia R_g y que la escala se diseña para acabar la desviación de la escala completa debida a la corriente I_g. Un galvanómetro así, actuando solo, puede calibrarse para registrar voltajes desde cero hasta un valor máximo expresado por:

$$V_g = I_g R_g \tag{30.7}$$

Si se elige la resistencia multiplicadora R_m apropiada, es posible calibrar la escala para leer cualquier voltaje deseado.

Suponga que se desea una desviación de toda la escala del voltímetro para el voltaje V_B como se indica en la figura 30.6. La resistencia multiplicadora R_m debe elegirse de modo que sólo una pequeña corriente, I_g, pase por el galvanómetro. En estas condiciones,

$$V_B = I_g R_g + I_g R_m$$

Al resolver para R_m se obtiene

$$R_m = \frac{V_B}{I_g} - R_g \tag{30.8}$$

Por tanto, se observa que la resistencia multiplicadora R_m es igual a la resistencia total del aparato, V_B/I_g, menos la resistencia del galvanómetro, R_g.

Ejemplo 30.2

Un galvanómetro tiene una resistencia interna de 30 Ω y se desvía toda la escala con una corriente de 1 mA. Calcule la resistencia multiplicadora necesaria para convertir este galvanómetro en un voltímetro cuyo límite máximo es de 50 V.

Plan: La resistencia multiplicadora R_m debe ser tal que la caída total del voltaje a través de R_g y de R_m sea igual a 50 V.

Solución: A partir de la ecuación (30.8) se obtiene

$$R_m = \frac{50\text{ V}}{1 \times 10^{-3}\text{ A}} - 30\ \Omega = 49{,}970\ \Omega$$

Observe que la *resistencia total* del voltímetro ($R_m + R_g$) es de 50 kΩ.

Un voltímetro se debe conectar en *paralelo* con la parte del circuito cuya diferencia de potencial se va a medir. Esto es necesario para que la gran resistencia del voltímetro no altere en forma significativa al circuito.

30.5 El amperímetro de cd

Un ***amperímetro*** es un dispositivo que, a través de escalas calibradas, da indicaciones de la corriente eléctrica sin alterarla de forma ostensible. Un *galvanómetro* es un amperímetro, pero sus límites son limitados debido a la gran sensibilidad de la bobina móvil. Los límites del galvanómetro puede ampliarse fácilmente, pues basta añadir una resistencia pequeña, llamada ***derivación***, en paralelo con la bobina del galvanómetro (véase la figura 30.7). Al colocar la derivación en paralelo se asegura que el amperímetro considerado en conjunto tenga una resistencia baja, lo cual es necesario para que la corriente no se altere de modo considerable. De este modo, la mayor parte de la corriente pasará por la derivación. Solamente se requiere tomar una pequeña corriente I_g del circuito para desviar la aguja del galvanómetro. Por ejemplo, si pasan 10 A por un amperímetro, entonces pasarán 9.99 A por la derivación y sólo 0.01 A por la bobina.

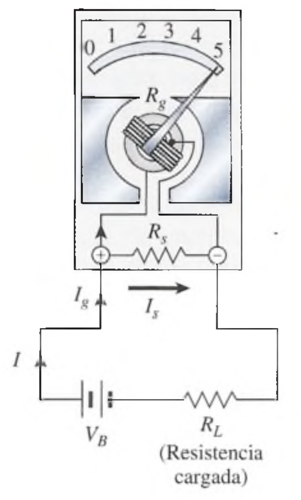


Figura 30.7 Amperímetro de cd.

Suponga que los límites de la escala de un galvanómetro permiten medir una corriente máxima I en el circuito mostrado en la figura 30.8. Debe elegirse una ***resistencia en derivación*** R_s de modo que sólo la corriente I_g, necesaria para la desviación de toda la escala, pase por la derivación. Puesto que R_g y R_s están en paralelo, la caída de IR a través de la resistencia debe ser idéntica:

$$I_sR_s = I_gR_g \tag{30.9}$$

La corriente a través de la derivación I_s es la diferencia entre la corriente I del circuito y la corriente I_g del galvanómetro. Entonces, la ecuación (30.9) se vuelve

$$(I - I_g)R_s = I_gR_g$$

Si se despeja para la resistencia en derivación R_s se obtiene la siguiente relación útil:

$$R_s = \frac{I_gR_g}{I - I_g} \tag{30.10}$$

Ejemplo 30.3 Un galvanómetro tiene una resistencia interna en la bobina de 46 Ω, y se requiere una corriente de 200 mA para que la aguja se desvíe toda la escala. ¿Qué resistencia en derivación debe usarse para convertir el galvanómetro en un amperímetro cuyo intervalo máximo sea de 10 A?

Solución: La ecuación (30.10) nos da

$$R_s = \frac{(0.2\text{ A})(46\ \Omega)}{10\text{ A} - 0.2\text{ A}} = \frac{9.2\text{ V}}{9.8\text{ A}} = 0.939\ \Omega$$

Es importante recordar que un amperímetro debe estar conectado en *serie* con la parte del circuito a través del cual se desea medir la corriente. El circuito debe abrirse en un punto conveniente para insertar allí el amperímetro. Si por equivocación se conecta el amperímetro en paralelo, se producirá un cortocircuito a través de él, puesto que su resistencia es extremadamente baja.

30.6 El motor de cd

Un ***motor eléctrico*** es un dispositivo que transforma la energía eléctrica en energía mecánica. El ***motor de cd***, como la bobina móvil de un galvanómetro, consta de una bobina por la que fluye corriente colocada dentro de un campo magnético. Sin embargo, el movimiento de la bobina en el motor no está restringido por resortes. El diseño permite que la bobina gire continuamente bajo la influencia de un momento de torsión magnético.

Un motor sencillo de cd está formado por una sola espira, suspendida entre dos polos magnéticos, por la cual circula una corriente, como se indica en la figura 30.8. Normalmente, el momento de torsión ejercido sobre la espira por la que fluye corriente disminuye hasta llegar a cero cuando su plano llega a ser perpendicular al campo magnético. Para que sea posible la rotación continua de la espira, la corriente que circula por ella ha de invertirse automáticamente cada vez que la espira gira 180°.

Se logra invertir la corriente usando un ***conmutador de anillo partido***, como se muestra en la figura 30.9. El conmutador consta de dos semianillos seccionados, cada uno de los cuales está conectado a cada extremo de la espira y aislados entre sí. A medida que la espira gira, cada escobilla toca primero una mitad del anillo y luego otra. Por consiguiente, las conexiones eléctricas se invierten a la mitad de cada revolución en el momento en que la espira queda en posición perpendicular al campo magnético. De esta forma, el momento de torsión que actúa sobre la espira tiene siempre la misma dirección, y la espira girará continuamente.

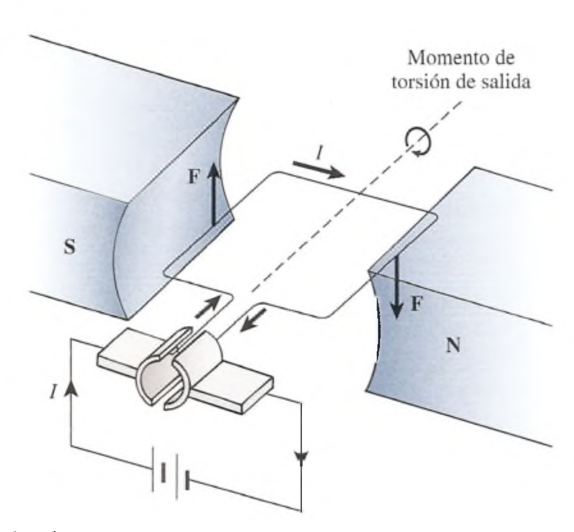


Figura 30.8 El motor de cd.

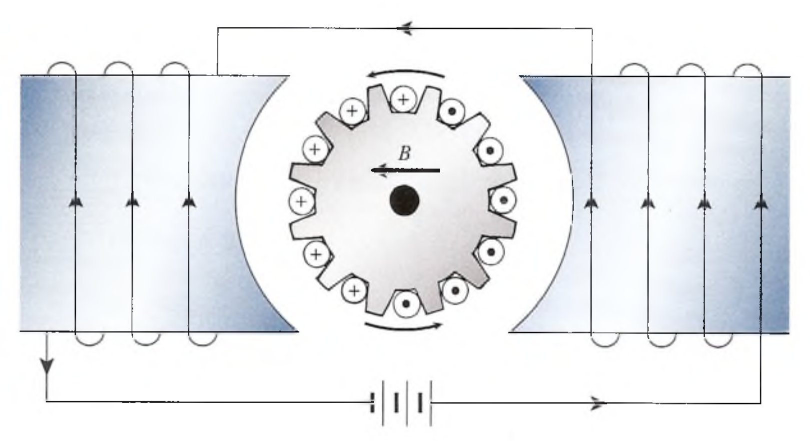


Figura 30.9 Los motores comerciales con mayor número de bobinas en la armadura permiten obtener un momento de torsión mayor y más uniforme.

Aunque en realidad los motores de cd funcionan de acuerdo con el principio descrito en la figura 30.8, hay algunos diseños que incrementan el momento de torsión aprovechable y lo hacen más uniforme. Uno de esos diseños se presenta en la figura 30.9. Es posible crear un campo magnético mayor reemplazando los imanes permanentes con electroimanes. Además, el momento de torsión puede ser mayor y más uniforme si se añaden algunas bobinas diferentes, cada una de ellas con gran número de espiras devanadas alrededor de un núcleo de hierro con hendeduras, llamado ***armadura***. El conmutador es un interruptor automático que mantiene las corrientes en las direcciones mostradas en la figura, independientemente de la orientación de la armadura. En el capítulo siguiente se estudiarán con más detalle los motores de cd.

Resumen y repaso

Resumen

El momento magnético de las espiras por las que circula una corriente constituye la base de tantas aplicaciones que es esencial tener conocimientos básicos firmes al respecto. El funcionamiento de los generadores, motores, amperímetros, voltímetros y muchos instrumentos industriales se ve afectado directamente por las fuerzas y los momentos de torsión magnéticos. A continuación se resumen los principales conceptos que conviene recordar.

- El momento de torsión magnético sobre una bobina de alambre que conduce corriente y tiene N vueltas de alambre está dado por

$$\tau = NBIA \cos \alpha \qquad \textit{Momento de torsión magnético}$$

donde N = número de vueltas de alambre
B = densidad de flujo, T
I = corriente, A
A = área de la bobina de alambre, m^2
α = ángulo que forma el plano de la bobina con el campo

- La misma ecuación puede aplicarse en el caso de un solenoide, excepto en que el ángulo α se sustituye generalmente por θ, que es el ángulo que forma el eje del solenoide con el campo.

$$\tau = NBIA \operatorname{sen} \theta \qquad \textit{Momento de torsión sobre un solenoide}$$

- La resistencia multiplicadora R_m que se debe conectar en serie con un voltímetro para permitir la desviación de toda la escala para V_B se calcula mediante

$$R_m = \frac{V_B}{I_g} = R_g \qquad \textit{Resistencia multiplicadora}$$

I_g es la corriente del galvanómetro y R_g es su resistencia.

- La *resistencia en derivación* R_s que debe conectarse en paralelo con un amperímetro para tener una desviación de toda la escala para una corriente I es

$$R_s = \frac{I_g R_g}{I - I_g} \qquad \textit{Resistencia en derivación}$$

Conceptos clave

amperímetro 594
armadura 596
conmutador de anillo dividido 595
derivación 594
desviación de toda la escala 593
galvanómetro 592
momento de torsión magnético 592
motor de cd 595
motor eléctrico 595
resistencia en derivación 594
resistencia multiplicadora 593
sensibilidad 592
voltímetro 593

Preguntas de repaso

30.1. Las fuerzas de igual magnitud y sentido opuesto que actúan sobre una espira con corriente en un campo magnético forman lo que se conoce como un *par de fuerzas*. Demuestre que el momento de torsión resultante sobre un par de fuerzas de ese tipo es el producto de una de las fuerzas por la distancia perpendicular entre sus líneas de acción.

30.2. ¿Por qué es necesario proporcionar un campo magnético *radial* a la bobina del galvanómetro?

30.3. Una bobina de alambre está suspendida de un hilo, de modo que el plano de las espiras coincida con el plano de la página. Si la bobina se coloca dentro de un campo magnético cuya dirección es de izquierda a derecha y si se hace circular por la bobina una corriente en el sentido de las manecillas del reloj, describa cuál será su movimiento.

30.4. ¿En qué se asemeja el funcionamiento de un galvanómetro al de un motor? ¿En qué se diferencian?

30.5. ¿De qué forma influye el núcleo de la bobina de un galvanómetro en la sensibilidad del instrumento?

30.6. Explique en qué consiste el momento de torsión ejercido sobre un imán de barra suspendido en un campo magnético, sin referirse a los polos magnéticos. Comente, desde el punto de vista atómico, cómo el momento de torsión observado puede surgir por la misma causa que el momento de torsión en una espira por la que fluye corriente.

30.7. Suponga que se desea incrementar en N veces los límites de la escala de un amperímetro. Demuestre que la resistencia en derivación que debe colocarse entre las terminales del amperímetro se calcula mediante

$$R_s = \frac{R_a}{N - 1}$$

donde R_a es la resistencia del amperímetro.

30.8. Suponga que los límites de la escala de un voltímetro van a incrementarse N veces. Demuestre que la resistencia multiplicadora que habrá de conectarse en serie con el voltímetro se calcula mediante

$$R_m = (N - 1)R_v$$

donde R_v es al resistencia del voltímetro.

30.9. Demuestre por medio de diagramas cómo deben conectarse un amperímetro y un voltímetro en un circuito. Compare las resistencias de los aparatos.

30.10. Comente sobre el error que se produce cuando un amperímetro es insertado en un circuito eléctrico. ¿Cómo se reduce ese error?

30.11. Comente acerca del error ocasionado por la inserción de un voltímetro en un circuito. ¿Cómo se reduce este error?

30.12. Se conecta un voltímetro a una batería y se efectúa la lectura. Una caja de resistencias de precisión se incorpora entonces al circuito y se ajusta hasta que la lectura del voltímetro muestra la mitad del valor que la lectura anterior. Demuestre que la resistencia del voltímetro debe ser igual a la resistencia añadida. (Esto se conoce como el *método de la desviación media* para determinar la resistencia de un voltímetro.)

30.13. Explique qué sucede cuando, por error, se conecta en serie un voltímetro en un circuito. ¿Qué ocurre cuando un amperímetro se conecta erróneamente en paralelo?

30.14. Escriba un resumen breve sobre los temas siguientes:

a. galvanómetro balístico
b. óhmetro
c. dinamómetro
d. voltímetro

30.15. Trace una gráfica que muestre el momento de torsión en función del tiempo para un motor de cd de una sola espira.

Problemas

Sección 30.1 Fuerza y momento de torsión sobre una espira

30.1. Una espira rectangular de alambre tiene un área de 30 cm^2 y está colocada de modo que su plano sea paralelo a un campo magnético de 0.56 T. ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión resultante si la espira conduce una corriente de 15 A? Resp. 0.0252 N · m

30.2. Una bobina de alambre tiene 100 vueltas, cada una con un área de 20 cm^2. La bobina puede girar libremente dentro de un campo de 4.0 T. ¿Cuánta corriente se requiere para producir un momento de torsión máximo de 2.30 N · m?

30.3. Una espira rectangular de alambre de 6 cm de ancho y 10 cm de largo se coloca de modo que su plano sea paralelo a un campo magnético de 0.08 T. ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión resultante sobre la espira si ésta conduce una corriente de 14.0 A? Resp. 6.72×10^{-3} N · m

30.4. Una espira rectangular de alambre tiene un área de 0.30 m^2. El plano de la espira forma un ángulo de 30° con un campo magnético de 0.75 T. ¿Cuál es el momento de torsión sobre la espira si la corriente es de 7.0 A?

30.5. Calcule la densidad de flujo magnético necesaria para impartir un momento de torsión de 0.5 N · m a una bobina de 100 vueltas cuando su plano es paralelo al campo. El área de cada vuelta es de 84 cm^2 y la corriente de 9.0 A. Resp. 66.1 mT

30.6. ¿Cuánta corriente se necesita para producir un momento de torsión máximo de 0.8 N · m en un solenoide que tiene 800 vueltas de 0.4 m^2 de área? La densidad de flujo es de 3.0 mT. ¿Cuál es la posición del solenoide dentro del campo?

30.7. El eje de un solenoide que tiene 750 vueltas de alambre forma un ángulo de 34° con un campo de 5 mT. ¿Cuál es la corriente si el momento de torsión es de 4.0 N · m en ese ángulo? El área de cada vuelta de alambre es de 0.25 m^2. Resp. 7.63 A

Sección 30.3 El galvanómetro, Sección 30.4 El voltímetro de cd y Sección 30.5 El amperímetro

30.8. La bobina de un galvanómetro de 50 mm × 120 mm está montada dentro de un campo magnético radial constante de 0.2 T. Si la bobina tiene 600 vueltas, ¿cuánta corriente se necesita para desarrollar un momento de torsión de 3.6×10^{-5} N m?

30.9. Un galvanómetro tiene una sensibilidad de 20 μA por cada división de la escala. ¿Cuánta corriente se requiere para producir una desviación de toda la escala del instrumento, con 25 divisiones a cada lado de la posición de equilibrio? Resp. 500 μA

30.10. Un galvanómetro tiene una sensibilidad de 15 μA por cada división de la escala. ¿Cuántas divisiones de la escala quedarán cubiertas por la desviación de la aguja cuando la corriente sea de 60 μA?

30.11. Un voltímetro requiere 0.02 mA para tener una desviación de toda la escala a 50 V. (a) ¿Cuál es la resistencia del voltímetro? (b) ¿Cuál es la resistencia por volt? Resp. 2.50 MΩ, 50 kΩ/V

***30.12.** En el caso del voltímetro del problema 30.11, ¿qué resistencia multiplicadora debe usarse para conver-

tir ese aparato en un instrumento capaz de leer una escala completa de 150 V?

***30.13.** La bobina de un galvanómetro se quema si circula por ella una corriente mayor de 40 mA. Si la resistencia de la bobina es 0.5 Ω, ¿qué resistencia en derivación será necesario agregar para permitir la medición de 4.00 A? Resp. 5.05 mΩ

***30.14.** Una corriente de sólo 90 μA producirá una desviación de toda la escala en un voltímetro diseñado para una lectura de 50 mV en toda su escala. (a) ¿Cuál es la resistencia del aparato? (b) ¿Qué resistencia multiplicadora se requiere para permitir la medición de 100 mV en toda la escala?

***30.15.** Un amperímetro que tiene una resistencia de 0.10 Ω se conecta a un circuito e indica una corriente de 10A en toda la escala. Entonces se conecta una derivación que tiene una resistencia de 0.01 Ω a través de las terminales del instrumento. ¿Cuánta corriente deberá conducir el nuevo circuito para producir una desviación de toda la escala en el amperímetro? Resp. 110 A

Problemas adicionales

30.16. Un alambre de 12 cm de largo se moldea como una espira y se coloca dentro de un campo magnético de 3.0 T. ¿Cuál es el mayor momento de torsión que el alambre puede experimentar con una corriente de 6 A?

30.17. Un solenoide tiene 600 vueltas de 20 cm^2 de área y conduce una corriente de 3.8 A. El eje del solenoide forma un ángulo de 30° con un campo magnético de magnitud desconocida. Si el momento de torsión resultante en el solenoide es de 1.25 N · m, ¿cuál es la densidad de flujo magnético? Resp. 548 mT

30.18. Una bobina de alambre plana tiene 150 vueltas de radio de 4.0 y fluye por ella una corriente de 5.0 A. ¿Qué ángulo forma el plano de la bobina con el campo magnético de 1.2 T si el momento de torsión producido es de 0.60 N · m.

30.19. Una espira circular constituida por 500 vueltas conduce una corriente de 10 A dentro de un campo magnético de 0.25 T. El área de cada vuelta es de 0.2 m^2. Calcule el momento de torsión cuando la espira forma los ángulos con el campo: 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. Resp. 250, 217, 177, 125 y 0 N · m

30.20. Un solenoide de 100 vueltas tiene un área en sección transversal de 0.25 m^2 y conduce una corriente de 10 A. ¿Qué momento de torsión se requiere para mantenerlo en un ángulo de 30° respecto a un campo magnético de 40 mT?

30.21. Un solenoide consta de 400 vueltas de alambre, todas con 60 mm de radio. ¿Qué ángulo forma el eje del solenoide con el flujo magnético si la corriente que pasa por el alambre es de 6 A, la densidad de flujo es de 46 mT y el momento de torsión resultante de 0.80 N m? Resp. 39.8°

***30.22.** Un galvanómetro con resistencia interna de 35 Ω requiere 1.0 mA para desviarse en toda la escala. ¿Qué resistencia multiplicadora se necesita para convertir este instrumento en un voltímetro cuya lectura máxima sea de 30 V?

***30.23.** La resistencia interna de un galvanómetro es de 20 Ω y su lectura es de toda la escala con una corriente de 10 mA. Calcule la resistencia multiplicadora necesaria para convertir este galvanómetro en un voltímetro con límite de 50 V. ¿Cuál es la resistencia total del instrumento resultante? Resp. 4980 Ω, 5000 Ω

***30.24.** ¿Qué resistencia en derivación se requiere para convertir el galvanómetro del problema 30.22 en un amperímetro que permita lecturas de 10 mA en toda la escala?

***30.25.** Un voltímetro marca 150 V en toda la escala. La bobina del galvanómetro tiene una resistencia de 50 Ω y produce una desviación de toda la escala con 20 mV. Determine la resistencia multiplicadora del voltímetro. Resp. 374 950 Ω

***30.26.** Un galvanómetro tiene una resistencia de bobina de 50 Ω y es sensible a corrientes de 1 mA (a toda la escala). ¿Qué resistencia en derivación se necesita para convertir este galvanómetro en un amperímetro cuya lectura de toda la escala sea de 2.0 A?

***30.27.** Un amperímetro de laboratorio tiene una resistencia de 0.01 Ω y permite una lectura de 5.0 A como máximo en toda la escala. ¿Qué resistencia en derivación se requiere para incrementar 10 veces los límites de la escala del amperímetro? Resp. 0.00111 Ω

***30.28.** Un voltímetro comercial de 3 V requiere una corriente de 0.02 mA para producir una desviación de toda la escala. ¿Cómo se podrá convertir en un instrumento con una escala de lectura de 150 V?

Preguntas para la reflexión crítica

30.29. Considere la espira rectangular de 60 vueltas de alambre de 4 por 6 cm de la figura 30.10. El plano de la espira forma un ángulo de 40° con un campo magnético **B** de 1.6 T cuya dirección coincide con el eje x. La espira puede girar libremente sobre el eje y y la corriente que circula por la bobina en el sentido de las manecillas del reloj es de 6.0 A. ¿Cuál es el momento de torsión y girará la espira hacia el eje x o hacia el eje z? Resp. 1.06 N m, hacia el eje z

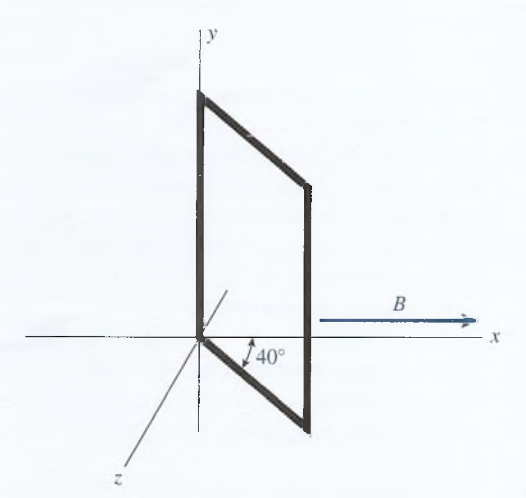


Figura 30.10

*30.30. Un voltímetro con una escala máxima de 150 V y resistencia total de 15 000 Ω está conectado en serie con otro voltímetro de escala máxima 100 V y resistencia total de 20 000 Ω. ¿Qué lectura mostrará cada uno de esos instrumentos cuando se conecten a través de una batería de 120 V y resistencia interna insignificante?

*30.31. El momento magnético μ es una cantidad vectorial que, en el caso de una bobina de N vueltas de área A, tiene una magnitud dada NIA, donde I es la corriente que pasa por la bobina. La dirección del momento magnético es perpendicular al plano de la bobina en la dirección determinada mediante la regla de la mano derecha (véase la figura 29.20). Si esa bobina se introduce en un campo **B** uniforme, demuestre que el momento de torsión tiene una magnitud dada por:

$$\tau = \mu B \text{ sen } \theta$$

Esto se escribe a veces como un producto vectorial (cruz) $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$.

*30.32. Compruebe la respuesta obtenida para el problema 30.19, aplicando la fórmula deducida en la pregunta anterior. No confunda el ángulo θ con el ángulo α que el plano de la espira forma el campo **B**.

*30.33. El cableado interno de un voltímetro de tres escalas se ilustra en la figura 30.11. El galvanómetro tiene una resistencia interna de 40 Ω y una corriente de 1.00 mA produce una desviación de toda la escala. Encuentre las resistencias R_1, R_2 y R_3 que permitan usar el voltímetro para 10, 50 y 100 V.

Resp. 9960 Ω, 49 960 Ω, 99 960 Ω

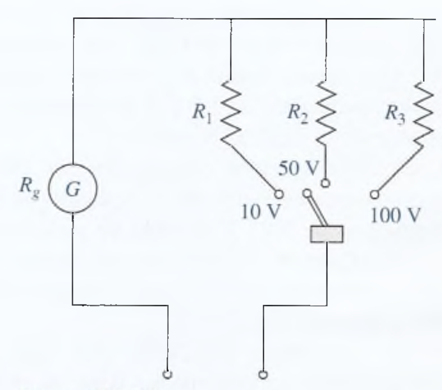
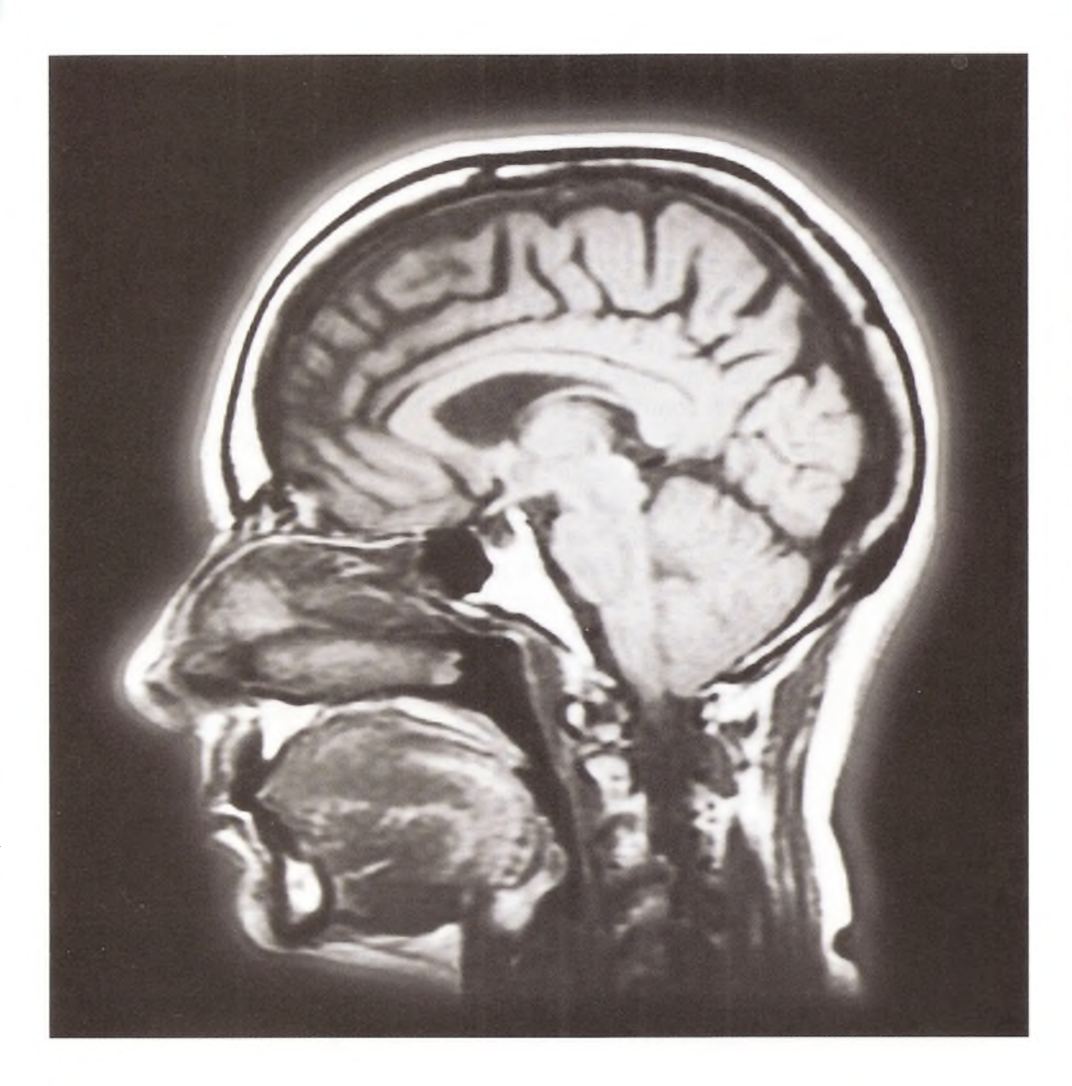


Figura 30.11

31 Inducción electromagnética



Las imágenes de resonancia magnética (MRI, por sus siglas en inglés) combinan campos magnéticos fuertes con pulsos de radiofrecuencia RF para formar una herramienta médica moderna que ayuda en el diagnóstico de la esclerosis múltiple, tumores e infecciones en el cerebro, la espina o las articulaciones. La inducción magnética, estudiada en este capítulo, juega un papel importante en la producción del campo magnético central en la parte básica de este dispositivo. (*Fotografía © PhotoDisc/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Explicará y calculará la corriente o fem inducida por un conductor que se mueve a través de un campo magnético.
2. Escribirá y aplicará una ecuación que permita relacionar la fem inducida en cierta longitud de alambre que se mueve con una velocidad v dirigida con un ángulo θ respecto a un campo B conocido.
3. Enunciará y aplicará la ley de Lenz, o la *regla de la mano derecha*, para determinar la dirección de la fem o la corriente.

4. Explicará el funcionamiento de los generadores simples de ca y cd; calculará la fem instantánea y máxima o la corriente generada por un generador de ca simple.
5. Demostrará por medio de diagramas que ha adquirido los conocimientos acerca de los motores *devanados en serie* y *devanados en derivación*, y resolverá problemas de corriente de arranque y voltaje de operación.
6. Explicará el funcionamiento de un *transformador* y resolverá problemas que impliquen cambios en la corriente, en el voltaje o en la potencia.

Hemos visto que un campo eléctrico puede producir un campo magnético. En este capítulo estudiaremos que el proceso inverso también es cierto: un campo magnético puede generar un campo eléctrico. Una corriente eléctrica se *genera* mediante un conductor que tiene un movimiento relativo respecto a un campo magnético. Una bobina giratoria en un campo magnético *induce* una fem alterna, la cual origina una *corriente alterna* (ca). A este proceso se le llama ***inducción electromagnética*** y es el principio de operación en el cual se basan muchos dispositivos eléctricos. Por ejemplo, los transformadores y generadores eléctricos de ca aprovechan la inducción electromagnética para producir y distribuir energía eléctrica en forma económica.

31.1 Ley de Faraday

Faraday descubrió que cuando un conductor corta las líneas de flujo magnético, se produce una fem entre los extremos de dicho conductor. Por ejemplo, se induce una corriente eléctrica en el conductor de la figura 31.1a a medida que éste se mueve hacia abajo, atravesando las líneas de flujo. (Con la letra *i* minúscula indicaremos, las corrientes inducidas y las corrientes variables.) Cuanto más rápido sea ese movimiento, tanto más pronunciada será la desviación de la aguja del galvanómetro. Cuando el conductor se mueve hacia arriba a través de las líneas de flujo se puede hacer una observación similar, excepto que en ese caso la corriente se invierte (véase la figura 31.1b). Cuando no se cortan las líneas de flujo, por ejemplo si el conductor se mueve en dirección paralela al campo, no se induce corriente alguna.

Supongamos que cierto número de conductores se mueven a través de un campo magnético, como se observa en la figura 31.2, al descender una bobina de *N* espiras a través de las líneas de flujo. La magnitud de la corriente inducida es directamente proporcional al número de espiras y a la rapidez del movimiento. Es evidente que *se induce una fem mediante el movimiento relativo entre el conductor y el campo magnético*. Cuando la bobina permanece estacionaria y el imán se mueve hacia arriba se observa el mismo efecto.

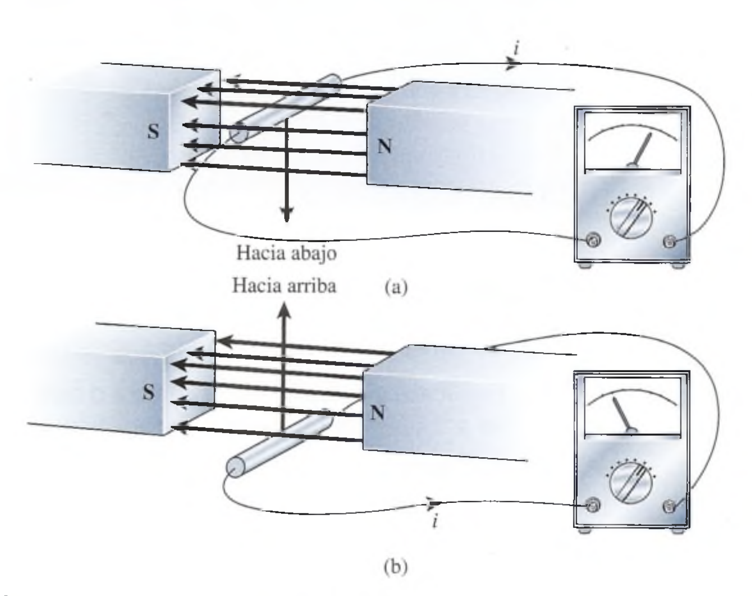


Figura 31.1 Cuando un conductor corta líneas de flujo magnético se induce una corriente eléctrica.

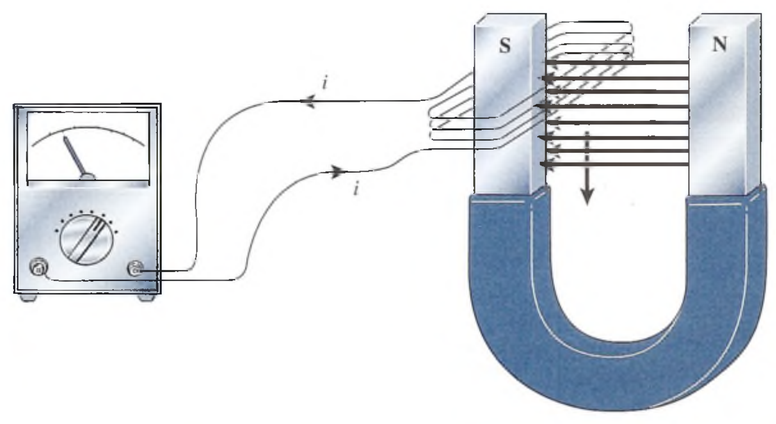


Figura 31.2 La fem inducida en una bobina es proporcional al número de espiras de alambre que cruzan a través del campo.

Resumiendo lo que se ha observado mediante estos experimentos, se establece que:

1. El movimiento relativo entre un conductor y un campo magnético induce una fem en el conductor.
2. La dirección de la ***fem inducida*** depende de la dirección del movimiento del conductor respecto al campo.
3. La magnitud de la fem es directamente proporcional a la rapidez con la que el conductor corta las líneas de flujo magnético.
4. La magnitud de la fem es directamente proporcional al número de espiras del conductor que cruza las líneas de flujo.

Una relación cuantitativa para calcular la fem inducida en una bobina de N espiras es

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{31.1}$$

donde $\mathscr{E}$ = fem media inducida
$\Delta\Phi$ = cambio en el flujo magnético durante un espacio de tiempo Δt

Un flujo magnético que cambia con una rapidez de un weber por segundo inducirá una fem de 1 volt por cada espira del conductor. El signo negativo de la ecuación (31.1) significa que la fem inducida tiene tal dirección que se opone al cambio que la produce, como se explicará en la sección. 31.3.

Ahora analicemos cómo el flujo magnético Φ que se acopla a un conductor puede cambiar. En el caso más sencillo de un alambre recto que se mueve a través de líneas de flujo, $\Delta\Phi/\Delta t$ representa la rapidez con la cual el flujo se acopla a causa de los cambios del conductor. Sin embargo, para que una corriente inducida exista es necesario que fluya a través de un circuito cerrado, y lo que nos interesa con más frecuencia es la fem inducida en una espira o en una bobina de alambre.

Recuerde que el flujo magnético Φ que pasa a través de una espira de área efectiva A está dado por

$$\Phi = BA \tag{31.2}$$

donde B es la densidad de flujo magnético. Cuando B está en *teslas* (*webers por metro cuadrado*) y A está en *metros cuadrados*, Φ se expresa en webers.

Un *cambio en el flujo* Φ puede expresarse principalmente en dos formas:

1. Al cambiar la densidad de flujo **B** a través de una espira de área A:

$$\Delta\Phi = (\Delta B)A \tag{31.3}$$

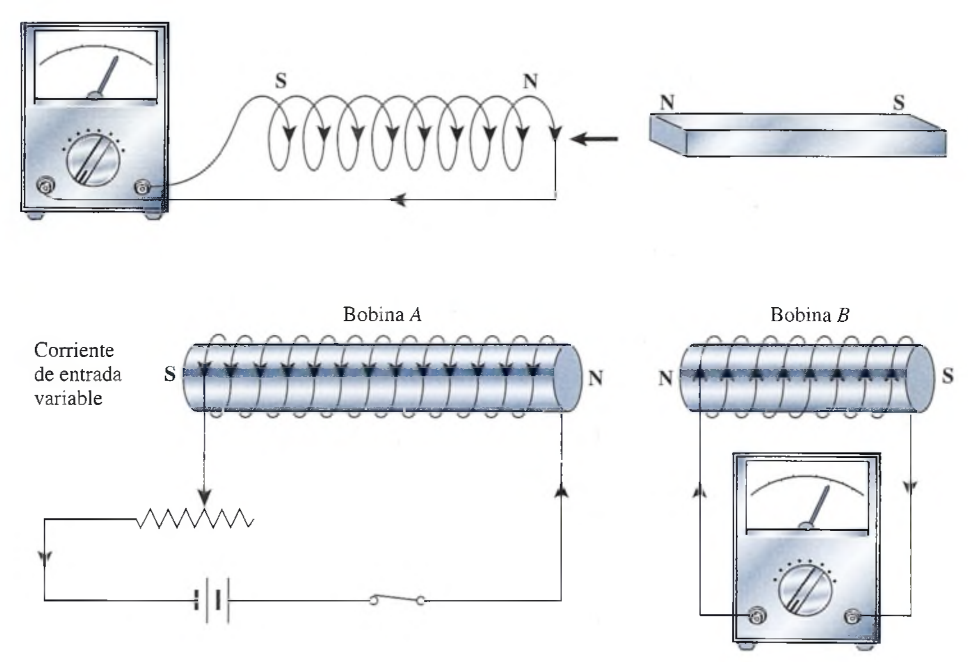


Figura 31.3 (a) Inducción de una corriente por medio del movimiento de un imán que se desplaza dentro de una bobina. (b) Una corriente variable que circula por la bobina A induce una corriente en la bobina B.

2. Al cambiar el área efectiva A en un campo magnético de densidad de flujo **B** constante:

$$\Delta\Phi = B(A) \tag{31.4}$$

Dos ejemplos de densidad de flujo variable a través de una bobina estacionaria de área constante se ilustran en la figura 31.3. En la figura 31.3a, el polo norte de un imán se mueve a través de una bobina circular. La variación de la densidad de flujo induce una corriente en la bobina, como lo indica el galvanómetro. En la figura 31.3b no se induce corriente en la bobina B mientras la corriente en la bobina A sea constante. Sin embargo, mediante una rápida variación de la resistencia en el circuito izquierdo, la densidad de flujo magnético que llega a la bobina B puede aumentar o disminuir. Mientras la densidad de flujo está cambiando se induce una corriente en la bobina de la derecha.

Observe que cuando el polo norte (N) del imán se mueve en la bobina en la figura 31.3a, la corriente fluye en la dirección de las manecillas del reloj si vemos hacia el imán. Por tanto, el extremo de la *bobina* cerca del polo N del imán se vuelve también un polo N (a partir de la regla del pulgar de la mano derecha que se explicó en el capítulo anterior). El imán y la bobina experimentarán una fuerza de repulsión, por lo cual será necesario ejercer una fuerza para juntarlos. Si se extrae el imán de la bobina, existirá una fuerza de atracción que hace necesario ejercer una fuerza para separarlos. En la sección 31.3 se verá que tales fuerzas son una consecuencia natural de la conservación de la energía.

Ejemplo 31.1

Una bobina de alambre que tiene un área de 2×10^{-3} m^2 se coloca en una región de densidad de flujo constante igual a 0.65 T. En un intervalo de 0.003 s, la densidad de flujo aumenta a 1.4 T. Si la bobina consta de 50 espiras de alambre, ¿cuál es la fem inducida?

Plan: En este caso, el área que el flujo penetra no cambia, y toda la fem inducida es producida por un campo **B** variable. Si consideramos que el cambio en el flujo es producto del área y del cambio en **B**, podemos determinar el cambio en el flujo y usarlo para calcular la fem inducida a partir de la ley de Faraday.

Solución: Primero calcularemos el cambio en el flujo.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= (\Delta B)A = (B_f - B_0)A \\ &= (1.4\text{ T} - 0.65\text{ T})(2 \times 10^{-3}\text{ m}^2) \\ &= 1.50 \times 10^{-3}\text{ Wb}\end{aligned}$$

Para determinar la fem inducida, sustituimos este cambio en la ecuación (31.1):

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{-N\,\Delta\Phi}{\Delta t} \\ &= \frac{-(20\text{ espiras})(1.5 \times 10^{-3}\text{ Wb})}{0.003\text{ s}} = -10\text{ V}\end{aligned}$$

La fem negativa indica oposición al flujo *en aumento*.

La segunda forma general en la que puede cambiar el flujo acoplado a un conductor es haciendo variar el área efectiva penetrada por el flujo. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

Ejemplo 31.2

Una bobina cuadrada, que mide 20 cm de un lado y consta de 16 espiras de alambre, está colocada en forma perpendicular a un campo **B** de densidad de flujo de 0.8 T. Si la bobina se gira hasta que su plano es paralelo al del campo en un tiempo de 0.2 s, ¿cuál es la fem media inducida?

Plan: Calcularemos el área de la bobina; observe que el campo **B** de 0.8 **T** permanece constante. El cambio en el flujo es el producto del cambio en el área (de su valor original a cero) por el cambio constante **B**. La fem puede, por tanto, calcularse como antes.

Solución: El área de la espira cuadrada es el cuadrado de cualquier lado. Por tanto,

$$A = (0.2\text{m}^2) = 0.04\text{ m}^2$$

Esta vez, el cambio en el flujo se debe al área variable.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= B(\Delta A) = B(A_f - A_0) \\ &= (0 - 0.04\text{ m}^2)(0.8\text{ T}) \\ &= -0.032\text{ Wb}\end{aligned}$$

El signo negativo indica que el flujo está *disminuyendo*. La fem inducida es

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{-N\,\Delta\Phi}{\Delta t} \\ &= \frac{-(16\text{ espiras})(-0.032\text{ Wb})}{0.2\text{ s}} = 2.56\text{ V}\end{aligned}$$

Observe que el flujo *en disminución* ha resultado en una fem *positiva*. Esto es necesario para conservar la energía, como veremos más adelante.

31.2 Fem inducida por un conductor en movimiento

Otro ejemplo de un área que varía en un campo **B** constante se ilustra en la figura 31.4. Imagine que un conductor en movimiento de longitud L se desliza a lo largo de un conductor estacionario en forma de U con una velocidad v. El flujo magnético que penetra la espira

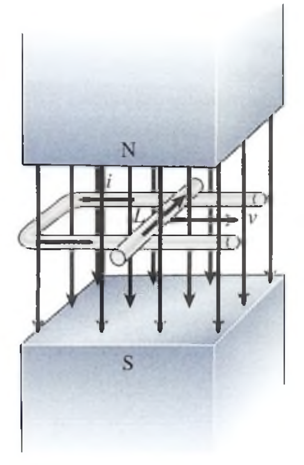


Figura 31.4 La fem inducida en un conductor de longitud L se mueve con una velocidad v perpendicular a un campo magnético $\mathbf{B}$.

aumenta a medida que el área de la espira aumenta. En consecuencia, se induce una fem en el conductor en movimiento, y circula una corriente por la espira.

Se puede entender el origen de la fem recordando que una carga en movimiento en un campo magnético experimenta una fuerza que se calcula con esta expresión:

$$F = qvB$$

Por ejemplo, en la figura 31.4 las cargas libres en el conductor se mueven hacia la derecha a través de un campo magnético dirigido hacia abajo. La fuerza magnética $\mathbf{F}$ que actúa sobre las cargas hace que se muevan a través de la longitud L del alambre en una dirección determinada por la regla de la mano derecha (alejándose del lector para la corriente convencional). El trabajo por unidad de carga representa la fem inducida, expresada por

$$\mathcal{E} = \frac{\text{trabajo}}{q} = \frac{FL}{q} = \frac{qvBL}{q}$$
$$= BLv \qquad \textbf{(31.5)}$$

Si la velocidad v del alambre en movimiento tiene una dirección que forma un ángulo θ con el campo $\mathbf{B}$ es necesaria una forma más general para la ecuación (31.5):

$$\mathcal{E} = BLv \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(31.6)}$$

Ejemplo 31.3

Un alambre de 0.2 m de longitud se mueve a una velocidad constante de 4 m/s en una dirección que forma un ángulo de 40° respecto a la densidad de flujo magnético, la cual es de 0.5 T. Calcule la fem inducida.

Solución: Al sustituir directamente en la ecuación (31.6) se obtiene

$$\mathcal{E} = (0.5 \text{ T})(0.2 \text{ m})(4 \text{ m/s})(\operatorname{sen} 40°)$$
$$= 0.257 \text{ V}$$

El signo menos no aparece en la ecuación (31.6) porque la dirección de la fem inducida es la misma que la dirección de la fuerza magnética y se realiza trabajo sobre la carga en movimiento.

31.3 Ley de Lenz

En todos los estudios acerca de los fenómenos físicos hay un principio que sirve de guía y que se destaca sobre todos los demás: el *principio de la conservación de la energía*. No puede existir una fem sin una causa. Siempre que una corriente inducida produce calor o realiza un trabajo mecánico, la energía necesaria debe provenir del trabajo efectuado para inducir la corriente. Recuerde el ejemplo estudiado en la figura 31.3a. El polo norte del imán introducido en una bobina induce una corriente que a su vez origina otro campo magnético. El segundo campo produce una fuerza que se opone a la fuerza original. Si se retira el imán se crea una fuerza que se opone a la retirada del imán. Lo anterior ilustra la ***ley de Lenz:***

Ley de Lenz: Una corriente inducida fluirá en una dirección tal que por medio de su campo magnético se opondrá al movimiento del campo magnético que la produce.

Cuanto más trabajo se realiza al mover el imán en la bobina, mayor será la corriente inducida y, por tanto, mayor la fuerza de resistencia. Éste era el resultado esperado a partir de la ley de la conservación de la energía. Para producir una corriente más intensa se debe realizar una mayor cantidad de trabajo.

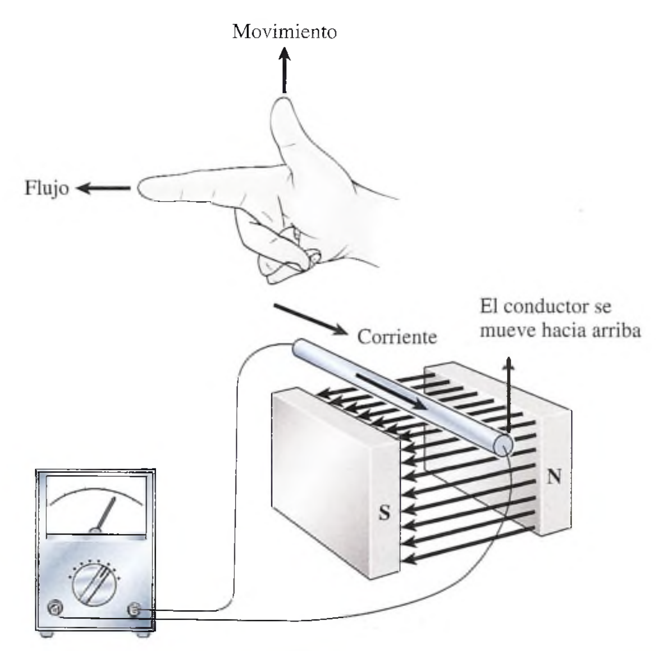


Figura 31.5 Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la corriente inducida. Esta regla también se conoce como *regla de Fleming*.

La dirección de la corriente inducida en un conductor recto que se mueve a través de un campo magnético se puede determinar por la ley de Lenz. Sin embargo, es más fácil usar una modificación de la regla de la mano derecha, presentada en el capítulo 29, para determinar la fuerza en una carga en movimiento. Este método, conocido como la ***regla de Fleming***, se ilustra en la figura 31.5.

Regla de Fleming: Si el pulgar, el dedo índice y el dedo medio de la mano derecha se colocan en ángulo recto entre sí, apuntando con el pulgar en la dirección en la que se mueve el conductor, y apuntando con el índice en la dirección del campo (N a S), el dedo medio apuntará en la dirección convencional de la corriente inducida.

La regla de Fleming es fácil de aplicar y útil para estudiar las corrientes inducidas por un generador simple. A veces los estudiantes recuerdan esta regla memorizando *movimiento-flujo-corriente*. Éstas son las direcciones indicadas por el pulgar, el índice y el dedo medio, respectivamente.

31.4 El generador de ca

Un generador eléctrico convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Hemos visto que se induce una fem en un conductor cuando éste experimenta un cambio en el acoplamiento inductivo. Cuando el conductor forma un circuito cerrado, se puede detectar en él una corriente inducida. En un generador, una bobina de alambre se hace girar dentro de un campo magnético, y la corriente inducida se transmite mediante alambres a grandes distancias del lugar donde se originó.

La figura 31.6 muestra la construcción de un generador simple. Básicamente está formado por tres componentes: un ***imán inductor,*** una ***armadura*** y ***anillos colectores*** con *escobillas.* El inductor puede ser un imán permanente o un electroimán. La armadura del generador de la figura 31.6 consta de una sola espira de alambre suspendido entre los polos del imán inductor. Un par de anillos colectores se conectan a los dos extremos de la espira; por tanto, dichos anillos giran junto con la espira cuándo ésta gira en el campo magnético. La corriente inducida se extrae del sistema mediante escobillas de grafito que se montan sobre cada uno de los anillos. La energía mecánica se suministra al generador al girar la armadura en el campo magnético. La energía eléctrica se genera en forma de una corriente inducida.

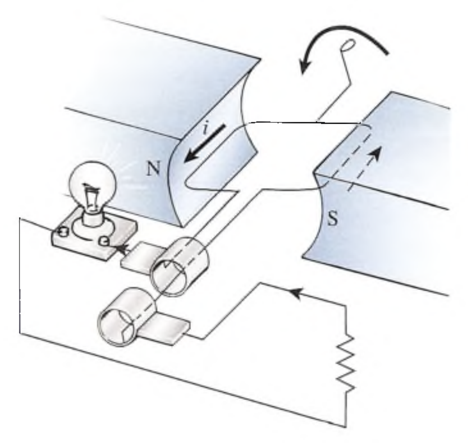


Figura 31.6 El generador de ca.

La dirección de la corriente inducida debe obedecer la regla de Fleming de *movimiento-flujo-corriente*. En la figura 31.6, el movimiento hacia abajo del segmento de alambre de la izquierda cruza un flujo magnético dirigido de izquierda a derecha. La corriente inducida, por tanto, tiene una dirección hacia los anillos colectores. Mediante un razonamiento similar se demuestra que la corriente en el segmento de la derecha de la espira, que se mueve hacia arriba, se alejará de los anillos colectores.

Para comprender cómo funciona un ***generador de ca***, es necesario seguir el movimiento de la espira durante una rotación completa, observando la corriente que se genera en el curso de dicha rotación. La figura 31.7 muestra cuatro posiciones de bobina al girar y la dirección de la corriente que se suministra a las escobillas en cada caso. Suponga que la espira se mueve en forma mecánica en una contrasentido a las manecillas del reloj. En la figura 31.7a la espira está en posición

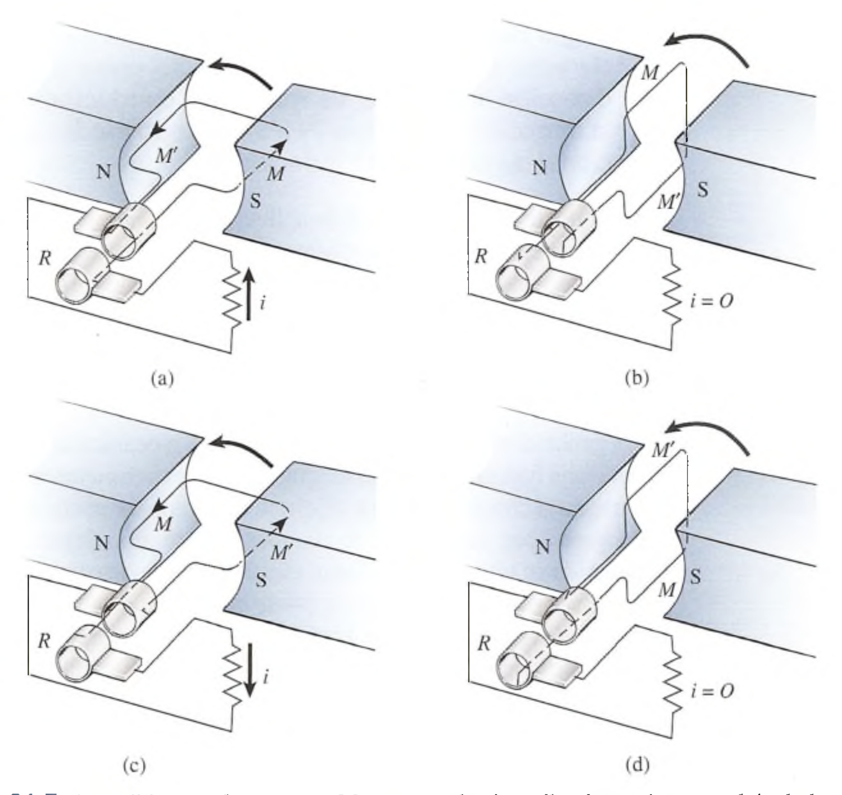


Figura 31.7 A medida que el segmento M se mueve hacia arriba, la corriente se aleja de los anillos: conforme se mueve hacia abajo, la corriente va hacia los anillos. De esta manera, la espira que gira produce una corriente alterna.

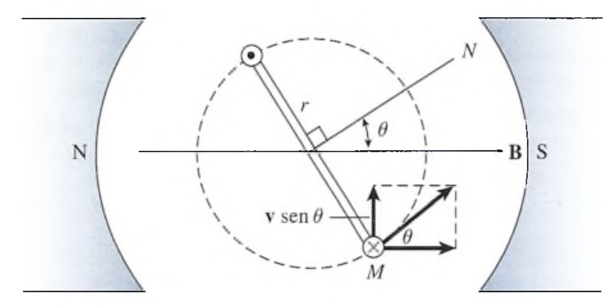


Figura 31.8 Cálculo de la fem inducida.

horizontal, con el lado M de cara al polo sur (S) del imán. En este punto se suministra una corriente máxima en la dirección indicada. En la figura 31.7b, la espira está en posición vertical, con el lado M hacia arriba. En este punto una corriente máxima se libera en la dirección que se señala. En la figura 31.7b la espira es vertical, con el lado M apuntando hacia arriba. Al llegar a este punto no hay líneas de flujo que cortar, y la corriente inducida desciende hasta cero. Cuando la espira vuelve a la posición horizontal, como aparece en la figura 31.7c, el lado M ve al polo norte (N) del imán. Por consiguiente, la corriente entregada al anillo colector R ha cambiado de dirección. Una corriente inducida fluye a través del resistor externo en dirección opuesta a la que experimentó con anterioridad. En figura 31.7d la espira queda de nuevo en posición vertical, pero ahora con el lado M hacia abajo. No se cortan líneas de flujo, y la corriente inducida de nuevo es cero. Luego, la espira vuelve a su posición horizontal como en la figura 31.7a y el ciclo se repite. Por tanto, la corriente suministrada por un generador de este tipo alterna periódicamente, cambiando de dirección dos veces por cada rotación.

La fem generada en cada segmento de la espira giratoria debe obedecer la relación expresada en la ecuación 31.6:

$$\mathscr{E} = BLv \text{ sen } \theta$$

donde v es la velocidad de un segmento de alambre de longitud L en movimiento en un campo magnético de densidad de flujo **B**. La dirección de la velocidad v respecto al campo **B** en cada instante se indica mediante el ángulo θ. Considere el segmento M de la espira giratoria cuando alcanza la posición que indica la figura 31.8. La fem *instantánea* en esta posición se calcula por la ecuación (31.6). Si la espira gira en un círculo de radio r, la velocidad instantánea v se puede determinar partiendo de

$$v = \omega r$$

donde ω es la velocidad angular en radianes por segundo. Al sustituir en la ecuación (31.6) se obtiene la fem instantánea

$$\mathscr{E} = BL\omega r \text{ sen } \theta \quad \textbf{(31.7)}$$

Una fem idéntica se induce en el segmento de alambre opuesto M, y no se genera ninguna fem *neta* en los otros segmentos. Esto significa que la fem instantánea total es igual al doble del valor obtenido mediante la ecuación (31.7), por lo tanto,

$$\mathscr{E}_{\text{inst}} = 2BL\omega r \text{ sen } \theta \quad \textbf{(31.8)}$$

pero el área A de la espira es

$$A = \text{L} \times 2r$$

y la ecuación (31.8) puede simplificarse aún más:

$$\mathscr{E}_{\text{inst}} = NBA\omega \text{ sen } \theta \quad \textbf{(31.9)}$$

donde N es el número de espiras del alambre.

La ecuación (31.9) expresa un importante principio relacionado con el estudio de las corrientes alternas:

> Si la armadura gira con una velocidad angular constante en un campo magnético constante, la magnitud de la fem inducida varía en forma sinusoidal respecto al tiempo.

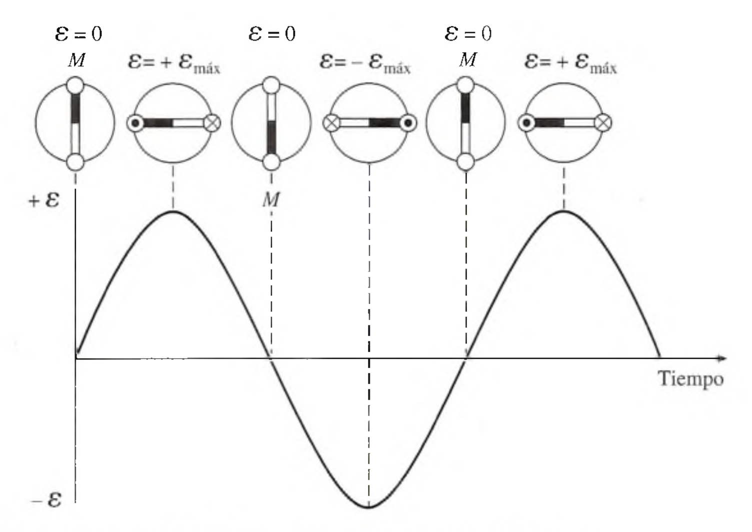


Figura 31.9 Variación sinusoidal de la fem inducida en función del tiempo.

Este hecho se ilustra en la figura 31.9. La fem varía de un valor máximo cuando $\theta = 90°$ a un valor cero cuando $\theta = 0°$. La máxima fem instantánea es, por tanto,

$$\mathscr{E}_{\text{máx}} = NBA\omega \tag{31.10}$$

puesto que sen 90° = 1. Si se establece la ecuación (31.9) en términos de la fem máxima, escribimos

$$\mathscr{E}_{\text{inst}} = \mathscr{E}_{\text{máx}} \text{ sen } \theta \tag{31.11}$$

Para notar la variación explícita de la fem generada respecto al tiempo, debemos recordar que

$$\theta = \omega t = 2\pi f t$$

donde f es el número de rotaciones por segundo que realiza la espira. Es decir, podemos expresar la ecuación (31.11) en la siguiente forma:

$$\mathscr{E}_{\text{inst}} = \mathscr{E}_{\text{máx}} \text{ sen } 2\pi f t \tag{31.12}$$

Ejemplo 31.4

La armadura de un generador de ca simple consta de 90 espiras de alambre, cada una con un área de 0.2 m^2. La armadura gira con una frecuencia de 60 rev/s en un campo magnético constante de una densidad de flujo de 10^{-3} T. ¿Cuál es la máxima fem generada?

Plan: La fem máxima ocurre cuando la función seno es igual a 1 en la ecuación (31.9). Convertiremos la frecuencia de rev/s a rad/s y la sustituiremos para calcular la fem generada.

Solución: Recuerde que $\omega = 2\pi f$, así que la frecuencia angular se determina como sigue:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(60 \text{ rev/s})\\ &= 377 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor y los otros parámetros conocidos en la ecuación (31.10), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\text{máx}} &= NBA\omega\\ &= (90 \text{ espiras})(3 \times 10^{-3} \text{ T})(0.2 \text{ m}^2)(377 \text{ rad})\\ &= 20.4 \text{ V}\end{aligned}$$

Puesto que la corriente inducida es proporcional a la fem inducida, por la ley de Ohm, la corriente inducida también variará sinusoidalmente de acuerdo con

$$i_{\text{inst}} = i_{\text{máx}} \text{ sen } 2\pi ft \qquad \textbf{(31.13)}$$

La corriente máxima se presenta cuando la fem inducida es máxima. La variación sinusoidal es similar a la representada en la gráfica de la figura 31.9.

La unidad para la frecuencia en el SI es el *hertz* (Hz), que se define como un ciclo por segundo.

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Por tanto, una corriente alterna de 60 ciclos por segundo tiene una frecuencia de 60 Hz.

31.5 El generador de cd

Un generador simple de ca se puede convertir fácilmente en un generador de cd sustituyendo los anillos colectores por un conmutador de anillo partido, como se observa en la figura 31.10. La operación es justamente la inversa de la que se analizó anteriormente para un motor de cd (capítulo 30). En el motor, la corriente eléctrica origina un momento de torsión externo. En el ***generador de cd,*** un momento de torsión externo origina una corriente eléctrica. El ***conmutador*** invierte las conexiones de las escobillas dos veces por cada revolución. Como resultado, la corriente pulsa pero nunca cambia de dirección. La fem de un generador de este tipo varía con el tiempo, como muestra la figura 31.11. Observe que la fem está siempre en la dirección positiva, pero que se eleva hasta un valor máximo y luego decae a cero dos veces por cada rotación completa. Los generadores de cd de uso práctico se diseñan con numerosas bobinas colocadas en varios planos, de tal modo que la fem es mayor y casi constante.

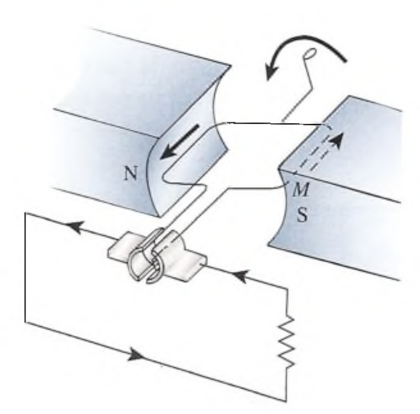


Figura 31.10 Un ejemplo de un generador de cd simple. Verifique la dirección de la corriente inducida a medida que el segmento M se mueve hacia arriba en el campo **B** dirigido a la derecha.

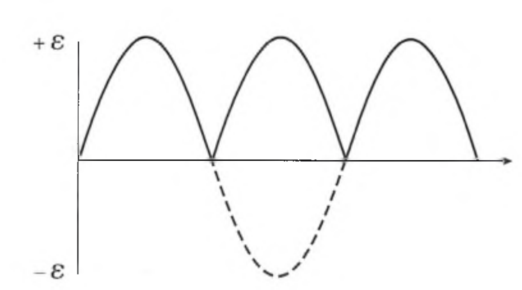


Figura 31.11 Fem pulsante producida por un generador de cd.

31.6 Fuerza contraelectromotriz en un motor

En un motor eléctrico, un momento de torsión magnético provoca que una espira, por la cual fluye corriente, gire en un campo magnético constante. Acabamos de estudiar que una bobina que gira en un campo magnético inducirá una fem que se opone a la causa que la origina. Esto es cierto incluso en el caso de que una corriente ya estuviera fluyendo por la espira. Por tanto, *cualquier motor es al mismo tiempo un generador*. De acuerdo con la ley de Lenz, una fem inducida de ese tipo debe oponerse a la corriente que se suministra al motor. Por esta razón, a la fem inducida en un motor se le llama ***fuerza contraelectromotriz.***

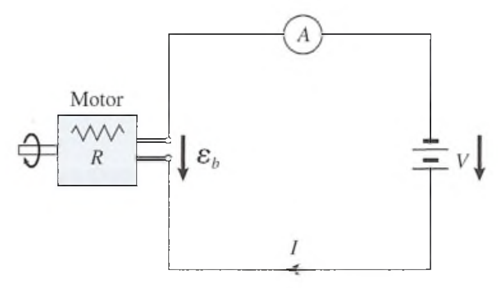


Figura 31.12 Fuerza contraelectromotriz en un motor de cd.

El efecto de una fuerza contraelectromotriz es reducir el voltaje neto que se suministra a las bobinas de la armadura del motor. Considere el circuito que muestra la figura 31.12. El voltaje neto que se suministra a las bobinas de la armadura es igual al voltaje aplicado V menos el voltaje inducido $\mathcal{E}_b$.

Voltaje aplicado − voltaje inducido = voltaje neto

De acuerdo con la ley de Ohm, el voltaje neto a través de las bobinas de la armadura es igual al producto de la resistencia R de la bobina por la corriente I. Simbólicamente se escribe

$$V - \mathcal{E}_b = IR \tag{31.14}$$

La ecuación (31.14) nos indica que la corriente que fluye por un circuito incluido en un motor está determinada por la magnitud de la fuerza contraelectromotriz. Por supuesto, la magnitud de esta fem inducida depende de la rapidez de rotación de la armadura. Esto se puede demostrar experimentalmente si se conectan en serie un motor, un amperímetro y una batería, como se muestra en la figura 31.13. Cuando la armadura está girando, se registra una corriente baja. La fuerza contraelectromotriz reduce el voltaje efectivo. Si se detiene el funcionamiento del motor haciendo que la armadura permanezca estacionaria, la fuerza contraelectromotriz disminuye hasta cero. El incremento del voltaje neto da por resultado una mayor corriente en el circuito y puede provocar un sobrecalentamiento del motor e incluso hacer que éste se queme.

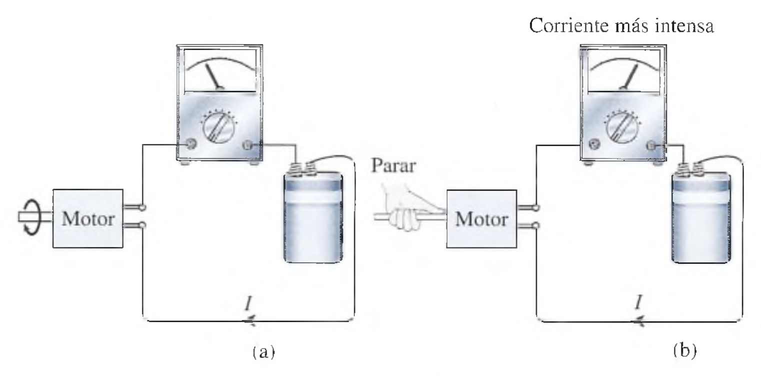


Figura 31.13 Demostración de la existencia de una fuerza contraelectromotriz en un motor de cd. Parar el motor reduce la fuerza contraelectromotriz a cero y esto aumenta la corriente del circuito.

31.7 Tipos de motores

Los motores de cd se clasifican de acuerdo con la forma en que están conectadas las bobinas y la armadura. Cuando las bobinas de la armadura y las bobinas del campo se conectan en serie, como se observa en la figura 31.14, se dice que el motor está ***devanado en serie***. En este tipo de motor, la corriente suministra energía tanto al devanado de campo como al de la armadura. Cuando la armadura gira lentamente, la fuerza contraelectromotriz es pequeña y la corriente es grande. En consecuencia, se desarrolla un gran momento de torsión a bajas rapideces.

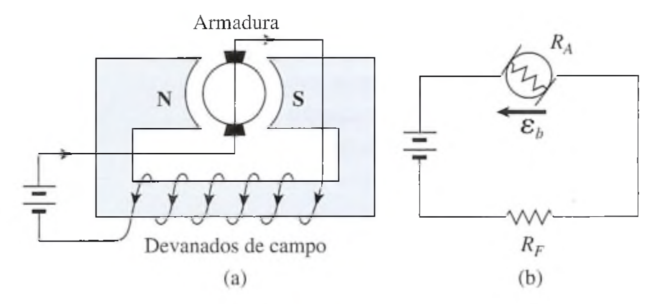


Figura 31.14 (a) Motor de cd devanado en serie. (b) Diagrama esquemático que muestra cómo la armadura y su resistencia están conectadas en serie con la resistencia de los devanados del campo. Advierta la dirección de la fuerza contraelectromotriz.

En un motor ***devanado en derivación,*** el devanado del campo y el de la armadura están conectados en paralelo, como se ilustra en la figura 31.15. El voltaje total se aplica a través de ambos devanados. La principal ventaja de un motor devanado en derivación es que produce un momento de torsión más constante para un amplio intervalo de rapideces. Sin embargo, el momento de torsión inicial es generalmente menor que el necesario para un motor similar devanado en serie.

En algunas aplicaciones, el devanado de campo está dividido en dos partes, una de las cuales se conecta en serie con la armadura y la otra en paralelo. Un motor de ese tipo se llama ***motor compuesto***. El momento de torsión que produce un motor compuesto queda comprendido entre los que presentan los motores devanados en serie y en derivación.

En *motores de imán permanente* no es necesario aplicar una corriente para crear el campo. Estos motores tienen un momento de torsión con características análogas a las de los motores devanados en derivación.

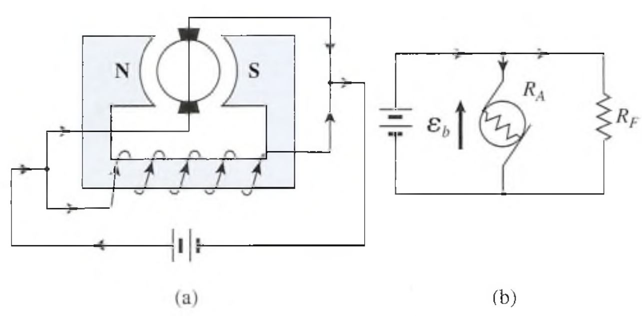


Figura 31.15 (a) Motor de cd con devanado en derivación. (b) Diagrama esquemático que muestra cómo la armadura y su resistencia están conectadas en serie con la resistencia de los devanados del campo. Advierta la dirección de la fuerza contraelectromotriz.

Ejemplo 31.5

Un motor de cd en derivación de 120 V tiene una resistencia en la armadura de 3 Ω y una resistencia de campo de 260 Ω. Cuando se opera el motor a su máxima rapidez, la corriente total es de 3 A. (a) ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz del motor cuando su rapidez es máxima? (b) Determine la corriente en el motor en el momento en que se cierra el interruptor (la corriente de arranque).

Plan: Cuando estudiamos el diagrama esquemático (figura 31.15b) para el motor devanado en derivación, vemos que la fuerza contraelectromotriz ocurre en los devanados de la armadura. Por tanto, necesitamos ver cómo se divide la corriente total entre los devanados de campo y los devanados de armadura para obtener la corriente I_A. Por tanto, podemos escribir las ecuaciones de voltaje para determinar la fuerza contraelectromotriz de modo que el motor opere a toda rapidez. La corriente de arranque es más fácil de determinar ya que la fuerza contraelectromotriz es cero en ese instante.

Solución (a): Para determinar la fuerza contraelectromotriz, hay que considerar cómo se divide la corriente entre los devanados de la armadura y del campo. La corriente I_F en los devanados del campo se puede calcular escribiendo la ecuación del voltaje para la malla exterior de la figura 31.15b:

$$V = I_F R_F$$

de la que se obtiene

$$I_F = \frac{V}{R_F} = \frac{120\ \text{V}}{260\ \Omega} = 0.46\ \text{A}$$

La corriente en los devanados de la armadura es, por tanto,

$$I_A = 3\ \text{A} - 0.46\ \text{A} = 2.54\ \text{A}$$

Ahora, la ecuación del voltaje para la malla que contiene la batería y la armadura es

$$V - \mathscr{E}_b = I_A R_A$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_b &= V - I_A R_A \\ &= 120\ \text{V} - (2.54\ \text{A})(3\ \Omega) \\ &= 120\ \text{V} - 7.62\ \text{V} = 112.4\ \text{V} \end{aligned}$$

Solución (b): En el instante en que el interruptor se cierra, la armadura todavía no empieza a girar, por lo que $\mathscr{E}_b = 0$. En este caso la corriente en la armadura será

$$I_A = \frac{V}{R_A} = \frac{120\ \text{V}}{3\ \Omega} = 40\ \text{A}$$

La corriente en el campo aún es de 0.46 A, y la corriente total de arranque es

$$\begin{aligned} I &= I_A + I_F \\ &= 40\ \text{A} + 0.46\ \text{A} = 40.5\ \text{A} \end{aligned}$$

31.8 El transformador

Anteriormente se hizo notar que cuando una corriente cambia en una espira de alambre se induce una corriente en una espira cercana. La corriente inducida se origina del campo magnético cambiante asociado con la corriente que varía. La corriente alterna tiene una clara ventaja sobre la corriente directa y es el efecto inductivo de la corriente que varía constantemente en magnitud y en dirección. La aplicación más frecuente de este principio está representada por el ***transformador***, que es un dispositivo que aumenta o disminuye el voltaje en un circuito de ca.

Un transformador simple se puede observar en la figura 31.16. Tiene tres partes esenciales: (1) una bobina primaria conectada a una fuente de ca, (2) una bobina secundaria y (3) un núcleo de hierro dulce. Al aplicar una corriente alterna a través de la bobina primaria, las líneas de flujo magnético se mueven de un lado a otro a través del núcleo de hierro, induciendo una corriente alterna en la bobina secundaria.

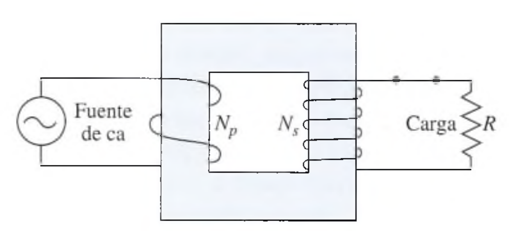


Figura 31.16 Transformador.

Se establece un flujo magnético que cambia constantemente en el núcleo del transformador y pasa a través de las bobinas primaria y secundaria. La fem $\mathscr{E}_p$ inducida en la bobina primaria se obtiene por medio de

$$\mathscr{E}_p = -N_p \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{31.15}$$

donde N_p = número de espiras primarias
$\Delta\Phi/\Delta t$ = rapidez con que cambia el flujo magnético

En forma similar, la fem $\mathscr{E}_s$ inducida en la bobina secundaria es

$$\mathscr{E}_s = -N_s \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{31.16}$$

donde N_s es el número de espiras en la bobina secundaria. Puesto que el mismo flujo cambia con la misma rapidez en cada una de las bobinas, se puede dividir la ecuación (31.15) entre la ecuación (31.16) para obtener

$$\frac{\mathscr{E}_p}{\mathscr{E}_s} = \frac{N_p}{N_s} \tag{31.17}$$

$$\frac{\textit{Voltaje primario}}{\textit{Voltaje secundario}} = \frac{\textit{Espiras primarias}}{\textit{Espiras secundarias}}$$

El voltaje inducido está en proporción directa al número de espiras. Si la razón de las espiras secundarias N_s respecto a las espiras primarias N_p varía, entonces un voltaje de entrada (primario) puede suministrar cualquier voltaje de salida (secundario) deseado. Por ejemplo, si en la bobina secundaria hay 40 veces más espiras que en la bobina primaria, un voltaje de entrada de 120 V incrementará el voltaje de salida en la bobina secundaria hasta $40 \times 120 = 4800$ V. A un transformador que produce un voltaje de salida mayor se le llama ***transformador elevador.***

Se puede construir un ***transformador reductor*** haciendo que el número de espiras primarias sea mayor que el número de espiras secundarias. Si se usa un transformador reductor se obtiene un voltaje de salida más bajo.

El ***rendimiento de un transformador*** se define como la razón de la potencia de salida respecto a la potencia de entrada. Recuerde que la potencia eléctrica es igual al producto del voltaje por la corriente, así que podemos escribir el rendimiento E de un transformador como

$$E = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{\mathscr{E}_s i_s}{\mathscr{E}_p i_p} \tag{31.18}$$

donde i_p e i_s son las corrientes de las bobinas primaria y secundaria, respectivamente. La mayoría de los transformadores eléctricos se diseñan con sumo cuidado con el propósito de lograr un rendimiento extremadamente alto, en general por arriba del 90 por ciento.

Es importante darse cuenta de que no se obtiene ninguna ganancia de potencia como resultado de la acción del transformador. Cuando el voltaje se eleva la corriente debe disminuir, de modo que el producto $\mathscr{E}i$ no aumente. Para percibir esto con más claridad, supongamos que un determinado transformador tiene un rendimiento del 100 por ciento. En el caso de este transformador perfecto, la ecuación (31.18) se vuelve

$$\mathscr{E}_s i_s = \mathscr{E}_p i_p$$

o bien,

$$\frac{i_p}{i_s} = \frac{\mathscr{E}_s}{\mathscr{E}_p} \tag{31.19}$$

Esta ecuación muestra claramente la relación inversa entre la corriente y el voltaje inducido.

Ejemplo 31.6 Un generador de ca que suministra 20 A a 6000 V está conectado a un transformador elevador. ¿Cuál es la corriente de salida a 120 000 V si el rendimiento del transformador es del 100 por ciento?

Plan: Para un rendimiento de 100 por ciento, la razón de la corriente primaria a la corriente secundaria es la misma que la razón del voltaje *secundario* al voltaje *primario*. La sustitución de valores conocidos nos permite encontrar la salida, o corriente secundaria.

Solución: A partir de la ecuación (31.19), escribimos

$$\frac{i_p}{i_s} = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} \quad \text{o} \quad i_s = \frac{\mathcal{E}_p i_p}{\mathcal{E}_s}$$

$$i_s = \frac{(6\,000 \text{ V})(20 \text{ A})}{(120\,000 \text{ V})} = 1.0 \text{ A}$$

Observe en el ejemplo anterior que la corriente se *redujo* de 20 a 1 A, mientras que el voltaje se *incrementó* 20 veces. Puesto que las pérdidas por calor en las líneas de transmisión varían directamente con el cuadrado de la corriente (i^2R), esto significa que la potencia eléctrica se puede transmitir a través de largas distancias sin que se produzcan pérdidas significativas. Cuando la potencia eléctrica ha llegado a su destino, se utilizan transformadores reductores para suministrar a los usuarios la corriente apropiada, a voltajes más bajos.

Resumen y repaso

Resumen

La inducción electromagnética permite la producción de una corriente eléctrica en un alambre conductor. Éste es el principio de operación básico de muchos dispositivos eléctricos. El conocimiento de los conceptos que resumiremos a continuación es necesario para la mayoría de las aplicaciones en las que se usa corriente alterna.

- Un flujo magnético que cambia a razón de 1 Wb/s induce una fem de 1 V por cada espira de un conductor. En forma simbólica,

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad \textit{Fem inducida}$$

- Las dos formas principales en las que cambia el flujo son:

$$\Delta\Phi = \Delta BA \qquad \Delta\Phi = B\,\Delta A$$

- La fem inducida por la presencia de un alambre de longitud L al moverse a una velocidad v con un ángulo θ dentro de un campo **B** se calcula mediante

$$\mathscr{E} = BLv \text{ sen } \theta \qquad \textit{Fem producida por un alambre en movimiento}$$

- Según la *ley de Lenz*, la corriente inducida debe fluir en la dirección que produzca una fuerza magnética que se oponga a la fuerza causante del movimiento.
- *Regla de Fleming:* Si el pulgar, el dedo índice y el dedo medio de la mano derecha se mantienen en ángulos rectos entre sí, con el pulgar apuntando en la dirección en que se mueve el alambre y el dedo índice apuntando en la dirección del campo (N a S), el dedo medio apuntará en la dirección de la corriente convencional inducida (*movimiento-flujo-corriente*).
- La fem instantánea generada por una bobina de N espiras que se mueve con una velocidad angular ω o una frecuencia f es

$$\mathscr{E}_{\text{inst}} = NBA\omega \text{ sen } \omega t \qquad \mathscr{E}_{\text{inst}} = 2\pi fNBA \text{ sen } 2\pi ft$$

- La fem máxima se produce cuando el seno tiene un valor de 1. Así,

$$\mathscr{E}_{\text{máx}} = NBA\omega \qquad \mathscr{E}_{\text{inst}} = \mathscr{E}_{\text{máx}} \text{ sen } 2\pi ft$$

- Puesto que la corriente inducida es proporcional a $\mathscr{E}$, tenemos también que

$$i_{\text{inst}} = i_{\text{máx}} \text{ sen } 2\pi ft \qquad \textit{Corriente instantánea}$$

- La fuerza contraelectromotriz en un motor es el voltaje inducido por el cual se produce una reducción en el voltaje neto suministrado a un circuito

$$\textit{voltaje aplicado} - \textit{fuerza contraelectromotriz inducida} = \textit{voltaje neto}$$

$$V - \mathscr{E}_b = IR \qquad \mathscr{E}_b = V - IR$$

- Para un transformador que tiene N_p espiras primarias y N_s espiras secundarias,

$$\frac{\textit{Voltaje primario}}{\textit{Voltaje secundario}} = \frac{\textit{espiras primarias}}{\textit{espiras secundarias}} \qquad \frac{\mathscr{E}_p}{\mathscr{E}_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

- La eficiencia de un transformador es

$$E = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{\mathscr{E}_p i_p}{\mathscr{E}_s i_s} \qquad \textit{Eficiencia del transformdor}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

31.1. Comente los diversos factores que influyen en la magnitud de una fem inducida en una determinada longitud de alambre que se mueve dentro de un campo magnético.

31.2. Un imán de barra se sostiene en posición vertical con el polo norte apuntando hacia arriba. Si se deja caer una bobina de circuito cerrado sobre el extremo

norte del imán, ¿qué dirección tendrá la corriente inducida, vista desde arriba del imán?

31.3. Una espira circular se encuentra suspendida de manera que su plano es perpendicular a un campo magnético que se dirige de izquierda a derecha. La espira se extrae del campo, moviéndola hacia arriba rápidamente. ¿Qué dirección tendrá la corriente inducida, si la vemos a lo largo de la dirección del campo? ¿Se requerirá alguna fuerza para retirar la espira del campo?

31.4. Una bobina de inducción es básicamente un transformador que funciona con corriente directa. Como muestra la figura 31.17, la bobina de inducción consiste en unas cuantas espiras primarias arrolladas sobre un núcleo de hierro y muchas espiras secundarias devanadas alrededor de las primarias. La corriente de una batería magnetiza el núcleo, de manera que atrae a la armadura del vibrador y abre el circuito a intervalos periódicos. Cuando se abre el circuito, el campo se anula y una gran fem es inducida en la bobina secundaria, produciéndose así una chispa en las terminales de salida. ¿Cuál es la función del capacitor *C* conectado en paralelo con el vibrador? Explique cómo se usa una bobina de inyección en el sistema de encendido de un automóvil.

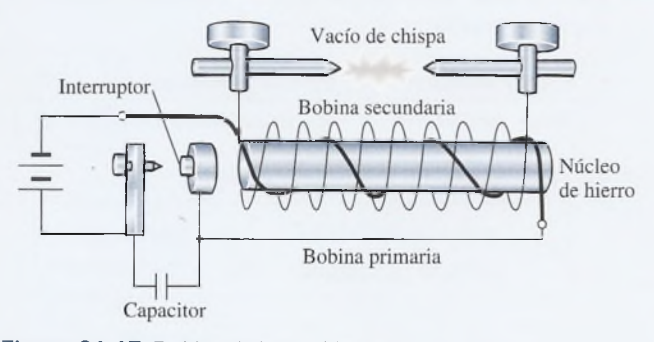


Figura 31.17 Bobina de inducción.

31.5. Explique claramente cómo puede convertirse un generador de ca en un generador de cd. ¿Cómo convertiría usted un generador de ca en un motor de ca?

31.6. Cuando arranca el motor eléctrico de una planta, un trabajador observa que la intensidad de las luces disminuye momentáneamente. Explique la causa.

31.7. ¿Qué tipo de motor de cd se debe adquirir para operar un malacate utilizado para levantar objetos pesado? ¿Por qué?

31.8. ¿Qué tipo de motor se debe usar para operar un ventilador eléctrico si se desea que el momento de torsión de éste sea uniforme a altas rapideces?

31.9. Explique por qué la presencia de una fuerza contraelectromotriz en un motor ayuda a mantener constante su velocidad. *Sugerencia:* ¿Qué sucede con $\mathscr{E}_b$ e I cuando la velocidad de la armadura aumenta o disminuye?

31.10. Hay tres formas básicas en que se pierde potencia durante la operación de un transformador: (a) pérdidas por la resistencia del alambre, (b) pérdidas por histéresis y (c) pérdidas por corrientes parásitas. (Las *corrientes parásitas* son circuitos de corriente inducida que se forman en la masa de un material magnético como resultado de variaciones en el flujo.) Explique cómo se desperdicia la energía en estos tres procesos.

31.11. Explique por medio de diagramas la forma en que los transformadores permiten transmitir económicamente la corriente eléctrica desde las instalaciones generadoras hasta viviendas localizadas a muchos kilómetros de distancia.

31.12. Un generador de ca produce voltaje alterno de 60 Hz. ¿Cuántos grados de rotación de la armadura corresponden a un cuarto de ciclo?

31.13. ¿Por qué es más barato para las compañías eléctricas suministrar corriente alterna que corriente directa?

31.14. Elabore un breve informe sobre los siguientes temas y explique la función que desempeña en ellos la inducción electromagnética.

a. el betatrón
b. la bobina de inducción
c. el teléfono
d. las corrientes parásitas
e. el generador magnetohidrodinámico
f. la transmisión de energía eléctrica
g. el motor universal
h. el motor de inducción
i. el motor sincrónico

Problemas

Sección 31.2 Fem inducida

31.1. Una bobina de alambre de 8 cm de diámetro tiene 50 espiras y está colocada dentro de campo *B* de 1.8 T. Si el campo *B* se reduce a 0.6 T en 0.002 s, ¿cuál es la fem inducida? Resp. −151 V

31.2. Una bobina cuadrada que tiene 100 espiras con un área de 0.044 m^2 se coloca de modo que su plano sea perpendicular a un campo *B* constante de 4 mT. La bobina gira hasta una posición paralela al campo en un lapso de 0.3 s. ¿Cuál es la fem inducida?

31.3. Una bobina de 300 espiras que se mueve en dirección perpendicular al flujo en un campo magnético uniforme, experimenta un enlace de flujo de 0.23 mWb en 0.002 s. ¿Cuál es la fem inducida? Resp. −34.5 V

31.4. El flujo magnético que enlaza a una espira de alambre cambia de 5 a 2 mWb en 0.1 s. ¿Cuál es el valor promedio de la fem inducida?

31.5. Una bobina de 120 espiras tiene 90 mm de diámetro y su plano está en posición perpendicular a un campo magnético de 60 mT generado por un electroimán cercano. Cuando la corriente del electroimán se interrumpe y el campo desaparece, una fem de 6 V es inducida en la bobina. ¿Cuánto tiempo tarda el campo en desaparecer? Resp. 7.63 ms

31.6. Una bobina de 56 espiras tiene un área de 0.3 m^2. Su plano es perpendicular a un campo magnético de 7 mT. Si ese campo cae a cero en 6 ms, ¿cuál es la fem inducida?

31.7. Un alambre de 0.15 m de longitud se desplaza a una velocidad constante de 4 m/s en una dirección que forma un ángulo de 36° con un campo magnético de 0.4 T. El eje del alambre es perpendicular a las líneas de flujo magnético. ¿Cuál es la fem inducida? Resp. 0.141 V

31.8. Un alambre de 0.2 m se mueve en un ángulo de 28° con respecto a un campo magnético de 8 mT. El alambre está tendido en dirección perpendicular al flujo. ¿Qué velocidad v se requiere para inducir una fem de 60 mV?

Sección 31.4 Generador de ca y Sección 31.5 Generador de cd

31.9. El campo magnético formado por el hueco lleno de aire que hay entre los polos magnéticos y la armadura de un generador eléctrico tiene una densidad de flujo de 0.7 T. La longitud de los alambres de la armadura es 0.5 m. ¿Con cuánta rapidez deben moverse esos alambres para generar una fem máxima de 1.00 V en cada alambre de la armadura? Resp. 2.86 m/s

31.10. Una sola espira de alambre tiene un diámetro de 60 mm y describe 200 rpm en un campo magnético constante de 4 mT. ¿Cuál es la fem máxima generada?

31.11. La armadura de un generador simple tiene 300 espiras de 20 cm de diámetro, en un campo magnético constante de 6 mT. ¿Cuál debe ser la frecuencia de rotación, en revoluciones por segundo, para inducir una fem máxima de 7.00 V? Resp. 19.7 rev/s

31.12. La armadura de un generador de ca está formada por 500 vueltas, cada una con un área de 60 cm^2. La armadura gira con una frecuencia de 3600 rpm en un campo magnético uniforme de 2 mT. ¿Cuál es la frecuencia de la fem alterna? ¿Cuál es el valor máximo de la fem generada?

31.13. En el problema 31.12, ¿cuál es el valor de la fem instantánea en el momento en que el plano de la bobina forma un ángulo de 60° con el flujo magnético? Resp. 1.13 V

31.14. La armadura de un generador de ca simple tiene 100 espiras de alambre, cada una con un radio de 5.00 cm. La armadura gira en un campo magnético constante de 0.06 T. ¿Cuál debe ser la frecuencia de rotación en rpm para generar un voltaje máximo de 2.00 V?

31.15. Una bobina circular tiene 70 espiras cada una con 50 mm de diámetro. Suponga que la bobina gira en torno de un eje perpendicular a un campo magnético de 0.8 T. ¿Cuántas revoluciones por segundo debe describir la bobina para generar una fem máxima de 110 V? Resp. 159.5 rev/s

***31.16.** La armadura de un generador de ca tiene 800 vueltas, cada una con un área de 0.25 m^2. La bobina gira constantemente a 600 rpm en un campo de 3 mT. ¿Cuál es la fem máxima inducida? ¿Cuál es la fem instantánea 0.43 s después que la bobina pasa por una posición de cero fem?

***31.17.** Un resistor de 300 Ω está conectado en serie con un generador de ca cuya resistencia interna es insignificante. La armadura del generador tiene 200 vueltas de alambre de 30 cm de diámetro y gira a 300 rpm en un campo constante de 5 mT. ¿Cuál es la corriente instantánea a través del resistor 0.377 s después de que la bobina pasa por una posición de cero fem? Resp. 4.90 mA

Sección 31.6 Fuerza contraelectromotriz en un motor

31.18. Un motor cd de 120 V usa una corriente de 3.00 A al funcionar y tiene una resistencia de 8.00 Ω. ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz durante la operación del motor y cuál es la corriente de arranque?

31.19. La bobina de la armadura del motor de arranque de un automóvil tiene 0.05 Ω de resistencia. El motor es activado por una batería de 12 V y la fuerza contraelectromotriz a la rapidez de operación es de 6.00 V. ¿Cuál es la corriente de arranque? ¿Cuál es la corriente a la máxima rapidez? Resp. 240 A, 120 A

31.20. Un motor cd de 220 V consume una corriente de 10 A al funcionar y tiene una resistencia de armadura de 0.4 Ω. ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz cuando el motor funciona y cuál es la corriente de arranque?

***31.21.** Un motor de cd devanado en serie de 120 V tiene una resistencia de campo de 90 Ω y su resistencia de armadura es de 10 Ω. Cuando el motor funciona a la máxima rapidez, genera una fuerza contraelectromotriz de 80 V. ¿Cuál es la resistencia total del motor? ¿Cuál es la corriente de arranque? ¿Cuál es la corriente de operación? Resp. 100 Ω, 1.20 A, 0.400 A

***31.22.** La eficiencia del motor del problema 31.21 es la relación entre la potencia de salida y la potencia de entrada. Calcule la eficiencia a partir de los datos conocidos.

Sección 31.8 El transformador

31.23. Un transformador elevador tiene 400 espiras en su bobina secundaria y sólo 100 espiras en la primaria. Un voltaje alterno de 120 V se aplica a la bobina primaria. ¿Cuál es el voltaje de salida?
Resp. 480 V

31.24. Un transformador reductor se usa para convertir un voltaje alterno de 10 000 a 500 V. ¿Cuál deberá ser la razón entre las espiras secundarias y las primarias? Si la corriente de entrada es 1.00 A y el transformador tiene un rendimiento de 100 por ciento, ¿cuál es la corriente de salida?

31.25. Un transformador elevador de 95 por ciento de rendimiento tiene 80 espiras primarias y 720 espiras secundarias. Si la bobina primaria consume una corriente de 20 A y 120 V, ¿cuáles son la corriente y el voltaje en la bobina secundaria? Resp. 2.11 A, 1080 V

31.26. Una lámpara de 25 W tiene una resistencia de 8.0 Ω cuando está encendida. La lámpara es activada por la bobina secundaria de un pequeño transformador conectado a un circuito de 120 V. ¿Cuál tendrá que ser la razón entre espiras secundarias y espiras primarias en este dispositivo? Suponga que el rendimiento es de 100 por ciento.

Problemas adicionales

31.27. Una bobina de 70 espiras de alambre tiene un área de 0.06 m^2 y está colocada en dirección perpendicular a un campo magnético constante de 8 mT. Calcule la fem inducida si la bobina gira 90° en 0.02 s.
Resp. -1.68 mV

31.28. Una bobina con área de 0.2 m^2 tiene 80 espiras de alambre y está suspendida de manera que su plano es perpendicular a un campo magnético uniforme. ¿Cuál es la densidad de flujo necesaria para producir una fem promedio de 2 V cuando la bobina gira hasta una posición paralela al campo en 0.5 s?

31.29. El flujo que pasa por una bobina de 200 espiras cambia de 0.06 a 0.025 Wb en 0.5 s. La bobina está conectada a una lámpara eléctrica y la resistencia combinada es de 2 Ω. ¿Cuál es la fem inducida promedio y qué corriente promedio se está suministrando al filamento de la lámpara? Resp. -14.0 V 7.00 A

31.30. Un trozo de alambre de 90 mm se mueve con una velocidad ascendente de 35 m/s entre los polos de un imán. El campo magnético es de 80 mT dirigido a la derecha. Si la resistencia del alambre es de 5.00 mΩ, ¿cuáles son la magnitud y el sentido de la corriente inducida?

31.31. Un generador desarrolla una fem de 120 V y tiene una diferencia de potencial de 115 V en sus terminales cuando la corriente de la armadura es de 25.0 A. ¿Cuál es la resistencia de la armadura?
Resp. 0.200 Ω

31.32. La bobina de un generador de ca gira con una frecuencia de 60 Hz y desarrolla una fem máxima de 170 V. La bobina tiene 500 espiras, cada una con un área de 4×10^{-3} m^2. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético dentro del cual gira la bobina?

31.33. Un generador produce una fem máxima de 24 V cuando la armadura gira a 600 rpm. Suponiendo que nada más cambie, ¿cuál será la fem máxima cuando la armadura gire a 1800 rpm? Resp. 72.0 V

***31.34.** Un motor con devanado en derivación, conectado a través de una línea de 117 V, genera una fuerza contraelectromotriz de 112 V cuando la corriente de la armadura es 10 A. ¿Cuál es la resistencia de la armadura?

***31.35.** Un motor con devanado en derivación de 110 V tiene una resistencia de campo de 200 Ω conectada en paralelo con una resistencia de armadura de 10 Ω. Cuando el motor funciona a su máxima rapidez, la fuerza electromotriz es de 90 V. ¿Cuál es la corriente de arranque y cuál es la corriente de operación?
Resp. 11.6 A, 2.55 A

***31.36.** Un motor en derivación de 120 V tiene una resistencia de campo de 160 Ω y una resistencia de armadura de 1.00 Ω. Cuando el motor funciona a la máxima rapidez, consume una corriente de 8.00 A. Calcule la corriente de arranque. ¿Qué resistencia en serie habrá que agregar para reducir la corriente de arranque a 30 A?

***31.37.** Un generador en derivación tiene una resistencia de campo de 400 Ω y una resistencia de armadura de 2.00 Ω. El generador suministra una potencia de 4000 W a una línea externa de 120 V. ¿Cuál es la fem del generador? Resp. 187 V

Preguntas para la reflexión crítica

31.38. Una bobina de alambre está formada por 10 espiras, todas con un diámetro D, y está dentro de un campo B que varía a razón de 2.5 mWb/s. Si la fem inducida es de 4 mV, ¿cuál es el diámetro de la bobina? ¿Cuál sería la fem inducida si el diámetro se duplica? ¿Cuál sería la fem inducida si la relación de cambio se duplicara en el campo B?
Resp. 45.2 cm, -16 mV, -8 mV

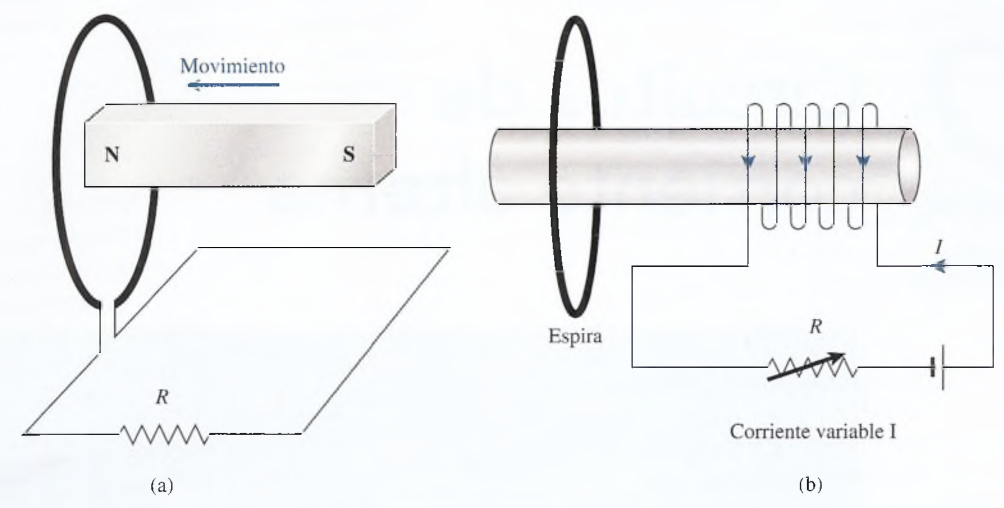


Figura 31.18 Aplicación de la ley de Lenz para determinar la dirección de las corrientes inducidas.

31.39. En la figura 31.18a, la espira única con área de 0.024 m^2 está conectada a una resistencia de 4 mΩ. El imán se mueve a la izquierda pasando por el centro de la espira y provocando un incremento del flujo magnético a razón de 2 mWb/s. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente que pasa por el resistor? ¿Qué pasará si el imán es extraído de nuevo de la espira con la misma rapidez?

31.40. En figura 31.18b, un campo cambiante B se produce primero por un incremento de corriente a través de las espiras y después por un decremento de corriente a través de las mismas. En cada caso, ¿el sentido de la corriente inducida será hacia abajo o hacia arriba en la porción más cercana de la espira única?
Resp. arriba, abajo

***31.41.** Una bobina formada por 50 espiras gira en el sentido de las manecillas del reloj con una frecuencia de 60 Hz en un campo magnético constante de 3.0 mT. La dirección del campo B coincide con el eje x positivo y la bobina cuya área es 0.070 m^2 gira en el sentido de las manecillas del reloj en el plano x–y. Cuando el plano de la espira queda en posición paralela respecto al campo, ¿cuál es la dirección de la corriente, vista desde arriba (en el sentido de las manecillas del reloj o en contrasentido)? ¿Cuál es la fem máxima inducida? El tiempo de arranque es $t = 0$ cuando la fem es 0. ¿En qué momento posterior se elevará por primera vez su fem a 2.00 V?

***31.42.** Cuando se enciende el motor de una bomba calorífica, consume momentáneamente 40.0 A. Después, la corriente baja de inmediato a un valor constante de 12.0 A. Si el motor funciona con una fuente de energía de 120 V, ¿cuál es el valor de la fuerza contraelectromotriz generada mientras el motor está funcionando?
Resp. 84 V

32 Circuitos de corriente alterna



Generadores gigantes de la presa Hoover producen más de 2000 megawatts de potencia. La corriente alterna entra en transformadores elevadores para suministrar el alto voltaje necesario para llevar la energía a lugares remotos. En este capítulo se estudian los elementos de los circuitos de corriente alterna, los cuales comprenden la resistencia, la capacitancia y la inductancia conectadas en serie. (*Fotografía del U.S. Bureau of Reclamation.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Determinará la corriente instantánea para cargar y descargar un *condensador* y para el aumento y reducción de la corriente en un *inductor*.
2. Escribirá y aplicará ecuaciones para calcular la *inductancia* y la *capacitancia* de inductores y condensadores en un circuito de corriente alterna (ca).
3. Explicará por medio de diagramas las relaciones de fase para un circuito con (a) resistencia pura, (b) capacitancia pura y (c) inductancia pura.
4. Escribirá y aplicará ecuaciones para calcular la *impedancia*, el *ángulo de fase* y la *corriente efectiva* en el caso de un circuito de ca conectado en serie y que contiene resistencia, capacitancia e inductancia.
5. Escribirá y aplicará una ecuación para calcular la frecuencia resonante de un circuito de ca.
6. Definirá y determinará el *factor de potencia* para un circuito de ca conectado en serie.

Aproximadamente 99% de la energía generada en Estados Unidos está en forma de corriente alterna (ca). Hay justificadas razones para usar predominantemente circuitos de ca. Una bobina giratoria dentro de un campo magnético induce un fem alterna de una manera muy eficiente. Además, el transformador proporciona un método práctico para transmitir corrientes de ca a grandes distancias con una pérdida de potencia mínima.

El único elemento de importancia en el circuito de cd (además de la fuente de fem) es la resistencia. Puesto que la corriente alterna se comporta diferente de la corriente continua, los elementos adicionales del circuito cobran relevancia. Además de la resistencia normal, tanto la inducción electromagnética como la capacitancia desempeñan funciones importantes. En este capítulo se presentan algunos aspectos sobre corriente alterna en circuitos eléctricos.

32.1 El condensador

En el capítulo 26 se estudió el condensador como un dispositivo electrostático capaz de almacenar carga. El proceso de cargar y descargar condensadores en un circuito de ca proporciona un medio eficaz para regular y controlar el flujo de carga. Sin embargo, antes de analizar los efectos de ***capacitancia*** en un circuito de ca, es conveniente describir el crecimiento y la reducción de la carga en un condensador.

Considere el circuito ilustrado en la figura 32.1, que contiene sólo un condensador y una resistencia. Cuando el interruptor se mueve a S_1, el condensador empieza a cargarse rápidamente mediante la corriente i. Sin embargo, a medida que aumenta la diferencia de potencial Q/C entre las placas del condensador, la razón de flujo de la carga al condensador disminuye. En cualquier instante, la caída de potencial iR a través del resistor debe ser igual que la diferencia de potencial entre el voltaje (V_B) de la batería y la fuerza contraelectromotriz del condensador. Expresado simbólicamente

$$V_B - \frac{Q}{C} = iR \tag{32.1}$$

donde i = corriente instantánea
Q = carga instantánea en el condensador

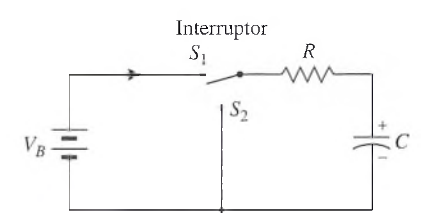


Figura 32.1 Diagrama de un circuito que muestra un método para cargar y descargar un condensador.

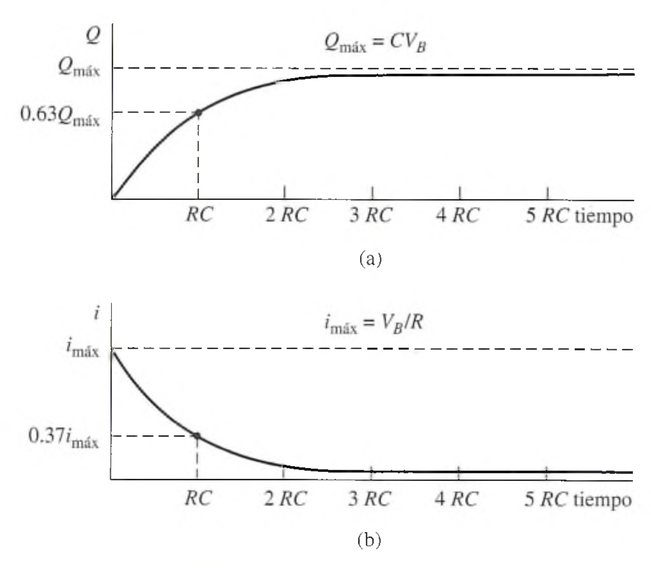


Figura 32.2 (a) La carga de un condensador aumenta y se aproxima a su valor máximo, pero nunca lo alcanza. (b) La corriente disminuye aproximándose a cero mientras la carga aumenta hasta su valor máximo.

Inicialmente, la carga Q es de cero y la corriente i es máxima. Por tanto, en el tiempo $t = 0$.

$$Q = 0 \qquad \text{y} \qquad i = \frac{V_B}{R} \tag{32.2}$$

A medida que se incrementa la carga en el condensador se produce una fuerza contraelectromotriz Q/C que se opone al flujo adicional de carga y la corriente i disminuye. Tanto el incremento de la carga como la disminución de la corriente son funciones exponenciales, como se advierte en las curvas de la figura 32.2. Si fuera posible continuar el proceso de carga indefinidamente, los límites en $t = \infty$ serían

$$Q = CV_B \qquad \text{e} \qquad i = 0 \tag{32.3}$$

Los métodos del cálculo aplicados a la ecuación (32.1) demuestran que la carga instantánea está dada por

$$Q = CV_B(1 - e^{-t/RC}) \tag{32.4}$$

y la corriente instantánea se obtiene con

$$i = \frac{V_B}{R}e^{-t/RC} \tag{32.5}$$

donde t es el tiempo. La constante logarítmica $e = 2.71828$ hasta la sexta cifra significativa. La sustitución de $t = 0$ y $t = \infty$ en las relaciones anteriores lleva a las ecuaciones (32.2) y (32.3), respectivamente.

Las ecuaciones para calcular la carga y la corriente instantáneas se simplifican en el instante preciso que $t = RC$. Este tiempo, generalmente denotado con τ, se llama ***constante de tiempo*** del circuito.

$$\tau = RC \qquad \textit{Constante de tiempo} \tag{32.6}$$

Al analizar la ecuación (32.4) se observa que la carga Q eleva en $(1 - 1/e)$ veces su valor final en una constante de tiempo:

$$Q = CV_B\left(1 - \frac{1}{e}\right) = CV_B(0.63)$$

$$Q = 0.63\ CV_B \tag{32.7}$$

En un circuito capacitivo, la carga en un condensador se elevará a 63% de su valor máximo después de cargarse durante un periodo igual a una constante de tiempo.

Al sustituir $\tau = RC$ en la ecuación (32.5) se demuestra que la corriente suministrada al condensador disminuye $1/e$ veces su valor inicial en una constante de tiempo:

$$i = \frac{V_B}{R}\frac{1}{e} = 0.37\frac{V_B}{R} \tag{32.8}$$

En un circuito capacitivo, la corriente suministrada a un condensador disminuirá a 37% de su valor inicial después de cargarse durante un periodo igual a una constante de tiempo.

Consideremos ahora el problema de descargar un condensador. Por razones prácticas, se considera que un *condensador está completamente cargado después de un periodo igual a cinco veces la constante de tiempo* (*5RC*). Si el interruptor de la figura 32.1 ha permanecido en la posición S_1 durante este lapso, por lo menos, puede suponerse que el condensador ha quedado cargado al máximo CV_B. Si se mueve el interruptor a la posición S_2, la fuente de voltaje queda desconectada del circuito y se dispone de un camino o trayectoria para la descarga. En este caso, la ecuación del voltaje (32.1) se reduce a

$$-\frac{Q}{C} = iR \tag{32.9}$$

Tanto la carga como la corriente decaen siguiendo curvas similares a las mostradas para la corriente de carga en la figura 32.2b. La carga instantánea se determina mediante

$$Q = CV_B e^{-t/RC} \tag{32.10}$$

y la corriente instantánea se obtiene con

$$i = \frac{-V_B}{R} e^{-t/RC} \tag{32.11}$$

El signo negativo en la ecuación de la corriente indica que la dirección de i en el circuito se ha invertido.

Después de descargar el condensador durante una constante de tiempo, la carga y la corriente habrán decaído en $1/e$ veces sus valores iniciales, lo que puede demostrarse sustituyendo τ en las ecuaciones (32.10) y (32.11).

En un circuito capacitativo, la carga y la corriente descenderán a 37% de sus valores iniciales después que el condensador ha sido descargado durante un lapso igual a una constante de tiempo.

El condensador se considera totalmente descargado después de un lapso de cinco veces la constante de tiempo (*5RC*).

Ejemplo 32.1

Una batería de 12 V que tiene una resistencia interna de 1.5 Ω se conecta a un condensador de 4μF por medio de conductores que tienen una resistencia de 0.5 Ω. (a) ¿Cuál es la corriente inicial suministrada al condensador? (b) ¿Cuánto tiempo se necesita para cargar totalmente el condensador? (c) ¿Qué valor tiene la corriente después de una constante de tiempo?

Plan: Al principio, no hay fuerza contraelectromotriz procedente del condensador debido a que no se ha introducido carga en él. Por tanto, la corriente inicial se determina con base en la ley de Ohm, mediante el voltaje de la batería y la resistencia total del circuito. La constante de tiempo τ de este último equivale al producto RC, y el tiempo para cargar el condensador por completo es igual a cinco constantes de tiempo, aproximadamente. Tras una constante de tiempo, la corriente habrá descendido a 37% de su valor inicial a medida que se introduce fuerza contraelectromotriz en el condensador.

Solución (a): La corriente inicial i_0 es

$$i_0 = \frac{\mathscr{E}_B}{R + r} = \frac{12 \text{ V}}{1.5\ \Omega + 0.5\ \Omega}; \qquad i_0 = 6.0 \text{ A}$$

Solución (b): Puesto que $\tau = RC$ y el tiempo para la carga total es $T = 5\tau$, se dice que el condensador está completamente cargado después de un tiempo

$$T = 5RC = 5(1.5\ \Omega + 0.5\ \Omega)(4\ \mu\text{F})$$
$$T = 5(2\ \Omega)(4\ \mu\text{F}) = 40\ \mu\text{s}$$

Solución (c): Después de una constante de tiempo, se observa que la corriente, con base en la ecuación (32.8), será igual a 37% de su valor inicial (6 A).

$$i_\tau = (0.37)(6.0 \text{ A}) = 2.22 \text{ A}$$

En la explicación anterior se simplificó el procedimiento en el caso de las corrientes continuas. Cuando se aplica un voltaje alterno a un condensador, ocurren procesos de carga y descarga en sus placas. Por consiguiente, se mantiene una corriente alterna en el circuito a pesar de que no haya una trayectoria entre las placas del condensador. El efecto de la capacitancia ejercido en un circuito de ca se estudiará en la sección 32.4.

32.2 El inductor

Otro elemento importante en un circuito de ca es el ***inductor***, que consta de una espira o bobina continua de alambre (véase la figura 32.2). En el capítulo 31 mostramos que un cambio en el flujo magnético en la región encerrada por la bobina inducirá una fem en la bobina. Hasta aquí hemos visto que los cambios de flujo se deben a fuerzas externas a la bobina misma. Ahora se considerará la fem inducida en una bobina como resultado de los cambios en su *propia* corriente. Independientemente de la forma en que ocurre el cambio de flujo, la fem inducida se calcula por

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{32.12}$$

donde N = número de espiras

$\Delta\Phi/\Delta t$ = razón de cambio del flujo

Cuando la corriente que circula por un inductor aumenta o disminuye aparece una fem *autoinducida* en el circuito que se *opone* al cambio. Consideremos el circuito mostrado en la figura 32.3. Cuando se cierra el interruptor, la corriente se eleva de cero a su valor máximo $i = V_B/R$. El inductor responde a este incremento en la corriente generando una fuerza contraelectromotriz inducida. Puesto que la geometría del inductor es fija, la razón de cambio del

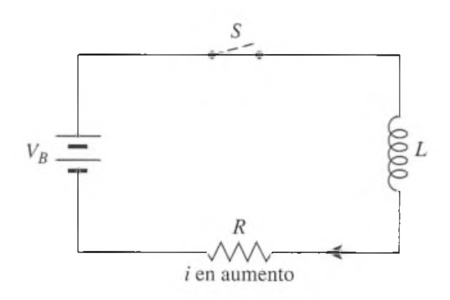


Figura 32.3 El inductor.

flujo $\Delta\Phi/\Delta t$, o la fem inducida $\mathscr{E}$, es proporcional a la razón de cambio de la corriente, $\Delta i/\Delta t$. Esta proporcionalidad se expresa en la ecuación

$$\mathscr{E} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{32.13}$$

La constante de proporcionalidad L se llama la ***inductancia*** del circuito. Si en la ecuación (32.13) se resuelve para la inductancia se obtiene

$$L = -\frac{\mathscr{E}}{\Delta i/\Delta t} \tag{32.14}$$

La unidad de inductancia es el ***henry*** (H).

Un inductor tiene una inductancia de un henry (*H*) si una fem de un volt se induce por medio de una corriente que cambia a una razón de un ampere por segundo.

$$1\text{ H} = 1\text{ V}\cdot\text{s/A}$$

La inductancia de una bobina depende de su geometría, del número de espiras, del espaciamiento entre éstas y de la permeabilidad de su núcleo, pero no de los valores del voltaje y la corriente. En cuanto a esto, el inductor es similar a los condensadores y a los resistores.

Ahora estudiaremos el crecimiento y el decaimiento de la corriente en un circuito inductivo. El circuito que se presenta en la figura 32.4 incluye un inductor L, un resistor R y una batería V_B. El interruptor se coloca de tal modo que la batería pueda conectarse y desconectarse alternadamente del circuito. Cuando el interruptor se coloca en la posición S_1, empieza a crecer una corriente en el circuito. A medida que ésta aumenta, se establece la fem inducida $-L(\Delta i/\Delta t)$ en oposición al voltaje de la batería V_B. La fem neta debe ser igual a la caída de potencial iR por el resistor; en consecuencia,

$$V_B - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = iR \tag{32.15}$$

Un análisis matemático de la ecuación (32.15) permite demostrar que la elevación de la corriente en función del tiempo se obtiene por medio de

$$i = \frac{V_B}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \tag{32.16}$$

Esta ecuación muestra que la corriente i es igual a cero cuando $t = 0$ y que tiene un máximo V_B/R cuando $t = \infty$. El efecto de la inductancia en un circuito es retrasar el establecimiento de esta corriente máxima. La elevación y el decaimiento de la corriente en un circuito inductivo se muestra en al figura 32.5.

La constante de tiempo para un circuito inductivo es

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{32.17}$$

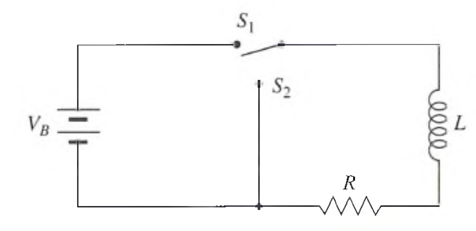


Figura 32.4 Circuito para estudiar la inductancia.

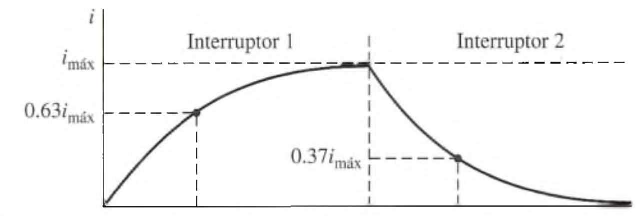


Figura 32.5 Elevación y decaimiento de la corriente en un inductor.

τ está en *segundos* cuando L se expresa en *henrys* y R en *ohms*. Si se introduce este valor en la ecuación (32.16) es posible demostrar que:

> En un circuito inductivo la corriente se elevará al 63% de su valor máximo en una constante de tiempo (L/R).

Después de que la corriente en el circuito que se ilustra en la figura 32.4 ha alcanzado un valor estacionario, si el interruptor se mueve a la posición S_2, la corriente decaerá exponencialmente, como se aprecia en la figura 32.5. La ecuación que permite expresar el decaimiento es

$$i = \frac{V_B}{R} e^{-(R/L)t} \qquad \textbf{(32.18)}$$

La sustitución de L/R en la ecuación (32.18) muestra que:

> En un circuito inductivo, la corriente decae a 37% de su valor máximo en una constante de tiempo igual a (L/R).

Una vez más, por razones prácticas se considera que el tiempo de elevación o decaimiento para un inductor es cinco veces la constante de tiempo ($5L/R$).

32.3 Corrientes alternas

Ahora que nos hemos familiarizado con los elementos básicos de un circuito de ca, es preciso entender más a fondo las corrientes alternas. La descripción cuantitativa de una corriente alterna es mucho más complicada que la correspondiente a la corriente directa, puesto que en ésta la magnitud y la dirección son constantes. Una corriente alterna fluye en un sentido y también en sentido contrario en un circuito y no tiene "dirección", en el sentido que sí lo tiene la corriente directa. Además, la magnitud varía senoidalmente con el tiempo, como se estudió al analizar el generador de ca.

La variación de la fem o de la corriente en un circuito de ca puede representarse por medio de un vector giratorio o mediante una onda senoidal. Estas representaciones se comparan en la figura 32.6. La componente vertical de un vector giratorio en un instante cualquiera es la magnitud instantánea del voltaje o de la corriente. Una revolución completa del vector en rotación, o una onda senoidal completa en la curva representa un *ciclo*. El número de ciclos completos por segundo que experimenta una corriente alterna se conoce como su ***frecuencia*** y proporciona una importante descripción de la corriente. La relación entre la fem instantánea

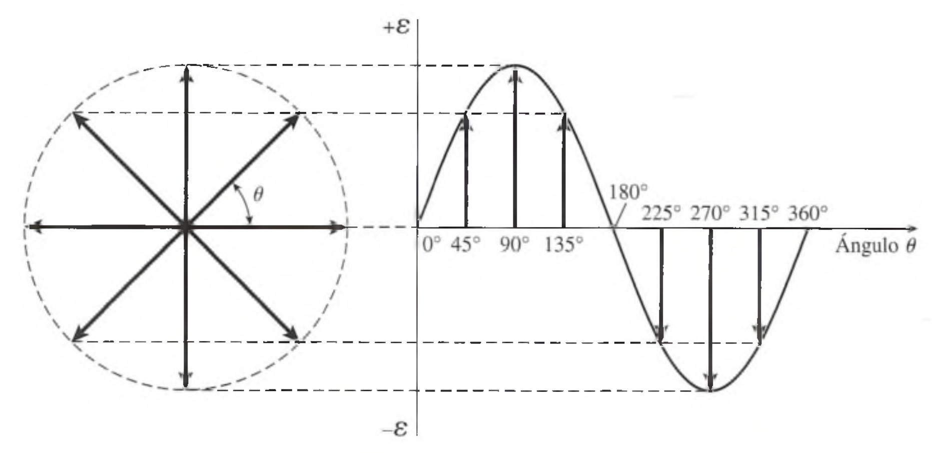


Figura 32.6 Es posible emplear un vector giratorio y su onda senoidal correspondiente para representar corriente o voltaje alternos (ca).

$\mathscr{E}$ o la corriente instantánea i y la frecuencia ya fue descrita en el capítulo 31:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{máx}} \operatorname{sen} 2\pi f t \tag{32.19}$$

$$i = i_{\text{máx}} \operatorname{sen} 2\pi f t \tag{32.20}$$

Observe que el valor medio para la corriente en un circuito de ca es igual a cero, ya que la magnitud alterna entre $i_{\text{máx}}$ e $-i_{\text{máx}}$. A pesar de que no existe una corriente *neta*, el hecho es que la carga está en movimiento y la energía puede liberarse en forma de calor o de trabajo útil. El método más adecuado para medir la intensidad efectiva de las corrientes alternas consiste en determinar el valor de la cd que produciría los mismos efectos de *calentamiento* o que desarrollaría la misma *potencia* que la corriente alterna en cuestión. Este valor de la corriente, conocido como la ***corriente efectiva***, i_{efec}, resulta ser 0.707 veces la corriente máxima. Una relación similar se cumple en el caso de la fem o el voltaje efectivo en un circuito de ca. Por tanto,

$$i_{\text{efec}} = 0.707 i_{\text{máx}} \tag{32.21}$$

$$\mathscr{E}_{\text{efec}} = 0.707 \mathscr{E}_{\text{máx}} \tag{32.22}$$

Un ampere efectivo es la corriente alterna que desarrolla la misma potencia que un ampere de corriente directa.

Un volt efectivo es el voltaje alterno que produce una corriente efectiva de un ampere por una resistencia de 1 ohm.

Los medidores de ca se calibran para indicar valores efectivos. Por ejemplo, si un medidor de ca mide que el voltaje de una vivienda es de 120 V a 10 A, las ecuaciones (32.21) y (32.22) mostrarán que los valores máximos de corriente y voltaje son

$$i_{\text{máx}} = \frac{10\text{ A}}{0.707} = 14.14\text{ A}$$

$$V_{\text{máx}} = \frac{120\text{ V}}{0.707} = 170\text{ V}$$

Por consiguiente, el voltaje de la línea de dicha vivienda en realidad varía entre +170 y −170 V, mientras que la corriente lo hace de +14.14 a −14.14 A. La frecuencia normal de la variación de voltaje es de 60 Hz.

32.4 Relación de fase en circuitos de ca

En todos los circuitos de cd, el voltaje y la corriente alcanzan sus valores máximos y el valor de cero al mismo tiempo, por lo que se dice que están *en fase*. Los efectos de la inductancia y la capacitancia en circuitos de ca evitan que el voltaje y la corriente alcancen sus valores máximo y mínimo de manera simultánea. Es decir, en la mayor parte de los circuitos de ca la corriente y el voltaje están *fuera de fase*.

Para comprender las relaciones de fase en un circuito de ca, consideremos primero un circuito que contiene una resistencia *pura* en serie con un generador de ca, como se observa en la figura 32.7. Éste es un circuito ideal en el que los efectos inductivos y capacitivos son despreciables. Numerosos aparatos de uso doméstico, como lámparas, calentadores y tostadores, se aproximan a una condición de resistencia pura. En ellos, el voltaje instantáneo V y la corriente i están en fase, lo que significa que las variaciones en el voltaje darán por resultado variaciones simultáneas de la corriente. Cuando el voltaje es máximo, la corriente también lo es; cuando el voltaje es cero, la corriente también vale cero.

A continuación consideremos la relación de fase entre la corriente y el voltaje a través de un *inductor puro*. El circuito ilustrado en la figura 32.8 sólo contiene un inductor, que está conectado en serie con el generador de ca. Ya hemos visto que la presencia de una inductancia en un circuito cuya corriente está cambiando con una razón de $\Delta i/\Delta t$ origina una fuerza contraelectromotriz

$$\mathscr{E} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

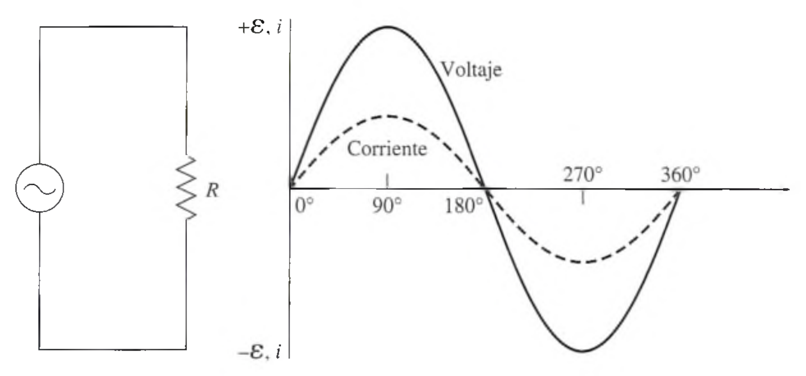


Figura 32.7 En un circuito que contiene resistencia pura, el voltaje y la corriente están en fase.

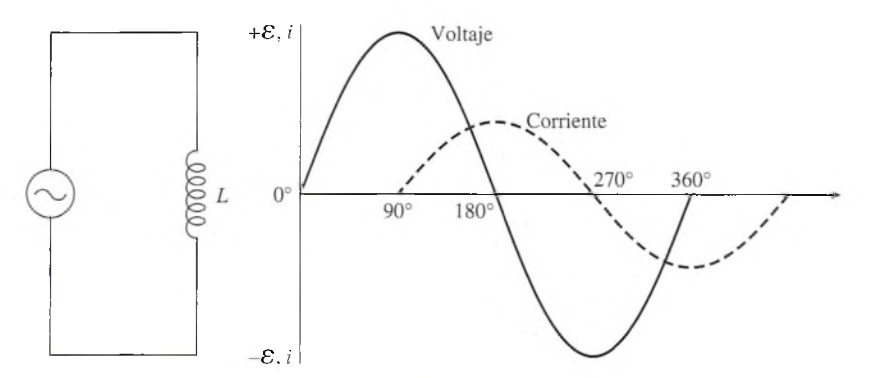


Figura 32.8 En un circuito inductivo puro, el voltaje se adelanta a la corriente por 90°.

la cual retarda el momento en que la corriente puede alcanzar su valor máximo. El voltaje llega a un valor máximo mientras que la corriente sigue siendo cero. Cuando el voltaje llega a un mínimo, la corriente tiene un valor máximo. En un circuito que contiene sólo inductancia, se dice que el voltaje se adelanta (ocurre antes) a la corriente por un cuarto de ciclo, o 90° (véase la curva de la figura 32.8).

En un circuito que contiene inductancia pura, el voltaje se adelanta a la corriente por 90°.

El efecto de la capacitancia en un circuito de ca se opone al de la inductancia. Para el circuito que aparece en la figura 32.9, el voltaje debe *retrasarse* respecto a la corriente, ya que es necesario el flujo de carga al condensador para desarrollar una fem que se oponga. Cuando el voltaje aplicado es decreciente, fluye la carga desde el condensador. La razón de flujo de esta carga es máxima cuando el voltaje aplicado es cero.

En un circuito que contiene capacitancia pura, el voltaje se retrasa respecto a la corriente por 90°.

Esto significa que las variaciones en el voltaje se presentan un cuarto de ciclo *después* que las correspondientes variaciones en la corriente.

Una forma de recordar las relaciones de fase para los circuitos capacitivos e inductivos es

"$\mathscr{E}LI$ the $IC\mathscr{E}$ man"

que en español significa "$\mathscr{E}$li, el hombre de hielo". Recuerde que $\mathscr{E}$ denota la fem, I la corriente, C la capacitancia y L la inductancia. "$\mathscr{E}LI$ the $IC\mathscr{E}$ man" indica que el voltaje $\mathscr{E}$ se adelanta a la corriente I en un inductor L, y que la corriente I se adelanta al voltaje $\mathscr{E}$ en un condensador C.

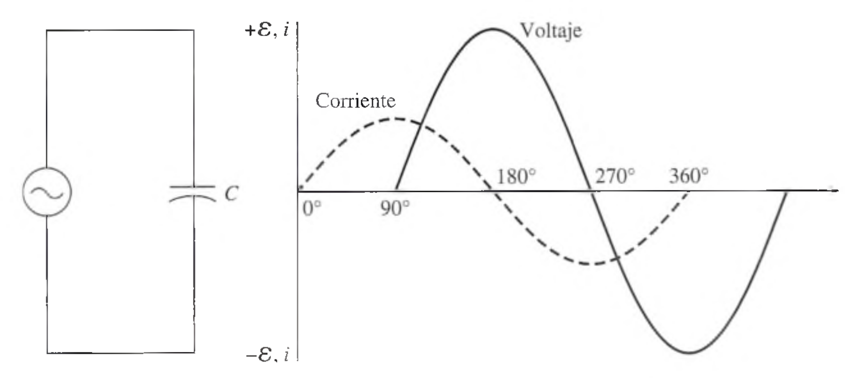


Figura 32.9 En un circuito que sólo contiene capacitancia, la fem se retrasa respecto a la corriente por 90°.

32.5 Reactancia

En un circuito de cd, la única oposición a la corriente proviene del material por el que circula. Las pérdidas de calor en los resistores, que obedecen la ley de Ohm, también se presentan en los circuitos de ca. Sin embargo, para las corrientes alternas, también hay que considerar la inductancia y la capacitancia. Tanto los inductores como los condensadores *impiden* el flujo de una corriente alterna, y sus efectos deben considerarse junto con la oposición de la resistencia normal.

La reactancia de un circuito de ca se define como su oposición no resistiva al flujo de corriente alterna.

Consideremos, en primer lugar, la oposición al flujo de una corriente alterna a través de un inductor. Dicha oposición, llamada ***reactancia inductiva***, surge de la fuerza contraelectromotriz autoinducida debida a una corriente cambiante. La magnitud de la reactancia inductiva X_L se determina por la inductancia L del inductor y por la frecuencia f de la corriente alterna, y puede calcularse con la fórmula

$$X_L = 2\pi f L \tag{32.23}$$

La reactancia inductiva se mide en *ohms* cuando la inductancia está expresada en *henrys* y la frecuencia en *hertz*.

La corriente efectiva i en un inductor se determina a partir de su reactancia inductiva X_L y el voltaje efectivo V mediante una ecuación análoga a la ley de Ohm:

$$V = iX_L \tag{32.24}$$

Ejemplo 32.2

Una bobina que tiene una inductancia de 0.5 H se conecta a una fuente de poder de 120 V a 60 Hz. Si la resistencia de la bobina tiene un valor despreciable, ¿cuál es la corriente efectiva que fluye por la bobina?

Solución: la reactancia inductiva es

$$X_L = 2\pi f L = (2\pi)(60\text{ Hz})(0.5\text{ H}) = 188.5\ \Omega$$

La corriente se determina a partir de la ecuación (32.24):

$$i = \frac{V}{X_L} = \frac{120\ \Omega}{188.5\ \Omega} = 0.637\text{ A}$$

La oposición a la corriente alterna se presenta también debido a la capacitancia en un circuito. La ***reactancia capacitiva*** X_C se determina con

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \tag{32.25}$$

donde C = capacitancia

f = frecuencia de la corriente alterna

La reactancia capacitiva se expresa en *ohms* cuando C está en *farads* y f en *hertz*. Una vez que se conoce la reactancia X_C de un condensador, la corriente efectiva i puede calcularse con base en la expresión

$$V = iX_C \tag{32.26}$$

donde V es el voltaje aplicado.

32.6 Circuito en serie de ca

En general, un circuito de ca consta de resistencia, capacitancia e inductancia en cantidades variables. Una combinación en serie de estos parámetros se ejemplifica en la figura 32.10. La caída total del voltaje en el circuito de cd es simplemente la suma de las caídas de potencial a través de cada elemento del circuito. En el circuito de ca, sin embargo, el voltaje y la corriente no están en fase entre sí. Recuerde que V_R siempre está en fase con la corriente, pero V_L se adelanta a ella en 90° y V_C se atrasa respecto a ella en 90°. Es obvio que si vamos a determinar el voltaje efectivo V de todo el circuito debemos encontrar un método que tome en cuenta las diferencias de fase.

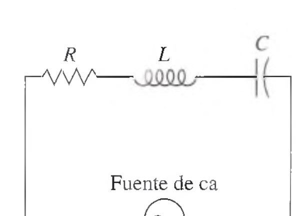
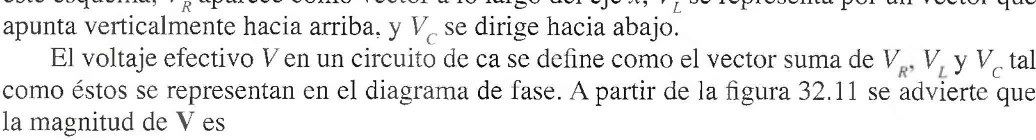


Figura 32.10 Circuito de ca en serie que contiene resistencia, inductancia y capacitancia.

La mejor forma de realizar esto es por medio de un diagrama de vectores llamado ***diagrama de fase*** (véase la figura 32.11). En este método, los valores efectivos de V_R, V_L y V_C se grafican como vectores giratorios. La relación de fase se expresa en términos del ***ángulo de fase*** Φ, que es una medida del grado de adelanto del voltaje con relación a la corriente en un elemento específico del circuito. Por ejemplo, en una resistencia pura, el voltaje y la corriente están en fase y $\Phi = 0$. En un inductor, $\Phi = +90°$, y en un condensador $\Phi = -90°$. El ángulo de fase negativo se presenta cuando el voltaje se atrasa respecto a la corriente. Siguiendo este esquema, V_R aparece como vector a lo largo del eje x, V_L se representa por un vector que apunta verticalmente hacia arriba, y V_C se dirige hacia abajo.



El voltaje efectivo V en un circuito de ca se define como el vector suma de V_R, V_L y V_C tal como éstos se representan en el diagrama de fase. A partir de la figura 32.11 se advierte que la magnitud de **V** es

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \tag{32.27}$$

Debe comprobar esta ecuación aplicando el teorema de Pitágoras al diagrama vectorial.

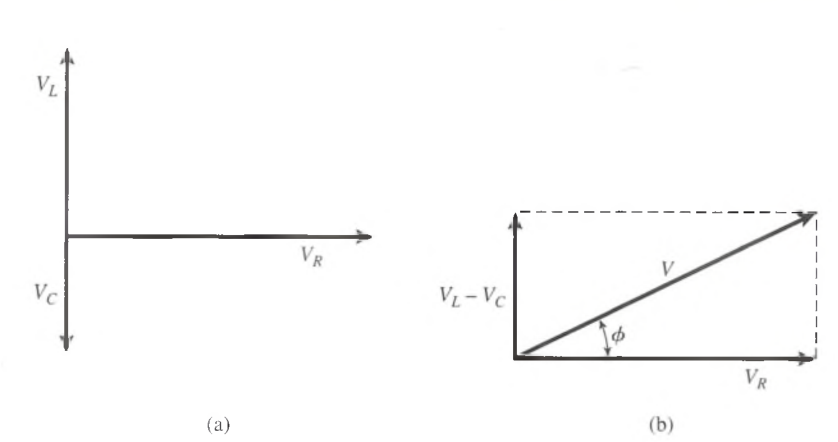


Figura 32.11 Diagrama de fase.

Observe a partir del diagrama de fase que un valor de V_L que sea mayor que V_C resulta en un ángulo de fase positivo. En otras palabras, si el circuito es inductivo, el voltaje se adelanta a la corriente. En un circuito capacitivo, $X_C > X_L$, y resultará un ángulo de fase negativo, lo que indica que el voltaje está atrasado respecto a la corriente. En cualquier caso, la magnitud del ángulo de fase puede determinarse a partir de

$$\tan \Phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} \tag{32.28}$$

Una forma más útil de la ecuación (32.27) se obtiene recordando que

$$V_R = iR \qquad V_L = iX_L \qquad V_C = iX_C$$

Después de realizar las sustituciones queda como

$$V = i\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{32.29}$$

La cantidad multiplicada por la corriente en la ecuación (32.29) es una medida de la oposición combinada que ofrece el circuito a la corriente alterna. Se denomina la ***impedancia*** y se expresa por medio del símbolo Z.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{32.30}$$

Cuanto mayor es la impedancia en un circuito, menor es la corriente producida por el voltaje. Puesto que R, X_L y X_C se miden en *ohms*, la impedancia también se expresa en ohms.

Por consiguiente, la corriente efectiva i en un circuito de ca se obtiene por medio de

$$i = \frac{V}{Z} \tag{32.31}$$

donde V = voltaje aplicado
Z = impedancia de circuito

Conviene recordar que Z depende de la frecuencia de la corriente alterna, así como de la resistencia, la inductancia y la capacitancia.

Como el voltaje a través de cada elemento depende directamente de la resistencia o la reactancia, es posible construir otro diagrama de fase considerando R, X_L y X_C como cantidades vectoriales. Ese diagrama puede utilizarse para el cálculo de la impedancia, como se indica en la figura 32.12. El ángulo de fase Φ en esta representación gráfica se determina con

$$\tan \Phi = \frac{X_L - X_C}{R} \tag{32.32}$$

Por supuesto, este ángulo es el mismo que el que se obtiene mediante la ecuación (32.28).

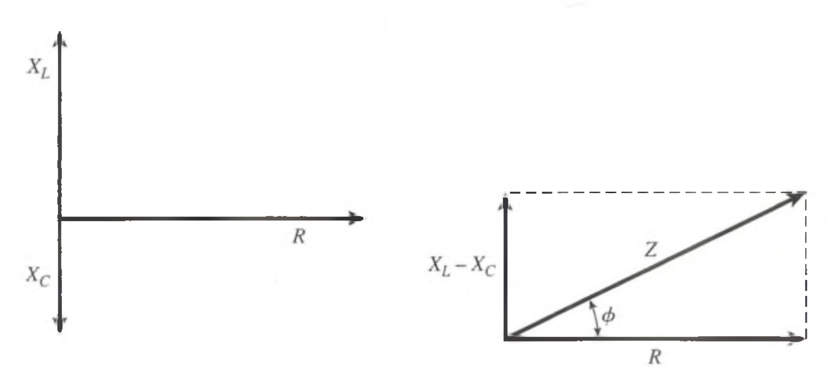


Figura 32.12 Diagrama de la impedancia.

Ejemplo 32.3 Una resistencia de 40 Ω, un inductor de 0.4 H y un condensador de 10 μF se conectan en serie con un fuente de ca que genera corriente alterna de 120 V, a 60 Hz. (a) Determine la impedancia del circuito. (b) ¿Cuál es el ángulo de fase? (c) Determine la corriente efectiva en el circuito.

Plan: Primero se calculará la reactancia inductiva X_L y la reactancia capacitiva X_C con base en sus definiciones. Luego se determinará la impedancia combinando la reactancia con la resistencia del circuito mediante la ecuación (32.30). La corriente efectiva es la razón del voltaje aplicado a la impedancia; el ángulo de fase se calcula a partir de la función tangente.

Solución (a): las reactancias inductiva y capacitiva se determinan, respectivamente, como sigue

$$X_L = 2\pi fL = (2\pi)(60\text{ Hz})(0.4\text{ H}) = 151\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{(2\pi)(60\text{ Hz})(10 \times 10^{-6}\text{ F})} = 265\ \Omega$$

La impedancia de circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{(40\ \Omega)^2 + (151\ \Omega - 265\ \Omega)^2} = 121\ \Omega$$

Solución (b): A partir de la ecuación (32.32), el ángulo de fase es

$$\tan \Phi = \frac{151\ \Omega - 265\ \Omega}{40\ \Omega} = -2.85$$
$$\Phi = -71°$$

El signo negativo se usa para indicar que el ángulo de fase se encuentra en el cuarto cuadrante.

Solución (c): Por último, podemos determinar la corriente efectiva a partir de la impedancia conocida

$$i = \frac{V}{Z} = \frac{120\text{ V}}{121\ \Omega} = 0.992\text{ A}$$

El ángulo de fase negativo indica que el voltaje se atrasará respecto a esta corriente efectiva. El circuito es más capacitativo que inductivo.

32.7 Resonancia

Puesto que la inductancia ocasiona que la corriente se retrase respecto al voltaje y la capacitancia es la causa de que la corriente se adelante a éste, su efecto combinado hace que se cancelen mutuamente. La reactancia total esta dada por $X_L - X_C$, y la impedancia en el circuito es mínima cuando $X_L = X_C$. Cuando se presenta esta situación, sólo la resistencia R se mantiene y la corriente alcanza su valor máximo. Habiendo establecido que $X_L = X_C$, podemos escribir

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$

y

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \textbf{(32.33)}$$

Cuando el voltaje aplicado tiene esta frecuencia, la cual se conoce como ***frecuencia de resonancia***, la corriente que fluye por el circuito será máxima. Además, hay que señalar que en vista de que la corriente está limitada sólo por la resistencia, estará en fase con el voltaje.

El circuito de antena en un receptor de radio contiene un condensador variable que funciona como sintonizador. La capacitancia se modifica hasta lograr que la frecuencia de resonancia sea igual a la frecuencia particular de la señal que se desea sintonizar. Cuando esto sucede, la corriente es máxima y el receptor responde a la señal así captada.

32.8 El factor de potencia

En circuitos de ca no se consume potencia debido a la capacitancia o a la inductancia. La energía simplemente se almacena en un instante y se libera en otro, lo que hace que la corriente y el voltaje estén fuera de fase. Siempre que la corriente y el voltaje están en fase, la potencia P suministrada es un máximo dado por

$$P = iV$$

donde i = corriente efectiva
V = ***voltaje efectivo***

Esta condición se satisface cuando el circuito de ca contiene solamente resistencia R o bien, cuando el circuito está en resonancia ($X_L = X_C$).

Sin embargo, en condiciones normales un circuito de ca contiene suficiente reactancia para limitar la potencia efectiva. En todo caso, la potencia suministrada al circuito es una función sólo de la componente del voltaje V que está en fase con la corriente. A partir de la figura 32.11, esta componente es V_R, y se puede escribir como sigue:

$$V_R = V \cos \Phi$$

donde Φ es el ángulo de fase. Por tanto, la potencia efectiva consumida en un circuito de ca es

$$P = iV \cos \Phi \qquad \textbf{(32.34)}$$

La cantidad cos Φ se llama ***factor de potencia*** del circuito. Observe que cos Φ puede variar desde cero, en un circuito que contiene reactancia pura ($\Phi = 90°$), hasta la unidad, en un circuito que contiene únicamente resistencia ($\Phi = 0°$).

La ecuación (32.30) y la figura 32.12 muestran que el factor de potencia puede determinarse también mediante

$$\cos \Phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \textbf{(32.35)}$$

Ejemplo 32.4

(a) ¿Cuál es el factor de potencia del circuito descrito en el ejemplo 32.3? (b) ¿Qué potencia absorbe el circuito?

Solución (a): El factor de potencia se calcula mediante la ecuación (32.35):

$$\cos \Phi = \frac{R}{Z} = \frac{40\ \Omega}{121\ \Omega} = 0.33$$

Solución (b): La potencia absorbida en el circuito es

$$P = iV \cos \Phi = (0.992\ \text{A})(120\ \text{V})(0.33)$$
$$= 39.3\ \text{W}$$

El factor de potencia se expresa a veces como un porcentaje, en vez de hacerlo en cifras decimales. Por ejemplo, el factor de potencia de 0.33 en el ejemplo anterior podría escribirse como 33%. La mayor parte de los circuitos de ca comerciales tienen factores de potencia de 80% a 90% porque generalmente contienen más inductancia que capacitancia. Puesto que esto requiere que las compañías de energía eléctrica suministren más corriente para alcanzar cierta potencia, dichas compañías ofrecen tarifas más bajas a los consumidores cuyos factores de potencias son superiores a 90%. Los usuarios comerciales pueden mejorar sus factores de potencia inductiva por varios medios, por ejemplo, añadiendo condensadores.

Resumen y repaso

Resumen

En los circuitos de ca hay tres elementos principales: el *resistor*, el *condensador* y el *inductor*. El resistor resulta afectado en la misma forma por la corriente de ca que en los circuitos de cc, y la corriente está determinada por la ley de Ohm. El condensador regula y controla el flujo de carga en un circuito de ca; su oposición al flujo de los electrones se conoce como *reactancia capacitiva*. El inductor está sujeto a una fem autoinducida que añade una *reactancia inductiva* al circuito. El efecto combinado de los tres elementos en su oposición a la corriente eléctrica se llama *impedancia*. A continuación se resumen los principales aspectos que conviene recordar.

- Cuando un condensador se está cargando, los valores instantáneos de la carga Q y la corriente i se calculan mediante

$$Q = CV_B(1 - e^{-t/RC}) \qquad i = \frac{V_B}{R}e^{-t/RC}$$

- La carga aumentará en el condensador a 63% de su valor máximo cuando la corriente que se le suministre disminuya a 37% de su valor inicial, durante un periodo de una constante de tiempo τ.

$$\tau = RC \quad \textit{Constante de tiempo}$$

- Cuando un condensador está en proceso de descarga, los valores instantáneos de la carga y la corriente se obtienen mediante

$$Q = CV_Be^{-t/RC} \qquad i = \frac{-V_B}{R}e^{-t/RC}$$

  Tanto la carga como la corriente disminuyen a 37% de sus valores iniciales, después de descargar el componente durante una constante de tiempo.
- Cuando pasa corriente alterna por una bobina de alambre, es decir, un inductor, surge una fem autoinducida que se opone al cambio. Esta fem se calcula con

$$\mathscr{E} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad L = -\frac{\mathscr{E}}{\Delta i/\Delta t}$$

  Esta constante L se conoce como *inductancia*. Existe una inductancia de un henry (H) si una fem de 1 V es inducida por una corriente que cambia a razón de 1 A/s.
- El aumento y el descenso de la corriente en un inductor se calculan a partir de

$$i = \frac{V_B}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \quad \textit{Aumento de corriente}$$

$$i = \frac{V_B}{R}e^{-(R/L)t} \quad \textit{Descenso de la corriente}$$

- En un circuito inductivo, la corriente aumentará a 63% de su valor máximo o descenderá a 37% de su valor máximo en el transcurso de una constante de tiempo. En el caso de un inductor, la constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \textit{Constante de tiempo}$$

- Puesto que las corrientes y los voltajes alternos varían continuamente, hablamos de un *ampere efectivo* y un *volt efectivo* que se definen en términos de sus valores máximos, de la forma siguiente:

$$i_{\text{ef}} = 0.707 i_{\text{máx}} \qquad \mathscr{E}_{\text{ef}} = 0.707\mathscr{E}_{\text{máx}}$$

- Tanto los condensadores como los inductores ofrecen resistencia al flujo de la corriente alterna (lo cual se conoce como *reactancia*) que se calcula a partir de

$$X_L = 2\pi fL \quad \textit{Reactancia inductiva } X_L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad \textit{Reactancia capacitiva } X_C$$

  El símbolo f se refiere a la frecuencia de la corriente alterna en hertz. Un hertz equivale a un ciclo por segundo.
- El voltaje, la corriente y la resistencia en un circuito ca en serie se estudian con ayuda de diagramas de fasores. En la figura 32.12 se muestra un diagrama para X_C, X_L y R. La resultante de esos vectores es la resistencia efectiva de todo el circuito, conocida como la *impedancia* Z.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \textit{Impedancia}$$

- Si aplicamos la ley de Ohm a cada una de las partes del circuito y después al circuito completo, obtenemos las siguientes ecuaciones útiles. Primero, el voltaje total se calcula como sigue

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \quad \textit{Voltaje}$$

$$V_R = iR \qquad V_L = iX_L$$

$$V_C = iX_C \qquad V = iZ$$

$$V = i\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \textit{Ley de Ohm}$$

- Por el hecho de que el voltaje se adelanta a la corriente en un circuito inductivo y se retrasa respecto a ella en un circuito capacitivo, los voltajes y las corrientes máximos

y mínimos suelen no coincidir. El ángulo de fase Φ se obtiene mediante

$$\tan \Phi = \frac{V_L - V_C}{V_R}$$

o bien,

$$\tan \Phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

- La frecuencia de resonancia se presenta cuando la reactancia neta es igual a cero ($X_L = X_C$):

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \textit{Frecuencia de resonancia}$$

- Ni la capacitancia ni la inductancia consumen potencia. Puesto que esta última es función de la componente de la impedancia a lo largo del eje de la resistencia, podemos escribir:

$$P = iV\cos\Phi \quad \textit{Factor de potencia} = \cos\Phi$$

$$\cos\Phi = \frac{R}{Z}$$

$$\cos\Phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

32.1. La inductancia de un circuito depende de su geometría y de la proximidad de materiales magnéticos. ¿Cuál de las bobinas siguientes tendrá inductancias más altas y por qué?

a. con espiras muy próximas o muy espaciadas entre sí

b. una bobina corta o una larga

c. con sección transversal grande o con sección transversal pequeña

d. con núcleo de hierro o con núcleo de aire

32.2. Demuestre que el segundo es la unidad que corresponde a la constante de tiempo L/R y RC en los circuitos inductivos y capacitivos.

32.3. Trace una curva que represente la corriente contra el tiempo en (a) un circuito de alta inductancia y (b) un circuito de baja inductancia.

32.4. Trace una curva de voltaje contra tiempo en (a) un condensador en proceso de carga y (b) un condensador que se descarga. Compare esas curvas con las que aparecen en el texto para la corriente.

32.5. Trace una curva de voltaje en función del tiempo para mostrar cómo cambia el voltaje en un circuito inductivo. Compare esas curvas con las que aparecen en el texto para la corriente.

32.6. Si alguien desea averiguar el voltaje de ruptura de un condensador conectado en un circuito de ca, ¿debe tener en cuenta el voltaje medio, el voltaje máximo o el voltaje efectivo?

32.7. Una bobina de alambre está conectada a las terminales de una batería de cd de 110 V. Un amperímetro conectado en serie con la bobina marca una corriente de 5 A. ¿Qué pasará con la corriente si se inserta en la bobina un núcleo de hierro? Ahora desconecte la fuente de cd, extraiga el núcleo de hierro y vuelva a conectar el sistema a un generador de ca de 110 V. Ajuste el amperímetro para la lectura de amperes ca efectivos. ¿La corriente aumentó, disminuyó o permaneció igual? ¿Qué pasa con la corriente cuando se inserta el núcleo de hierro? ¿Cómo puede explicar sus observaciones?

32.8. Una lámpara incandescente está conectada en serie con un generador de ca de 110 V y un condensador variable. Si la capacitancia aumenta, ¿la lámpara brillará más o menos intensamente? Explique su respuesta. ¿Qué pasaría si el generador fuera sustituido por una batería?

32.9. Al aumentar la capacitancia de un circuito, ¿qué pasa con la frecuencia de resonancia del circuito?

32.10. Cuando la frecuencia se incrementa en un circuito inductivo, ¿qué pasa con la corriente que circula en dicho circuito?

32.11. La reactancia inductiva depende *directamente* de la frecuencia de la corriente alterna, mientras que la reactancia capacitiva varía *inversamente* respecto a la frecuencia. Ambas se oponen al flujo de la carga en un circuito de ca. Explique por qué es diferente la relación de ambas con la frecuencia.

32.12. Cuando un circuito se sintoniza a su frecuencia de resonancia, ¿cuál es el factor de potencia?

32.13. ¿Cuál es el factor de potencia de un circuito constituido por (a) resistencia pura, (b) inductancia pura, (c) capacitancia pura?

Problemas

Sección 32.1 El condensador

32.1. Un circuito de cd en serie consta de un condensador de 4 μF una resistencia de 5000 Ω y una batería de 12 V. ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito? Resp. 20 ms

32.2. ¿Cuál es la constante de tiempo de un circuito de cd en serie que contiene un condensador de 6 μF y una resistencia de 400 Ω conectada a una batería de 20 V?

32.3. En el circuito descrito en el problema 32.1, ¿cuáles son la corriente inicial y la corriente final? ¿Cuánto tiempo se necesita para asegurarse de que el condensador quede totalmente cargado? Resp. 2.40 mA, 0, 100 ms

32.4. En el circuito del problema 32.2, ¿cuál es la carga máxima para el condensador y cuánto tiempo se requiere para cargarlo por completo?

*32.5. Un condensador de 8 μF está conectado en serie con una resistencia de 600 Ω y una batería de 24 V. Después de un lapso igual a una constante de tiempo, ¿cuáles son la carga en el condensador y la corriente de un circuito? Resp. 121.37 μC, 14.7 mA

*32.6. Suponga que el condensador del problema 32.5 ahora está en proceso de descarga. Después de una constante de tiempo, ¿cuáles son la corriente del circuito y la carga del condensador?

*32.7. Suponga que el condensador de 8 μF descrito en el problema 32.5 estaba totalmente cargado y se deja descargar después. Calcule el tiempo que demorará la corriente del circuito en disminuir hasta 20% de su valor inicial. Resp. 7.73 ms

*32.8. Un condensador de 5 μF está conectado en serie con una fuente de fem de 12 V y una resistencia de 4000 Ω. ¿Cuánto tiempo se requiere para acumular una carga de 40 μC en el condensador?

Sección 32.2 El inductor

32.9. Un circuito de cd en serie contiene un inductor de 4 mH y una resistencia de 80 Ω en serie con una batería de 12 V. ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito? ¿Cuáles son su corriente inicial y su corriente final? Resp. 50 μs, 0, 150 mA

32.10. Un inductor de 5 mH, una resistencia de 160 Ω y una batería de 50 V están conectados en serie. ¿Cuánto tiempo se requiere para que la corriente del inductor alcance 63% de su valor en estado estacionario? ¿Cuál es la corriente en ese instante?

32.11. ¿Cuál es el valor de la corriente en el problema 32.9 después de transcurrida una constante de tiempo? Resp. 94.8 mA

32.12. Suponga que el inductor del problema 32.10 ha alcanzado su valor de estado estacionario. Si entonces se interrumpe el circuito, ¿cuánto tiempo tendrá que pasar para que podamos decir con seguridad que la corriente en el inductor es cero?

32.13. En un solenoide de 25 mH, la corriente aumenta de 0 a 2 A en un lapso de 0.1 s. ¿Cuál es la magnitud de la fem autoinducida? Resp. −500 mV

32.14. Un circuito de cd en serie contiene un inductor de 0.05 H y una resistencia de 40 Ω en serie con una fuente de fem de 90 V. ¿Cuáles son la corriente máxima del circuito y la constante de tiempo?

*32.15. ¿Cuál es la corriente instantánea en el inductor del problema 32.14 después de un tiempo de descenso de 1.0 ms? Resp. 1.01 A

*32.16. Un inductor de 6 mH, una resistencia de 50 Ω y una batería de 38 V están conectados en serie. ¿Cuánto tiempo después de la conexión alcanzará la corriente un valor instantáneo de 600 mA?

Sección 32.3 Corrientes alternas

32.17. Cuando se conecta un voltímetro de ca a través de un resistor de 12 Ω, la lectura obtenida es de 117 V. ¿Cuáles son los valores máximos de voltaje y corriente? Resp. 165 V, 13.8 A

32.18. En un circuito de ca, el voltaje y la corriente alcanzan valores máximos de 120 V y 6.00 A. ¿Cuáles son los valores efectivos de ca?

32.19. Un condensador tiene un régimen máximo de voltaje de 500 V. ¿Cuál es el mejor voltaje efectivo de ca que se le puede aplicar sin ocasionar la ruptura?
Resp. 354 V

32.20. Cierto aparato doméstico funciona con un voltaje efectivo de 220 V bajo una corriente efectiva de 20 A. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo?

Sección 32.5 Reactancia

32.21. Un condensador de 6 μF está conectado a una línea de ca de 40 V, a 60 Hz. ¿Cuál es la reactancia? ¿Cuál es la corriente efectiva de ca en el circuito que contiene una capacitancia pura? Resp. 442 Ω, 90.5 mA

32.22. Un inductor de 2 H cuya resistencia es insignificante está conectado a una línea de 50 V de ca, a 50 Hz. ¿Cuál es la reactancia? ¿Cuál es la corriente efectiva de ca en la bobina?

32.23. Un inductor de 50 mH y resistencia insignificante está conectado a una línea de 120 V de ca, a 60 Hz. ¿Cuál es la reactancia inductiva? ¿Cuál es la corriente efectiva de ca en el circuito? Resp. 18.8 Ω, 6.37 A

32.24. Un condensador de 6 μF está conectado a una fuente de ca de 24 V, a 50 Hz. ¿Cuál es la corriente en el circuito?

32.25. Un condensador de 3 μF conectado a una línea de 120 V de ca consume una corriente efectiva de 0.5 A. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente? Resp. 221 Hz

32.26. Calcule la reactancia de un condensador de 60 μF en un circuito de ca a 600 Hz. ¿Cuál es la reactancia si la frecuencia se reduce a 200 Hz?

32.27. La frecuencia de una corriente alterna es de 200 Hz y la reactancia inductiva de un solo inductor es de 100 μ. ¿Cuál es la inductancia? Resp. 79.6 mH

***32.28.** Disponemos de un resistor de 20 Ω, un condensador de 2 μF y un inductor de 0.70 H. Cada uno de ellos, a su vez, está conectado a una fuente de ca de 120 V, a 60 Hz como el único elemento de su circuito. ¿Cuál es la corriente efectiva de ca en cada caso?

Sección 32.6 El circuito de ca en serie

***32.29.** Una resistencia de 300 Ω, un condensador de 3 μF y un inductor de 4 H están conectados en serie por una fuente de ca de 90 V, a 50 Hz. ¿Cuál es la reactancia neta del circuito? ¿Cuál es la impedancia?
Resp. 196 Ω, 358 Ω

***32.30.** ¿Cuál es la corriente efectiva de ca que se suministra al circuito de ca en serie descrito en el problema 32.29? ¿Cuál es el valor máximo de esta corriente?

***32.31.** Un circuito de ca en serie está formado por una resistencia de 100 Ω, un inductor de 0.2 H y un condensador de 3 μF conectados a una fuente de ca de 110 V, a 60 Hz. ¿Cuáles son los valores de la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia de este circuito?
Resp. 75.4 Ω, 884 Ω, 815 Ω

32.32. ¿Cuáles son el ángulo de fase y el factor de potencia del circuito descrito en el problema 32.31?

***32.33.** Suponga que todos los elementos del problema 32.28 están conectados en serie con la fuente allí descrita. ¿Cuál será la corriente efectiva suministrada al circuito? Resp. 113 mA

***32.34.** Un circuito de ca en serie contiene un inductor de 12 mH, un condensador de 8 μF y un resistor de 40 Ω conectados a una línea de ca de 110 V, a 200 Hz. ¿Cuál es la corriente efectiva de ca en el circuito?

***32.35.** Cuando un resistor de 6 Ω y un inductor puro están conectados a una línea de ca de 100 V a 60 Hz, la corriente efectiva es de 10 A. ¿Cuál es la inductancia? ¿Cuál es la pérdida de potencia a través del resistor y cuánta potencia se pierde a través del inductor? Resp. 24.5 mH, 600 W, 0

***32.36.** Un condensador está conectado en serie con una resistencia de 35 Ω y con la línea de ca de 220 V. La reactancia del condensador es de 45 Ω. ¿Cuál es la corriente efectiva ca? ¿Cuál es el ángulo de fase? ¿Cuál es el factor de potencia?

***32.37.** Una bobina cuya inductancia es de 0.15 H y una resistencia de 12 Ω están conectadas a una línea de 110 V, a 25 Hz. ¿Cuál es la corriente efectiva en el circuito? ¿Cuál es el factor de potencia? ¿Cuánta potencia se pierde en el circuito?
Resp. 4.16 A, 45.4%, 208 W

***32.38.** ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito descrito en el problema 32.29?

***32.39.** ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito descrito en el problema 32.34? Resp. 514 Hz

Problemas adicionales

32.40. Para el circuito que se muestra en la figura 32.13, determine la corriente que sale de la batería después de una constante de tiempo: (a) cuando el interruptor está cerrado en S_1; (b) cuando el interruptor está cerrado en S_2.

32.41. Si el interruptor 2 de la figura 32.13 está cerrado por varios minutos y después se le abre de pronto, ¿cuál será la corriente instantánea después de una constante de tiempo?
Resp. 88.3 mA

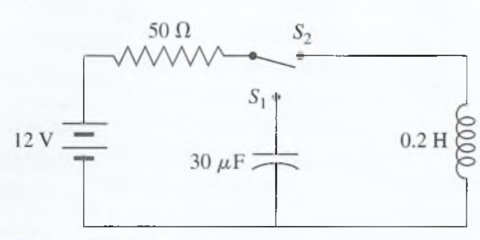


Figura 32.13

32.42. Un circuito resonante tiene una inductancia de 400 μH y una capacitancia de 100 pF. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia?

32.43. Un circuito *LR* de cd tiene una constante de tiempo de 2 ms. ¿Cuál es la inductancia si el valor de la resistencia es de 2 kΩ? ¿Cuál será la corriente instantánea 2 ms después de conectar el circuito a una batería de 12 V? Resp. 4.00 H, 3.79 mA

32.44. Un circuito de cd en serie está formado por una batería de 12 V, un resistor de 20 Ω y un condensador, cuyo valor es desconocido. La constante de tiempo es 40 ms. ¿Cuál es la capacitancia? ¿Cuál es la carga máxima en el condensador?

***32.45.** Un inductor de 2 H cuya resistencia es de 120 Ω está conectado a una batería de 30 V. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la corriente alcance 63% de su valor máximo? ¿Cuál es la razón inicial del incremento de la corriente, en amperes por segundo? ¿Cuál es la corriente final?
Resp. 16.7 ms, 15 A/s, 250 mA

***32.46.** Considere el circuito que se muestra en la figura 32.13. ¿Cuál es la impedancia? ¿Cuál es la corriente efectiva? ¿Cuál es la pérdida de potencia en el circuito?

***32.47.** El circuito de un sintonizador contiene un inductor de 4 mH y un condensador variable. ¿Cuál debe ser

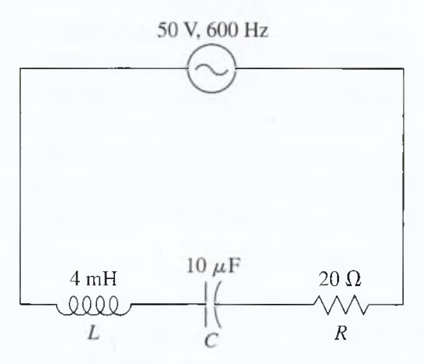


Figura 32.14

la capacitancia para que el circuito resuene a una frecuencia de 800 Hz? Resp. 9.89 μF

***32.48.** Un condensador de 8 μF está conectado en serie con un resistor de 40 Ω y con una fuente de ca de 117 V, a 60 Hz. ¿Cuál es la impedancia? ¿Cuál es el factor de potencia? ¿Cuánta potencia se pierde en el circuito?

***32.49.** Una persona desea construir un circuito que tenga una frecuencia de resonancia de 950 kHz. Si una bobina de ese circuito tiene una inductancia de 3 mH, ¿qué capacitancia habrá que añadir al circuito?
Resp. 9.36 pF

***32.50.** Un condensador de 50 μF y un resistor de 70 Ω están conectados en serie con una línea de ca de 120 V, a 60 Hz. Calcule la corriente en el circuito, el ángulo de fase y la pérdida total de potencia.

***32.51.** Remítase al problema 32.50. ¿Cuál es el voltaje a través del resistor? ¿Cuál es el voltaje a través del condensador? ¿Qué inductancia será necesario agregar al circuito para que entre en resonancia?
Resp. 95.6 V, 72.5 V, 141 mH

Preguntas para la reflexión crítica

***32.52.** Un inductor de 8 H tiene una resistencia de 200 Ω. Si este inductor se conecta repentinamente a través de una diferencia de potencial de 50 V, ¿cuál será la razón inicial del incremento de la corriente, en A/s? [Véase la ecuación (32.15).] ¿Cuál es la corriente estacionaria final? ¿Con qué razón aumenta la corriente al cabo de una constante de tiempo? ¿Cuánto tiempo después de conectar la fuente de fem llega la corriente a la mitad de su valor final?
Resp. 250 mA, 6.25 A/s, 2.31 A/s, 27.7 ms

***32.53.** En el capítulo 29 vimos que la densidad del flujo magnético dentro de un solenoide se calcula mediante:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

Aquí hemos usado l para indicar la longitud del solenoide, a fin de evitar confusiones con el símbolo L empleado para la inductancia. También sabemos que la fem inducida puede calcularse de dos formas:

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \mathscr{E} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Demuestre las relaciones siguientes para un solenoide de longitud l que tiene N espiras de área A:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad \text{y} \quad L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

***32.54.** Un inductor consta de una bobina de 30 cm de largo con 300 espiras cuya área es 0.004 m². Calcule la

inductancia (véase el problema 32.53). Se conecta una batería y la corriente aumenta de 0 a 2.00 A en 0.001 s. ¿Cuál es la fem media inducida en la bobina? Resp. 1.51 mH, −3.02 V

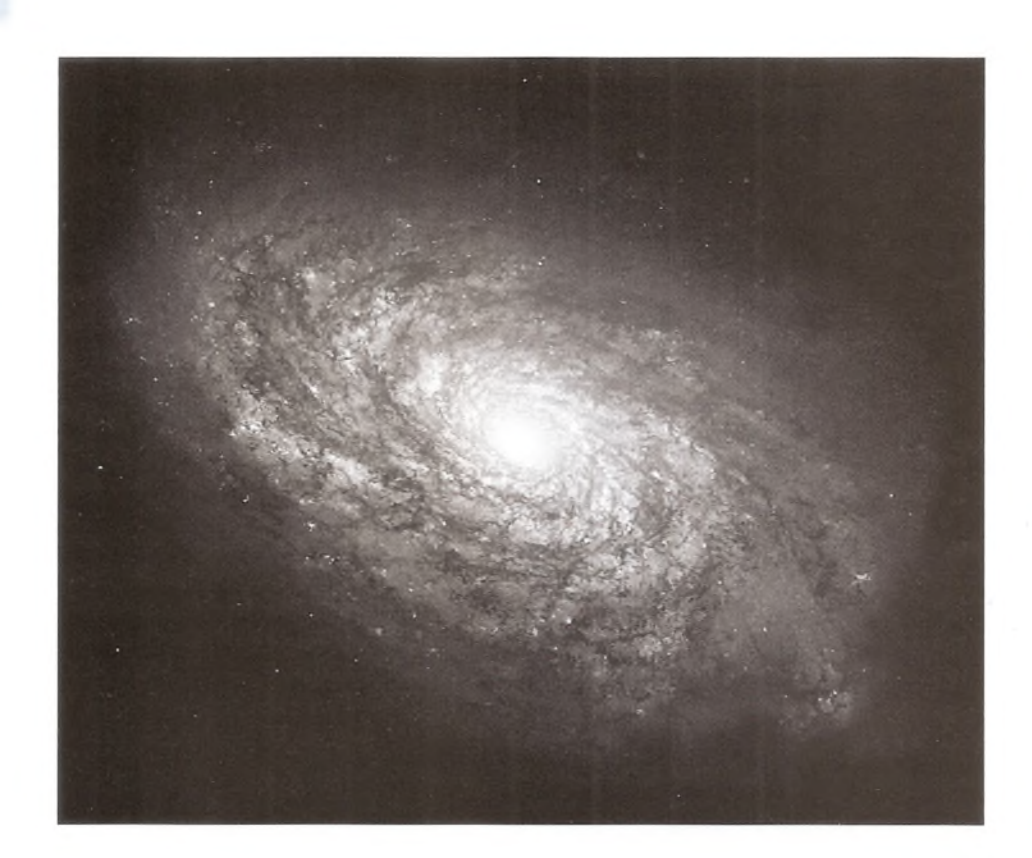
***32.55.** Un inductor, un resistor y un condensador están conectados en serie con una línea de ca de 60 Hz. Con un voltímetro conectado a cada uno de los elementos del circuito se obtienen las lecturas siguientes: $V_R = 60$ V, $V_L = 100$ V y $V_C = 160$ V. ¿Cuál es la caída total de voltaje en el circuito? ¿Cuál es el ángulo de fase?

***32.56.** El circuito de la antena de un receptor de radio consta de un condensador variable y una bobina de 9 mH. La resistencia del circuito es de 40 Ω. Una onda de radio de 980 kHz produce una diferencia de potencial de 0.2 mV en el circuito. Calcule la capacitancia necesaria para alcanzar la resonancia. ¿Cuál es la corriente al alcanzar la resonancia?

Resp. 2.9 pF, 5mA

***32.57.** Un circuito *RLC* en serie tiene los elementos siguientes: $L = 0.6$ H, $C = 3.5\ \mu$F y $R = 250\ \Omega$. El circuito es energizado por un generador que produce una fem *máxima* de 150 V, a 60 Hz. ¿Cuál es la corriente efectiva de ca? ¿Cuál es el ángulo de fase? ¿Cuál es la pérdida de potencia media en este circuito?

33 Luz e iluminación



El telescopio del Hubble capturó esta lista de la galaxia espiral, NGC 4414. Con base en mediciones meticulosas y precisas de la luminosidad, los astrónomos pudieron determinar que la luz proveniente de esta galaxia requirió más de 60 000 000 de años para llegar a la Tierra. En este capítulo estudiaremos la luz como la región visible en un espectro de ondas electromagnéticas. (*Fotografía por Hubble Heritage Team [AURA/STS CI/NASA].*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Analizará la investigación histórica acerca de la naturaleza de la luz y explicará por qué la luz a veces se comporta como onda y otras veces como partícula.
2. Describirá las grandes clasificaciones en el espectro electromagnético que se basan en la frecuencia, la longitud de onda o la energía.
3. Escribirá y aplicará fórmulas para mostrar la relación entre la velocidad, la longitud de onda y la frecuencia; y entre la energía y la frecuencia en el caso de la radiación electromagnética.
4. Describirá diversos experimentos que permiten hacer una estimación razonable de la rapidez de la luz.
5. Ilustrará con dibujos su comprensión de la formación de sombras, diferenciando *umbra* (*sombra*) y *penumbra*.
6. Demostrará que comprende los conceptos de *flujo luminoso*, *intensidad luminosa* e *iluminación*, y resolverá problemas similares a los que aparecen en este texto.

Una barra de hierro en reposo sobre una mesa se encuentra en equilibrio térmico con todo lo que está a su alrededor. Por su apariencia externa uno jamás sospecharía que internamente está activa. Todos los objetos emiten continuamente energía térmica radiante que está relacionada con su temperatura. La barra está en equilibrio térmico tan sólo porque irradia y absorbe energía con la misma proporción. Si se rompe el equilibrio al poner un extremo de la barra en contacto con una llama, la barra se vuelve más activa en su interior y emite energía térmica con mayor rapidez. Mientras el calentamiento continúa hasta alcanzar más o menos 600°C, parte de la radiación emitida desde la barra se torna *visible*; lo cual significa que afecta nuestro sentido de la vista. El color de la barra se torna rojo claro y se va volviendo más brillante a medida que se le suministra más calor.

La energía radiante emitida por este objeto, antes que dicho efecto se haga visible, consiste en ***ondas electromagnéticas*** de longitudes de onda mayores que la correspondiente a la luz roja. Las ondas de ese tipo se conocen como ***rayos infrarrojos***, lo que significa "por debajo del rojo". Si la temperatura de la barra se incrementa hasta aproximadamente 1500°C, se pone al rojo blanco, lo que indica una extensión aún más amplia de la energía radiante en la ***región visible***.

Este ejemplo establece las bases para nuestro estudio sobre la ***luz***. La naturaleza de la luz no es fundamentalmente distinta de la naturaleza u otros tipos de radiaciones electromagnéticas, por ejemplo, el calor, las ondas de radio o la radiación ultravioleta. La característica que distingue a la luz de otras radiaciones es su energía.

La luz es radiación electromagnética capaz de afectar el sentido de la vista.

El contenido de energía de la luz visible varía de aproximadamente 2.8×10^{-19} J a casi 5.0×10^{-19} J.

33.1 ¿Qué es la luz?

La respuesta a esta pregunta ha sido en extremo huidiza a través de la historia de la ciencia. La larga búsqueda para encontrar tal respuesta es un ejemplo que nos sirve de modelo con el fin de ilustrar el procedimiento científico aplicable en la resolución de un problema. Cada una de las hipótesis que surgieron con miras a explicar la naturaleza de la luz se puso a prueba, tanto lógica como experimentalmente. La afirmación de los filósofos de la antigüedad acerca de que el ojo emitía los rayos visuales hasta llegar al objeto percibido fracasó desde el punto de vista lógico y también en el plano experimental.

A fines del siglo XVII se propusieron dos teorías para explicar la naturaleza de la luz: la teoría de partículas (corpuscular) y la teoría ondulatoria. El principal defensor de la teoría corpuscular fue sir Isaac Newton. La teoría ondulatoria era apoyada por Christian Huygens (1629-1695), un matemático y científico holandés 13 años mayor que Newton. Cada una de esas teorías intentaba explicar las características de la luz observadas en esa época. Tres de estas importantes características se resumen a continuación:

1. *Propagación rectilínea:* La luz viaja en línea recta.
2. *Reflexión:* Cuando la luz incide en una superficie lisa, regresa a su medio original.
3. *Refracción:* La trayectoria de la luz cambia cuando penetra a un medio transparente.

De acuerdo con la teoría corpuscular, las partículas muy pequeñas, de masa insignificante, eran emitidas por fuentes luminosas tales como el Sol o una llama. Estas partículas viajaban hacia fuera de la fuente en líneas rectas con enorme rapidez. Cuando las partículas entraban al ojo, se estimulaba el sentido de la vista. La propagación rectilínea se explicaba fácilmente en términos de partículas. En realidad, uno de los más fuertes argumentos en favor de la teoría corpuscular se basó en esta propiedad. Se pensaba que las partículas producían sombras con contornos bien definidos como se muestra en la figura 33.1a, mientras que las ondas pueden flexionarse alrededor de los bordes. Dicha flexión de las ondas, como muestra la figura 33.1b, se llama ***difracción***.

Las sombras nítidas que se forman bajo los rayos luminosos hicieron pensar a Newton que la luz se debía componer de partículas. Huygens, por otra parte, explicó que la flexión de las ondas acuáticas y las ondas sonoras alrededor de los obstáculos se apreciaba fácilmente debido a sus grandes longitudes de onda. Él razonaba que si la luz era en realidad una serie de ondas

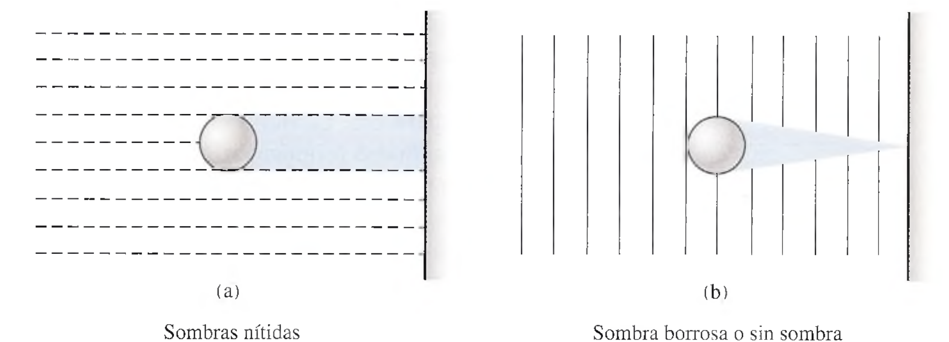


Figura 33.1 Un poderoso argumento en apoyo de la teoría corpuscular de la materia es la formación de sombras nítidas. Se sabe que las ondas se flexionan cuando encuentran obstáculos en su trayectoria.

con una longitud de onda corta, daría lugar a una sombra bien definida puesto que el grado de flexión sería pequeño.

Era difícil explicar por qué las partículas que viajaban en líneas rectas provenientes de gran número de direcciones podían cruzarse sin estorbarse entre sí. En un trabajo publicado en 1690, Huygens escribió:

> Si, además, prestamos atención y valoramos la extraordinaria rapidez con que la luz se propaga en todas direcciones, tomando en cuenta el hecho de que proviene de direcciones diferentes e incluso opuestas, los rayos se penetran sin obstaculizarse, por lo que podemos entender que siempre que veamos un objeto luminoso, esto no puede deberse a la transmisión de materia que nos llega desde el objeto, como si fuera un proyectil o una flecha volando a través del aire.

Huygens explicó la propagación de la luz en términos del movimiento de una perturbación a través de la distancia entre una fuente y el ojo. Basó su argumento en un principio sencillo que aún es útil en la actualidad para describir la propagación de la luz. Suponga que se deja caer una piedra en un estanque de agua en reposo. Se produce una perturbación que se mueve en una serie de ondas concéntricas, alejándose del lugar del impacto. La perturbación continúa incluso después de que la piedra toca el fondo del estanque. Ese tipo de ejemplo indujo a Huygens a postular que las perturbaciones que se producen en todos los puntos a lo largo de un frente de onda en movimiento en un instante determinado, pueden considerarse como fuentes para el frente de onda en el siguiente instante. El principio de Huygens establece lo siguiente:

> Cada punto de un frente de onda que avanza puede considerarse una fuente de ondas secundarias llamadas ondeletas. La nueva posición del frente de onda envuelve a las ondeletas emitidas desde todos los puntos del frente de onda en su posición previa.

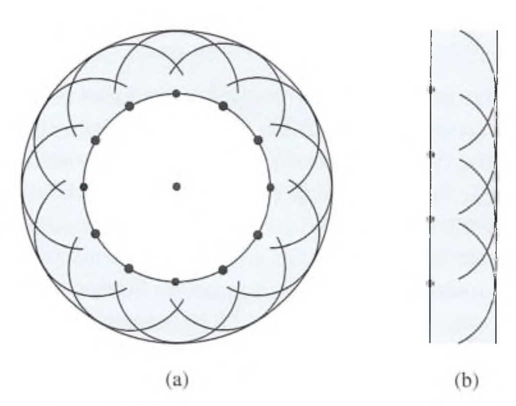


Figura 33.2 El principio de Huygens (a) para una onda esférica y (b) para una onda plana.

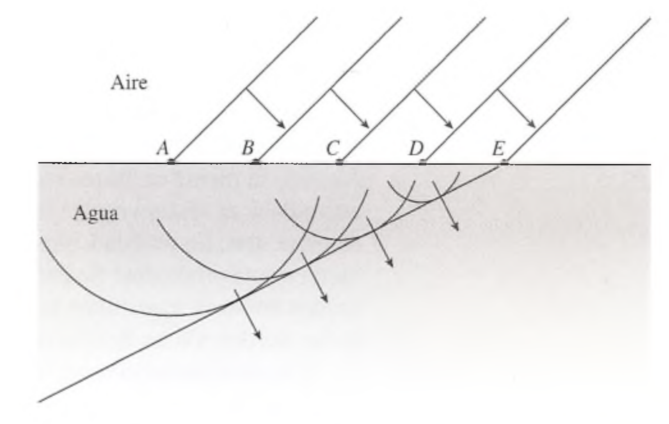


Figura 33.3 Explicación de Huygens acerca de la refracción en términos de la teoría ondulatoria.

La aplicación de este principio se ilustra en la figura 33.2 para los casos frecuentes de una onda plana y de una onda circular.

El principio de Huygens tuvo un particular éxito para explicar la reflexión y la refracción. La figura 33.3 muestra cómo se puede utilizar este principio para explicar la flexión de la luz al pasar del aire al agua. Cuando las ondas planas golpean la superficie del agua con cierto ángulo, los puntos *A*, *C* y *E* se vuelven las fuentes de nuevas ondeletas. La envoltura de estas ondeletas secundarias indica un cambio en la dirección. Se puede elaborar un esquema similar para explicar la reflexión.

La reflexión y la refracción se explicaron fácilmente en términos de la teoría corpuscular. Las figuras 33.4 y 33.5 ilustran los modelos que se pueden usar para explicar la reflexión y la refracción sobre la base de corpúsculos minúsculos. La existencia de partículas perfectamente elásticas de masa insignificante que rebotan de una superficie elástica podrían explicar la reflexión regular de la luz en superficies lisas. La refracción puede ser análoga al cambio de dirección de una pelota que rueda al encontrarse una pendiente. Esta explicación requería que las partículas de luz viajaran más rápido en el medio de refracción, mientras que la teoría ondulatoria necesitaba que la luz viajara más despacio en el medio de refracción. Newton aceptó que si pudiera demostrar que la luz viaja más lentamente en un medio material de lo que tarda en el aire, tendría que abandonar la teoría corpuscular. No fue sino hasta mediados del siglo XIX cuando Jean Foucault demostró en forma convincente que la luz viaja más lentamente en agua que en el aire.

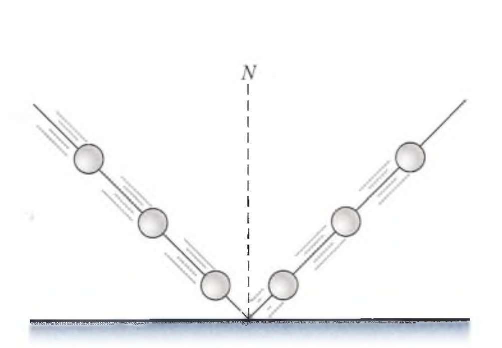


Figura 33.4 Explicación de la reflexión en términos de la teoría corpuscular de la luz.

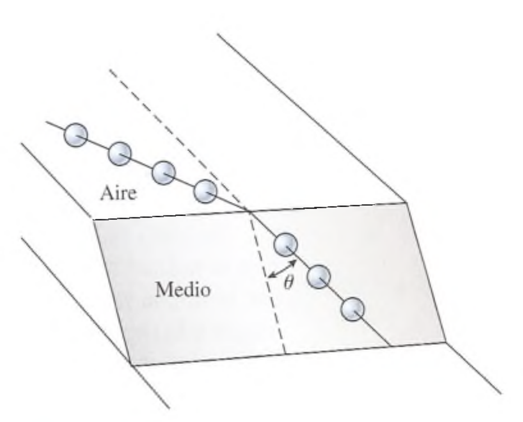


Figura 33.5 La refracción de la luz cuando pasa del aire a otro medio explicada por medio de un ejemplo mecánico.

33.2 Propagación de la luz

El descubrimiento de la interferencia y la difracción en 1801 y en 1816 inclinó el debate en favor de la teoría ondulatoria de Huygens. Sin duda, la interferencia y la difracción se podían explicar únicamente en términos de la teoría ondulatoria. Sin embargo, aún quedaba un problema sin resolver. Se creía que todos los fenómenos ondulatorios requerían de la existencia de un medio de transmisión. Así, por ejemplo, ¿cómo podían viajar las ondas a través del vacío si no había nada más que "vibrara"? Además, ¿cómo podría la luz llegar a la Tierra desde el Sol o desde otras estrellas a través de millones de millas de espacio vacío? Para evitar esta contradicción, los físicos postularon la existencia de un "éter transportador de luz". Se pensó que este medio universal, que lo penetraba todo, llenaba todo el espacio entre y dentro de todos los cuerpos materiales. Pero, ¿cuál era la naturaleza de ese éter? Con seguridad no podía ser un gas, un sólido o un líquido que obedeciera las leyes físicas conocidas en ese tiempo. Sin embargo, no podía desecharse la teoría ondulatoria tomando en cuenta las pruebas de la interferencia y la difracción. No parecía haber opción posible salvo definir el éter como "lo que transporta la luz".

En 1865, un físico escocés, James Clerk Maxwell, emprendió la tarea de determinar las propiedades de un medio que pudiera transportar luz y además tomar parte en la transmisión de calor y energía eléctrica. Su trabajo demostró que *una carga acelerada puede radiar ondas electromagnéticas en el espacio*. Maxwell explicó que la energía en una onda electromagnética

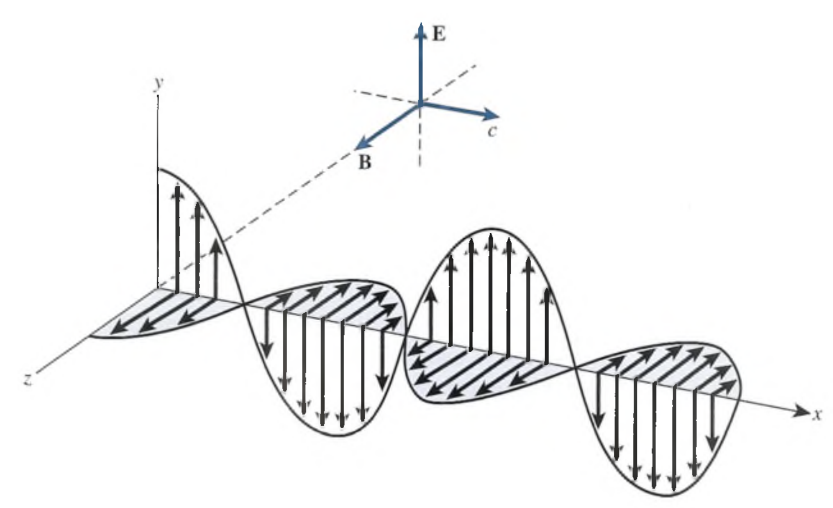


Figura 33.6 La teoría electromagnética sostiene que la luz se propaga como campos transversales oscilatorios. La energía se divide por igual entre los campos eléctrico **E** y magnético **B**, que son perpendiculares entre sí.

se divide por igual entre los campos eléctricos y magnéticos que son perpendiculares entre sí. Ambos campos oscilan en forma perpendicular a la dirección de propagación de la onda, como muestra la figura 33.6. Por tanto, una onda luminosa no tendría que depender de una materia que vibrara. Se propagaría mediante campos oscilatorios transversales. Una onda de ese tipo "surgiría" de los alrededores de una carga acelerada y cruzaría el espacio con la velocidad de la luz. Las ecuaciones de Maxwell predijeron que el calor y la acción eléctrica, al igual que la luz, se propagaban a la rapidez de la luz como perturbaciones electromagnéticas.

En 1885 H.R. Hertz logró confirmar experimentalmente la teoría de Maxwell, al probar que la radiación de la energía electromagnética puede ocurrir *a cualquier frecuencia*. Es decir, la luz, la radiación térmica y las ondas de radio son de la misma naturaleza, y todas ellas viajan a la rapidez de la luz (3×10^8 m/s). Todos los tipos de radiación pueden ser reflejados, enfocados mediante lentes, polarizados, etcétera. Parecía que la naturaleza ondulatoria de la luz no podía ya ser puesta en duda.

La confirmación de la teoría electromagnética despejó el camino para la caída del postulado del "éter transportador de luz". En 1887, A. A. Michelson, un físico estadounidense, demostró en forma contundente que la velocidad de la luz es constante, independientemente del movimiento de la fuente. No pudo encontrar ninguna diferencia entre la rapidez de la luz al viajar en dirección al movimiento de la Tierra y al viajar en dirección opuesta a dicho movimiento. Las personas que estén interesadas en estudiar más a fondo este análisis, deben analizar el *experimento de Michelson-Morley*. Más tarde, Einstein interpretó los resultados de Michelson, lo que significó que el concepto de éter debía ser abandonado en favor de espacio completamente vacío.

Maxwell pudo mostrar que la rapidez de cualquier onda electromagnética se relaciona con la permeabilidad μ y que la permitividad ϵ del medio en el cual viaja. Para el espacio libre, hemos mostrado que estos valores son

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2 \qquad \text{y} \qquad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

La velocidad de la luz puede determinarse a partir de

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{33.1}$$

La sustitución de las constantes revela que la velocidad de la luz es

$$c = 2.99792458 \times 10^8\ \text{m/s} \tag{33.2}$$

Como las ondas electromagnéticas viajan a la misma rapidez que la correspondiente a la luz, el tratamiento de la luz como onda electromagnética está sustentado.

Con la redefinición del metro en 1983, el estándar internacional para la medición de la luz se volvió la distancia recorrida por la luz en un tiempo de 1/299 792 458 s medido por

un reloj de cesio. Esta definición estableció la velocidad exacta de la luz como una constante universal igual en el valor dado en la ecuación (33.2). Aproximaciones útiles son 3×10^8 m/s y 186 000 mi/s. Estos valores se pueden utilizar en la mayoría de los cálculos físicos sin temor a cometer un error significativo.

33.3 Espectro electromagnético

FÍSICA HOY

La energía más baja de la luz visible se encuentra en el rojo. Debido a los fotones de energía baja del rojo, es menos probable que ocurran reacciones químicas no deseadas en la película expuesta con rojo que con otros colores. Ésta es la razón por la que la luz roja se usa en los cuartos oscuros fotográficos.

Actualmente, se sabe que el intervalo de frecuencias del espectro electromagnético es enorme. En la figura 33.7 se presenta un esquema de dicho espectro. La longitud de onda λ de la radiación electromagnética está relacionada con su frecuencia f mediante la ecuación general

$$c \times f\lambda \tag{33.3}$$

donde c es la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). En términos de longitudes de onda, el minúsculo segmento del espectro electromagnético conocido como *región visible* comprende de 0.00004 a 0.00007 cm.

Debido a las pequeñas longitudes de onda de la radiación luminosa, es más conveniente definir unidades de medida menores. Una unidad común es el ***nanómetro*** (nm).

Un nanómetro (1 nm) se define como la milmillonésima parte de un metro.

$$1 \text{ nm} = 10^{-9}\text{m} = 10^{-7} \text{ cm}$$

La región visible del espectro electromagnético se extiende desde 400 nm para la luz violeta hasta aproximadamente 700 nm para la luz roja. Otras unidades antiguas son el *milimicrón* (mμ), que es igual al nanómetro, y el *angstrom* (Å), que es igual a 0.1 nm.

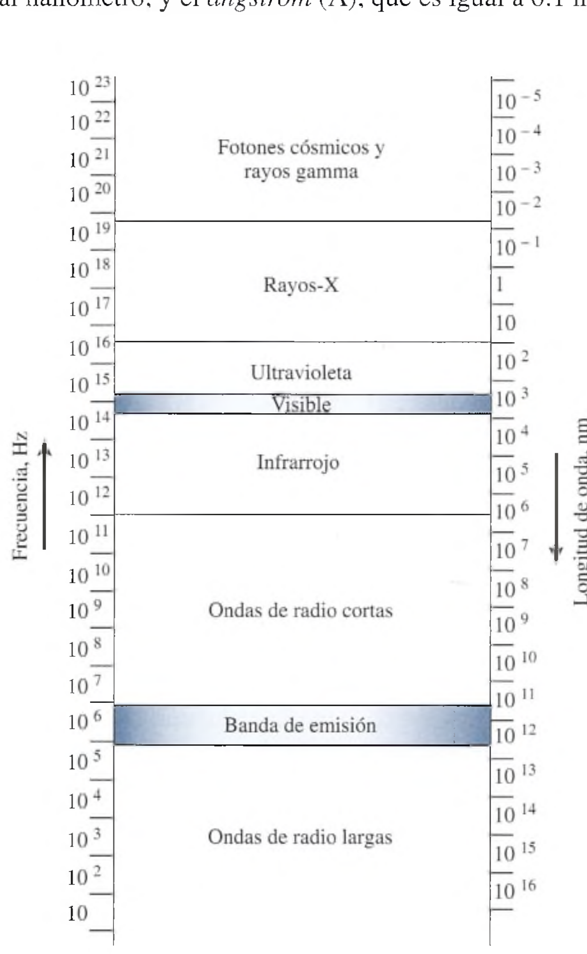


Figura 33.7 Espectro electromagnético.

Ejemplo 33.1 La longitud de onda de la luz amarilla de una llama de sodio es de 589 nm. Calcule su frecuencia.

Solución: La frecuencia se calcula a partir de la ecuación (33.1).

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{589 \times 10^{-9} \text{ m}}$$
$$= 5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Newton fue el primero en estudiar detalladamente la región visible dispersando la "luz blanca" a través de un prisma. En orden de longitudes de onda crecientes, los colores del espectro son: violeta (450 nm), azul (480 nm), verde (520 nm), amarillo (580 nm), anaranjado (600 nm) y rojo (640 nm). Quien haya visto un arco iris se ha dado cuenta de los efectos que tienen diferentes longitudes de onda de la luz sobre el ojo humano.

El espectro electromagnético es continuo; no hay separaciones entre una forma de radiación y otra. Los límites establecidos son arbitrarios y dependen de nuestra capacidad para percibir directamente una pequeña porción y para descubrir y medir las porciones que quedan fuera de la región visible.

El primer descubrimiento de radiación con longitudes de onda mayores que las correspondientes a la luz roja fue hecho por William Herschel en 1800. Estas ondas actualmente se conocen como radiación térmica y se les llama ***ondas infrarrojas***.

Poco después del descubrimiento de las ondas infrarrojas, se observó también la radiación de longitudes de onda más cortas que la luz visible. Estas ondas, ahora conocidas como ***ondas ultravioleta***, se descubrieron por su relación con el efecto que tienen sobre ciertas reacciones químicas.

La extensión de la región infrarroja con mayores longitudes de onda no se conoció en la mayor parte del siglo XIX. Por fortuna, la teoría electromagnética de Maxwell abrió la puerta al descubrimiento de muchas otras clasificaciones de radiación. El espectro de las ondas electromagnéticas en la actualidad se ha dividido por conveniencia en ocho regiones principales, que aparecen en la figura 33.7: (1) ondas largas de radio, (2) ondas cortas de radio, (3) la región infrarroja, (4) la región visible, (5) la región ultravioleta, (6) rayos X, (7) rayos gamma y (8) fotones cósmicos.

33.4 La teoría cuántica

Los trabajos de Maxwell y de Hertz respecto al establecimiento de la naturaleza electromagnética de las ondas de luz fueron en realidad uno de los hechos más trascendentes en la historia de la ciencia. No sólo explicaron la naturaleza de la luz, sino que dieron paso a una enorme variedad de ondas electromagnéticas. Resultó sorprendente que tan sólo dos años después de que Hertz verificara las ecuaciones de onda de Maxwell, la teoría ondulatoria de la luz haya tenido que enfrentar un nuevo reto. En 1887, Hertz observó que una chispa eléctrica podía saltar más fácilmente entre dos esferas cargadas cuando sus superficies estaban iluminadas por la luz que provenía de otra chispa. Este fenómeno, conocido como ***efecto fotoeléctrico***, se demostró mediante el aparato que se muestra en la figura 33.8. Un haz de luz incide sobre la superficie metálica A en un tubo al vacío. Los electrones emitidos por la luz son enviados al colector B por medio de baterías externas. El flujo de electrones se detecta mediante un dispositivo llamado *amperímetro*. El efecto fotoeléctrico es un desafío para la explicación en términos de la teoría ondulatoria. En realidad, la emisión de electrones puede explicarse más fácilmente a través de la antigua teoría corpuscular. Sin embargo, tampoco quedaban dudas acerca de las propiedades ondulatorias. La ciencia se enfrentó a una paradoja sorprendente.

El efecto fotoeléctrico, junto con otros experimentos que incluían la emisión y absorción de energía radiante, no podía explicarse únicamente mediante la teoría de las ondas electromagnéticas de Maxwell. En un esfuerzo por lograr observaciones experimentales que apoyaran la teoría, Max Planck, un físico alemán, publicó su *hipótesis cuántica* en 1901. Él encontró que los problemas con la teoría de la radiación se basaban en la suposición de que la energía radiaba en forma continua. Se postuló que la energía electromagnética se absorbía o emitía en paquetes

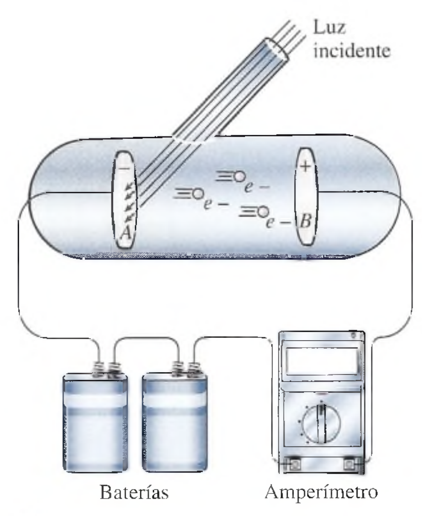


Figura 33.8 El efecto fotoeléctrico.

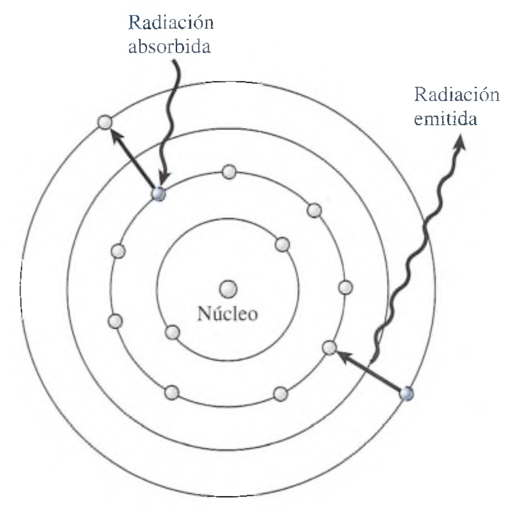


Figura 33.9 El histórico átomo de Bohr es una manera útil de visualizar las transiciones entre los niveles de energía.

discretos, o *cuantos*. El contenido de energía de estos cuantos, o ***fotones*** como fueron llamados, es proporcional a la frecuencia de la radiación. La ecuación de Planck se puede escribir como

$$E = hf \tag{33.4}$$

donde E = energía del fotón

f = frecuencia del fotón

h = factor de proporcionalidad llamado *constante de Planck* (6.626×10^{-34} J · s)

En 1905, Einstein amplió la idea propuesta por Planck y postuló que la energía en un haz de luz no se difunde en forma continua a través del espacio. Al suponer que la energía luminosa se concentra en pequeños paquetes (fotones) cuyo contenido de energía está dado por la ecuación de Planck, Einstein fue capaz de predecir el efecto fotoeléctrico matemáticamente. Por fin, la teoría se reconcilió con la observación experimental.

Por consiguiente, tal parece que la luz es *dual*. La teoría ondulatoria se conserva ya que se considera que el fotón tiene una frecuencia y una energía proporcional a la frecuencia. En la práctica actual se utiliza la teoría ondulatoria cuando se estudia la propagación de la luz. Por otra parte, la teoría corpuscular es necesaria para describir la interacción de la luz con la materia. Podemos pensar en la luz como energía radiante transportada por fotones y transmitida por un campo ondulatorio.

El origen de los fotones de luz no se comprendió sino hasta que Niels Bohr propuso en 1913 un modelo para el átomo basándose en la ***teoría cuántica***. Bohr postuló que los electrones se pueden mover alrededor del núcleo de un átomo únicamente en ciertas órbitas o *niveles de energía discretos*, como se aprecia en la figura 33.9. Se dijo que los átomos estaban *cuantizados*. Si en alguna forma se le suministra energía a los átomos, por ejemplo en forma de calor, los electrones orbitales pueden saltar a una órbita superior. Algún tiempo después, estos electrones excitados caerán de nuevo a su nivel original, liberando tantos fotones de energía como los que hayan sido absorbidos originalmente. Aunque el modelo de Bohr no es correcto en sentido estricto, estableció las bases para comprender la emisión y la absorción de radiación electromagnética en unidades cuánticas.

33.5 Rayos de luz y sombras

Una de las primeras propiedades de la luz que se estudiaron fue la propagación rectilínea y la formación de sombras. Instintivamente, confiamos mucho en esta propiedad para estimar dichas distancias, direcciones y formas. La formación de sombras nítidas se aprovecha en un reloj solar para medir el tiempo. En esta sección estudiaremos cómo se predice la formación de sombras.

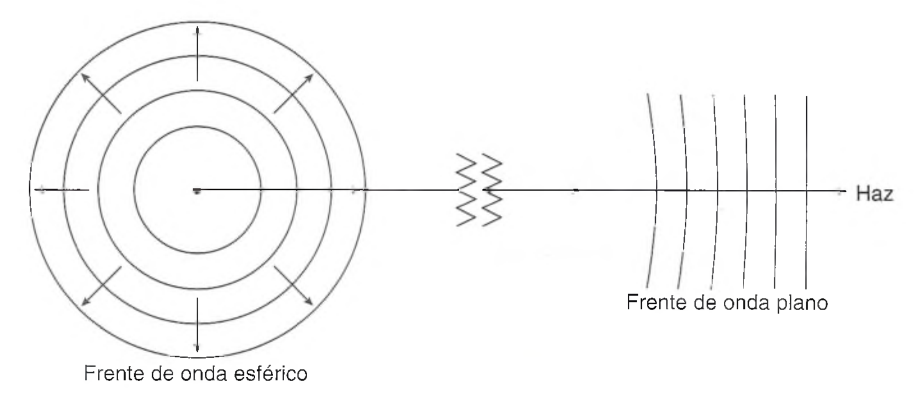


Figura 33.10 Un rayo es una línea imaginaria, trazada perpendicularmente a los frentes de onda que avanzan, lo que indica la dirección de la propagación de la luz.

De acuerdo con el principio de Huygens, cada punto en un frente de onda en movimiento puede considerarse como una fuente de ondeletas secundarias. El frente de onda en cualquier instante es la envoltura de estas ondeletas. Por tanto, la luz emitida en todas direcciones por medio de la fuente puntual de luz en la figura 33.10, puede representarse por una serie de frentes de onda esféricos que se mueven alejándose de la fuente a la rapidez de la luz. Para nuestros propósitos, una ***fuente puntual*** de luz es aquella cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con las distancias estudiadas. Observe que los frentes de onda esféricos se vuelven prácticamente fuentes de onda planos en cualquier dirección específica a distancias muy alejadas de la fuente. Una línea recta imaginaria trazada perpendicularmente a los frentes de onda en la dirección de los frentes de onda en movimiento se llama ***rayo***. Por supuesto, hay un número infinito de rayos que parten de la fuente puntual.

Cualquier objeto de color oscuro absorbe luz, pero uno blanco absorbe casi toda la luz que recibe. La luz que no es absorbida cuando golpea un objeto, es reflejada o transmitida. Si toda la luz que incide sobre un objeto se refleja o se absorbe, se dice que el objeto es *opaco*. Puesto que la luz no puede pasar a través de un cuerpo opaco, se producirá una sombra en el espacio situado atrás del objeto. La sombra formada por una fuente puntual de luz se ilustra en la figura 33.11. Puesto que la luz se propaga en líneas rectas, los rayos que emergen de la fuente pasan por los bordes del objeto opaco formando una sombra nítida proporcional a la forma del objeto. Esa región en la cual no penetra la luz se llama ***umbra*** o ***sombra***.

Si la fuente de luz es de tipo extendido y no puntual, la sombra consistirá en dos porciones, como muestra la figura 33.12. La porción interior no recibe luz de la fuente y por tanto es *umbra*. La porción exterior se denomina ***penumbra***. Un observador dentro de la penumbra podría ver una porción de la fuente pero no toda la fuente. Un observador situado fuera de ambas regiones podría ver toda la fuente. Los eclipses solares y lunares pueden estudiarse mediante construcciones de sombra similares.

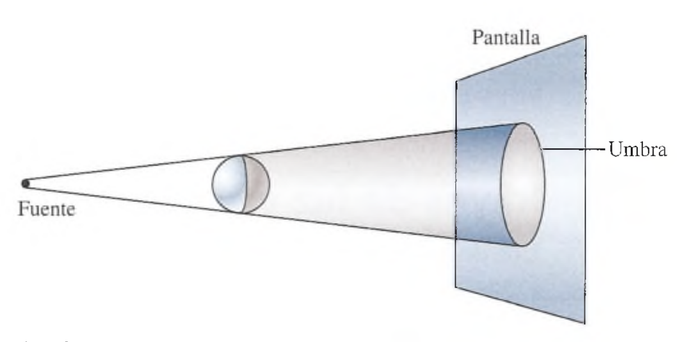


Figura 33.11 Sombra formada por una fuente puntual de luz.

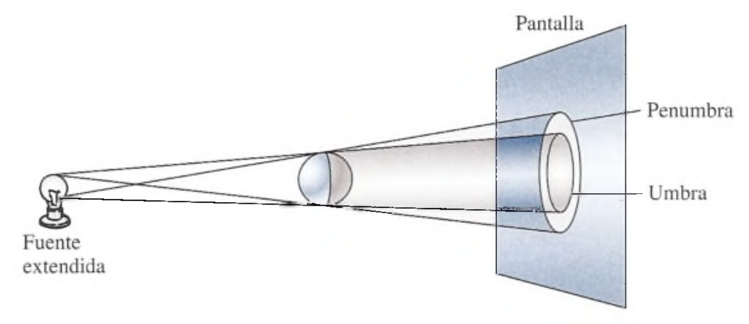


Figura 33.12 Sombras formadas por una fuente de luz extendida.

33.6 Flujo luminoso

La mayoría de las fuentes de luz emiten energía electromagnética distribuida en múltiples longitudes de onda. Se suministra energía eléctrica a una lámpara, la cual emite radiación. Esta energía radiante emitida por la lámpara por unidad de tiempo se llama potencia radiante o ***flujo radiante***. Sólo una pequeña porción de esta potencia radiante se encuentra en la región visible: en la región entre 400 y 700 nm y se llama ***flujo luminoso***. El sentido de la vista depende tan sólo de la energía radiada visible o *luminosa*, por unidad de tiempo.

> El flujo luminoso es la parte de la potencia radiante total emitida por una fuente de luz que es capaz de afectar el sentido de la vista.

En una lámpara común de luz incandescente, sólo aproximadamente el 10 por ciento de la energía radiante es flujo luminoso. La mayor parte de la potencia radiante no es luminosa.

El ojo humano no es sensible de igual manera a todos los colores. En otras palabras, iguales potencias radiantes de diferentes longitudes de onda no producen la misma brillantez. Una lámpara de luz verde de 40 W se ve más brillante que una lámpara de luz azul de 40 W. La figura 33.13 muestra una gráfica que indica la respuesta del ojo a diversas longitudes de onda. Observe que la curva de sensibilidad tiene forma de campana centrada aproximadamente en la región media del espectro visible. En condiciones normales, el ojo es más sensible a la luz verde-amarilla de longitud de onda de 555 nm. La sensibilidad decae rápidamente para longitudes de onda más largas y más cortas.

Si la unidad elegida para el flujo luminoso debe corresponder a la respuesta sensitiva del ojo humano, es preciso definir una nueva unidad. El watt (W) no es suficiente debido a que las sensaciones visuales no son las mismas para colores diferentes. Lo que se necesita es una unidad que mida la *brillantez*. Dicha unidad es el *lumen* (lm), el cual se determina por comparación con una fuente patrón.

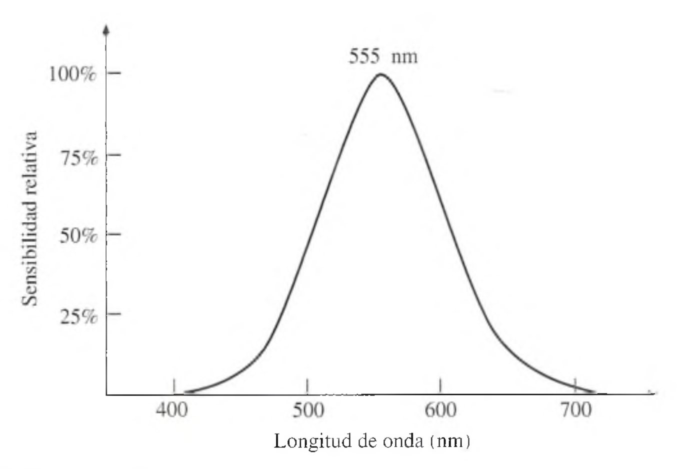


Figura 33.13 Curva de sensibilidad.

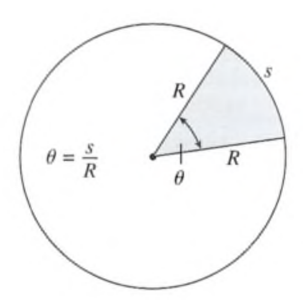


Figura 33.14 Definición de ángulo plano θ expresado en radianes.

Para comprender la definición de un lumen en términos de la fuente patrón, debemos primero desarrollar el concepto de un ángulo sólido. Un ángulo sólido en ***estereorradianes*** (sr) se define en la misma forma que un ángulo plano se define en radianes. En la figura 33.146 el ángulo θ en radianes es

$$\theta = \frac{s}{R} \quad \text{rad} \tag{33.5}$$

donde s es la longitud del arco y R es el radio. En forma similar se define el ángulo sólido Ω en la figura 33.15. Éste puede pensarse como la abertura del extremo de un cono subtendido por un segmento de área sobre la superficie esférica.

Un estereorradián (sr) es el ángulo sólido subtendido en el centro de una esfera por un área A sobre su superficie que es igual al cuadrado de su radio R.

En general, el ángulo sólido en estereorradianes está dado por

$$\Omega = \frac{A}{R^2} \quad \text{sr} \tag{33.6}$$

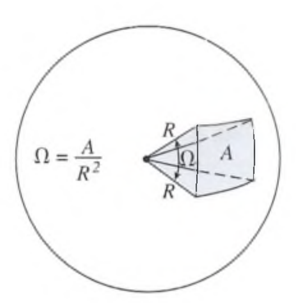


Figura 33.15 Definición de ángulo sólido Ω en estereorradianes.

El estereorradián, igual que el radián, es una cantidad adimensional.

Del mismo modo que hay 2π rad en un círculo completo, se puede demostrar por medio de la ecuación (33.6) que hay 4π sr en una esfera completa.

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ sr}$$

Observe que el ángulo sólido es independiente de la distancia de la fuente. Hay 4π sr en una esfera, independientemente de la longitud de su radio.

Ejemplo 33.2

¿Qué ángulo sólido se subtiende en el centro de una esfera de 8 m de diámetro por medio de un área de 1.5 m^2 sobre su superficie?

Solución: De la ecuación (33.6) queda

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{1.5 \text{ m}^2}{(4 \text{ m})^2}; \qquad \Omega = 0.0938 \text{ sr}$$

Ahora estamos en condiciones de aclarar la definición de una unidad que mide al flujo luminoso. El ***lumen*** se define por comparación con una fuente patrón reconocida internacionalmente.

Un lumen (lm) es el flujo luminoso (o potencia radiante visible) emitida desde una abertura de 1/60 cm^2 de una fuente patrón e incluido dentro de un ángulo sólido de 1 sr.

La fuente patrón consiste en un recipiente hueco que se mantiene a la temperatura de solidificación del platino, aproximadamente 1773°C. En la práctica es más conveniente usar lámparas incandescentes estándar que han sido calibradas por comparación con el patrón.

Otra definición conveniente de lumen utiliza la curva de sensibilidad (figura 33.13) como base para establecer el flujo luminoso. Al relacionarla con la fuente patrón, 1 lm se define en función de la potencia radiante de la luz verde-amarilla.

Un lumen es equivalente a 1/680 W de luz verde-amarilla de 555 nm de longitud de onda.

Para determinar el flujo luminoso emitido por luz de diferente longitud de onda, debe usarse la curva de luminosidad a fin de compensar la sensibilidad visual.

Ejemplo 33.3

Una fuente de luz roja monocromática (600 nm) produce una potencia radiante visible de 4 W. ¿Cuál es el flujo luminoso en lúmenes?

Plan: El flujo luminoso puede estimarse por medio del estudio de la curva de luminosidad. Sabemos que la curva alcanza su punto máximo a 680 lúmenes por watt para la luz verde-amarilla (555 nm). El porcentaje del descenso de la intensidad relativa para la luz roja puede estimarse a partir de la curva de luminosidad (véase la figura 33.13) y usarse para calcular el flujo luminoso.

Solución: Si la luz fuera verde-amarilla (555 nm) en vez de roja, tendría un flujo luminoso F dado por

$$F = (680 \text{ lm/W})(4 \text{ W}) = 2720 \text{ lm}$$

A partir de la curva de sensibilidad, la luz roja tiene una longitud de onda de 600 nm y produce aproximadamente el 59 por ciento de la respuesta obtenida con la luz verde-amarilla. Así pues, el flujo luminoso que emana de la fuente de luz roja es

$$F = (0.59)(2720 \text{ lm}) = 1600 \text{ lm}$$

El flujo luminoso con frecuencia se calcula en el laboratorio determinando la iluminación que produce sobre un área de superficie conocida.

33.7 Intensidad luminosa

La luz viaja radialmente hacia afuera en líneas rectas desde una fuente que es pequeña en comparación con sus alrededores. Para una fuente de luz de ese tipo, el flujo luminoso incluido en un ángulo sólido Ω permanece igual a cualquier distancia de la fuente. Por tanto, con frecuencia es más útil hablar del *flujo por unidad de ángulo sólido* que hablar simplemente del flujo total. La cantidad física que expresa esta relación se llama ***intensidad luminosa***.

La intensidad luminosa I de una fuente de luz es el flujo luminoso F emitido por unidad de ángulo sólido Ω.

$$I = \frac{F}{\Omega} \qquad \textbf{(33.7)}$$

La unidad de intensidad es el *lumen por estereorradián* (lm/sr), llamada *candela* (cd). La candela o ***bujía***, como a veces se le llama, se originó cuando el patrón internacional quedó definido en términos de la cantidad de luz emitida por la llama de cierta bujía. Este patrón no resultó adecuado y se reemplazó finalmente por el patrón de platino.

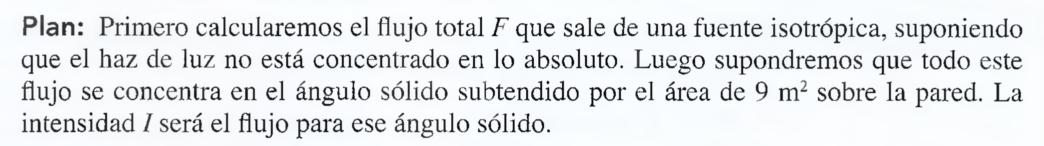
La mayor parte de las fuentes de luz proyecta luz en una dirección en particular. Una ***fuente isotrópica*** es aquella que emite luz de manera uniforme en todas direcciones. Podemos establecer una expresión para calcular el flujo total emitido por una fuente isotrópica al considerar que el ángulo sólido para dicha fuente debe ser 4π sr. El flujo F, a partir de la ecuación (33.7), sería

$$F = \Omega I = 4\pi I \qquad \textit{Fuente isotrópica} \qquad \textbf{(33.8)}$$

Por ejemplo, si la intensidad luminosa de una fuente de luz es *1 candela* (1 lm/sr), el flujo luminoso que sale de la fuente sería 4π *lúmenes*.

Ejemplo 33.4

Un proyector de luz está equipado con una lámpara de 40 cd que concentra un haz de luz sobre una pared vertical. El haz cubre un área de 9 m^2 de la pared, y el proyector está situado a 20 m de dicha pared. Calcule la intensidad luminosa del proyector.



Plan: Primero calcularemos el flujo total F que sale de una fuente isotrópica, suponiendo que el haz de luz no está concentrado en lo absoluto. Luego supondremos que todo este flujo se concentra en el ángulo sólido subtendido por el área de 9 m^2 sobre la pared. La intensidad I será el flujo para ese ángulo sólido.

Solución: El flujo total emitido por la lámpara de 40 cd se calcula a partir de la ecuación (33.7).

$$F = 4\pi I = (4\pi)(40 \text{ cd}) = 160\pi \text{ lm}$$

Este flujo total se concentra por medio de reflectores y lentes en un ángulo sólido determinado por

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{9 \text{ m}^2}{(20 \text{ m})^2} = 0.0225 \text{ sr}$$

La intensidad del haz se encuentra a partir de la ecuación (33.7).

$$I = \frac{F}{\Omega} = \frac{160\ \pi \text{ lm}}{0.0225 \text{ sr}} = 2.23 \times 10^4 \text{ cd}$$

Observe que las unidades de intensidad (cd) y las unidades de flujo (lm) son iguales desde el punto de vista dimensional. Esto es cierto debido a que el ángulo sólido en estereorradianes es adimensional.

33.8 Iluminación

Si la intensidad de la fuente aumenta, el flujo luminoso transmitido a cada unidad de área vecina a la fuente también aumenta. La superficie aparece más brillante. En la medición de la eficiencia luminosa, el ingeniero se interesa en la densidad del flujo luminoso sobre una superficie. Esto nos lleva entonces a analizar la ***iluminación*** de una superficie.

La iluminación E de una superficie A se define como el flujo luminoso F por unidad de área.

$$E = \frac{F}{A} \tag{33.9}$$

Cuando el flujo F se mide en lúmenes y el área A en metros cuadrados, la iluminación E tiene las unidades de *lúmenes por metro cuadrado* o *lux* (lx). Cuando A se expresa en pies cuadrados, E se da en *lúmenes por pies cuadrados*. Al lumen por pie cuadrado a veces se le denomina *pie-candela*.

La aplicación directa de la ecuación (33.9) requiere de un conocimiento del flujo luminoso que incide en una superficie dada. Desafortunadamente, el flujo de fuentes de luz comunes es difícil de determinar. Por esta razón, la ecuación (33.9) se usa con más frecuencia para calcular el flujo cuando A se conoce, y E se calcula a partir de la intensidad medida.

Para entender la relación entre intensidad e iluminación, consideremos una superficie A a una distancia R de una fuente puntual de intensidad I, como muestra la figura 33.16. El ángulo sólido Ω subtendido por la superficie de la fuente es

$$\Omega = \frac{A}{R^2}$$

donde el área A es perpendicular a la luz emitida. Si el flujo luminoso forma un ángulo θ con la normal de la superficie, como muestra la figura 33.17 debemos considerar el área proyectada $A \cos\theta$. Ésta representa el área efectiva que el flujo "ve". Por tanto, el ángulo sólido, en general, se puede determinar a partir de

$$\Omega = \frac{A\cos\theta}{R^2}$$

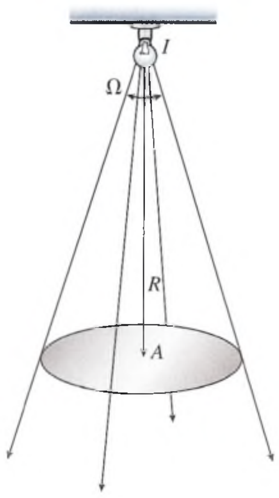


Figura 33.16 Cálculo de la iluminación de una superficie perpendicular al flujo luminoso incidente.

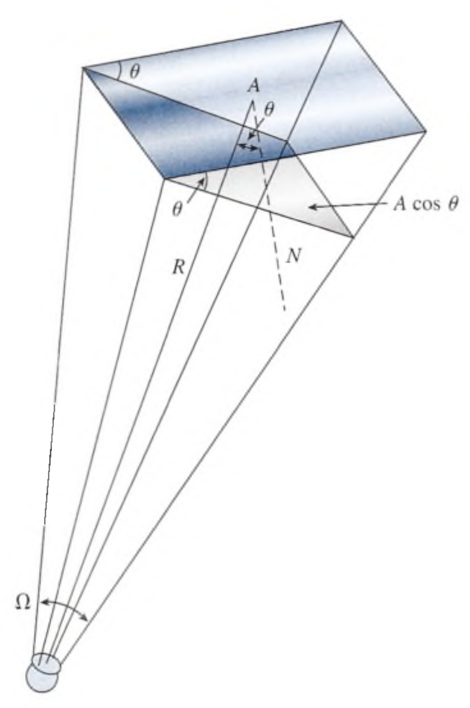


Figura 33.17 Cuando una superficie forma un ángulo θ con el flujo luminoso incidente, la iluminación E es proporcional a la componente $A \cos \theta$ de la superficie perpendicular al flujo luminoso.

Al despejar el flujo luminoso F de la ecuación (33.7), obtenemos

$$F = I\Omega = \frac{IA \cos \theta}{R^2} \tag{33.10}$$

Ahora ya es posible expresar la iluminación como una función de la intensidad. Sustituyendo la ecuación (33.10) en la ecuación que define la iluminación nos queda

$$E = \frac{F}{A} = \frac{IA \cos \theta}{AR^2}$$

o bien

$$E = \frac{I \cos \theta}{R^2} \tag{33.11}$$

Para el caso especial en el que la superficie es normal al flujo, $\theta = 0°$, y la ecuación (33.11) se simplifica a

$$E = \frac{I}{R^2} \qquad \textit{Superficie normal} \tag{33.12}$$

Debe verificar que las unidades de *candela por metro cuadrado* sean equivalentes dimensionalmente a las unidades de *lúmenes por metro cuadrado* o *lux*.

Ejemplo 33.5

Una lámpara incandescente de 100 W tiene una intensidad luminosa de 125 cd ¿Cuál es la iluminación de una superficie situada a 3 ft abajo de la lámpara?

Solución: Sustituyendo directamente en la ecuación (33.12), obtenemos

$$E = \frac{I}{R^2} = \frac{125 \text{ cd}}{(3 \text{ ft})^2} = 13.9 \text{ lm/ft}^2$$

Ejemplo 33.6

Una lámpara de filamento de tungsteno cuya intensidad es de 300 cd está situada a 2.0 m de una superficie de 0.25 m^2 de área. El flujo luminoso forma un ángulo de 30° con la normal a la superficie. (a) ¿Cuál es la iluminación? (b) ¿Cuál es el flujo luminoso que choca contra la superficie?

Plan: Observe la figura 33.17 y note que la iluminación disminuye con el cuadrado de la distancia. Al multiplicar por el coseno del ángulo dado, tendremos el área efectiva penetrada por el flujo. Podemos entonces calcular la iluminación y el flujo.

Solución (a): La iluminación se determina directamente a partir de la ecuación (33.11).

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} = \frac{(300\text{ cd})(\cos 30°)}{(2\text{ m})^2} = 65\text{ lx}$$

Solución (b): El flujo que incide en la superficie se calcula despejando F de la ecuación (33.9). De modo que

$$F = EA = (65\text{ lx})(0.25\text{ m}^2)$$
$$= 16.2\text{ lm}$$

Las ecuaciones anteriores que incluyen la iluminación y la intensidad luminosa son formulaciones matemáticas de la *ley del recíproco del cuadrado*, que puede enunciarse en la siguiente forma:

> La iluminación de una superficie es proporcional a la intensidad luminosa de una fuente de luz puntual y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Si la luz que ilumina una superficie se eleva al doble de su altura original, la iluminación será solamente la cuarta parte del total. Si se triplica la distancia de la lámpara, la iluminación se reduce a una novena parte del total. En la figura 33.18 se ilustra esta relación del recíproco del cuadrado.

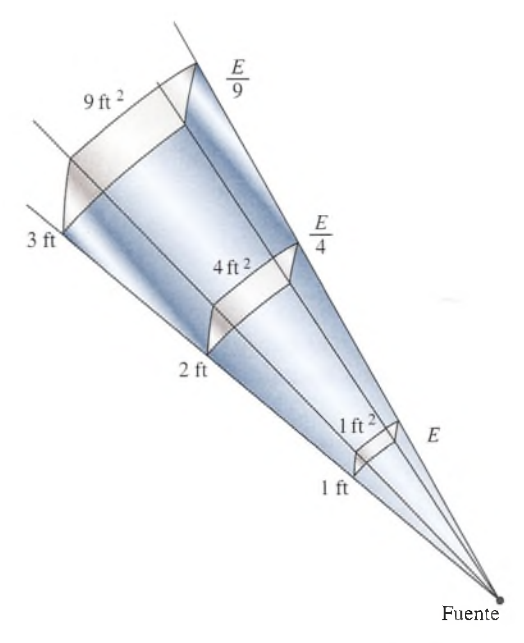


Figura 33.18 La intensidad luminosa I es constante para un ángulo sólido dado Ω. Sin embargo, la iluminación E (flujo por unidad de área) disminuye en proporción al cuadrado de la distancia a la fuente de luz.

Resumen y repaso

Resumen

La investigación sobre la naturaleza de la luz sigue su marcha, pero los experimentos demuestran que la luz se comporta a veces como partículas y otras veces como una onda. La teoría moderna sostiene que la luz es una radiación electromagnética y que su energía radiante se transporta por medio de fotones que viajan por un campo ondulatorio. Las principales ideas y fórmulas presentadas en este capítulo aparecen resumidas a continuación.

- La longitud de onda λ de la radiación electromagnética está relacionada con su frecuencia f según la siguiente ecuación general:

$$c = f\lambda \qquad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- El rango de longitudes de onda que corresponde a la luz visible abarca desde 400 nm para el violeta, hasta 700 nm en el caso del rojo.

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \qquad \textit{El nanómetro se usa para medir longitudes de onda.}$$

- La energía de los fotones luminosos es proporcional a la frecuencia.

$$E = hf \qquad E = \frac{hc}{\lambda} \qquad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

La constante h es la *constante de Planck*.

- El *flujo luminoso* ha sido definido como la parte de la potencia radiante total emitida por una fuente de luz, que es capaz de afectar el sentido de la visión. En virtud de que la percepción y la sensibilidad visuales varían de uno a otro individuos, es necesario definir la intensidad luminosa en términos de una fuente estándar y un ángulo sólido bien definido (el estereorradián). En comparación con esas normas, podemos precisar la iluminación de superficies, que es tan importante para el diseño de centros de trabajo en la industria.
- La *intensidad luminosa* de una fuente de luz es el flujo luminoso F por unidad de ángulo sólido Ω. El *flujo luminoso* es la potencia radiante en la región visible y su unidad de medición es el *lumen*.

$$1 \text{ lm} = \frac{1}{680} \text{ W} \quad \text{para luz de 555 nm} \qquad \textit{El lumen}$$

$$\Omega = \frac{A}{R^2} \qquad \textit{Ángulo sólido en estereorradianes}$$

$$I = \frac{F}{\Omega} \qquad \textit{Intensidad luminosa} \quad (1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr})$$

- En el caso de una fuente isotrópica, es decir, la que emite luz en todas las direcciones, el flujo luminoso es

$$F = 4\pi I \qquad \textit{Fuente isotrópica}$$

- La iluminación E de una superficie A se define como el flujo luminoso por unidad de área.

$$E = \frac{F}{A} \qquad E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \textit{Iluminación} \quad (\text{lm/m}^2), \text{ lx}$$

Conceptos clave

candela 653
difracción 643
efecto fotoeléctrico 648
estereorradián 652
flujo luminoso 651
flujo radiante 651
fotones 649
fuente isotrópica 653
fuente puntual 650
iluminación 654
intensidad luminosa 653
lumen 652
luz 643
nanómetro 647
onda electromagnética 643
onda infrarroja 648
onda ultravioleta 648
penumbra 650
rayo de luz 650
rayo infrarrojo 643
región visible 643
teoría cuántica 649
umbra 650

Preguntas de repaso

33.1. ¿En qué consiste la naturaleza dual de la luz? ¿En qué aspectos la luz se comporta como partículas? ¿En qué aspectos la luz se comporta como una onda?

33.2. Explique de qué manera la energía de una onda electromagnética depende de su frecuencia y cómo ésta depende de la longitud de onda.

33.3. Cuando la luz pasa del vidrio al aire, su energía en el vidrio es la misma que su energía en el aire. ¿También su frecuencia es la misma? ¿Qué podemos decir de su longitud de onda? Explique sus respuestas.

33.4. En los hornos de microondas, la televisión y el radar usan ondas electromagnéticas comprendidas entre las infrarrojas y las ondas de radio. Compare la energía, la frecuencia y las longitudes de onda que corresponden a esas ondas con la energía, la frecuencia y las longitudes de onda de la radiación visible.

33.5. Repase la definición de radián y comente cuál es la semejanza entre el estereorradián para medir ángulos sólidos y el radián que mide ángulos planos. ¿Cuántos radianes contiene un círculo completo? ¿Cuántos estereorradianes hay en una esfera completa?

33.6. Elabore un diagrama para ilustrar un eclipse solar e indique las regiones de umbra y penumbra. Si observa un eclipse parcial de Sol, ¿se encuentra usted en la región de umbra o en la penumbra?

33.7. ¿Puede usted justificar la siguiente definición de lumen? *Un lumen es igual al flujo luminoso que incide en una superficie de un metro cuadrado, estando todos los puntos de dicha superficie a 1 metro de una fuente puntual uniforme de 1 candela.*

33.8. Una unidad más antigua era el *pie-candela*, definido como la iluminación E que recibe una superficie de 1 ft^2 colocada a una distancia de 1 ft de una fuente de luz de 1 cd. Explique por qué esta definición es equivalente a la que hemos dado en este texto.

33.9. Describa la distribución del flujo luminoso que proviene de una lámpara incandescente. ¿Por qué ese tipo de lámpara no es una fuente isotrópica?

33.10. Comente los factores que afectan la iluminación que recibe una mesa en un taller de máquinas.

33.11. A veces se habla de iluminación en términos de *densidad de flujo*. Explique por qué puede ser apropiado utilizar ese término.

33.12. La *fotometría* es la ciencia de medir la luz. La intensidad de una fuente luminosa se puede determinar por medio del fotómetro ilustrado en la figura 33.19. La intensidad luminosa I_x de una fuente desconocida se calcula comparándola visualmente con una fuente patrón de intensidad conocida I_s. Si las distancias desde cada una de las fuentes se ajustan para que la mancha de aceite reciba la misma iluminación de cada una de las fuentes, la intensidad desconocida I_x se puede calcular aplicando la ley del recíproco del cuadrado. Obtenga usted la ecuación de la fotometría

$$\frac{I_x}{r_x^2} = \frac{I_s}{r_s^2} \qquad \textit{Ecuación de la fotometría} \qquad \textbf{(33.13)}$$

donde r_s es la distancia de la fuente patrón y r_x es la distancia de la fuente desconocida.

33.13. Si se desea comparar dos lámparas de 40 W por medio del fotómetro, ¿tendrán que estar forzosamente a la misma distancia de la mancha de aceite?

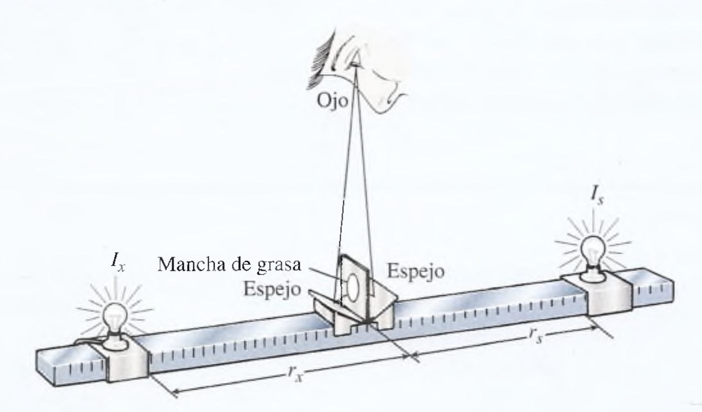


Figura 33.19 El fotómetro de mancha de aceite se usa para medir la intensidad de una fuente de luz desconocida, mediante la comparación con una fuente patrón (estándar).

Problemas

Sección 33.2 La propagación de la luz y Sección 33.3 El espectro electromagnético

33.1. Un espectrómetro infrarrojo explora las longitudes de onda desde 1 hasta 16 μm. Exprese este rango en función de las frecuencias de los rayos infrarrojos. Resp. 1.88×10^{13} a 30.0×10^{13}

33.2. ¿Cuál es la frecuencia de la luz violeta cuya longitud de onda es de 410 nm?

33.3. Un radiador de microondas que se utiliza para medir la rapidez de los automóviles emite una radiación cuya frecuencia es 1.2×10^9 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda? Resp. 250 mm

33.4. ¿Cuál es el rango de frecuencia de la luz visible?

33.5. Si la constante de Planck h es igual a 6.626×10^{-34} Js, ¿Cuál es la energía de una luz cuya longitud de onda es 600 nm? Resp. 3.31×10^{-19} J

33.6. ¿Cuál es la frecuencia de una luz cuya energía es 5×10^{-19} J?

33.7. La frecuencia de la luz verde-amarilla es 5.41×10^{-14} Hz. Exprese la longitud de onda de esa luz en nanómetros y en angstroms. Resp. 555 nm, 5 550 A

33.8. ¿Cuál es la longitud de onda de una luz cuya energía es 7×10^{-19} J?

33.9. El Sol está aproximadamente 93 millones de millas de la Tierra. ¿Cuánto tiempo tarda la luz emitida por el Sol en llegar hasta nosotros en la Tierra? Resp. 8.33 min

33.10. Una rayo láser de helio-neón tiene una frecuencia de 4.74×10^{-14} Hz y una potencia de 1 mW. ¿Cuál es el número promedio de fotones por segundo propagados por este rayo?

33.11. La luz que llega hasta nosotros desde la estrella más cercana, Alfa Centauro, tarda 4.3 años en su recorrido. ¿Cuál es esa distancia en millas? ¿Y en kilómetros? Resp. 2.53×10^{13} mi, 4.07×10^{13} km

33.12. Una nave espacial que vuela en torno de la Luna a una distancia de 384 000 km de la Tierra se comunica por radio con una base terrestre. ¿Cuánto tiempo transcurre entre el envío y la recepción de la señal?

33.13. Una nave espacial envía una señal que tarda 20 min en llegar a la Tierra. ¿A qué distancia está la nave espacial de la Tierra? Resp. 3.60×10^{11} m

Sección 33.5 Rayos de luz y sombras

33.14. La sombra proyectada en una pantalla que se encuentra a 4 m de distancia de una fuente puntual de luz tiene 60 cm de altura. ¿Cuál será la altura del objeto que la proyecta, colocado a 1 m de la fuente de luz y a 3 m de la sombra?

33.15. Una fuente luminosa puntual está colocada a 15 cm de una regla de 6 cm dispuesta en posición vertical. Calcule la longitud de la sombra que proyecta la regla en una pared que está a 40 cm de ésta. Resp. 22.0 cm

33.16. ¿A qué distancia al frente de una fuente puntual de luz se debe colocar un plato de 80 mm de diámetro para que proyecte una sombra de 400 mm de diámetro a una distancia de 2 m de la fuente de luz?

33.17. La luz de una fuente luminosa de 40 mm de diámetro pasa a través de un pequeño orificio hecho en la parte superior de una caja de cartón colocada a 2 m de la fuente. ¿Cuál es el diámetro de la imagen que se forma en el fondo de la caja si la altura de ésta es de 60 mm? Resp. 1.20 mm

***33.18.** Una lámpara está cubierta con una caja a la cual se le ha recortado una estrecha ranura de 20 mm de largo para que la luz pueda pasar a través de ella. Un objeto de 30 mm de altura se interpone frente a la luz que sale de la ranura, a una distancia de 500 mm. Calcule la longitud de la umbra y de la penumbra que se formarán en una pantalla colocada a 1.50 m de la ranura.

Sección 33.8 Iluminación

33.19. ¿Cuál es el ángulo sólido subtendido en el centro de una esfera de 3.20 m de diámetro por un área de 0.5 m^2 localizada sobre su superficie? Resp. 0.195 sr

33.20. Un ángulo sólido de 0.080 sr está subtendido en el centro de una esfera de 9.00 cm de diámetro por un área A en la superficie de la esfera. ¿Cuál es dicha área?

33.21. Una lámina de metal de $8\frac{1}{2} \times 11$ cm está iluminada por una fuente de luz colocada a 1.3 m directamente encima de la lámina. ¿Cuál es el flujo luminoso que incide en el metal si la fuente tiene una intensidad de 200 cd? ¿Cuál es el flujo luminoso total emitido por la fuente de luz? Resp. 1.11 lm, 2 510 lm

33.22. Una fuente monocromática de luz verde-amarilla (555 nm) de 40 W ilumina una superficie de 0.5 m^2 desde una distancia de 1.0 m. ¿Cuál es la intensidad luminosa de la fuente y cuántos lúmenes inciden sobre dicha superficie?

33.23. ¿Cuál es la iluminación producida por una fuente de 200 cd sobre una superficie colocada a 4.0 m de distancia? Resp. 12.5 lx

33.24. Una lámpara colocada a 2 m de una superficie pequeña produce sobre ella una iluminación de 100 lx. ¿Cuál es la intensidad de la fuente?

33.25. La cubierta de una mesa de 1 m de ancho y 2 m de largo está a 4.0 m de distancia de una lámpara. Si sobre esta superficie inciden 40 lm de flujo, ¿cuál es la iluminación E de la superficie? Resp. 20.0 lx

33.26. ¿Dónde deberá colocar la lámpara del problema 33.25 para que la iluminación resultante se duplique?

***33.27.** Una fuente puntual de luz se localiza en el centro de una esfera de 70 mm de diámetro. Hay un orificio en la superficie de la esfera por el cual el flujo puede pasar a través de un ángulo sólido de 0.12 sr. ¿Cuál es el diámetro de esa abertura? Resp. 13.7 mm

Problemas adicionales

33.28. Cuando una luz cuya longitud de onda es 550 nm pasa del aire a una delgada placa de vidrio y vuelve a salir al aire, la frecuencia permanece constante, pero la rapidez de la luz a través del vidrio se reduce a 2×10^8 m/s. ¿Cuál es la longitud de onda dentro del vidrio?

33.29. Se desea comparar una fuente luminosa estándar de 30 cd con una lámpara de intensidad desconocida utilizando un fotómetro de mancha de aceite (examine la figura 33.19). Las dos fuentes luminosas se colocan a 1 m de distancia y la mancha de aceite se desplaza hacia la luz estándar. Cuando la mancha de aceite está a 25 cm de la fuente luminosa estándar, la iluminación es igual en ambos lados. Calcule la intensidad desconocida. Resp. 270 cd

33.30. ¿Dónde se deberá colocar la mancha de aceite del problema 33.29 para que la iluminación procedente de la fuente luminosa desconocida sea exactamente el doble de la iluminación procedente de la fuente estándar?

33.31. La iluminación sobre una superficie es de 80 lx cuando ésta se encuentra a 3 m de la fuente luminosa. ¿A qué distancia recibirá dicha superficie una iluminación de 20 lx? Resp. 6.00 m

33.32. Una lámpara está suspendida 9 m sobre una calle y produce una iluminación de 35 lx sobre un punto colocado exactamente debajo de la misma. Calcule la intensidad luminosa de la lámpara.

***33.33.** Una fuente monocromática de luz verde-amarilla (555 nm) de 60 W ilumina una superficie de 0.6 m^2 desde una distancia de 1.0 m. ¿Cuál es el ángulo sólido suspendido en dicha fuente? ¿Cuál es la intensidad luminosa de la fuente?

Resp. 0.60 sr, 68 000 cd

***33.34.** ¿A qué distancia de una pared una lámpara de 35 cd producirá la misma iluminación que una lámpara de 80 cd colocada a 4.0 m de dicha pared?

***33.35.** ¿Cuánto será necesario bajar una pequeña lámpara para duplicar la iluminación que produce en un objeto colocado a 80 cm directamente debajo de ella?

Resp. 23.4 cm

***33.36.** Calcule la iluminación que una fuente luminosa de 74 cd produce sobre una superficie de 140 cm^2 si la normal a dicha superficie forma un ángulo de 38° con el flujo luminoso.

***33.37.** La cubierta de una mesa circular se encuentra 4 m debajo y 3 m a la izquierda de una lámpara que emite 1800 lm. ¿Qué iluminación recibe la superficie de la mesa? ¿Cuál es el área de la superficie de la mesa si inciden sobre ella 3 lm de flujo?

Resp. 4.58 lx, 0.655 m^2

***33.38.** ¿Qué ángulo θ entre el flujo y una recta normal a una superficie hará que la iluminación sobre dicha superficie se reduzca a la mitad sin que la distancia de la fuente luminosa sufra cambio alguno?

***33.39.** Toda la luz procedente de un reflector se capta y enfoca sobre una pantalla de 0.30 m^2 de superficie. ¿Cuál deberá ser la intensidad luminosa del reflector para producir una iluminación de 500 lx?

Resp. 150 cd

***33.40.** Una lámpara de 300 cd está suspendida 5 m sobre el borde izquierdo de una mesa. Calcule la iluminación que recibe un pequeño pedazo de papel colocado a una distancia horizontal de 2.5 m del borde de la mesa. Resp. 8.59 lx

Preguntas para la reflexión crítica

***33.41.** Una radiodifusora transmite a una frecuencia de 1150 kHz; un haz de luz roja tiene una frecuencia de 4.70×10^{14} Hz, y un rayo ultravioleta tiene una frecuencia de 2.4×10^{16} Hz. ¿Cuál tiene la mayor longitud de onda? ¿Cuál tiene más energía? ¿Cuál es la longitud de onda de cada una de esas ondas electromagnéticas?

Resp. radio, ultravioleta, 261 m, 639 nm, 12.5 nm

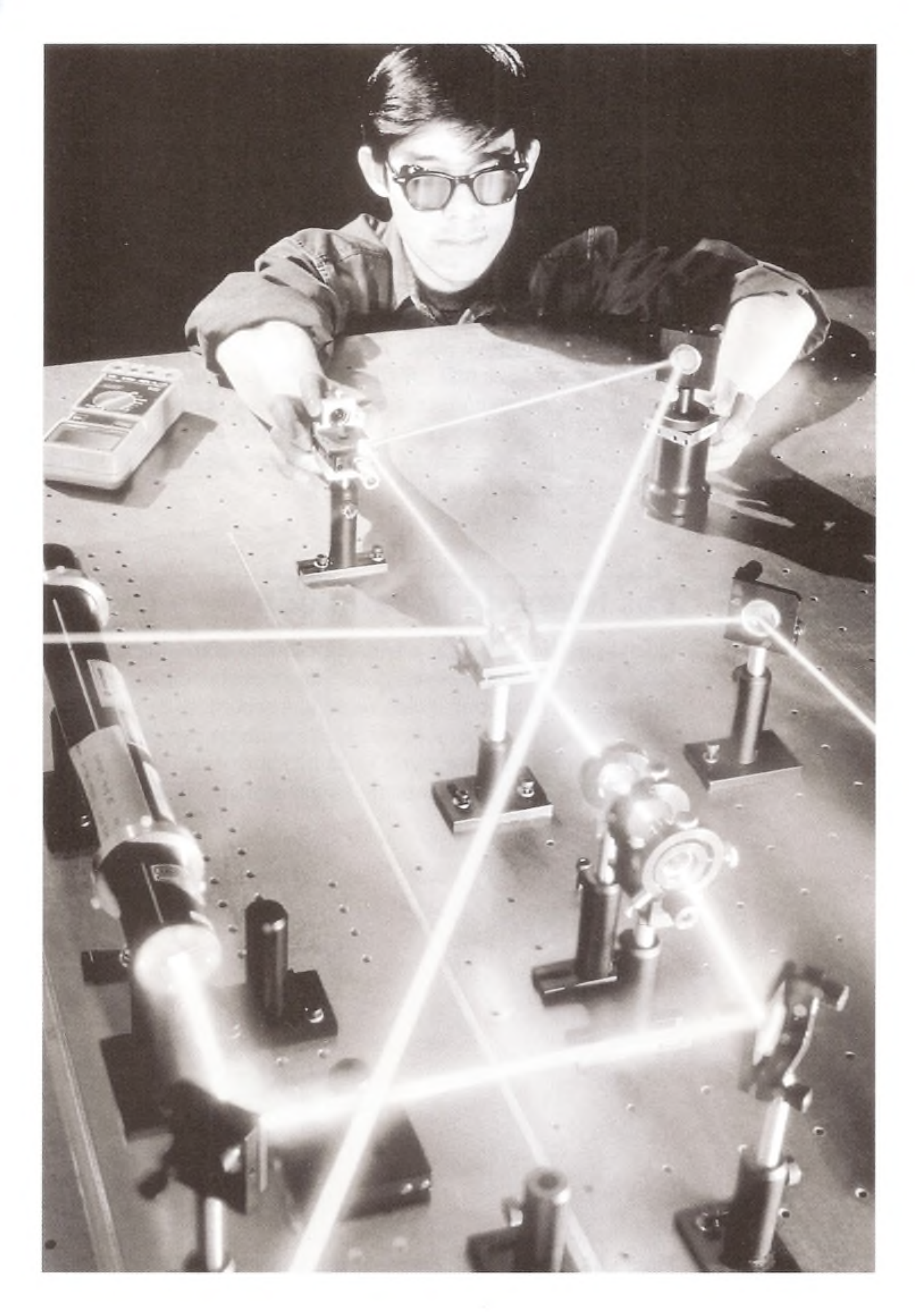
***33.42.** Una fuente luminosa desconocida A colocada a 80 cd de una pantalla produce la misma iluminación que una fuente luminosa estándar de 30 cd colocada en el punto B situado a 30 cm de la pantalla. ¿Cuál es la intensidad luminosa de la fuente de luz desconocida?

***33.43.** La iluminación que una fuente luminosa produce sobre una superficie colocada 3.40 m debajo de ella es de 20 lx. Calcule la intensidad de la fuente luminosa. ¿Qué distancia debajo de la fuente luminosa se duplicará la iluminación? ¿También el flujo luminoso se duplicará en esa ubicación?

Resp. 231 cd, 2.40 m, no

***33.44.** La iluminación de una fuente isotrópica es E_A en un punto A localizado sobre una tabla que se encuentra 30 cm exactamente debajo de la fuente. ¿A qué distancia horizontal de A sobre la cubierta de la mesa se reducirá la iluminación a la mitad?

34 Reflexión y espejos



La luz láser se utiliza para estudiar las propiedades de reflexión de la luz. Observe que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia cuando la dirección del haz luminoso cambia varias veces. (*Fotografía © Firefly Productions/Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará, mediante definiciones e ilustraciones, que ha comprendido los términos siguientes: *imágenes virtuales*, *imágenes reales*, *espejo convergente*, *espejo divergente*, *amplificación*, *longitud focal* y *aberración esférica*.
2. Usará técnicas de trazado de rayos para construir imágenes formadas por espejos esféricos.
3. Predecirá matemáticamente la naturaleza, el tamaño y la ubicación de imágenes formadas en espejos esféricos.
4. Determinará la amplificación o la *longitud focal* de espejos esféricos mediante métodos matemáticos y experimentales.

El ojo responde a la luz. Es posible ver los objetos gracias a la luz, ya sea por la que emite el objeto o por la que se refleja en él. Ahora tenemos conocimientos generales de la naturaleza de la luz y hemos estudiado objetos luminosos y métodos para medir la luz que emiten.

Si bien todo tipo de luz se origina en una fuente de energía, por ejemplo, el Sol, una lámpara eléctrica o una vela encendida, la mayor parte de la que vemos en el mundo físico resulta de luz reflejada. En este capítulo nos ocuparemos de las leyes que describen cómo regresa la luz a su medio original como resultado de incidir sobre una superficie. Aunque este fenómeno, llamado *reflexión*, puede interpretarse en términos de la teoría ondulatoria electromagnética de Maxwell, es más sencillo describirla siguiendo la trayectoria de *rayos* luminosos.

El tratamiento en forma de rayos, que se conoce generalmente como ***óptica geométrica***, se basa en la aplicación del principio de Huygens. Recuerde que los rayos de luz son líneas imaginarias trazadas en forma perpendicular a los frentes de onda que avanzan en la dirección de la propagación de la luz.

34.1 Las leyes de la reflexión

Cuando la luz incide en la frontera o límite entre dos medios, por ejemplo aire y vidrio, se pueden presentar una o varias de estas tres situaciones. Como se muestra en la figura 34.1, una parte de la luz que incide sobre una superficie de vidrio se refleja y otra parte penetra en éste. La luz que entra en el vidrio es absorbida parcialmente y la parte restante se transmite. La luz transmitida en general sufre un cambio de dirección, lo cual se conoce como ***refracción***. En este capítulo nos ocuparemos únicamente del fenómeno conocido como reflexión.

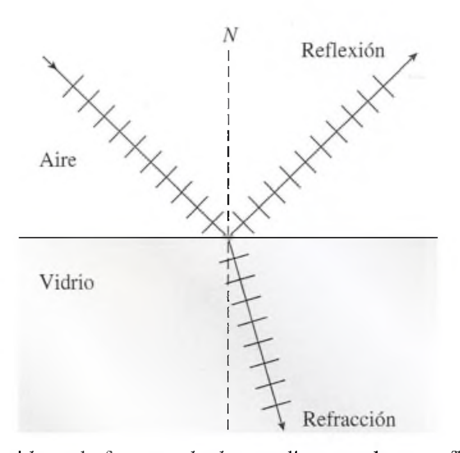


Figura 34.1 Cuando la luz incide en la frontera de dos medios, puede ser reflejada, refractada o absorbida.

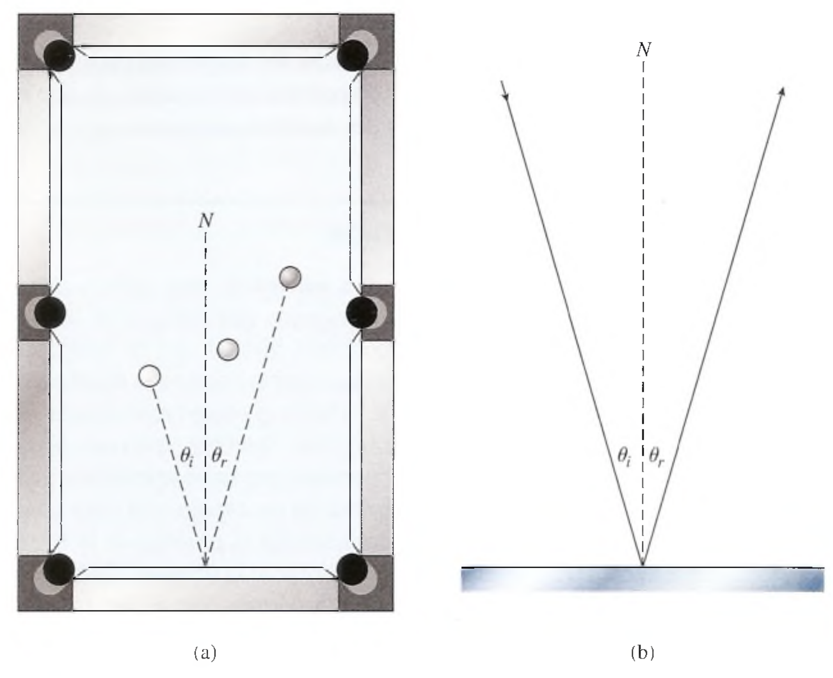


Figura 34.2 La reflexión de la luz sigue la misma trayectoria que cabría esperar en el caso de una bola de billar que rebota. El ángulo de incidencia θ_i es igual al ángulo de reflexión θ_r.

La reflexión de la luz obedece a la misma ley general de la mecánica que rige otros fenómenos de rebote; es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Por ejemplo, consideremos la mesa de billar de la figura 34.2a. Para golpear la pelota negra de la derecha es necesario localizar un punto sobre el borde de la mesa, de tal modo que el ángulo de incidencia, θ_i sea igual que el de reflexión, θ_r. De igual forma, la luz reflejada en una superficie lisa, como en la figura 34.2b, tiene sus ángulos de incidencia y de reflexión iguales. Los ángulos θ_i y θ_r se miden respecto a la normal a la superficie. Se pueden enunciar dos leyes básicas de la reflexión:

El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie se encuentran en el mismo plano.

La reflexión de la luz procedente de una superficie pulida, en la figura 34.3a, se llama ***reflexión regular*** o ***especular***. La luz que incide sobre la superficie de un espejo o vidrio se refleja especularmente. Si toda la luz incidente que golpea una superficie se reflejara de esta

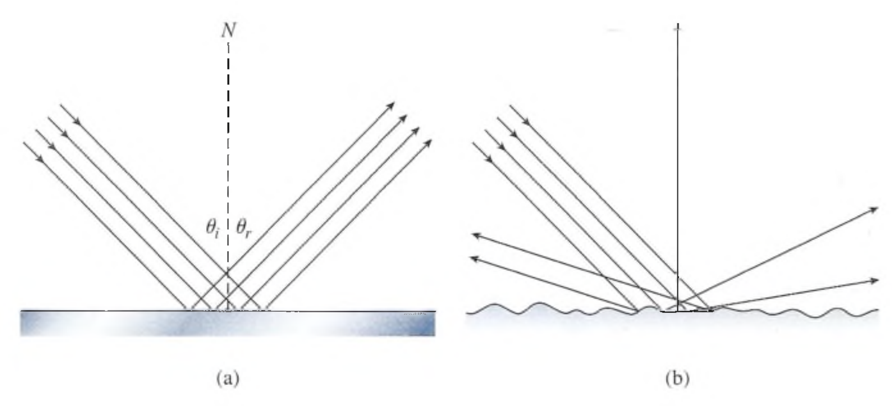


Figura 34.3 (a) Reflexión especular, (b) reflexión difusa.

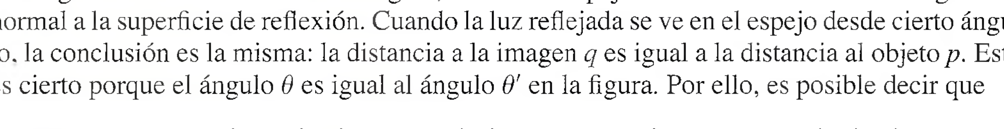
manera, no podríamos ver la superficie. Únicamente veríamos imágenes de otros objetos. Es la ***reflexión difusa*** (figura 34.3b) la que nos permite ver una superficie. Una superficie irregular o áspera esparce y dispersa la luz incidente, lo que da por resultado que se ilumine la superficie. La luz reflejada por ladrillos, concreto o periódicos es ejemplo de la reflexión difusa.

34.2 Espejos planos

Se denomina *espejo* una superficie muy pulida que forma imágenes debido a la reflexión especular de la luz. Los espejos que cuelgan de las paredes de nuestras casas son en general ***espejos planos***, y conocemos bien el tipo de imágenes que se forman en ellos. En todos los casos, la imagen parece estar a la misma distancia, detrás del espejo, que la distancia a la que se halla el objeto real delante del espejo. Como se muestra en la figura 34.4, las imágenes también aparecen invertidas en el sentido derecha-izquierda. Cualquier persona que haya aprendido a anudarse la corbata o a aplicarse maquillaje mirándose en un espejo está muy consciente de estos efectos.

Figura 34.4 Las imágenes que se forman en los espejos planos aparecen invertidas de derecha a izquierda.

Para comprender el proceso de la formación de imágenes en un espejo plano, consideremos primero la imagen I formada por los rayos emitidos desde el punto O en la figura 34.5. Vemos que se han trazado cuatro rayos luminosos que parten de la fuente puntual de luz. El rayo luminoso OV es reflejado sobre sí mismo por el espejo. Puesto que la luz reflejada parece haber recorrido la misma distancia que la luz incidente, la imagen se forma a una distancia igual, detrás del espejo, cuando se observa a lo largo de la normal a la superficie de reflexión. Cuando la luz reflejada se ve en el espejo desde cierto ángulo, la conclusión es la misma: la distancia a la imagen q es igual a la distancia al objeto p. Esto es cierto porque el ángulo θ es igual al ángulo θ' en la figura. Por ello, es posible decir que



Para un espejo plano, la distancia al objeto es igual en magnitud a la distancia a la imagen.

$$p = q \qquad \textit{Espejo plano} \qquad \textbf{(34.1)}$$

Ahora consideremos la imagen formada por un objeto extendido, como aparece en la figura 34.6. Podemos imaginar un objeto extendido como formado por muchos objetos puntuales distribuidos de acuerdo con la forma y el tamaño del objeto. Cada punto tendrá una imagen puntual situada a igual distancia atrás del espejo. Se deduce que la imagen tendrá el mismo tamaño y forma que el objeto. Sin embargo, la derecha y la izquierda estarán invertidas, como ya se dijo.

Observe que las imágenes formadas por el espejo plano son, en realidad, producto de la reflexión de objetos reales. Las imágenes en sí mismas no son reales porque la luz no pasa a través de ellas. Esas imágenes que ante nuestros ojos *parecen* estar formadas por rayos de luz, pero que en realidad no existen, se denominan ***imágenes virtuales***. En cambio, una ***imagen real*** es aquella formada por rayos de luz verdaderos.

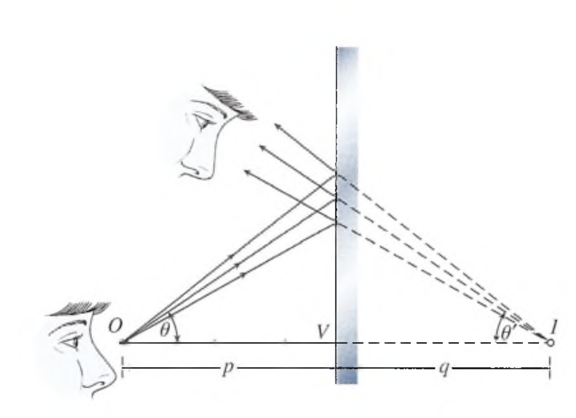


Figura 34.5 Construcción de la imagen de un objeto puntual formada por un espejo plano.

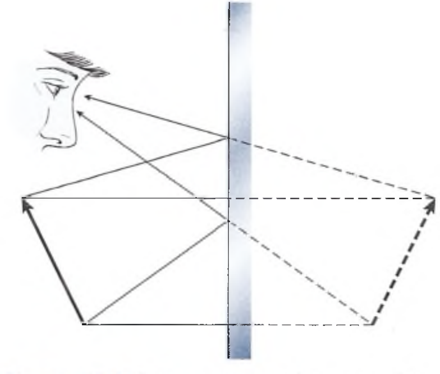


Figura 34.6 Imagen de un objeto extendido.

Una imagen virtual es la que parece estar formada por luz que proviene de la imagen, pero que en realidad no es atravesada por ningún rayo de luz.

Una imagen real está formada por rayos de luz reales que la atraviesan. Las imágenes reales se pueden proyectar en una pantalla.

Puesto que las imágenes virtuales no se forman por rayos de luz reales, no se pueden proyectar en una pantalla.

Las imágenes reales no pueden formarse por un espejo plano debido a que la luz reflejada en una superficie plana diverge. Pero si un espejo plano forma imágenes virtuales que no existen físicamente, ¿cómo es que podemos verlas? La respuesta completa a esta cuestión debe esperar hasta que se estudie la refracción y las lentes. Sin embargo, en la figura 34.7 se presenta una respuesta preliminar, que sirve también para demostrar los dos tipos de imágenes. El ojo aprovecha el principio de refracción para lograr que converja la luz reflejada que *parece* provenir de la imagen virtual. Una imagen *real*, por tanto, se proyecta sobre la retina del ojo. Esta imagen, formada por rayos de luz reflejados, reales, es interpretada por el cerebro como si se hubiera originado a partir de un punto situado atrás del espejo. El cerebro está condicionado para la propagación rectilínea de la luz. Se le engaña cuando de alguna forma se hace que la luz cambie de dirección. Las personas que dudan que el cerebro pueda estar condicionado para interpretar imágenes deberían intentar anudarle a alguien la corbata sin mirar al espejo. En este caso, el objeto real parece menos natural que su imagen virtual.

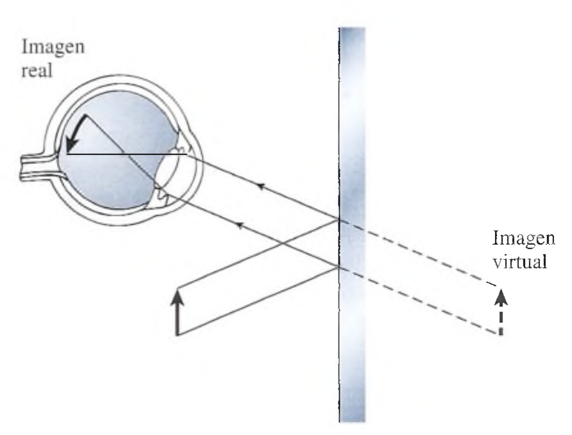


Figura 34.7 La imagen formada por un espejo plano es virtual. Esas imágenes aparecen ante nuestros ojos como si estuvieran colocadas detrás del espejo.

34.3 Espejos esféricos

Los mismos métodos geométricos aplicados a la reflexión de la luz desde un espejo plano pueden utilizarse para un espejo curvo. El ángulo de incidencia sigue siendo igual que el ángulo de reflexión, pero la normal a la superficie cambia en cada punto a lo largo de dicha superficie. De esto resulta una relación complicada entre el objeto y su imagen.

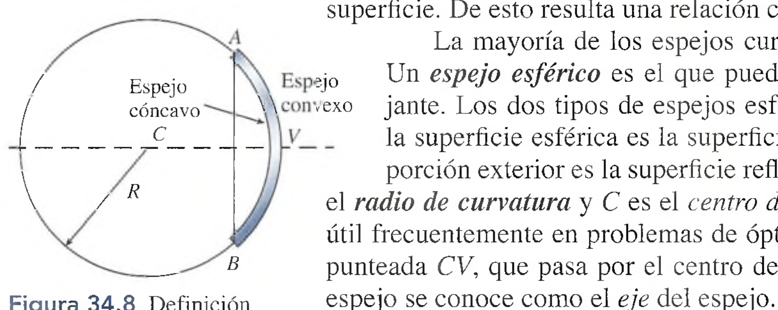


Figura 34.8 Definición de términos para los espejos esféricos.

La mayoría de los espejos curvos usados en aplicaciones prácticas son esféricos. Un ***espejo esférico*** es el que puede considerarse como una parte de una esfera reflejante. Los dos tipos de espejos esféricos se ilustran en la figura 34.8. Si el interior de la superficie esférica es la superficie reflejante, se dice que el espejo es ***cóncavo***. Si la porción exterior es la superficie reflejante, el espejo es ***convexo***. En cualquier caso, R es el ***radio de curvatura*** y C es el *centro de curvatura* de los espejos. El segmento AB, que es útil frecuentemente en problemas de óptica, se llama la ***abertura lineal*** del espejo. La línea punteada CV, que pasa por el centro de curvatura y por el centro topográfico o *vértice* del espejo se conoce como el *eje* del espejo.

Examinemos ahora la reflexión de la luz en una superficie esférica. Como un caso sencillo, suponga un haz de rayos de luz paralelos que inciden sobre una superficie cóncava, como

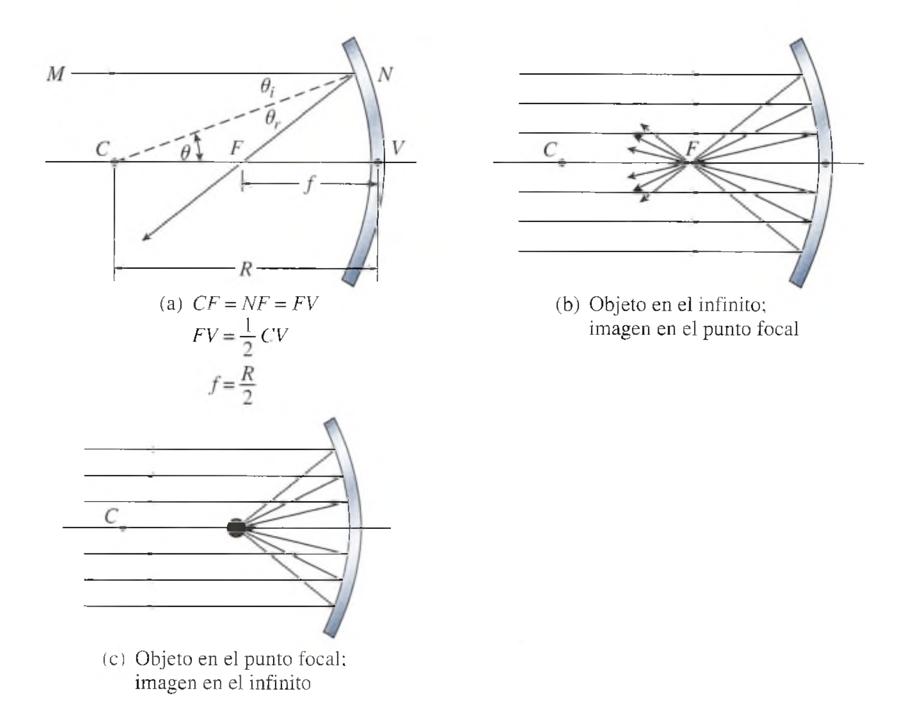


Figura 34.9 Punto focal de un espejo convergente (superficie cóncava): (a) la longitud focal es la mitad del radio de curvatura; (b) el objeto se encuentra en el infinito y la imagen en el punto focal; (c) el objeto está en el punto focal y la imagen en el infinito.

se ilustra en la figura 34.9. En virtud de que el espejo es perpendicular al eje en su vértice V, un rayo de luz CV se refleja de regreso sobre sí mismo. En realidad, cualquier rayo de luz que avanza a lo largo de un radio del espejo se refleja de regreso sobre sí mismo. El rayo de luz paralelo MN es reflejado de modo que el ángulo de incidencia θ_i sea igual al ángulo de reflexión θ_r. Ambos ángulos se miden respecto al radio CN. La geometría de la reflexión es tal, que el rayo reflejado pasa a través del punto F sobre el eje a la mitad del camino entre el centro de curvatura C y el vértice V. El punto F, en el cual convergen los rayos luminosos paralelos, se conoce como el *punto focal* del espejo. A la distancia de F a V se le llama la ***longitud focal*** f. Como ejercicio conviene demostrar, a partir de la figura 34.9a, que

$$f = \frac{R}{2} \tag{34.2}$$

La longitud focal f de un espejo cóncavo es igual a la mitad de su radio de curvatura R.

Todos los rayos de luz de un objeto distante, por ejemplo el Sol, convergen en el punto focal F, como se muestra en la figura 34.9b. Por eso a los espejos cóncavos frecuentemente se les llama ***espejos convergentes***. El punto focal se encuentra experimentalmente haciendo que converja la luz del Sol en un punto sobre un trozo de papel. El punto a lo largo del eje del espejo donde la imagen formada sobre el papel es más brillante corresponderá al punto focal del espejo.

Puesto que los rayos de luz son reversibles, si una fuente de luz está colocada en el punto focal de un espejo convergente su imagen se formará a una distancia infinita. Dicho de otra forma, el haz de luz emergente será paralelo al eje del espejo, como aparece en la figura 34.9c.

Un principio similar es válido para un espejo convexo, como se ilustra en la figura 34-10. Observe que el haz de luz paralelo que incide en una superficie convexa, diverge. Los rayos de luz reflejados *parecen* provenir del punto F situado detrás del espejo, pero ningún rayo de luz pasa realmente a través de él. Aun cuando el punto focal es virtual la distancia VF se sigue llamando la *longitud focal* del espejo convexo. En vista de que los rayos de luz reales divergen cuando inciden sobre una superficie de este tipo, a los espejos convexos se les llama ***espejos divergentes***. La ecuación (34.2) también se aplica a un espejo convexo. Sin embargo,

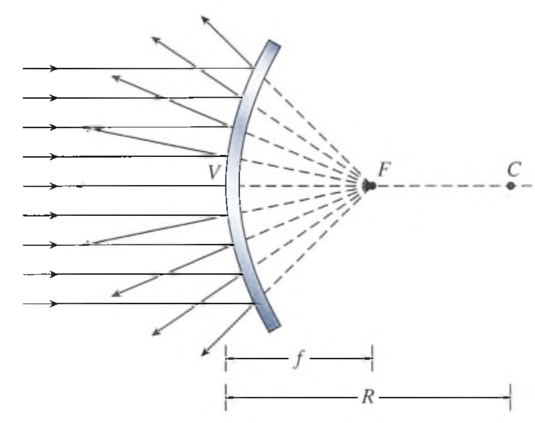


Figura 34.10 Punto focal de un espejo divergente (superficie convexa).

para ser congruentes con la teoría (que se expondrá posteriormente), la longitud focal f y el radio R deben considerarse negativos en el caso de los espejos divergentes.

34.4 Imágenes formadas por espejos esféricos

El mejor método para comprender la formación de imágenes por medio de espejos es a través de la óptica geométrica, o *trazado de rayos*. Este método consiste en considerar la reflexión de unos cuantos rayos divergentes a partir de algún punto de un objeto O que *no* se encuentre en el eje del espejo. El punto en el que se intersecarán todos esos rayos reflejados determina la ubicación de la imagen. Analizaremos ahora tres rayos cuyas trayectorias pueden trazarse fácilmente. Cada uno de los rayos se ilustra, tanto para un espejo convergente (cóncavo) en la figura 34.11, como para uno divergente (convexo) en la figura 34.12.

Rayo 1: Un rayo paralelo al eje del espejo pasa a través del punto focal de un espejo cóncavo o parece provenir del punto focal de un espejo convexo.

Rayo 2: Un rayo que pasa por el punto focal de un espejo cóncavo o que se dirige al punto focal de un espejo convexo se refleja paralelamente al eje del espejo.

Rayo 3: Un rayo que avanza a lo largo de un radio del espejo es reflejado a lo largo de su trayectoria original.

En una situación específica, sólo se necesitan dos de estos tres rayos para ubicar la imagen de un punto. Si se eligen los rayos que proceden de un punto extremo del objeto, la imagen restante

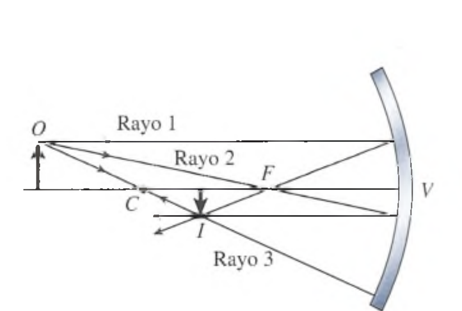


Figura 34.11 Principales rayos para la construcción gráfica de las imágenes formadas por espejos convergentes (cóncavos).

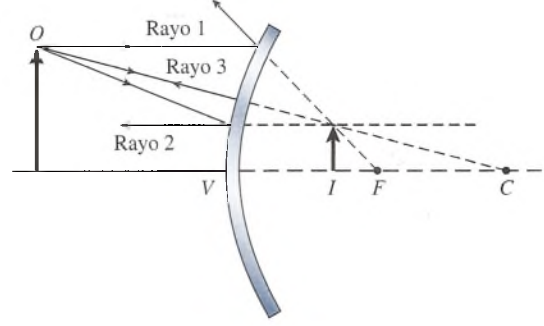


Figura 34.12 Principales rayos para la construcción gráfica de las imágenes reflejadas por espejos divergentes (convexos).

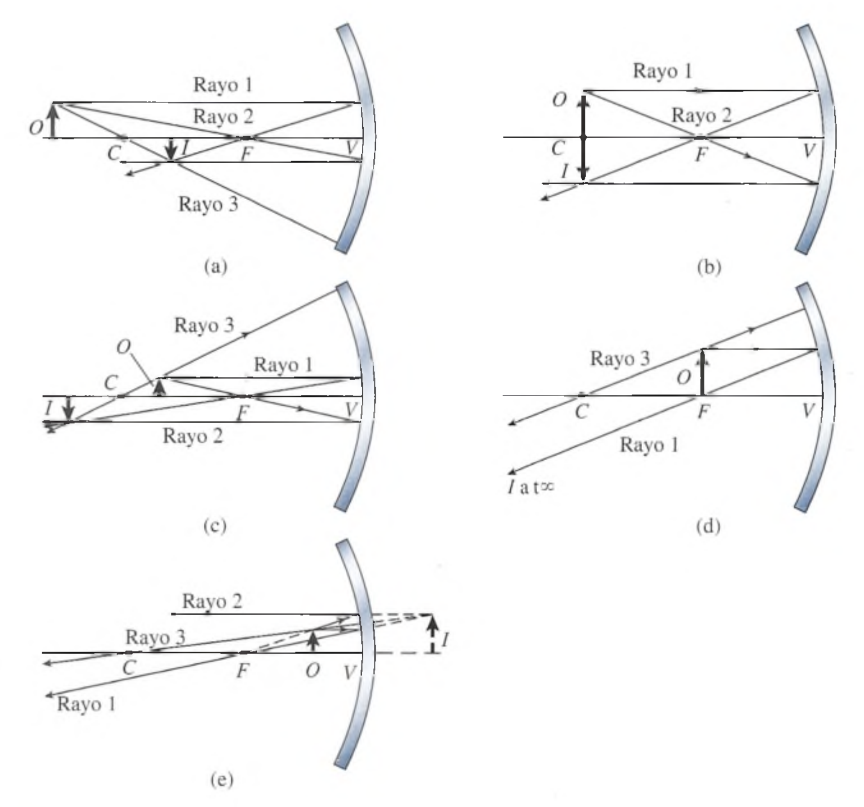


Figura 34.13 Imágenes formadas por un espejo convergente para las siguientes distancias del objeto: (a) más lejos que el centro de curvatura *C*, (b) en *C*, (c) entre *C* y la longitud focal *F*, (d) en *F*, y (e) dentro de *F*.

se puede completar generalmente por simetría. En las figuras, las líneas discontinuas se usan para identificar los rayos y las imágenes virtuales.

Para ilustrar el método gráfico y al mismo tiempo visualizar algunas de las imágenes que pueden presentarse, consideremos ahora varias imágenes formadas por un espejo cóncavo. En la figura 34.13a se ilustra la imagen formada por un objeto *O* colocado fuera del centro de curvatura del espejo. Observe que la imagen se ha formado entre el punto focal *F* y el centro de curvatura *C*. En este caso, la imagen es *real*, *invertida* y *más pequeña* que el objeto.

En la figura 34.13b, el objeto *O* se ubica en el centro de curvatura *C*. El espejo cóncavo forma una imagen en el centro de curvatura que es *real*, *invertida* y *del mismo tamaño* que el objeto.

En la figura 34.13c, el objeto *O* se ubica entre *C* y *F*. Al trazar los rayos correspondientes se observa que la imagen se forma más allá del centro de curvatura. Dicha imagen es *real*, *invertida* y *mayor* que el objeto.

Cuando el objeto se encuentra en el punto focal *F*, todos los rayos reflejados son paralelos (véase la figura 34.13d). Por el hecho de que los rayos reflejados jamás se intersecarán, por más que se prolonguen en cualquier dirección, no se formará ninguna imagen. (Algunas personas prefieren decir que en este caso la distancia a la imagen es infinita.)

Cuando el objeto se localiza dentro del punto focal *F*, como se muestra en la figura 34.13e, *parece* que la imagen está detrás del espejo. Esto puede advertirse si se prolongan los rayos reflejados hasta un punto situado detrás del espejo. Por tanto, la imagen es *virtual*. Observe también que la imagen es *alargada* y no invertida. En este caso, la ***amplificación*** es el mismo principio que se aplica en los espejos para afeitarse y en otros donde se forman imágenes virtuales amplificadas.

Por otra parte, todas las imágenes que se forman en espejos *convexos* tienen las mismas características. Como ya se mostró en la figura 34.12, se trata de imágenes *virtuales*, *no invertidas* y *de tamaño reducido*. El resultado de esto es que ofrecen un campo de visión más amplio y explica muchos de los usos de los espejos convexos. Los espejos retrovisores de los automóviles suelen ser convexos para ofrecer una capacidad visual máxima. En algunas tiendas se instalan grandes espejos convexos en lugares estratégicos porque ofrecen una visión panorámica muy útil para detectar ladrones.

34.5 La ecuación del espejo

Ahora que ya tenemos una idea de las características de las imágenes y cómo se forman, conviene desarrollar un procedimiento analítico de la formación de imágenes. Considere la reflexión de la luz de un objeto puntual O, como se ilustra en la figura 34.14 para un espejo cóncavo. El rayo OV es incidente a lo largo del eje del espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo OM se selecciona arbitrariamente y avanza hacia el espejo con un ángulo α formado con el eje del espejo. Este rayo es incidente en un ángulo θ_i y se refleja con un ángulo igual θ_r. Los rayos de luz reflejados en M y en V cruzan al punto I, formando una imagen del objeto. Tanto la distancia al objeto p como la distancia a la imagen q se miden a partir del vértice del espejo y se indican en la figura. La imagen en I es una imagen *real*, puesto que se forma por medio de rayos luminosos verdaderos que pasan por ella.

Consideremos ahora la imagen formada por un objeto más largo OA, como se muestra en la figura 34.15. La imagen del punto O se encuentra en I, como antes. Trazando los rayos a partir de la punta de la flecha podemos dibujar la imagen de A a B. El rayo AM pasa por el centro de curvatura y se refleja de regreso sobre sí mismo. Un rayo AV que incide en el vértice del espejo forma los ángulos iguales θ_i y θ_r. Los rayos VB y AM cruzan B, formando una imagen de la punta de la flecha en ese punto. El resto de la imagen IB se puede construir trazando rayos similares para los puntos correspondientes en el objeto OA. Observe que la imagen es *real* e *invertida*.

Las cantidades siguientes se identifican en la figura 34.15.

$$\text{Distancia al objeto} = OV = p$$
$$\text{Distancia a la imagen} = IV = q$$
$$\text{Radio de curvatura} = CV = R$$
$$\text{Tamaño del objeto} = OA = y$$
$$\text{Tamaño de la imagen} = IB = y'$$

Ahora intentemos relacionar estas cantidades. A partir de la figura se observa que los ángulos OCA y VCM son iguales. Si denotamos este ángulo con α podemos escribir

$$\tan \alpha = \frac{y}{p - R} = \frac{-y'}{R - q}$$

de donde

$$\frac{-y'}{y} = \frac{R - q}{p - R} \tag{34.3}$$

El tamaño de la imagen y' es negativo porque está invertido en la figura. De forma similar, los ángulos θ_i y θ_r en la figura son iguales, de modo que

$$\tan \theta_i = \tan \theta_r \qquad \frac{y}{p} = \frac{-y'}{q} \tag{34.4}$$

Al combinar las ecuaciones (34.3) y (34.4) se obtiene

$$\frac{-y'}{y} = \frac{q}{p} = \frac{R - q}{p - R} \tag{34.5}$$

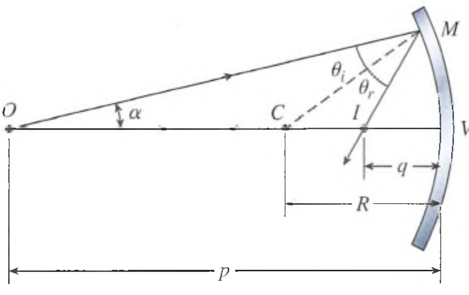


Figura 34.14 En un espejo convergente se forma una imagen puntual a partir de un objeto puntual.

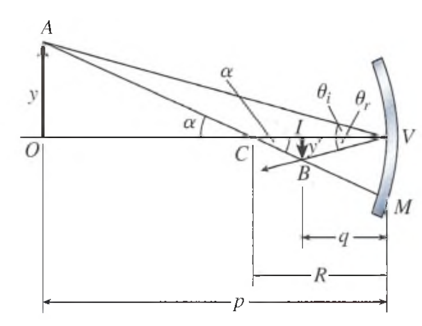


Figura 34.15 Deducción de la ecuación del espejo.

Reordenando los términos se obtiene esta importante relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \tag{34.6}$$

Esta relación se conoce como la ***ecuación del espejo***. A menudo se escribe en términos de la longitud focal f del espejo, en lugar de hacerlo respecto al radio de curvatura. Si recordamos que $f = R/2$, podemos volver a escribir la ecuación (34.6) como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{34.7}$$

Se puede realizar una deducción similar en el caso de un espejo convexo, y aplicamos la misma ecuación, siempre que se adopte la convención del signo apropiada. Las distancias al objeto y a la imagen, p y q, respectivamente, deben considerarse *positivas* para objetos reales y *negativas* para objetos e imágenes virtuales. El radio de curvatura R y la longitud focal f deben considerarse *positivos* para espejos convergentes (cóncavos) y *negativos* para espejos divergentes (convexos).

Ejemplo 34.1

¿Cuál es la longitud focal de un espejo convergente cuyo radio de curvatura es de 20 cm? ¿Cuál es la naturaleza y la ubicación de una imagen formada por el espejo si un objeto se encuentra a 15 cm del vértice del espejo?

Plan: La *naturaleza* de una imagen se determina contestando estas tres preguntas básicas: (1) ¿está *de pie* o *de cabeza*?; (2) ¿está *ampliada* o *reducida*?; (3) ¿es *real* o *virtual*? Es posible responder a estas interrogantes de manera gráfica mediante óptica geométrica o bien matemáticamente por medio de la convención de signos. Primero, para aproximarnos al problema esbozaremos un diagrama similar al descrito por la figura 34.13c. La longitud focal del espejo convergente es la mitad del radio de curvatura, cuyo valor se proporciona. Con esta información y la distancia al objeto, dato que también se conoce, podemos resolver la distancia a la imagen como la única incógnita en la ecuación del espejo.

Solución: Después de elaborar un diagrama de trazo de rayos para el ejemplo (véase la figura 34.13), se observa que la imagen es *real* (se forma delante del espejo), está *invertida* (de cabeza) y *ampliada*. La longitud focal es positiva para un espejo *convergente* y puesto que

$$f = \frac{R}{2} = \frac{+20 \text{ cm}}{2}; \qquad f = +10 \text{ cm}$$

La distancia al objeto, p, es $+15$ cm; luego, la distancia a la imagen se determina resolviendo explícitamente para q en la ecuación del espejo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \qquad q = \frac{pf}{p - f}$$

Al sustituir $f = +10$ cm y $p = +15$ cm se obtiene

$$q = \frac{(15 \text{ cm})(10 \text{ cm})}{15 \text{ cm} - 10 \text{ cm}} = +30 \text{ cm}$$

El signo positivo de q comprueba que la imagen es *real*. Nótese que no fue necesario convertir la longitud en unidades del SI, ya que todas eran las mismas.

La sustitución directa en la ecuación del espejo es sencilla, pero suele ser mejor resolver algebraicamente para la cantidad desconocida (incógnita) y luego sustituir la información que se conoce. Los signos de los valores sustituidos son una de las fuentes de error más importantes.

En el grueso de los problemas relativos a los espejos alguna de las formas siguientes puede serle útil

$$p = \frac{qf}{q - f} \qquad q = \frac{pf}{p - f} \qquad f = \frac{pq}{p + q} \tag{34.8}$$

La convención de signos que ha de seguirse para la ecuación del espejo requiere que se entienda cabalmente si los objetos y las imágenes son reales o virtuales. Recuerde que las imágenes *reales* se forman por rayos de luz verdaderos y deben hallarse *frente* al espejo. Por su parte, las imágenes virtuales parecen situarse *detrás* de él. A veces se presenta un *objeto virtual*, que es cuando una imagen virtual, formada por un espejo, se convierte en el objeto de otro en problemas que suponen más de una reflexión. Es raro que esto suceda, y la distancia al objeto es casi siempre positiva. Enseguida se resume la convención de signos:

1. La distancia al objeto p es positiva para objetos reales y negativa para objetos virtuales.
2. La distancia a la imagen q es positiva para imágenes reales y negativa para imágenes virtuales.
3. El radio de curvatura R y la longitud focal f son positivos para espejos convergentes y negativos para espejos divergentes.

Esta convención se aplica únicamente a los valores numéricos sustituidos en la ecuación del espejo. Las cantidades q, p, y f han de conservar sus signos sin cambio alguno, hasta el momento en que se realiza la sustitución.

Ejemplo 34.2

Determine la posición y describa la imagen si un objeto está colocado a 4 cm de un espejo convexo cuya longitud focal es de 6 cm.

Plan: Las imágenes formadas en un espejo divergente son virtuales, no invertidas y son reducciones. El diagrama de rayos adecuado semejará al de la figura 34.12. Si aplicamos la ecuación del espejo podremos determinar la ubicación de la imagen.

Solución: Si recordamos que la longitud focal es negativa en los espejos divergentes, podemos sustituir $f = -6$ cm y $p = 4$ cm en la ecuación del espejo

$$q = \frac{pf}{p - f} = \frac{(4\text{ cm})(-6\text{ cm})}{4\text{ cm} - (-6\text{ cm})}$$

$$= \frac{-24\text{ cm}^2}{10\text{ cm}} = -2.4\text{ cm}$$

Puesto que la distancia a la imagen es negativa, se confirma que la imagen es *virtual*.

34.6 Amplificación

Las imágenes formadas por los espejos esféricos pueden ser más grandes, más chicas o iguales en tamaño que los objetos reflejados en ellos. La razón del tamaño de la imagen al tamaño del objeto es la *amplificación M* del espejo.

$$\textit{Ampliación} = \frac{\textit{tamaño de la imagen}}{\textit{tamaño del objeto}} = \frac{y'}{y} \tag{34.9}$$

El *tamaño* se refiere a *cualquier* dimensión lineal: alto, ancho, diámetro e incluso una marca en el objeto. Recurriendo a la ecuación (34.5) y a la figura 34.15 se obtiene la siguiente relación útil

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p} \qquad \textit{Ecuación de la ampliación} \tag{34.10}$$

donde q es la distancia a la imagen y p es la distancia al objeto. Una característica muy útil de la ecuación (34.10) es que una *imagen invertida siempre tendrá un aumento o amplificación negativa, y una imagen en posición normal (no invertida) tendrá siempre una amplificación positiva.*

Ejemplo 34.3

Una fuente de luz de 6 cm de altura se halla a 60 cm de un espejo cóncavo cuya longitud focal es de 20 cm. Determine la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen.

Plan: Esbozaremos un diagrama de rayos semejante al de la figura 34.13a, con el objeto situado más allá del centro de curvatura. El esbozo mostrará que la imagen es real, está invertida y también amplificada. Debemos comprobar estas conclusiones con los signos adecuados en la solución. Enseguida, organizaremos la información que ya se tiene y usaremos las ecuaciones del espejo y de la amplificación para determinar la ubicación y el tamaño de la imagen.

Solución: Puesto que $f = +20$ cm y $p = 60$ cm, se tiene que

$$q = \frac{pf}{p - f} = \frac{(60 \text{ cm})(20 \text{ cm})}{60 \text{ cm} - 20 \text{ cm}}$$
$$= \frac{1200 \text{ cm}^2}{40 \text{ cm}} = +30 \text{ cm}$$

La distancia a la imagen es positiva, lo que confirma que se trata de una imagen real. Ahora, el tamaño de la imagen se establece resolviendo para y' en la ecuación de la amplificación

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p} \qquad \text{o} \qquad y' = \frac{-qy}{p}$$
$$y' = \frac{(-30 \text{ cm})(6 \text{ cm})}{60 \text{ cm}} = -3 \text{ cm}$$

El signo negativo comprueba que la imagen está invertida (de cabeza). Observe que la amplificación es de $-1/2$.

Estrategia para resolver problemas

Reflexión y espejos

1. Lea el problema con todo detalle y trace una línea horizontal que represente el eje del espejo. Indique, por medio de puntos en el eje del espejo, la ubicación del radio R y la longitud focal f del espejo. (Recuerde que $f = R/2$). Dibuje el espejo cóncavo o convexo como una línea curva, y ponga en posición al objeto indicado con una flecha derecha (punta hacia arriba) en su lugar aproximado frente al espejo.
2. Elabore un diagrama geométrico que muestre la trayectoria de los rayos para tener una representación visual del problema. Es suficiente con un esbozo, a menos que el problema requiera una solución gráfica.
3. Escriba una lista de las cantidades conocidas, teniendo cuidado de asignar el signo apropiado a cada valor. El radio y la longitud focal son *positivos para los espejos convergentes y negativos para los divergentes*. Las distancias a la imagen q son *positivas* cuando se refieren a *imágenes reales* y *negativas* cuando se refieren a *imágenes virtuales*. El tamaño de la imagen y' es *positivo* para *imágenes normales* (*de pie*) y *negativo* para *imágenes invertidas* (*de cabeza*).
4. Use las ecuaciones siguientes para realizar las sustituciones convenientes y resolver para las cantidades desconocidas (incógnitas). No confunda los signos de operación (suma o resta) con los signos de sustitución.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}$$
$$f = \frac{R}{2}$$

5. Puede ser necesario eliminar una incógnita resolviendo en forma simultánea las ecuaciones del espejo y la de la amplificación.

Ejemplo 34.4

En un experimento de laboratorio, se desea formar una imagen que tenga la mitad de la longitud de un objeto. ¿Cuán lejos ha de colocarse éste de un espejo divergente de 40 cm de radio?

Plan: La longitud focal es la mitad del radio, así que $f = -20$ cm. El signo negativo es necesario en el caso de espejos divergentes. La dificultad de este problema radica en que se desconoce el valor de p y de q. Sin embargo, estas dos incógnitas aparecen tanto en la ecuación

de la amplificación como en la del espejo. La resolución simultánea de ambas ecuaciones nos permitirá eliminar la distancia a la imagen q, a fin de determinar la distancia al objeto p.

Solución: Como siempre, trazaremos un diagrama de rayos del problema, que será semejante al de cualquier espejo divergente (véase la figura 34.12). La imagen debe ser virtual, normal y reducida. La imagen de pie significa que la amplificación es positiva ($+1/2$). Con la ecuación del espejo se obtiene

$$M = \frac{-q}{p} = +\frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad q = \frac{-p}{2}$$

Ahora es posible hallar otra expresión para q a partir de la ecuación del espejo

$$q = \frac{pf}{p - f}$$

Como las dos expresiones para q han de ser equivalentes es posible escribir

$$\frac{\not{p}f}{p - f} = \frac{-\not{p}}{2} \qquad \text{o} \qquad \frac{f}{p - f} = \frac{-1}{2}$$

La solución para q es

$$2f = -1(p - f)$$
$$2f = -p + f$$
$$p = f - 2f$$
$$p = -f$$

Por tanto, la distancia al objeto es

$$p = -f = -(-20 \text{ cm}); \qquad p = +20 \text{ cm}$$

Cuando se coloca la imagen a una distancia del espejo divergente igual a la longitud focal, el tamaño de esa imagen será la mitad que el del objeto.

34.7 Aberración esférica

En la práctica, los espejos esféricos forman imágenes razonablemente nítidas siempre que sus aberturas sean pequeñas comparadas con sus longitudes focales. Cuando se usen espejos grandes, sin embargo, algunos de los rayos que provienen de los objetos inciden cerca de los bordes externos y son enfocados a diferentes puntos sobre el eje. Este defecto de enfoque, ilustrado en la figura 34.16, se conoce como ***aberración esférica***.

Un ***espejo parabólico*** no presenta este defecto. Teóricamente, los rayos luminosos paralelos que inciden en un reflector parabólico se enfocarán en un solo punto sobre el eje del espejo, como aparece en la figura 34.17. Una pequeña fuente de luz ubicada en el punto focal de un reflector parabólico es el principio usado en muchos reflectores y faros buscadores. El haz emitido por uno de estos aparatos es paralelo al eje del reflector.

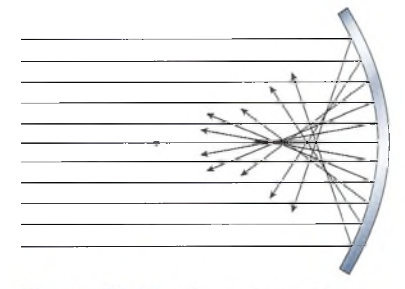


Figura 34.16 Aberración esférica.

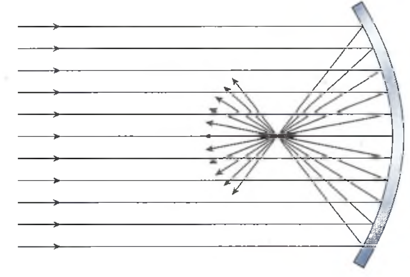


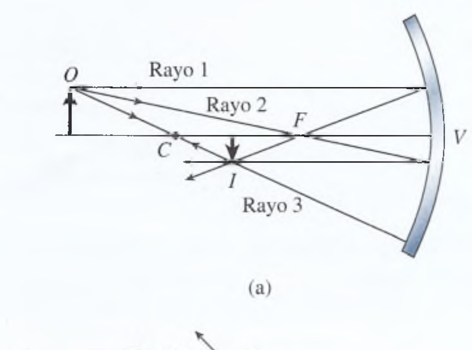
Figura 34.17 Un reflector parabólico enfoca toda la luz paralela incidente en el mismo punto.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo estudiamos las propiedades reflejantes de los espejos esféricos convergentes y divergentes. La distancia focal y el radio de curvatura de estos espejos determinan la naturaleza y el tamaño de las imágenes formadas por ellos. La aplicación de las fórmulas y las ideas expuestas en este capítulo son necesarias para comprender el funcionamiento y la manera de utilizar muchos instrumentos técnicos. A continuación se resumen los principales conceptos.

- La formación de imágenes por medio de espejos esféricos se puede visualizar más fácilmente con técnicas basadas en el trazado de rayos. Los tres rayos principales se mencionan a continuación. Tome como referencia la figura 34.18a cuando se trate de espejos convergentes y la figura 34.18b en el caso de espejos divergentes.



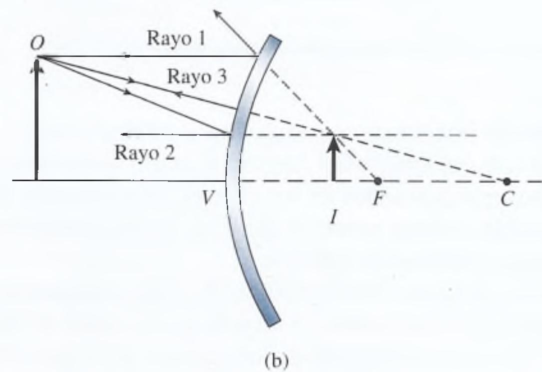


Figura 34.18 Trayectorias de los rayos para (a) un espejo convergente y (b) un espejo divergente.

Rayo 1: Un rayo paralelo al eje del espejo pasa por el punto focal de un espejo cóncavo o parece provenir del punto focal de un espejo convexo.
Rayo 2: Un rayo que pasa por el punto focal de un espejo cóncavo o que avanza hacia el punto focal de un espejo convexo se refleja en dirección paralela al eje del espejo.
Rayo 3: Un rayo que avanza sobre un radio del espejo se refleja siguiendo su misma trayectoria original.

- Antes de enumerar las *ecuaciones de espejos*, es conveniente repasar el significado de los símbolos y las convenciones de signos.

R = radio de curvatura,
+ para convergentes, − para divergentes
f = distancia focal,
+ para convergentes, − para divergentes
p = distancia al objeto,
+ para un objeto real, − para uno virtual
q = distancia a la imagen,
+ para imágenes reales, − para las virtuales
y = tamaño del objeto,
+ si está de pie, − si aparece invertido
y' = tamaño de la imagen,
+ si está de pie, − si está invertida
M = amplificación, + tanto si está de pie o invertida

- Las ecuaciones de espejos pueden aplicarse tanto a los espejos esféricos convergentes (cóncavos) como a los divergentes (convexos):

$$f = \frac{R}{2} \qquad M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \textit{Ecuación del espejo}$$

- Otras formas de la última ecuación son:

$$p = \frac{qf}{q - f} \qquad q = \frac{pf}{p - f} \qquad f = \frac{pq}{p + q}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

34.1. Comente esta afirmación: no es posible "mirar" la superficie de un espejo perfecto.

34.2. Demuestre por medio de un diagrama que los rayos divergentes que provienen de una fuente puntual de luz parecen desviarse de un punto virtual después de reflejarse en una superficie plana.

34.3. ¿Es posible proyectar sobre una pantalla la imagen de un objeto real por medio de un espejo plano? ¿Con un espejo convexo? ¿Con un espejo cóncavo?

34.4. Enuncie las leyes de la reflexión y explique cómo pueden demostrarse en un laboratorio.

34.5. Aplique la ecuación del espejo para demostrar que la imagen de un objeto colocado a una distancia infinita se forma en el punto focal de un espejo esférico.

34.6. Aplique la ecuación del espejo para demostrar que la imagen de un objeto ubicado en el punto focal de un espejo cóncavo se sitúa en el infinito.

34.7. Aplique la ecuación del espejo y demuestre que, con un espejo plano, la distancia a la imagen es igual en magnitud a la distancia al objeto. ¿Cuál es la amplificación en un espejo plano?

34.8. En un espejo cóncavo para afeitarse, ¿se logrará una mayor amplificación cuando el objeto esté más cerca del punto focal o cuando esté más cerca del vértice? Compruebe su conclusión por medio de diagramas.

34.9. ¿Los objetos que se mueven más cerca del vértice de un espejo convexo producen imágenes virtuales más grandes o más pequeñas? Explique su respuesta con diagramas.

34.10. Sin mirar la figura 34.13 construya las imágenes que forma un espejo cóncavo cuando el espejo está (a) más allá de C, (b) en C, (c) entre C y F, (d) en F y (e) entre F y V. Comente la naturaleza y el tamaño relativo de cada imagen.

34.11. En una mesa de laboratorio hay varios espejos esféricos pequeños. Explique cómo distinguiría los espejos divergentes de los convergentes sin necesidad de tocarlos.

34.12. Con objetos reales, ¿es posible construir una imagen invertida usando un espejo divergente? ¿Qué puede decir acerca de la amplificación en los espejos divergentes?

34.13. Supongamos que usted desea elegir un espejo para afeitarse que produzca la máxima amplificación posible sin invertir la imagen. ¿La distancia focal del espejo influye en el grado de amplificación que éste produce? Explique su respuesta.

34.14. Dos espejos esféricos cóncavos tienen la misma distancia focal, pero la abertura lineal de uno de ellos es mayor. ¿Cuál de ellos produce una imagen más nítida? ¿Por qué?

34.15. Demuestre cómo es posible que un espejo plano forme una imagen real si la luz que proviene del objeto se hace converger primero por medio de un espejo cóncavo.

Problemas

Sección 34.2 Espejos planos

34.1. Un hombre de 1.80 m de estatura está parado a 1.2 m de un espejo plano grande. ¿Qué altura tendrá su imagen? ¿Qué distancia hay entre él y ésta?

Resp. 1.80 m, 2.40 m

34.2. ¿Cuál es la menor distancia focal que se requiere para que una mujer de 1.68 m de estatura pueda mirar en él su imagen completa?

***34.3.** Un espejo plano se aleja de una persona inmóvil con una rapidez de 30 km/h. ¿Cuán rápido parece moverse la imagen de esa persona en dirección opuesta?

Resp. 60 km/h

***34.4.** La palanca óptica es un dispositivo de medición muy sensible que aprovecha los minúsculos giros de un espejo plano para medir pequeñas desviaciones. En la figura 34.19 se ilustra este aparato. Cuando el espejo está en la posición 1, el rayo de luz sigue la trayectoria IVR_1. Si el espejo gira un ángulo θ hasta la posición 2, el rayo seguirá la trayectoria IVR_2. Demuestre que el haz reflejado gira describiendo un ángulo de 2θ, que es el doble del ángulo que ha descrito el espejo al girar.

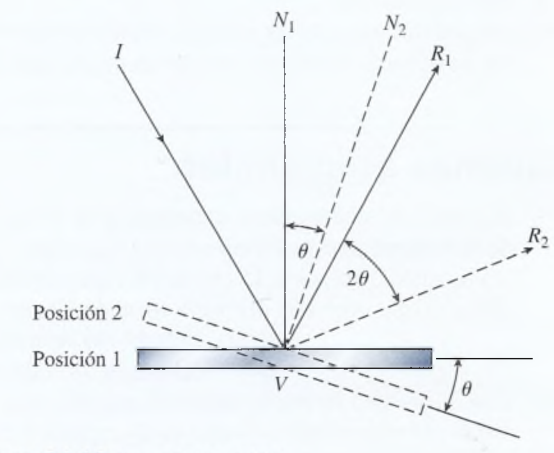


Figura 34.19 La palanca óptica.

Sección 34.3 Espejos esféricos

34.5. Una lámpara de 3 cm de alto se coloca a 20 cm frente a un espejo cóncavo que tiene un radio de curvatura de 15 cm. Calcule la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen correspondiente. Haga el diagrama de los rayos respectivo.
Resp. Real, $y' = -1.8$ cm, $q = +12$ cm

34.6. Un espejo esférico cóncavo tiene una distancia focal de 20 cm. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen que se forma cuando un objeto de 6 cm de altura se coloca a 15 cm de este espejo?

34.7. Un lápiz de 8 cm de largo se coloca a 10 cm de un espejo divergente que tiene 30 cm de radio. Determine la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen que se forma. Haga el diagrama de rayos.
Resp. Virtual, $y' = +4.80$ cm, $q' = -6.00$ cm

34.8. Un espejo esférico convexo tiene una distancia focal de 25 cm. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen de un objeto de 5 cm de alto ubicado a 30 cm del espejo?

34.9. Un objeto de 5 cm de altura se coloca a medio camino entre el punto focal y el centro de curvatura de un espejo esférico cóncavo que tiene 30 cm de radio. Calcule la ubicación y la amplificación de la imagen. Resp. $q = +45$ cm, $M = -2.00$

34.10. Una fuente luminosa de 4 cm de altura se coloca frente a un espejo esférico cóncavo cuyo radio mide 40 cm. Calcule la naturaleza, el tamaño y la ubicación de las imágenes que se forman con las siguientes distancias al objeto: (a) 60 cm, (b) 40 cm, (c) 30 cm, (d) 20 cm y (e) 10 cm. Trace los diagramas de rayos apropiados.

***34.11.** ¿A qué distancia de un espejo esférico cóncavo de 30 cm de radio habrá que colocar un objeto para que se forme una imagen invertida amplificada a 60 cm del espejo? Resp. $p = 20$ cm

Sección 34.6 Amplificación

34.12. ¿Cuál es la amplificación de un objeto que está colocado a 10 cm de un espejo, cuya imagen no está invertida y parece estar ubicada 40 cm detrás del espejo? ¿El espejo es divergente o convergente?

34.13. Una esfera de Navidad tiene una superficie plateada y su diámetro es de 3 in. ¿Cuál es la amplificación de un objeto colocado a 6 in de la superficie de ese adorno? Resp. +0.111

34.14. ¿Qué tipo de espejo se necesita para formar una imagen en una pantalla colocada a 2 m de distancia cuando un objeto se coloca a 12 cm frente al espejo? ¿Cuál es la amplificación?

***34.15.** Un espejo cóncavo para afeitarse tiene una distancia focal de 520 mm. ¿A qué distancia de él se debe colocar un objeto para que la imagen no aparezca invertida y tenga el doble de su tamaño real?
Resp. 260 mm

***34.16.** Si se desea una amplificación de +3, ¿a qué distancia del espejo del problema 34.15 deberá colocarse el rostro que ha de afeitarse?

***34.17.** Un objeto se coloca a 12 cm de la superficie de un espejo esférico. Si se forma una imagen no invertida de un tercio del tamaño del objeto, ¿cuál es el radio del espejo? ¿El espejo es convergente o divergente?
Resp. −6.00 cm, divergente

***34.18.** Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de 30 cm y forma una imagen invertida sobre una pared a 90 cm de distancia. ¿Cuál es la amplificación?

Problemas adicionales

34.19. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen que se forma cuando un objeto de 6 cm de alto se coloca a 15 cm de un espejo esférico cóncavo que tiene una distancia focal de 20 cm?
Resp. Virtual, no invertida, $q = -60$ cm, $y' = +24$ cm

34.20. Una imagen no invertida tiene una amplificación de +0.6. ¿El espejo que la forma es divergente o convergente? ¿Cuál es la distancia al objeto si la distancia a la imagen es de −12 cm?

34.21. Un objeto está colocado a 50 cm de un espejo convergente que tiene 40 cm de radio. ¿Cuáles son la distancia a la imagen y la amplificación?
Resp. $q = +33.3$ cm, $M = -0.667$

34.22. ¿Cuál es la distancia focal de un espejo divergente si la imagen de un objeto ubicado a 200 mm de su superficie parece estar a una distancia de 120 mm detrás del espejo?

34.23. Una esfera de plata tiene 4.0 cm de diámetro. Localice la imagen de un objeto de 6 cm de longitud colocado a 9 cm de la superficie de la esfera. ¿Cuál es la amplificación? Resp. −9.00 mm, +0.100

34.24. Un objeto de 80 mm de altura se coloca a 400 mm frente a un espejo divergente cuyo radio es de −600 mm. Determine la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen.

***34.25.** Un objeto de 10 cm de altura ha sido colocado a 20 cm de un espejo esférico. Si se forma una imagen

no invertida de 5 cm de altura, ¿cuál es la distancia focal del espejo? Resp. $f = -20$ cm

***34.26.** ¿Cuál es la amplificación si la imagen de un objeto se sitúa a 15 cm de un espejo divergente cuya distancia focal es de -20 cm?

***34.27.** Un objeto se encuentra a 200 mm del vértice de un espejo esférico convexo que tiene 400 mm de radio. ¿Cuál es la amplificación del espejo? Resp. $M = +1/2$

***34.28.** Un espejo esférico convexo tiene -60 cm de radio. ¿A qué distancia se debe colocar un objeto para que la imagen tenga un tercio del tamaño del objeto?

***34.29.** ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de un espejo esférico convexo para que produzca una imagen que corresponda a la cuarta parte de la longitud de un objeto ubicado a 40 in del espejo? Resp. $q = -26.7$ in

***34.30.** Un espejo convexo tiene una distancia focal de -500 mm. Si un objeto se coloca a 400 mm del vértice, ¿cuál es la amplificación?

***34.31.** Con un espejo esférico se forma una imagen real a 18 cm de la superficie. La imagen tiene el doble de tamaño que el objeto. Calcule la ubicación del objeto y la distancia focal del espejo. Resp. $p = 9.00$ cm, $f = 6.00$ cm

***34.32.** Un espejo colocado a 2 m de un objeto produce una imagen no invertida alargada tres veces. ¿El espejo es divergente o convergente? ¿Cuál es el radio del espejo?

***34.33.** La amplificación de un espejo es -0.333. ¿Dónde se ha colocado el objeto si su imagen se forma sobre una cartulina a 540 mm del espejo? ¿Cuál es la distancia focal? Resp. $p = 1.62$ m, $f = +405$ mm

***34.34.** ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de un espejo cóncavo para que produzca una imagen de la cuarta parte del tamaño de un objeto colocado a 50 cm del espejo?

***34.35.** Un espejo esférico para afeitarse produce una amplificación de $+2.5$ cuando se coloca un objeto a 15 cm de su superficie. ¿Cuál es la distancia focal del espejo? Resp. $f = +25$ cm

Preguntas para la reflexión crítica

34.36. Un jugador de beisbol de 6 ft de estatura se coloca a una distancia de 30 ft frente a un espejo plano. La distancia desde la parte más alta de su gorra hasta sus ojos es de 8 in. Trace un diagrama que muestre la ubicación de las imágenes que se formarán de sus pies y de la punta de su gorra. ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener el espejo para que él pueda ver su imagen completa? Si se aproxima 10 m más al espejo, ¿cuál será la nueva distancia entre el objeto y la imagen? Resp. 36 in, 40 ft

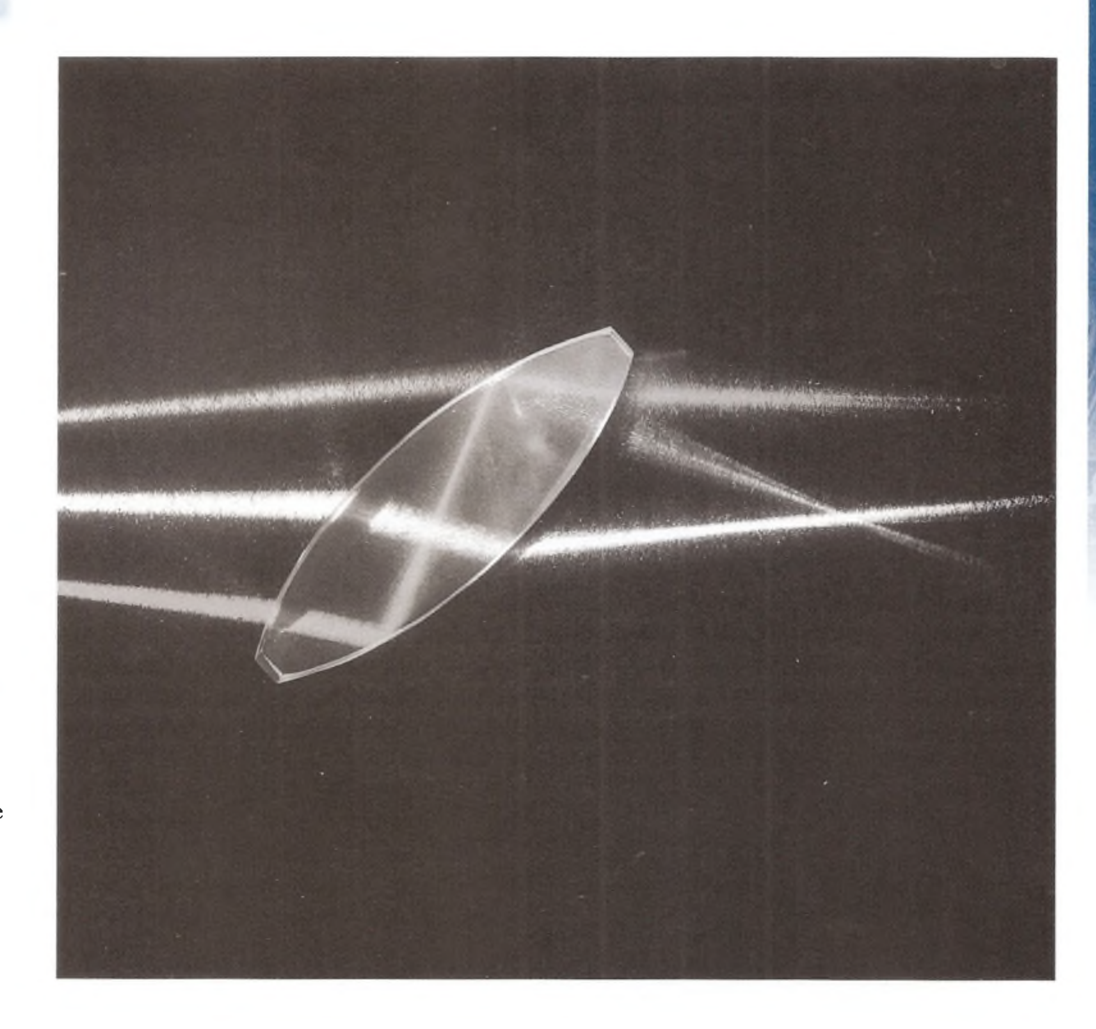
***34.37.** La Luna tiene 3 480 km de diámetro y está a 3.84×10^8 m de la Tierra. Un telescopio sobre la Tierra utiliza un espejo esférico de 8.00 m de radio para formar una imagen de ese satélite. ¿Cuál es el diámetro de la imagen así formada? ¿Cuál es la amplificación del espejo?

***34.38.** Una imagen de 60 mm de longitud se forma sobre una pared a 2.3 m de una fuente luminosa de 20 mm de alto. ¿Cuál es la distancia focal de este espejo? ¿Es divergente o convergente? ¿Cuál es la amplificación? Resp. 862 mm, convergente, -3.00

***34.39.** Obtenga una fórmula para calcular la distancia focal de un espejo en función de la distancia p al objeto y la amplificación M. Aplique esa fórmula al problema 34.25. Encuentre una relación similar que permita calcular la distancia q a la imagen en función de M y p. Aplíquela al problema 34.33.

***34.40.** Un espejo cóncavo de 800 mm de radio se coloca frente a frente con un espejo plano de 600 mm. Una fuente de luz colocada en el punto medio entre los espejos se acondiciona de manera que la luz se refleje primero en la superficie cóncava. ¿Cuáles son la posición y la amplificación de la imagen formada después de haberse reflejado en el espejo plano? (*Sugerencia:* considere la imagen formada por el primer espejo como el objeto para el segundo espejo.) Resp. 1.8 m detrás del espejo plano, $+4.00$

35 Refracción



La refracción y la reflexión interna total de los rayos de luz se observan en esta fotografía como tres rayos de luz que pasan a través de una lente biconvexa. En este capítulo estudiaremos las leyes de la refracción y las condiciones para la reflexión interna total.

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá el *índice de refracción* y expresará tres leyes que describen el comportamiento de la luz refractada.
2. Aplicará la ley de Snell para resolver problemas que impliquen la transmisión de la luz en dos o más medios.
3. Determinará el cambio de velocidad o de longitud de onda de la luz cuando se mueve de un medio a otro.
4. Explicará los conceptos de *reflexión interna total* y *ángulo crítico*, y utilizará estas ideas para resolver problemas similares a los que aparecen en este texto.

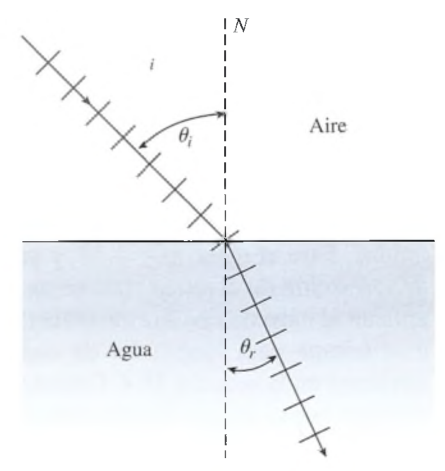


Figura 35.1 Refracción de un frente de onda en la frontera entre dos medios.

La luz se propaga en línea recta a rapidez constante en un medio uniforme. Si cambia el medio, la rapidez también cambiará y la luz viajará en línea recta a lo largo de una nueva trayectoria. La desviación de un rayo de luz cuando pasa oblicuamente de un medio a otro se conoce como ***refracción***. El fundamento de la refracción se ilustra en la figura 35.1 para el caso de una onda de luz que se propaga del aire al agua. El ángulo θ_i que se forma entre el haz incidente y la normal a la superficie se conoce como *ángulo de incidencia*. Al ángulo θ_r formado entre el haz refractado y la normal se le llama *ángulo de refracción*.

La refracción explica fenómenos cotidianos como la aparente distorsión de los objetos que se sumergen en agua parcialmente. En la figura 35.2a, la varilla parece flexionarse en la superficie del agua; y el pez de la figura 35.2b parece estar más cerca de la superficie de lo que en realidad se encuentra. En este capítulo estudiaremos las propiedades de los medios refractivos y se desarrollarán las ecuaciones para predecir su efecto sobre los rayos luminosos incidentes.

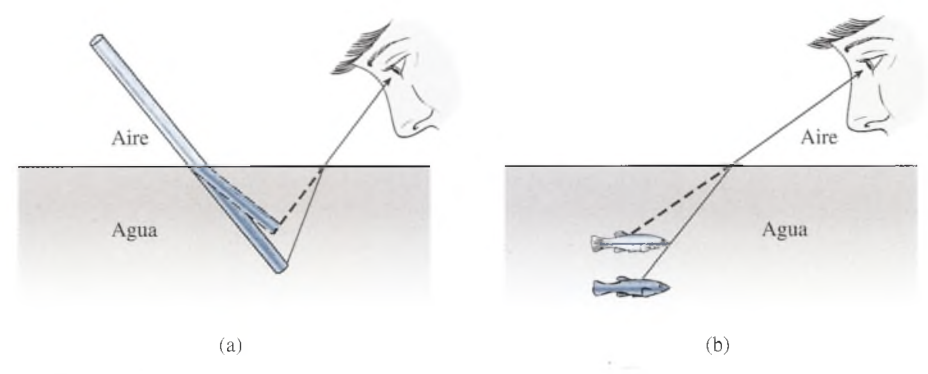


Figura 35.2 La refracción es la causante de la distorsión de estas imágenes. (a) La varilla parece estar flexionada. (b) Este pez parece más cerca de la superficie de lo que está en realidad.

35.1 Índice de refracción

La velocidad de la luz dentro de una sustancia material es generalmente menor que la velocidad en el espacio libre, donde es de 3×10^8 m/s. En el agua la velocidad de la luz es de casi 2.25×10^8 m/s, lo cual es casi equivalente a las tres cuartas partes de su velocidad en el aire. La luz viaja aproximadamente a dos tercios de esa velocidad en el vidrio, o sea a unos 2×10^8 m/s. La razón de la velocidad de la luz c en el vacío entre la velocidad v de la luz en un medio particular se llama el ***índice de refracción*** n para ese material.

El índice de refracción n de un material particular es la razón de la velocidad de la luz en el espacio libre respecto a la velocidad de la luz a través del material.

$$n = \frac{c}{v} \qquad \textit{Índice de refracción} \qquad \textbf{(35.1)}$$

El índice de refracción es una cantidad adimensional y generalmente es mayor que la unidad. Para el agua, $n = 1.33$, y para el vidrio, $n = 1.5$. La tabla 35.1 muestra los índices de refracción de diversas sustancias de uso común. Observe que los valores allí señalados se aplican al caso de una luz amarilla (589 nm). La velocidad de la luz en sustancias materiales es diferente para longitudes de onda distintas. Este efecto, conocido como ***dispersión***, se analizará en la sección 35.4. Cuando la longitud de onda de la luz no se especifica, es común suponer que el índice corresponde al que tendría una luz amarilla.

Tabla 35.1

Índice de refracción de la luz amarilla, con longitud de onda de 589 nm

Sustancia	n	Sustancia	n
Agua	1.33	Fluorita	1.43
Alcohol etílico	1.36	Glicerina	1.47
Benceno	1.50	Hielo	1.31
Circón	1.92	Sal de roca	1.54
Cuarzo	1.54	Vidrio	1.33
Diamante	2.42	Crown	1.52
Disulfuro de carbono	1.63	Flint (de roca)	1.63

Ejemplo 35.1 Calcule la velocidad de la luz amarilla en un diamante cuyo índice de refracción es 2.42.

Plan: El índice de refracción es la razón de la velocidad de la luz en el espacio libre respecto a la velocidad en el medio, así que podemos resolver para esa velocidad mediante sustitución.

Solución: A partir de la ecuación (35.1) tenemos

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{o} \qquad v = \frac{c}{n}$$

$$v = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.42} = 1.24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

35.2 Las leyes de refracción

Desde la antigüedad se conocen y se aplican dos leyes básicas de refracción. Estas leyes se enuncian como sigue y se ilustran en la figura 35.3:

El rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie se encuentran en el mismo plano.

La trayectoria de un rayo refractado en la interfase entre dos medios es exactamente reversible.

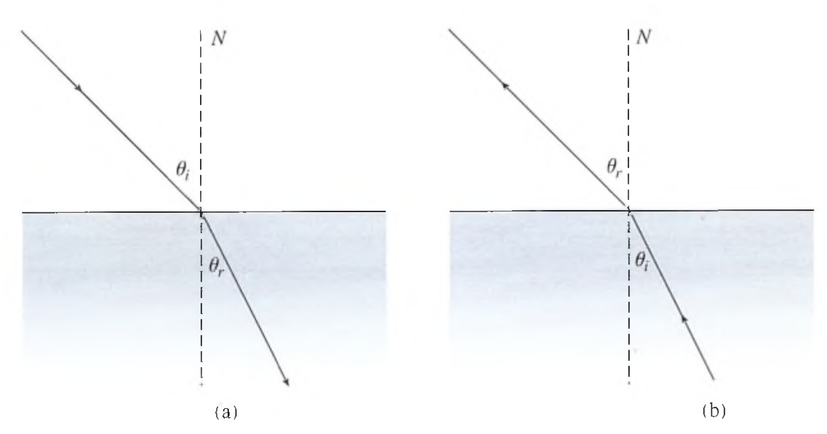


Figura 35.3 (a) El rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie están en el mismo plano. (b) Los rayos refractados son reversibles.

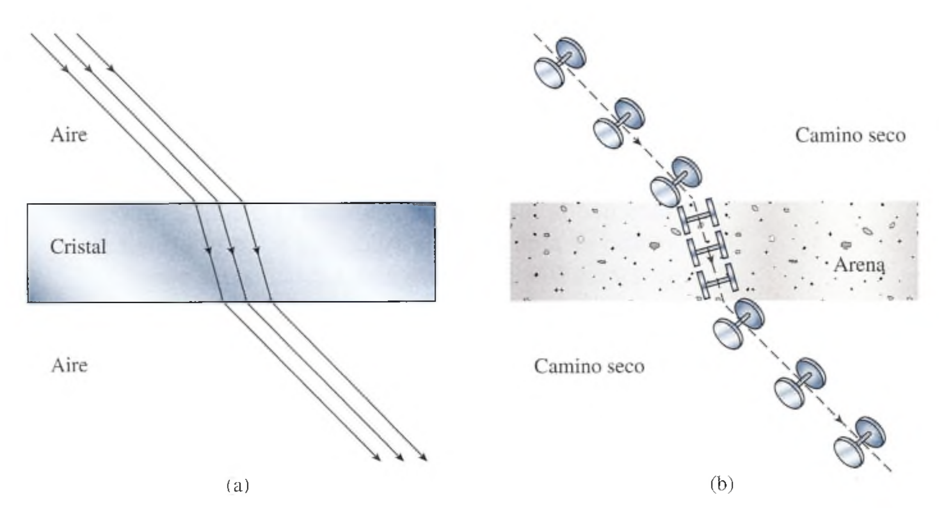


Figura 35.4 (a) El desplazamiento lateral de la luz al pasar por vidrio. (b) Una analogía mecánica.

Estas dos leyes se demuestran fácilmente mediante la observación y la experimentación. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, es mucho más importante entender y predecir el *grado* de flexión que ocurre.

Para entender cómo un cambio de velocidad de la luz puede alterar la trayectoria de ésta a través de un medio, consideremos la analogía mecánica que se muestra en la figura 35.4. En la figura 35.4a, la luz que incide sobre una lámina de vidrio primero sufre una desviación hacia la normal mientras pasa a través del medio más denso, y luego se desvía alejándose de la normal al retornar al aire. En la figura 35.4b la acción de ruedas que encuentran a su paso una franja de arena se asemeja al comportamiento de la luz. Al aproximarse a la arena, una de las ruedas la toca primero y disminuye su rapidez. La otra rueda continúa a la misma rapidez, provocando que el eje forme un nuevo ángulo. Cuando ambas ruedas están en la arena, de nuevo se mueven en línea recta con velocidad uniforme. La primera rueda que entra en la arena es también la primera en salir de ella, y aumenta su rapidez al dejar la franja de arena. Por tanto, el eje regresa a su dirección original. La trayectoria del eje es análoga a la trayectoria de un frente de onda.

El cambio en la dirección de la luz al entrar en otro medio se puede analizar con la ayuda de un diagrama de frente de onda como el de la figura 35.5. Una onda plana en un medio de índice de refracción n_1 choca con la superficie plana de un medio cuyo índice de refracción es n_2. Al ángulo de incidencia se le denomina θ_2. En la figura, se supone que el segundo medio tiene una densidad óptica mayor que el primero ($n_2 > n_1$). Un ejemplo de lo anterior se presenta cuando la luz pasa del aire ($n_1 = 1$) al agua ($n_2 = 1.33$). La línea AB representa el frente de onda en un tiempo $t = 0$ justamente cuando entra en contacto con el medio 2. La recta CD

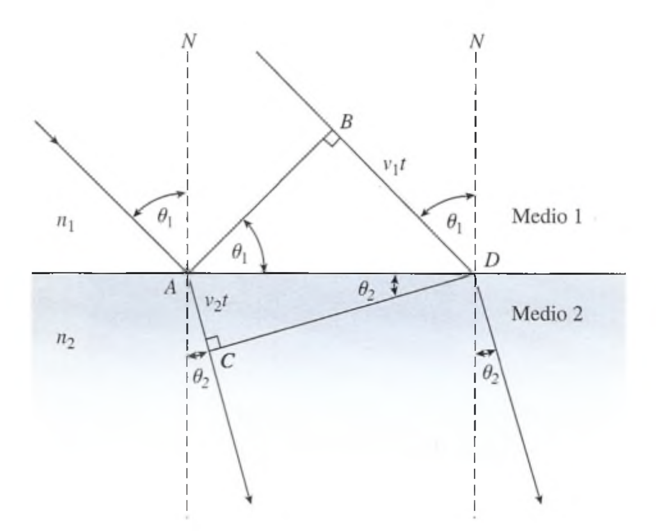


Figura 35.5 Deducción de la ley de Snell.

representa el mismo frente de onda después del tiempo t requerido para entrar totalmente al segundo medio. La luz se desplaza de B a D en el medio 1 en el mismo tiempo t requerido para que la luz viaje de A a C en el medio 2. Suponiendo que la velocidad v_2 en el segundo medio es menor que la velocidad v_1 en el primer medio, la distancia AC será menor que la distancia BD. Estas longitudes están dadas por

$$AC = v_2t \qquad BD = v_1t$$

Se puede demostrar por geometría que el ángulo BAD es igual a θ_1 y que el ángulo ADC es igual a θ_2, como se indica en la figura 35.5. La recta AD forma una hipotenusa que es común a los dos triángulos ADB y ADC. Partiendo de la figura,

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{v_1t}{AD} \qquad \text{sen}\,\theta_2 = \frac{v_2t}{AD}$$

Al dividir la primera ecuación entre la segunda obtenemos

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{35.2}$$

La razón del seno del ángulo de incidencia con respecto al seno del ángulo de refracción es igual a la razón de la velocidad de la luz en el medio incidente respecto a la velocidad de la luz en el medio de refracción.

Esta regla fue descubierta por el astrónomo danés Willebrord Snell en el siglo XVII, y se llama en su honor ***ley de Snell.*** Una forma alternativa para esta ley se obtiene expresando las velocidades v_1 y v_2 en términos de los índices de refracción de los dos medios. Recuerde que

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

Utilizando estas relaciones en la ecuación (35.2), escribimos

$$n_1\,\text{sen}\,\theta_1 = n_2\,\text{sen}\,\theta_2 \tag{35.3}$$

Puesto que el seno de un ángulo aumenta al aumentar el ángulo, vemos que un incremento en el índice de refracción provoca una disminución en el ángulo, y viceversa.

Ejemplo 35.2

La luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 35°. ¿Cuál será el ángulo de refracción si el índice de refracción del agua es 1.33?

Plan: El ángulo de refracción θ_{aire} puede determinarse a partir de la ley de Snell.

Solución: Dado que $n_{aire} = 1.0$, $n_{agua} = 1.33$ y $\theta_{aire} = 35°$, tenemos

$$n_{aire} \operatorname{sen} \theta_{aire} = n_{agua} \operatorname{sen} \theta_{agua}$$
$$(1.0) \operatorname{sen} \theta_{aire} = (1.33) \operatorname{sen} 35°$$
$$\operatorname{sen} \theta_{aire} = 0.763$$
$$\theta_{aire} = 49.7°$$

El índice de refracción en el aire (1.0) fue *menor* que el del agua (1.33), así que el ángulo refractado en el aire es mayor que el ángulo de incidencia.

Ejemplo 35.3

Un rayo de luz en el agua ($n_{agua} = 1.33$) incide a un ángulo de 40° sobre una lámina de vidrio que está en el fondo de un contenedor, como muestra la figura 35.6. Si el rayo refractado forma un ángulo de 33.7° con la normal, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?

Plan: El agua es el medio incidente, y el vidrio es el medio refractado. Dados los ángulos y el índice para el agua, podemos aplicar la ley de Snell para calcular el índice del vidrio.

Solución: Sustituyendo $n_{agua} = 1.33$, $\theta_{agua} = 40°$ y $\theta_v = 33.7°$, obtenemos

$$n_v \operatorname{sen} \theta_v = n_{agua} \operatorname{sen} \theta_{agua}$$
$$n_v \operatorname{sen} 33.7° = (1.33) \operatorname{sen} 40°$$
$$n_v = \frac{(1.33) \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 33.7°}$$
$$n_v = 1.54$$

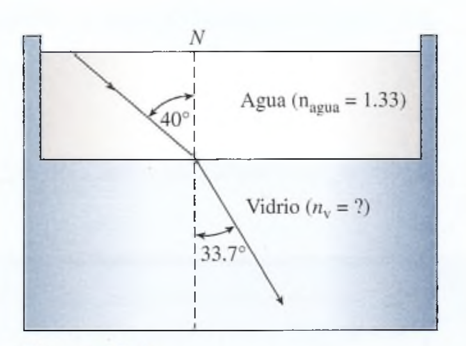


Figura 35.6

35.3 Longitud de onda y refracción

Hemos visto que la luz disminuye su velocidad cuando pasa a un medio de mayor ***densidad óptica***. ¿Qué sucede con la longitud de onda de la luz cuando entra a un nuevo medio? En la figura 35.7, la luz viaja en el aire a una velocidad c y se encuentra con un medio a través del cual se propaga a una rapidez menor v_m. Cuando regresa al aire, de nuevo viaja a la velocidad c de la luz en el aire. Esto no viola la conservación de la energía porque la energía de una onda luminosa es

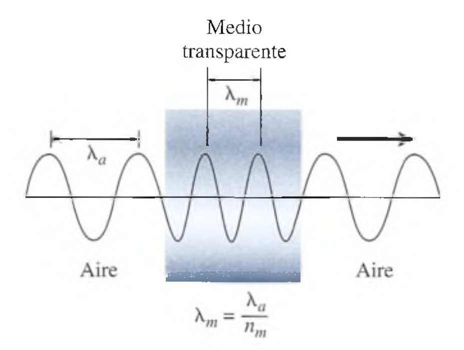


Figura 35.7 La longitud de onda de la luz se reduce cuando ésta entra en un medio de mayor densidad óptica.

proporcional a su frecuencia. La frecuencia f es la misma dentro del medio que fuera de él. Para comprobar que lo anterior es cierto, considere que la frecuencia es el número de ondas que pasan por cualquier punto en la unidad de tiempo. El mismo número de ondas que sale del medio en un segundo es el que entra al medio en una unidad de tiempo. Por tanto, la frecuencia dentro del medio no cambia. La velocidad se relaciona con la frecuencia y la longitud de onda mediante

$$c = f\lambda_a \qquad \text{y} \qquad v_m = f\lambda_m \tag{35.4}$$

donde c y v_m son la velocidad en el aire y dentro del medio, y λ_a y λ_m son las longitudes de onda respectivas. Puesto que la velocidad disminuye dentro del medio, la longitud de onda dentro del medio debe disminuir proporcionalmente para que la frecuencia permanezca constante. Dividiendo la primera ecuación entre la segunda en la ecuación (35.4) queda

$$\frac{c}{v_m} = \frac{f\lambda_a}{f\lambda_m} = \frac{\lambda_a}{\lambda_m}$$

Si se sustituyen $v_m = c/n_m$, obtenemos

$$n_m = \frac{\lambda_a}{\lambda_m}$$

Por tanto, la longitud de onda λ_m dentro del medio se reduce a

$$\lambda_m = \frac{\lambda_a}{n_m} \tag{35.5}$$

donde n_m es el índice de refracción del medio y λ_a es la longitud de onda de la luz en el aire.

Ejemplo 35.4

Una luz roja monocromática, con una longitud de onda de 640 nm, pasa del aire a una placa de vidrio cuyo índice de refracción es 1.5. ¿Cuál será la longitud de onda de la luz dentro de este medio?

Plan: La longitud de onda será menor en el vidrio debido a la rapidez reducida de la luz.

Solución: La sustitución directa en la ecuación (35.5) nos da

$$\lambda_v = \frac{\lambda_a}{n_v} = \frac{640 \text{ nm}}{1.5}; \qquad \lambda_v = 427 \text{ nm}$$

La longitud de onda en el vidrio indica que el color es azul. Si usted está observando este efecto, ¿por qué el color sigue pareciendo ser rojo?

Suponga que un rayo de luz monocromática en un medio 1 entra en el medio 2. Debemos recordar que las cuatro relaciones siguientes son iguales. En otras palabras, podemos establecer dos relaciones cualesquiera como iguales para formar una ecuación con el fin de calcular un valor desconocido buscado.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{35.6}$$

Observe que todas las relaciones excepto una son la razón para el medio 2 al medio 1. El orden se invierte *sólo* para los índices de refracción, es decir, n_1/n_2.

35.4 Dispersión

Ya hemos mencionado que la velocidad de la luz en diferentes sustancias varía según las longitudes de onda. Definimos el índice de refracción como la razón de la velocidad c en el espacio libre a la velocidad dentro del medio.

$$n = \frac{c}{v_m}$$

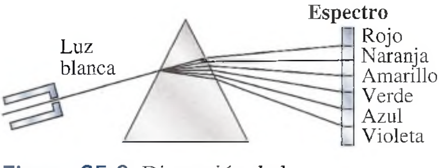


Figura 35.8 Dispersión de la luz por medio de un prisma.

Los valores que se presentan en la tabla 35.1 son válidos sólo en el caso de la luz monocromática amarilla (589 nm). La luz con una longitud de onda diferente, como la luz azul o la luz roja, daría como resultado un índice de refracción ligeramente diferente. La luz roja viaja con mayor rapidez, dentro de un medio específico, que la luz azul. Esto se puede demostrar haciendo pasar luz blanca a través de un prisma de cristal, como en la figura 35.8. Debido a las diferente rapidez dentro del medio, el haz se *dispersa* en sus colores componentes.

La dispersión es la separación de la luz en las longitudes de onda que la componen.

De un experimento así, podemos concluir que la luz blanca es en realidad una mezcla de luz, compuesta de varios colores. La proyección de un haz disperso se conoce como ***espectro***.

35.5 Refracción interna total

Puede presentarse un fenómeno fascinante conocido como ***refracción interna total***, cuando la luz pasa, en forma oblicua, de un medio a otro de menor densidad óptica. Para entender este fenómeno, consideremos una fuente de luz sumergida en un medio 1, como se ilustra en la figura 35.9. Observe los cuatro rayos A, B, C y D, que divergen de la fuente sumergida. El rayo A pasa al medio 2 en dirección normal a la interfase. El ángulo de incidencia y el ángulo de refracción valen cero en este caso especial. El rayo B incide con un ángulo θ_1 y se refracta alejándose de la normal con un ángulo θ_2. El ángulo θ_2 es mayor que θ_1 porque el índice de refracción para el medio 1 es

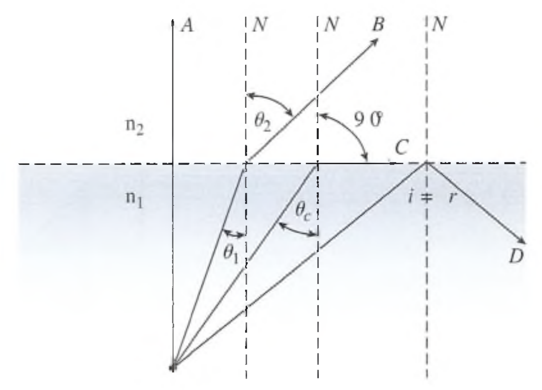


Figura 35.9 Ángulo crítico de incidencia.

mayor que para el medio 2 ($n_1 > n_2$). Cuando el ángulo de incidencia θ_1 aumenta, el ángulo de refracción θ_2 también aumenta hasta que el rayo refractado C emerge en forma tangencial a la superficie. El ángulo de incidencia θ_c en el cual esto ocurre, se conoce como el ***ángulo crítico***.

El ángulo crítico θ_c es el ángulo de incidencia límite en un medio más denso, que da por resultado un ángulo de refracción de 90°.

Un rayo que se aproxime a la superficie con un ángulo mayor que el ángulo crítico se refleja de nuevo al interior del medio 1. El rayo D en la figura 35.9 no pasa al medio de arriba, sino que en la interfase *se refleja internamente en forma total*. Este tipo de reflexión obedece a las mismas leyes que cualquier otro tipo de reflexión; esto significa que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. La reflexión interna total puede ocurrir únicamente cuando la luz incidente procede de un medio de mayor densidad ($n_1 > n_2$).

El ángulo crítico para dos medios determinados se puede calcular a partir de la ley de Snell.

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_c = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

donde θ_c es el ángulo crítico y $\theta_2 = 90°$. Simplificando, escribimos

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_c = n_2(1)$$

o bien,

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textit{Ángulo crítico} \qquad \textbf{(35.7)}$$

Puesto que el seno del ángulo crítico nunca puede ser mayor que 1, el índice de refracción n_1 para el medio incidente debe ser mayor que el índice n_2 para el medio refractado. Si éste no fuera el caso, la luz se reflejaría en la interfase, de regreso al medio incidente.

Ejemplo 35.5

¿Cuál es el ángulo crítico para una superficie vidrio-aire si el índice de refracción del vidrio es 1.5?

Solución: Sustituyendo en forma directa en la ecuación (35.7) tenemos

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_a}{n_v} = \frac{1.0}{1.5} = 0.667$$

$$\theta_c = 42°$$

El hecho de que el ángulo crítico para el vidrio sea de 42° permite el empleo de prismas a 45° en gran número de instrumentos ópticos. Dos de esas aplicaciones se ilustran en la figura 35.10. En la figura 35.10a se puede obtener una reflexión de 90° con poca pérdida de intensidad. En la figura 35.10b a 180° se obtiene una desviación. En cada caso, la reflexión interna total ocurre debido a que todos los ángulos de incidencia son de 45° y, por tanto, mayores que el ángulo crítico.

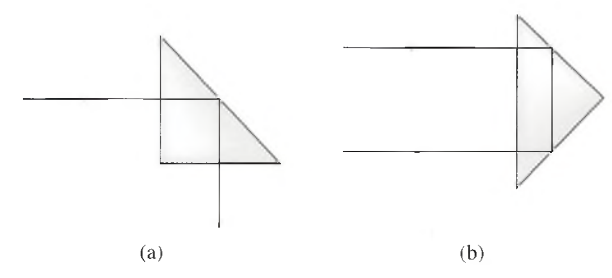
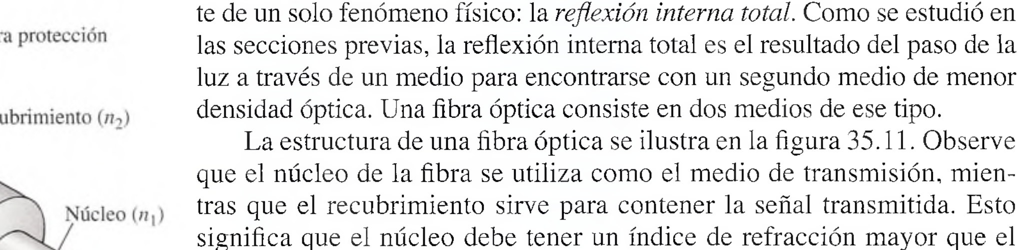


Figura 35.10 Los prismas de ángulo recto hacen uso del principio de reflexión interna total para desviar la trayectoria de la luz.

35.6 Fibras ópticas y aplicaciones

La aplicación de fibras ópticas en comunicaciones ha dado por resultado una explosión en la información. La fibra óptica tiene un ancho de banda mayor que el alambre de cobre, lo que significa que se puede transmitir más información durante un periodo fijo. Este incremento en la capacidad de transportar información proporciona nuevas e importantes posibilidades, incluyendo la televisión interactiva y selecciones de canal por cable, entre miles de aplicaciones.

Aun cuando es fácil percibir cómo la fibra óptica está cambiando el mundo que nos rodea, quizá nos sorprenda saber que esta habilidad para transmitir información depende principalmente de un solo fenómeno físico: la *reflexión interna total*. Como se estudió en las secciones previas, la reflexión interna total es el resultado del paso de la luz a través de un medio para encontrarse con un segundo medio de menor densidad óptica. Una fibra óptica consiste en dos medios de ese tipo.



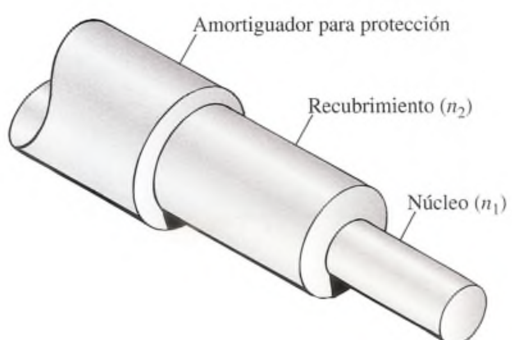
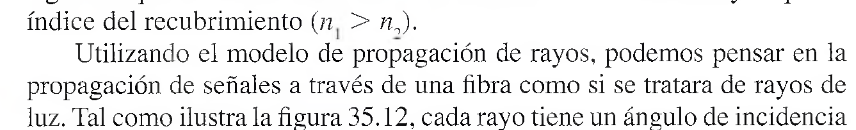


Figura 35.11 Estructura básica de una fibra óptica. El índice de refracción para el núcleo (n_1) debe ser mayor que el índice de refracción para el recubrimiento (n_2).

La estructura de una fibra óptica se ilustra en la figura 35.11. Observe que el núcleo de la fibra se utiliza como el medio de transmisión, mientras que el recubrimiento sirve para contener la señal transmitida. Esto significa que el núcleo debe tener un índice de refracción mayor que el índice del recubrimiento ($n_1 > n_2$).



Utilizando el modelo de propagación de rayos, podemos pensar en la propagación de señales a través de una fibra como si se tratara de rayos de luz. Tal como ilustra la figura 35.12, cada rayo tiene un ángulo de incidencia fijo con la frontera núcleo/recubrimiento. Mientras los haces de luz tengan un ángulo de incidencia igual o mayor que el ángulo crítico de la fibra, la señal quedará confinada en la fibra. (*Nota:* Por el hecho de que una fibra óptica es en realidad una guía de ondas cilíndrica, la luz puede propagarse únicamente en ella con ángulos específicos mayores que el ángulo crítico. Estos ángulos específicos se pueden determinar resolviendo las ecuaciones de onda apropiadas.)

Como se mencionó anteriormente, las fibras ópticas han jugado un papel importante en la expansión de la comunicación. En lo fundamental, las comunicaciones a través de fibra óptica consisten en el envío de información desde una fuente hasta su destino por medio de la transmisión de pulsos de luz. Esto es análogo a la práctica histórica de las comunicaciones de una embarcación a otra, usando la clave Morse. Cuando un barco deseaba comunicarse con otro, una fuente de luz se apagaba y se encendía en una secuencia que ambas partes entendían. Este principio se puede extender a las comunicaciones mediante fibra óptica, donde se han creado numerosos y muy eficientes esquemas para la codificación de datos. El esquema de codificación elegido depende de la aplicación específica y de las consideraciones de costos.

Usar la fibra óptica en sistemas de comunicación tiene múltiples ventajas. Entre las más importantes se cuentan la inmunidad a la interferencia electromagnética, una protección de datos más eficiente, mayor rapidez de transmisión y un aumento en la amplitud de banda de la señal. Estas ventajas hacen que la fibra óptica sea el medio de comunicación obligatorio para el futuro.

Si bien es cierto que las comunicaciones son el campo predominante de las fibras ópticas, esta tecnología tiene muchas otras aplicaciones. La figura 35.13 ilustra un sensor del nivel de fluidos. En este sensor se aprovecha el comportamiento de la luz cuando pasa por diferentes medios. Observe que al extremo de la fibra se le ha dado una forma especial para esta apli-

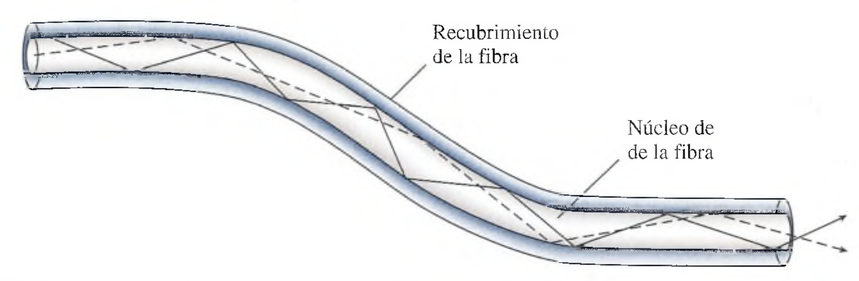


Figura 35.12 Modelo de rayos que permite explicar la forma en que se propaga la luz a través de una fibra óptica. Mientras las curvas sean lo suficientemente suaves como para que el ángulo de incidencia sea mayor que el ángulo crítico, la luz transmitida por la fibra sufrirá una reflexión interna total.

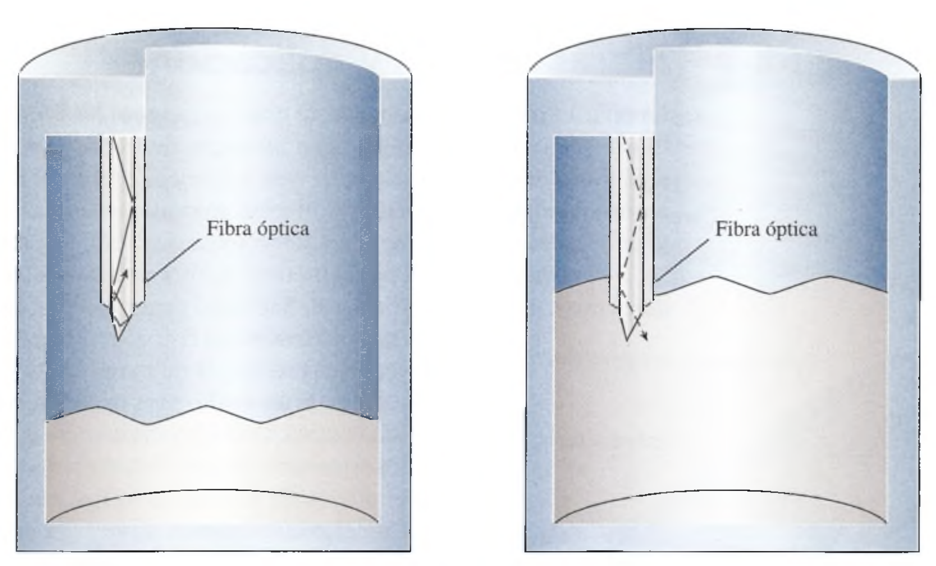


Figura 35.13 Sensor del nivel de fluidos fabricado con fibra óptica.

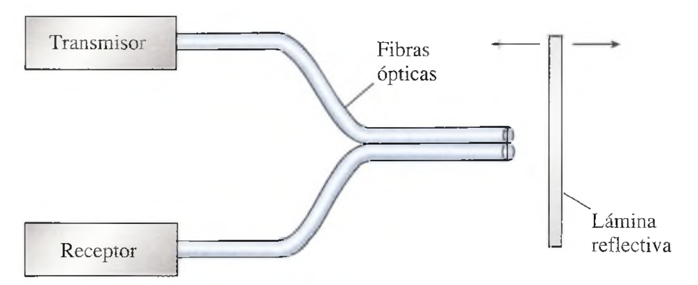


Figura 35.14 Sensor de desplazamiento de fibra óptica.

cación, de modo que cuando está expuesta al aire (a causa del bajo nivel de fluido) la mayor parte de la luz transmitida por la fibra se refleja de regreso. En cambio, cuando el fluido que está siendo detectado cubre el extremo de la fibra, el valor del índice del fluido se aproxima más al índice del núcleo de la fibra, por lo cual se reduce la cantidad de luz reflejada. La variación en la luz reflejada se utiliza para determinar el nivel del fluido.

Otro uso posible de la fibra óptica es un sensor de desplazamiento. Este sensor se basa en el comportamiento de dispersión de la luz cuando sale del extremo de una fibra. Con este sensor, la distancia entre los extremos de la fibra y la lámina reflectiva se puede medir como se indica en la figura 35.14. Cuando la lámina se mueve alejándose de los extremos de la fibra, se refleja menos luz de la fibra transmisora a la fibra receptora. Por el contrario, cuando la lámina se acerca a los extremos de la fibra, se refleja más luz en la fibra receptora. Este nivel de variación de la intensidad receptora se aprovecha para determinar la posición de la lámina.

En medicina, la fibra óptica está causando un gran impacto, tanto en lo que se refiere al diagnóstico como en materia de tratamiento. Con propósitos de diagnóstico, un dispositivo conocido como endoscopio de fibra óptica permite inspeccionar visualmente los órganos internos. En este dispositivo se utilizan dos fibras ópticas, una para iluminar el área de interés y la otra para transmitir la imagen que está siendo observada. Cuando se conecta a un monitor de video, este dispositivo permite a los médicos ver lo que anteriormente requería de cirugía exploratoria.

En lo que se refiere a tratamiento, las arterias obstruidas pueden ser despejadas usando el sistema LASTAC (angioplastia transluminal reforzada por láser). En este sistema, la luz de láser se transmite a través de una fibra óptica que se inserta en una arteria obstruida. El láser evapora la placa de obstrucción, despejando la arteria. Con este tratamiento se evita frecuentemente la cirugía mayor.

35.7 ¿Es lo mismo ver que creer?

En vista de que estamos acostumbrados a que la luz se propague en línea recta, la refracción y la reflexión interna total a menudo nos presentan imágenes increíbles. La refracción atmosférica contribuye a múltiples ilusiones que se conocen como *espejismos*. La figura 35.15 proporciona dos ejemplos de tales ilusiones. En la figura 35.15a vemos que una capa de aire caliente, en contacto con el suelo también caliente, es menos densa que las capas de aire frío que están arriba de ella. Por consiguiente, la luz que proviene de los objetos distantes se refracta hacia arriba, por lo cual éstos aparecen invertidos.

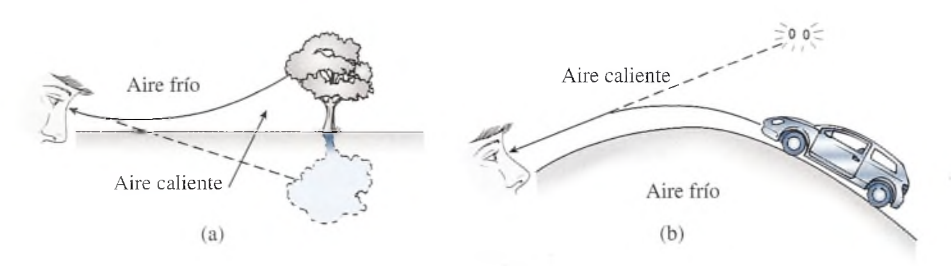


Figura 35.15 La refracción atmosférica es la causante del espejismo en (a) y explica el fenómeno de los *destellos luminosos* (espejismo) en (b).

Por la noche, a veces se presenta la situación contraria: la capa de aire frío se encuentra debajo de otras capas más calientes. Las luces de un automóvil como muestra la figura 35.15b parecen *destellos luminosos* (espejismos) en el aire. Muchos científicos opinan que algunos de los objetos voladores no identificados (OVNIS) observados a través de los siglos, pueden explicarse en términos de la refracción atmosférica.

Varias combinaciones de la refracción y la reflexión interna total fueron la causa de la extraña fotografía que aparece en la figura 35.16. La foto fue tomada con una cámara colocada bajo el agua, enfocando a una muchacha que estaba sentada en el borde de la piscina y tenía los pies sumergidos en el agua. En la figura 35.17 se explica gráficamente este fenómeno. La parte superior de la fotografía fue el resultado de la refracción en la superficie; en la parte del centro, la inversión de las piernas fue una ilusión producida por la reflexión interna total en la superficie del agua. La parte inferior de la fotografía es la única imagen que no muestra distorsión, puesto que las piernas se ven en forma directa dentro del mismo medio.

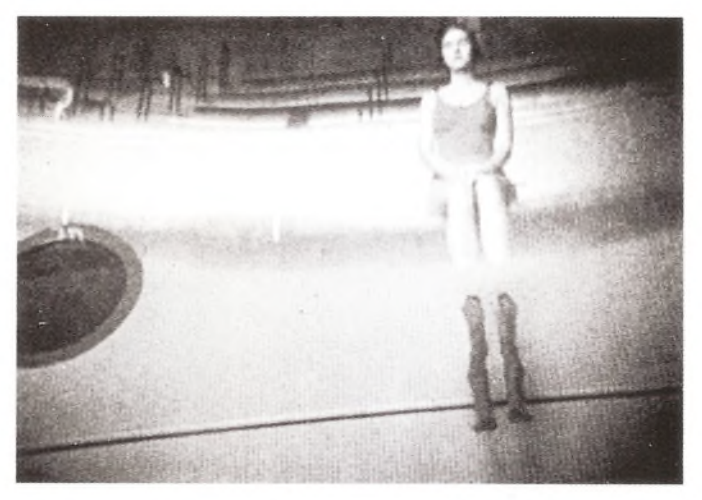


Figura 35.16 Esta fotografía tomada con una cámara colocada bajo el agua nos muestra una curiosa imagen de una muchacha sentada en el borde de una piscina. (*Foto tomada de la película didáctica* Introduction to Optics, *Education Development Center*.)

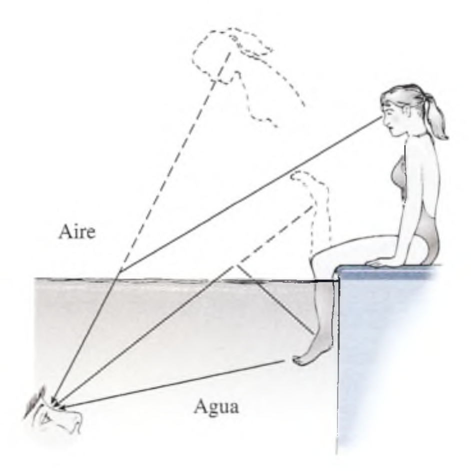


Figura 35.17 Una combinación de la refracción, reflexión y reflexión interna total induce a nuestros ojos a cometer un error de apreciación.

35.8 Profundidad aparente

La refracción es la causa de que un objeto sumergido en un líquido de mayor índice de refracción nos parezca más cercano a la superficie de lo que realmente está. Este curioso efecto se ilustra en la figura 35.18. El objeto O parece estar en I debido a la refracción de la luz desde el objeto. La ***profundidad aparente*** se representa por q, y la profundidad real se simboliza por p. Aplicando la ley de Snell a la superficie se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{35.8}$$

Si podemos relacionar la razón de los índices de refracción con las profundidades real y aparente, contaremos con una relación útil para predecir las profundidades aparentes de los objetos sumergidos. Partiendo de la figura 35.18, se observa que

$$\angle AOB = \theta_1 \qquad \text{y} \qquad \angle AIB = \theta_2$$

y que

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{d}{OA} \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{d}{IA}$$

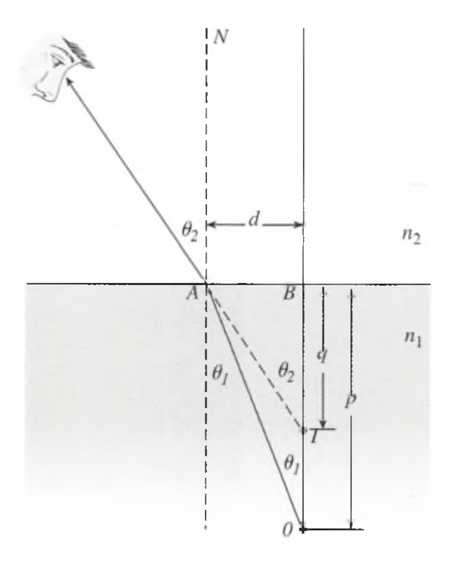


Figura 35.18 Relación entre la profundidad aparente y la profundidad real.

Usando esta información en la ecuación (35.8), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{d/OA}{d/IA} = \frac{IA}{OA} \tag{35.9}$$

Si nos ocupamos tan sólo de los rayos en posición casi vertical, los ángulos θ_1 y θ_2 serán pequeños, por lo que se pueden aplicar las siguientes aproximaciones:

$$OA \approx p \qquad \text{y} \qquad IA \approx q$$

Al aplicar estas aproximaciones a las ecuaciones (35.8) y (35.9), escribimos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{\textit{Profundidad aparente } q}{\textit{Profundidad real } p} = \frac{n_2}{n_1} \tag{35.10}$$

Ejemplo 35.6

Una moneda se encuentra en reposo en el fondo de un recipiente lleno de agua (n_{agua} = 1.33). La distancia aparente de la moneda a la superficie es de 9 cm. ¿Qué profundidad tiene el recipiente?

Plan: Consideramos que la profundidad aparente es la imagen virtual q de la moneda y no la profundidad real p. Podemos calcular p a partir de los índices de refracción dados.

Solución: Al resolver para p en la ecuación (35.10) obtenemos la profundidad real del contenedor.

$$\frac{q}{p} = \frac{n_a}{n_{agua}} \qquad \text{o} \qquad p = \frac{q n_{agua}}{n_a}$$

$$p = \frac{(9\text{ cm})(1.33)}{(1.0)} = 12\text{ cm}$$

La profundidad aparente es aproximadamente tres cuartas partes de la profundidad real.

Resumen y repaso

Resumen

La *refracción* ha sido definida como la desviación de un rayo de luz cuando pasa oblicuamente de un medio a otro. Hemos visto que el grado de desviación se puede predecir tomando como base el cambio registrado en la velocidad o el índice de refracción conocido de cada medio. Los conceptos de refracción, ángulo crítico, dispersión y reflexión interna desempeñan un papel importante en el funcionamiento de muchos instrumentos. Los principales conceptos expuestos en este capítulo se resumen a continuación.

- El índice de refracción de un material dado es la razón entre la velocidad de la luz c en el espacio libre y la velocidad de la luz v a través del medio.

$$n = \frac{c}{v} \qquad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \textit{Índice de refracción}$$

- Cuando la luz incidente que proviene del medio 1 se refracta dentro del medio 2, la ley de Snell se puede escribir en las dos formas siguientes (véase la figura 35.19):

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} \qquad \textit{Ley de Snell}$$

- Cuando la luz procedente del medio 1 entra en el medio 2, su longitud de onda se modifica por el hecho de que el índice de refracción es diferente.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \lambda_2 = \frac{n_1 \lambda_1}{n_2}$$

- El ángulo crítico θ_c es el ángulo máximo de incidencia procedente de un medio que todavía es capaz de producir refracción (a 90°) en el interior de otro medio de frontera (límite). A partir de esta definición, tenemos

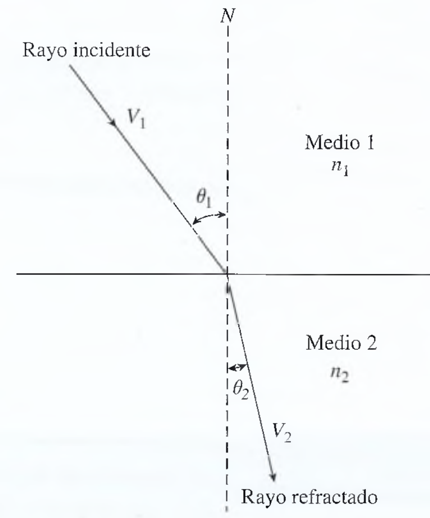


Figura 35.19 Ley de Snell.

$$\operatorname{sen} \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textit{Ángulo crítico}$$

- La refracción es la causa de que un objeto introducido en un medio se observe a diferente profundidad cuando se mira desde arriba en otro medio.

$$\frac{\textit{Profundidad aparente } q}{\textit{Profundidad real } p} = \frac{n_2}{n_1}$$

Conceptos clave

ángulo crítico 686
densidad óptica 683
dispersión 680
índice de refracción 679
ley de Snell 682
espectro 685
profundidad aparente 690
reflexión interna total 685
refracción 679

Preguntas de repaso

35.1. Enuncie tres leyes de la refracción y demuestre cómo pueden comprobarse en el laboratorio.

35.2. ¿El índice de refracción es constante para un medio en particular? Explique su respuesta.

35.3. Explique cómo se prolonga el día a causa de la refracción atmosférica.

35.4. Se coloca una moneda en el fondo de una cubeta, de manera que no sea posible verla cuando se mira desde arriba bajo cierto ángulo. Demuestre por medio de diagramas por qué la moneda se vuelve visible cuando la cubeta se llena de agua.

35.5. ¿Los objetos de densidad óptica más alta tienen ángulos críticos más grandes o más pequeños cuando están rodeados de aire?

35.6. A partir de los temas expuestos en este capítulo, explique por qué un diamante es mucho más brillante que una copia del mismo hecha de vidrio.

35.7. Explique por qué los prismas en ángulo recto son reflectores más eficientes que las superficies reflejadas.

35.8. ¿Por qué se perciben colores en la luz de los destellos de un diamante?

35.9. Un niño está de pie dentro de una piscina de profundidad uniforme y el nivel del agua le cubre hasta la cintura. ¿Por qué da la impresión de que el niño se encuentra en la parte más profunda de la piscina?

35.10. La longitud de onda λ de cierta fuente de radiación se incrementa a 2λ. Si el índice de refracción medido inicialmente fue de 1.5, ¿cuál será su valor cuando la longitud de onda se duplique?

35.11. ¿Cuál es el ángulo crítico para un trozo de vidrio de forma irregular sumergido en un líquido que tiene el mismo índice de refracción que aquél? ¿Por qué el vidrio sigue siendo invisible en este caso?

Problemas

Sección 35.1 Índice de refracción

35.1. La rapidez de la luz en cierto medio transparente es de 1.6×10^8 m/s. ¿Cuál es el índice de refracción en dicho medio? Resp. 1.88

35.2. Si la rapidez de la luz se reduce en un tercio, ¿cuál será el índice de refracción del medio a través del cual viaja dicha luz?

35.3. Calcule la rapidez de la luz en (a) vidrio crown, (b) diamante, (c) agua y (d) alcohol etílico.
Resp. 2.00×10^8 m/s, 1.24×10^8 m/s, 2.26×10^8 m/s, 2.21×10^8 m/s

35.4. Si la luz viaja a 2.1×10^8 m/s en un medio transparente, ¿cuál es el índice de refracción dentro de dicho medio?

Sección 35.2 Las leyes de la refracción

35.5. La luz incidente tiene un ángulo de 37° cuando pasa del aire al cristal de roca (n = 1.6). ¿Cuál es el ángulo de refracción dentro del cristal de roca? Resp. 22.1°

35.6. Un haz de luz forma un ángulo de 60° con la superficie del agua. ¿Cuál es su ángulo de refracción al entrar en el agua?

35.7. La luz pasa del agua (n = 1.33) al aire. El haz sale al aire formando un ángulo de 32° con la superficie horizontal del agua. ¿Cuál es el ángulo de incidencia dentro del agua? Resp. 39.6°

35.8. La luz incide en el aire a 60° y se refracta entrando a un medio desconocido con un ángulo de 40°. ¿Cuál es el índice de refracción del medio desconocido?

35.9. La luz pasa del medio A al medio B formando un ángulo de 35° con la frontera horizontal entre ambos. Si el ángulo de refracción también es de 35°, ¿cuál es el índice de refracción relativo entre los dos medios? Resp. 1.43

35.10. La luz que incide procedente del aire a 45° se refracta en un medio transparente a un ángulo de 34°. ¿Cuál es el índice de refracción de este material?

***35.11.** Un rayo de luz que proviene del aire (figura 35.20) incide en agua (n = 1.33) con un ángulo de 60°. Después de pasar por el agua, entra en el vidrio (n = 1.50) y por último sale de nuevo al aire. Calcule el ángulo de salida. Resp. 60°.

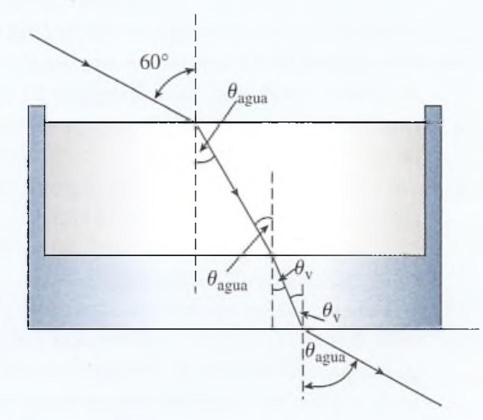


Figura 35.20

***35.12.** Demuestre que, independientemente del número de capas paralelas de medios diferentes que atraviese la luz, el ángulo de entrada y el ángulo de salida final serán iguales siempre que el medio inicial y el final también sean iguales.

Sección 35.5 Longitud de onda y refracción

35.13. La longitud de onda de la luz de sodio es de 589 nm en el aire. Calcule su longitud de onda en glicerina. Resp. 401 nm

35.14. La longitud de onda disminuye 25 por ciento al pasar del aire a un medio desconocido. ¿Cuál es el índice de refracción de este último medio?

35.15. Un haz de luz tiene una longitud de onda de 600 nm en el aire. ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz cuando penetra en vidrio ($n = 1.50$)? Resp. 400 nm

35.16. La luz roja (520 nm) se convierte en luz azul (478 nm) cuando entra en un líquido. ¿Cuál es el índice de refracción de ese líquido? ¿Cuál es la velocidad de la luz en dicho líquido?

*35.17. Un rayo de luz monocromática cuya longitud de onda es de 400 nm en el medio *A* entra con un ángulo de 30° respecto a la frontera de otro medio *B*. Si el rayo se refracta en un ángulo de 50°, ¿cuál es su longitud de onda en el medio *B*? Resp. 613 nm

Sección 35.5 Reflexión interna total

35.18. ¿Cuál es el ángulo crítico para la luz que pasa del cuarzo ($n = 1.54$) al agua ($n = 1.33$)?

35.19. El ángulo crítico para un medio determinado en relación con el aire es de 40°. ¿Cuál es el índice de refracción de ese medio? Resp. 1.56

35.20. Si el ángulo crítico de incidencia para una superficie líquido-aire es de 46°, ¿cuál es el índice de refracción del líquido?

35.21. ¿Cuál es el ángulo crítico en relación con el aire para (a) el diamante, (b) el agua y (c) el alcohol etílico? Resp. 24.4°, 48.8°, 47.3°

35.22. ¿Cuál es el ángulo crítico para el cristal de roca sumergido en alcohol etílico?

*35.23. Un prisma de ángulo recto como el que vemos en la figura 35.10a está sumergido en agua. ¿Cuál es el índice de refracción mínimo necesario para que el material logre una reflexión interna total? Resp. 1.88

Problemas adicionales

35.24. El ángulo de incidencia es de 30° y el ángulo de refracción es de 26.3°. Si el medio incidente es agua, ¿cuál podría ser el medio de refracción?

35.25. La rapidez de la luz en un medio desconocido es de 2.40 = 10^8 m/s. Si la longitud de la luz en ese medio desconocido es 400 nm, ¿cuál es su longitud de onda en el aire? Resp. 500 nm

35.26. Un rayo de luz incide en una lámina de vidrio formando un ángulo de 30° con la superficie del vidrio. Si el ángulo de refracción también es de 30°, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?

35.27. Un haz de luz incide en una superficie plana que separa dos medios cuyos índices son 1.6 y 1.4. El ángulo de incidencia es de 30° en el medio que tiene el índice más alto. ¿Cuál es el ángulo de refracción? Resp. 34.85°

35.28. Al pasar del vidrio ($n = 1.50$) al agua ($n = 1.33$), ¿cuál es el ángulo crítico para que se produzca la reflexión interna total?

35.29. La luz cuya longitud de onda es de 650 nm en un vidrio determinado tiene una rapidez de 1.7×10^8 m/s. ¿Cuál es el índice de refracción de ese vidrio? ¿Cuál es la longitud de onda de esa luz en el aire? Resp. 1.76, 1 146 nm

35.30. El ángulo crítico para una sustancia determinada rodeada de aire es de 38°. ¿Cuál es el índice de refracción de esa sustancia?

35.31. El agua de una piscina tiene 2 m de profundidad. ¿Qué tan profunda le parece a una persona que la mira hacia abajo en dirección vertical? Resp. 1.50 m

35.32. Una placa de vidrio ($n = 1.50$) se coloca encima de una moneda sobre una mesa. La moneda parece estar 3 cm debajo de la parte superior de la placa de vidrio. ¿Cuál es el espesor de dicha placa?

Preguntas para la reflexión crítica

*35.33. Suponga que un rayo de luz horizontal incide en una de las caras de un prisma equilátero de vidrio ($n =$ 1.50) como muestra la figura 35.21. ¿Con qué ángulo θ saldrá el rayo por el otro lado? Resp. 77.1°

*35.34. ¿Cuál es el ángulo de incidencia mínimo en la primera cara del prisma de la figura 35.21 para que el haz se refracte al salir al aire por la segunda cara? (Los ángulos de mayor magnitud no producen una reflexión interna total en la segunda cara.)

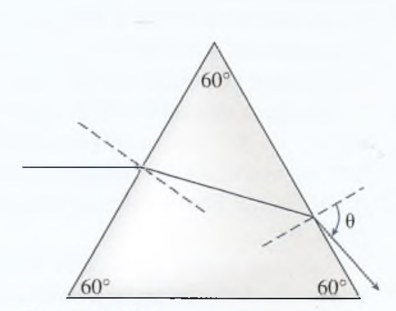


Figura 35.21

***35.35.** La luz que pasa a través de una placa de un material transparente cuyo espesor es t sufre un desplazamiento lateral d, como muestra la figura 35.22. Calcule el desplazamiento lateral si la luz pasa a través de vidrio rodeado de aire. El ángulo de incidencia θ_1 es 40° y el vidrio ($n = 1.50$) tiene 2 cm de espesor.
Resp. 5.59 mm

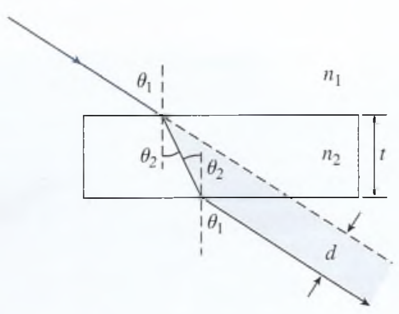


Figura 35.22

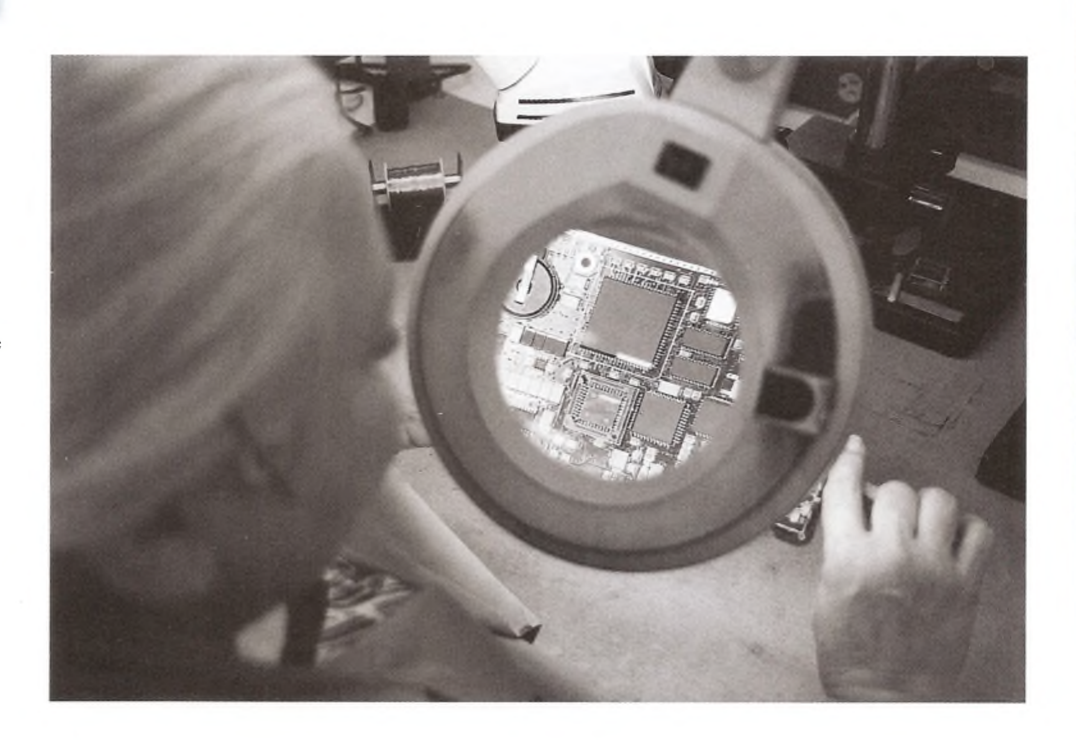
***35.36.** Un bloque de vidrio de forma rectangular ($n = 1.54$) está sumergido por completo en agua ($n = 1.33$). Un haz de luz que pasa por el agua penetra en una de las caras verticales del bloque de vidrio con un ángulo de incidencia θ_1 y se refracta dentro del vidrio, después de lo cual avanza hasta la superficie superior del bloque. ¿Cuál es el ángulo mínimo θ_1 que debe formar la luz con dicha cara para que el haz no salga por la parte superior del bloque de vidrio?

***35.37.** Demuestre que el desplazamiento lateral de la figura 35.22 se puede calcular mediante

$$d = t \operatorname{sen} \theta_1 \left(1 - \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2}\right)$$

Aplique esta relación para verificar la respuesta a la pregunta 35.35.

36 Lentes e instrumentos ópticos



Se utiliza una lente convexa en la lupa que se muestra en la fotografía, la cual permite observar con detalle un circuito para computadora. Las lentes convergentes y divergentes pueden crear imágenes reales o virtuales para diversas aplicaciones, desde simples lupas hasta complejos microscopios industriales. (*Fotografía © vol. 39 PhotoDisco/Getty.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Determinará matemática o experimentalmente la longitud focal de una lente e indicará si es convergente o divergente.
2. Aplicará la ecuación del fabricante de lentes para resolver parámetros desconocidos relacionados con la construcción de lentes.
3. Usará técnicas de trazado de rayos para construir imágenes formadas por lentes divergentes y convergentes con diversas ubicaciones del objeto.
4. Predecirá matemáticamente o determinará de forma experimental la naturaleza, el tamaño y la ubicación de las imágenes formadas por lentes convergentes y divergentes.

Una ***lente*** es un objeto transparente que altera la forma de un frente de ondas que pasa a través de él. Las lentes generalmente se construyen de vidrio y se les da forma de modo que la luz refractada forme imágenes similares a las que ya hemos estudiado en el caso de los espejos. Quien haya examinado objetos a través de una lupa, observado objetos distantes por medio de un telescopio, o tenga experiencia en fotografía, cuenta con conocimientos sobre los efectos que tienen las lentes sobre la luz. En este capítulo estudiaremos las imágenes formadas por medio de lentes y estudiaremos sus aplicaciones.

36.1 Lentes simples

La forma más sencilla de explicar cómo funciona una lente consiste en considerar la refracción de la luz mediante prismas, como se ilustra en la figura 36.1. Cuando la ley de Snell se aplica a cada superficie de un prisma, la luz se desvía hacia la normal cuando entra en un prisma y se aleja de ella cuando sale de él. El efecto, en cualquier caso, es ocasionar que el haz de luz se desvíe hacia la base del prisma. Los rayos de luz permanecen paralelos porque tanto la superficie de entrada como la de salida son planas y forman ángulos iguales con todos los rayos que pasan por el prisma. Por lo tanto, un prisma simplemente altera la dirección de un frente de onda.

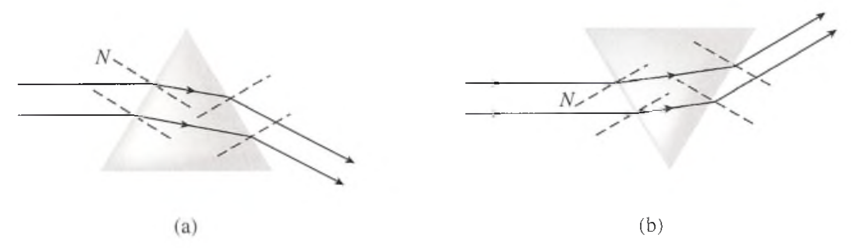


Figura 36.1 Los rayos paralelos de luz se flexionan hacia la base del prisma y permanecen paralelos.

FÍSICA HOY

Los prismas se usan en lentes para la gente que tiene doble visión para desplazar las imágenes hasta que la persona las resuelve como una sola imagen.

Suponga que colocamos dos prismas base con base, como se muestra en la figura 36.2a. La luz incidente que viene de la izquierda va a converger, pero no se reunirá en un foco. Para enfocar los rayos de luz en un punto, los rayos extremos deben ser desviados más que los rayos centrales, lo cual se consigue tallando las superficies de modo que tengan una sección transversal uniformemente curva, como se indica en la figura 36.2b. Una lente que conduce un haz de luz paralelo a un foco puntual en la forma mencionada se llama ***lente convergente***.

Una lente convergente es la que refracta y hace converger la luz paralela en un punto focal situado más allá de la propia lente.

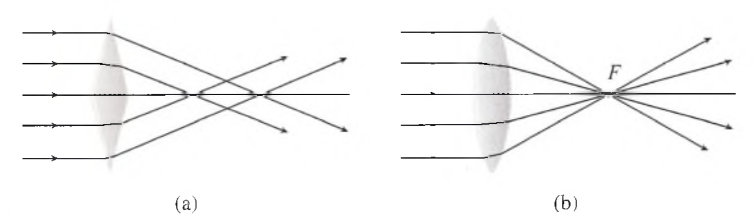


Figura 36.2 (a) Dos prismas colocados base contra base hacen convergir los rayos pero no los conducen hacia un foco común. (b) Una lente convergente puede construirse curvando uniformemente las superficies.

Las superficies curvas de las lentes pueden tener cualquier forma regular, por ejemplo, esférica, cilíndrica o parabólica. Puesto que las superficies esféricas son más fáciles de fabricarse, la mayoría de las lentes se construyen con dos superficies esféricas. La línea que une el centro de las dos esferas se conoce como el *eje* de las lentes. En la figura 36.3 se muestran tres ejem-

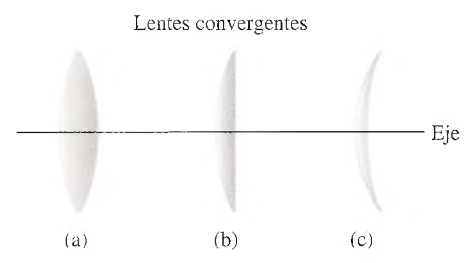


Figura 36.3 Ejemplos de lentes convergentes: (a) biconvexa, (b) plano-convexa, y (c) menisco convergente

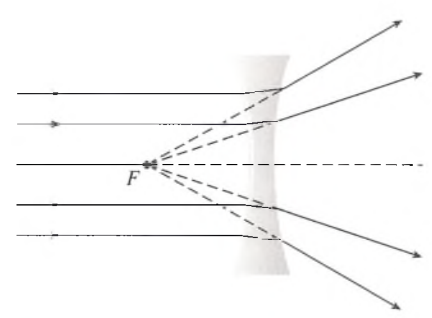


Figura 36.4 Una lente divergente refracta la luz de modo tal que ésta da la impresión de provenir de un punto situado del mismo lado que la lente, igual que la luz incidente.

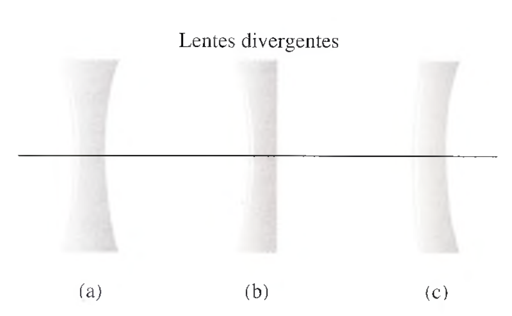


Figura 36.5 Ejemplos de lentes divergentes: (a) bicóncava, (b) plano-cóncava, y (c) menisco divergente.

plos de lentes convergentes: *biconvexa*, *plano-convexa* y de *menisco convergente*. Observe que las lentes convergentes son más gruesas en el centro que en los bordes.

Un segundo tipo de lente se construye fabricando los bordes más gruesos que la parte media, como se presenta en la figura 36.4. Los rayos de luz paralelos que pasan a través de ese tipo de lentes se desvían hacia la parte gruesa, lo que hace que el haz se vuelva divergente. La proyección de los rayos de luz refractados muestra que la luz parece provenir de un punto focal virtual ubicado frente a la lente.

Una lente divergente es la que refracta y hace divergir luz paralela a partir de un punto situado frente a la lente.

Ejemplos de ***lentes divergentes*** son: *bicóncava*, *plano-cóncava* y de *menisco divergente* (véase la figura 36.5.)

36.2 Longitud focal y la ecuación del fabricante de lentes

Una lente se considera "delgada" si su espesor es pequeño comparado con sus otras dimensiones. Al igual que en el caso de los espejos, la formación de imágenes por lentes delgadas es una función de la longitud focal; sin embargo, hay diferencias importantes. Una obvia es que la luz puede pasar *a través* de una lente en dos direcciones. Esto da por resultado dos puntos focales para cada lente, como se observa en la figura 36.6 para una lente convergente y en la 36.7 para una divergente. La primera tiene un *foco real* F, y la última tiene un **foco virtual** F'. La distancia entre el centro óptico de una lente y el foco en cualquier lado de la lente es la ***longitud focal*** f.

Se considera la longitud focal f de una lente como la distancia del centro óptico de la lente a cualquiera de sus focos.

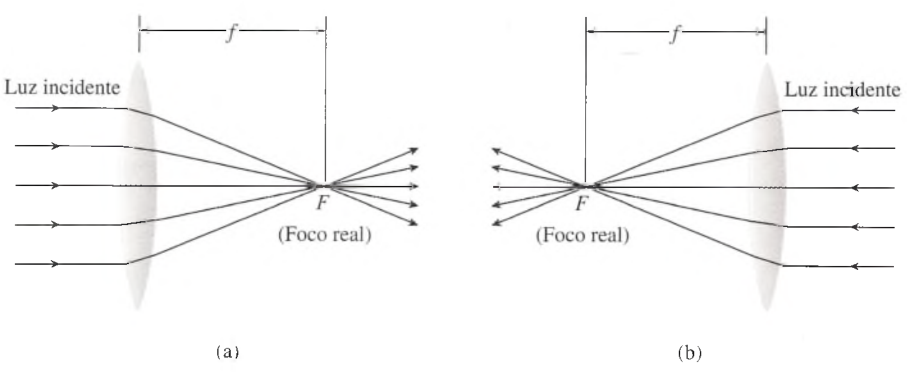


Figura 36.6 Demostración de la longitud focal de una lente convergente. El punto focal es real debido a que rayos de luz reales pasan por él.

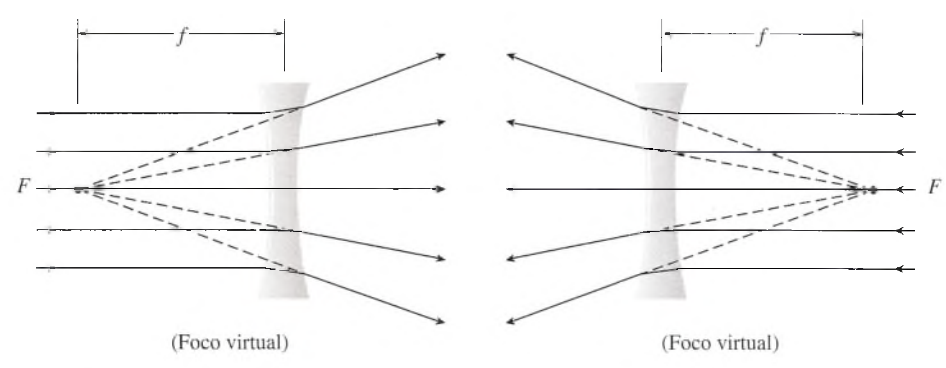


Figura 36.7 Demostración de los puntos focales virtuales de una lente divergente.

Puesto que los rayos de luz son reversibles, una fuente de luz que se coloque en cualquier foco de la lente convergente resulta en un haz de luz paralelo. Esto puede verse si se invierte la dirección de los rayos que se ilustran en la figura 36.6.

La longitud focal f de una lente no es igual a la mitad del radio de curvatura, como en los espejos esféricos, sino que depende del índice de refracción n del material con el que esté fabricada. También está determinado por los radios de curvatura R_1 y R_2 de sus superficies, como se define en la figura 36.8a. Para lentes delgadas, estas cantidades se relacionan mediante la ecuación

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{36.1}$$

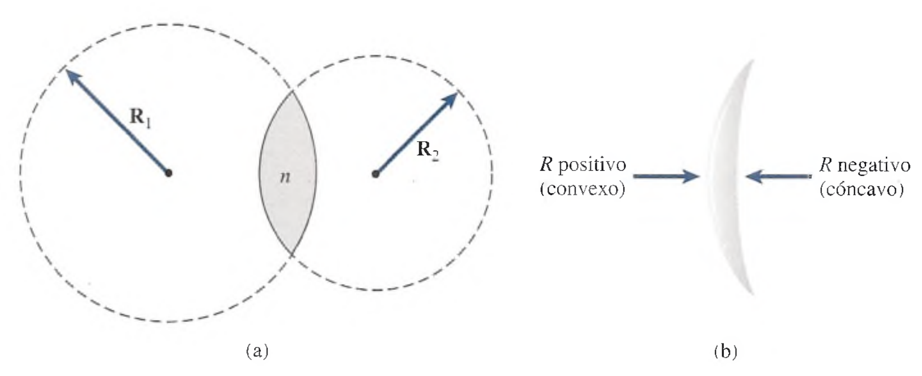


Figura 36.8 (a) El punto focal de una lente está determinado por los radios de sus superficies y por el índice de refracción. (b) Convención de signo para el radio de la superficie de una lente.

Debido a que la ecuación (36.1) implica la construcción de parámetros para una lente, se le conoce como la ***ecuación del fabricante de lentes***. Se aplica por igual a lentes convergentes y divergentes siempre que se siga esta convención de signos:

- El radio de curvatura (ya sea R_1 o R_2) se considera positivo si la superficie es curva hacia fuera (convexa) y negativa si la superficie es curva hacia dentro (cóncava). (Véase la figura 36.8b).
- La longitud focal f de una lente convergente se considera positiva, y la longitud focal de una lente divergente se considera negativa.

Ejemplo 36.1

Un fabricante de lentes planea construir una lente plano-cóncava de vidrio ($n_v = 1.5$). ¿Cuál debe ser el radio de su superficie curva para construir una lente divergente con una longitud focal de -30 cm?

Plan: En la figura 36.5 se muestra una lente *plano-cóncava*. Recuerde que la longitud focal es negativa para una lente divergente y que se considera que el radio de la superficie plana se considera infinito. Con la ecuación del fabricante de lentes se determinará el radio de la superficie curva, que ha de ser una cantidad negativa, sin importar qué superficie se elija como R_1.

Solución: Se sabe que $f = -30$ cm, $R_1 = \infty$ y $n = 1.5$. Con base en la ecuación (36.1) se resuelve para R_2 como sigue:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\left(0 + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n-1}{R_2}\right) \qquad \text{o} \qquad R_2 = (n-1)f$$

$$R_2 = (1.5 - 1)(-30 \text{ cm}) = (0.5)(-30 \text{ cm})$$

$$R_2 = -15.0 \text{ cm}$$

El radio de curvatura es negativo, lo que era de esperar debido a que se trata de una lente divergente.

Ejemplo 36.2

Una ***lente menisco*** tiene una superficie convexa cuyo radio es de 10 cm y cuya superficie cóncava tiene un radio de -15 cm. Si la lente se construye en vidrio con un índice de refracción de 1.52, ¿cuál será su longitud focal?

Plan: Hasta no determinar el signo de f sabremos si se trata de una lente convergente (figura 36.3c) o divergente (figura 36.5c). Haremos la asignación que sigue: $R_1 = +10$ cm y $R_2 = -15$ cm, para después resolver la longitud focal en la ecuación del fabricante de lentes.

Solución: Al sustituir los datos proporcionados se obtiene:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= (1.52 - 1)\left(\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{(-15 \text{ cm})}\right)$$

$$= 0.52\left(\frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}}\right)$$

$$= 0.52\left(\frac{15 \text{ cm} - 10 \text{ cm}}{150 \text{ cm}^2}\right) = \frac{0.52}{30 \text{ cm}}$$

Ahora se resuelve para la longitud focal como sigue:

$$\frac{1}{f} = \frac{0.52}{30 \text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad f = \left(\frac{30 \text{ cm}}{0.52}\right)$$

$$f = 57.7 \text{ cm}$$

El que la longitud focal sea positiva indica que se trata de una lente menisco *convergente*.

36.3 Formación de imágenes mediante lentes delgadas

Para entender cómo se forman las imágenes por medio de lentes hay que presentar ahora métodos de trazado de rayos similares a los estudiados para los espejos esféricos. El método consiste en trazar dos o más rayos a partir de un punto seleccionado sobre el objeto y utilizar el punto de intersección como la imagen de ese punto. Puede considerarse que la desviación completa de un rayo que pasa por una lente delgada se lleva a cabo en un plano a través del centro de la lente. En la sección 36.2 se hizo notar que una lente tiene dos puntos focales. Definimos el *primer punto focal* F_1 como el que se ubica del mismo lado de la lente donde incide la luz. El *segundo punto focal* F_2 se halla en el lado opuesto o más distante de la lente. Con estas definiciones en mente, hay tres rayos principales que pueden trazarse fácilmente a través de la lente. Estos rayos se ilustran en la figura 36.9 para una lente convergente y en la figura 36.10 para una lente divergente:

Rayo 1: Es un rayo paralelo al eje que pasa por el segundo punto focal F_2 de una lente convergente o que parece provenir del primer punto focal F_1 de una lente divergente.

Rayo 2: Un rayo que pasa por el primer punto focal F_1 de una lente convergente o avanza hacia el segundo punto focal F_2 de una lente divergente se refracta paralelamente al eje de la lente.

Rayo 3: Un rayo que pasa por el centro geométrico de una lente no se desvía.

La intersección de cualquiera de estos rayos (o sus extensiones) que provienen de un objeto puntual representa la imagen de ese punto. Puesto que una imagen real producida por una lente se forma mediante rayos de luz que en realidad pasan por la lente, *una imagen real siempre se forma del lado de la lente opuesto al objeto. Una imagen virtual aparecerá del mismo lado de la lente donde se encuentra el objeto.*

Para ilustrar el método gráfico y, al mismo tiempo, entender la formación de diversas imágenes mediante lentes, consideraremos algunos ejemplos. Las imágenes formadas por una lente convergente se muestran en las ubicaciones de los objetos descritos en la figura 36.11a a e.

Observe que las imágenes formadas por una lente *convexa* son semejantes a las formadas por un espejo *cóncavo*. Ello es así debido a que ambos hacen converger la luz. Puesto que las lentes cóncavas la hacen divergir, cabe esperar que formen imágenes similares a las formadas por un espejo divergente (espejo convexo). En la figura 36.12 se demuestra esta similitud.

Las imágenes de objetos reales formadas por lentes divergentes siempre son virtuales, no invertidas y reducidas de tamaño.

Para evitar la confusión es preciso identificar lentes y espejos como convergentes o divergentes. Las lentes divergentes se usan mucho para disminuir o neutralizar el efecto de las convergentes.

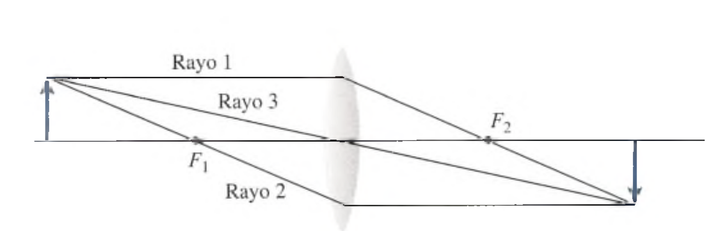


Figura 36.9 Principales rayos para construir la imagen formada por una lente convergente.

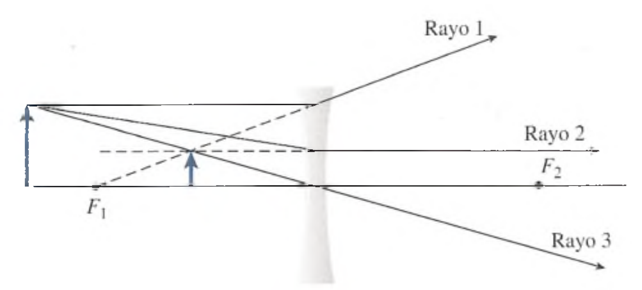
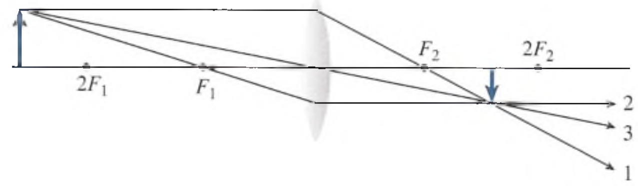
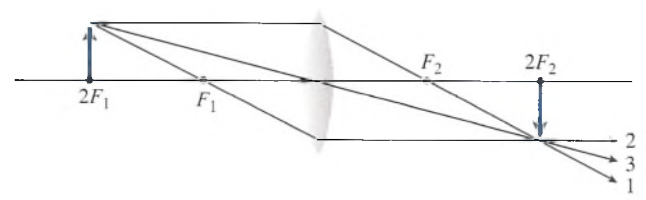


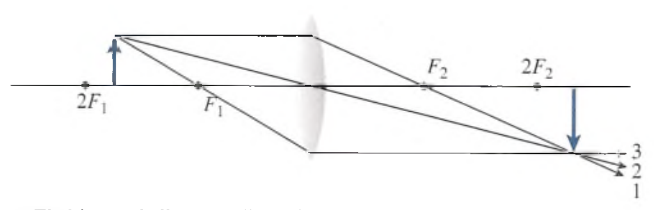
Figura 36.10 Principales rayos para construir la imagen formada por una lente divergente.



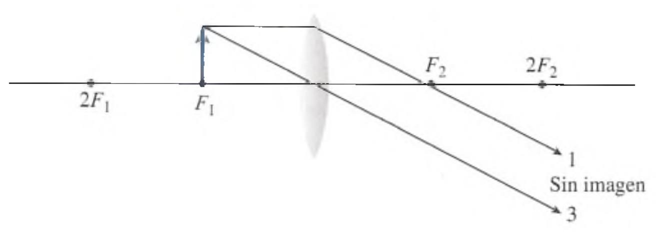
(a) Objeto ubicado a una distancia de más del doble de la longitud focal. Se forma una imagen real, invertida y menor entre F_2 y $2F_2$ en el lado opuesto de la lente.



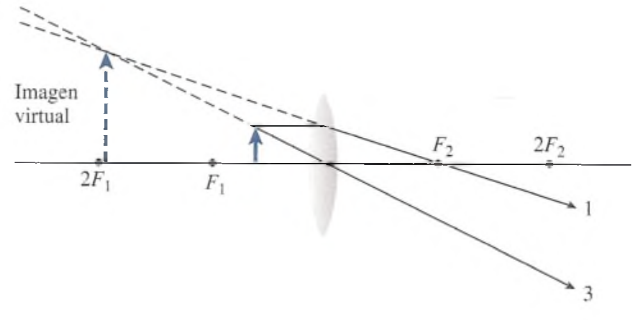
(b) El objeto está a una distancia igual al doble de la longitud focal. Una imagen real, invertida y del mismo tamaño que el objeto se ubica en $2F_2$ en el lado opuesto de la lente.



(c) El objeto se halla a una distancia entre una y dos longitudes focales de la lente. Se forma una imagen real, invertida y mayor, más allá de $2F_2$ del lado opuesto de la lente.



(d) El objeto está en el primer punto focal F_1. No se forma imagen. Los rayos refractados son paralelos.



(e) El objeto se encuentra dentro del primer punto focal. Se forma una imagen virtual, no invertida y mayor, del mismo lado de la lente donde se encuentra el objeto.

Figura 36.11 La construcción de la imagen se muestra para las siguientes distancias del objeto: (a) más allá de $2F_1$, (b) en $2F_1$, (c) entre $2F_1$ y F_1, (d) en F_1 y (e) dentro de F_1.

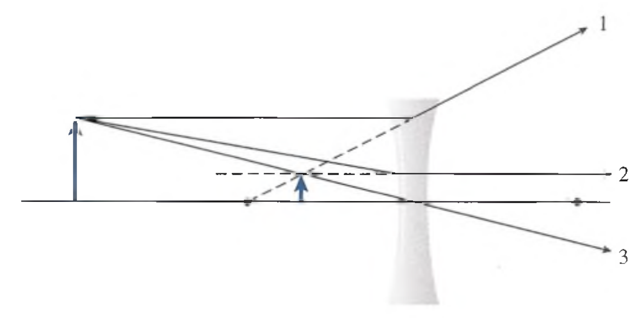


Figura 36.12 Las imágenes formadas con lentes divergentes siempre son virtuales, no están invertidas y son de menor tamaño.

36.4 La ecuación de las lentes y la amplificación

Las características, el tamaño y la ubicación de las imágenes pueden también determinarse analíticamente a partir de la ***ecuación de las lentes***. Esta importante relación se puede deducir aplicando la geometría plana a la figura 36.13. La deducción es similar a la que se hizo para obtener la ecuación del espejo, y la forma final es exactamente igual. La ecuación de las lentes puede escribirse

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{36.2}$$

donde p = distancia al objeto
q = distancia a la imagen
f = distancia focal de la lente

Las mismas convenciones de signos establecidas para los espejos se pueden usar en la ecuación de las lentes si tanto las convergentes como las divergentes se comparan con los espejos convergentes y divergentes. Esta convención se resume de la forma siguiente:

1. La distancia al objeto, p, y la distancia a la imagen, q, se consideran positivas para objetos e imágenes reales y negativos para objetos e imágenes virtuales.
2. La longitud focal f se considera positiva para lentes convergentes y negativa para lentes divergentes.

Las siguientes formas alternativas de la ecuación de las lentes resultan útiles para resolver problemas de óptica:

$$p = \frac{fq}{q - f} \qquad q = \frac{fp}{p - f}$$
$$f = \frac{qp}{p + q} \tag{36.3}$$

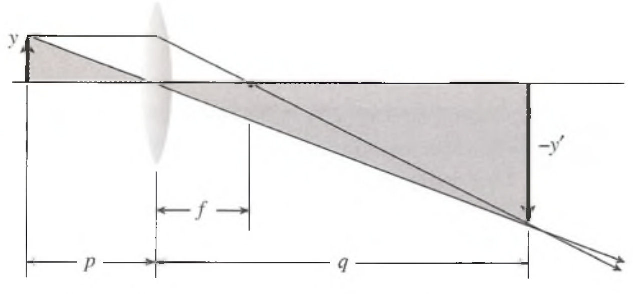


Figura 36.13 Deducción de la ecuación de las lentes y la amplificación.

Es conveniente que compruebe cada una de estas expresiones resolviendo la ecuación de las lentes explícitamente para cada parámetro que aparece en la ecuación.

La ***amplificación*** de una lente también se deduce de la figura 36.13 y tiene la misma forma estudiada para los espejos. Hay que recordar que la amplificación M se define como la razón del tamaño de la imagen y' respecto al tamaño del objeto y, por lo que

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p} \qquad \textbf{(36.4)}$$

donde q es la distancia a la imagen y p la distancia al objeto. Una *amplificación positiva indica que la imagen no está invertida, mientras que una amplificación negativa ocurre sólo cuando la imagen está invertida.*

Ejemplo 36.3

Un objeto de 4 cm de altura se halla a 10 cm de una lente convergente delgada que tiene una longitud focal de 20 cm. ¿Cuál es la naturaleza, tamaño y ubicación de la imagen?

Plan: Para formarse una idea visual de la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen, se traza un esbozo de diagrama de rayos para un objeto ubicado dentro de la longitud focal (véase la figura 36.11e). La solución cuantitativa de cada ubicación y tamaño de la imagen se determina con base en las ecuaciones de la lente y de la amplificación.

Solución: Puesto que $f = 20$ cm y $p = 10$ cm, se resuelve para q como sigue:

$$q = \frac{pf}{p - f} = \frac{(10 \text{ cm})(20 \text{ cm})}{10 \text{ cm} - 20 \text{ cm}}$$

$$= \frac{200 \text{ cm}^2}{-10 \text{ cm}} = -20 \text{ cm}$$

El signo menos coincide con el diagrama de rayos y demuestra que la imagen es virtual. El tamaño de ésta se determina sustituyendo el tamaño del objeto, $y = 4$ cm, en la ecuación (36.4)

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}$$

$$y' = \frac{-qy}{p} = \frac{-(-20 \text{ cm})(4 \text{ cm})}{10 \text{ cm}}$$

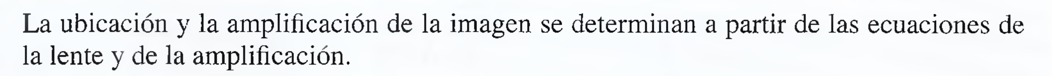
$$y' = +8 \text{ cm}$$

El signo positivo indica que la imagen no está invertida. Este ejemplo ilustra el principio de una lente de amplificación. Una lente convergente que se sostiene más cerca de un objeto que su punto focal produce una imagen virtual, no invertida y ampliada.

Ejemplo 36.4

Una lente menisco divergente tiene una longitud focal de -16 cm. Si la lente se sostiene a 10 cm del objeto, ¿dónde se ubica la imagen? ¿Cuál es la amplificación de la lente?

Plan: Esta vez el diagrama de rayos será semejante al de la figura 36.12. Para una lente divergente la imagen siempre es virtual, no está invertida y es más pequeña que el objeto.



La ubicación y la amplificación de la imagen se determinan a partir de las ecuaciones de la lente y de la amplificación.

Solución: Por sustitución directa se obtiene

$$q = \frac{pf}{p - f} = \frac{(10\text{ cm})(-16\text{ cm})}{10\text{ cm} - (-16\text{ cm})}$$
$$= \frac{-160\text{ cm}^2}{10\text{ cm} + 16\text{ cm}} = -6.15\text{ cm}$$

El signo menos de nuevo indica que la imagen es virtual. La amplificación es

$$M = \frac{-q}{p} = \frac{-(-6.15\text{ cm})}{10\text{ cm}}$$
$$M = +0.615$$

El signo y la amplificación de la respuesta indican que la imagen no está invertida y tiene menor tamaño.

Estrategia para resolver problemas

Lentes e instrumentos ópticos

1. Lea el problema cuidadosamente y trace una línea horizontal que represente el eje de la lente. Indique la ubicación de los puntos que equivalen a f y a $2f$ a cada lado de la línea vertical que representa la lente cóncava o convexa. Represente el objeto como una flecha vertical y ubíquela aproximadamente en el lugar que le corresponda, a la izquierda de la lente.
2. Construya un diagrama de trazado de rayos para tener una representación visual del problema. Es suficiente con un bosquejo, a menos que el problema requiera una solución gráfica. Recuerde que las lentes y espejos convergentes y divergentes forman imágenes similares, excepto porque las imágenes virtuales se forman en el lado *opuesto* para los espejos y del *mismo* lado para las lentes. Las imágenes reales se forman por rayos de luz reales, y las imágenes virtuales se forman donde la luz tan sólo parece originarse, por ejemplo, atrás del espejo o del mismo lado de las lentes donde incide la luz.
3. Escriba una lista de los datos proporcionados teniendo cuidado de colocar el signo apropiado a cada valor. El radio y la longitud focal son *positivos* para las lentes *convergentes* y *negativos* para las lentes *divergentes*. Las distancias a la imagen q son *positivas* cuando se miden respecto a imágenes *reales* y *negativas* cuando corresponden a imágenes *virtuales*. El tamaño de la imagen y' es *positivo* para imágenes no invertidas y *negativo* para imágenes invertidas.
4. Use las ecuaciones siguientes para hacer las sustituciones necesarias y resolver las cantidades desconocidas. No confunda los signos de operación (suma o resta) con los de sustitución.
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}$$
5. Puede resultar necesario eliminar una incógnita resolviendo tanto la ecuación de las lentes como la de la amplificación en forma simultánea.

36.5 Combinaciones de lentes

Cuando la luz pasa por dos o más lentes, puede determinarse la acción combinada si se considera la imagen que se formaría por la primera lente como el objeto de la segunda, y así sucesivamente. Imagine, por ejemplo, el arreglo de lentes de la figura 36.14. La lente 1 forma una imagen real e invertida I_1 del objeto O. Considerando esta imagen intermedia como un objeto real para la lente 2, la imagen final I_2 se ve como real, no invertida y ampliada. La ecuación de las lentes se puede aplicar sucesivamente a estas dos lentes para determinar analíticamente la posición de la imagen final.

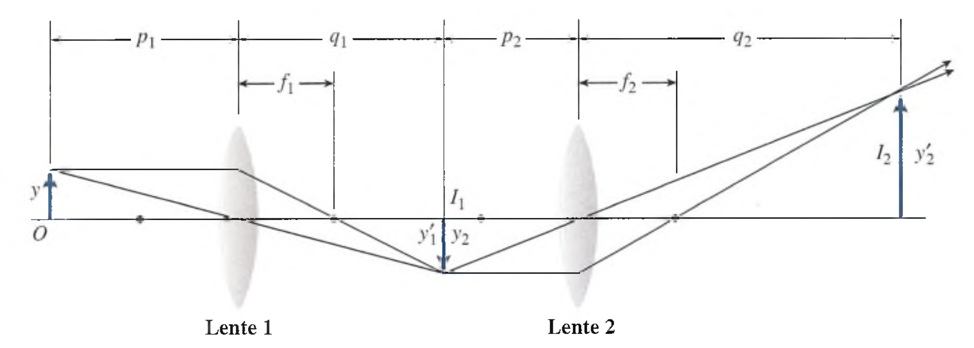


Figura 36.14 El microscopio.

La amplificación total producida por un sistema de lentes es el producto de la amplificación causado por cada lente del sistema. La clave de esto se observa en la figura 36.14. Las amplificaciones en este caso son

$$M_1 = \frac{y_1'}{y_1} \qquad M_2 = \frac{y_2'}{y_2}$$

Puesto que $y_1' = y_2$, el producto M_1M_2 nos lleva a

$$\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_2'}{y_1}$$

Pero y_2'/y_1 es la amplificación total M. En general, podemos escribir

$$M = M_1M_2 \tag{36.5}$$

Entre las aplicaciones de los principios mencionados están el microscopio, el *telescopio* y otros instrumentos ópticos.

36.6 El microscopio compuesto

Un ***microscopio*** compuesto consta de dos lentes convergentes, dispuestas como se muestra en la figura 36.15. La lente de la izquierda es de longitud focal corta y se llama ***objetivo***. Esta lente tiene una amplificación grande y forma una imagen real e invertida del objeto que se estudia. La imagen es amplificada aún más mediante un ocular, que forma una imagen final virtual. La amplificación total lograda es el producto de las amplificaciones del ***ocular*** y del objetivo.

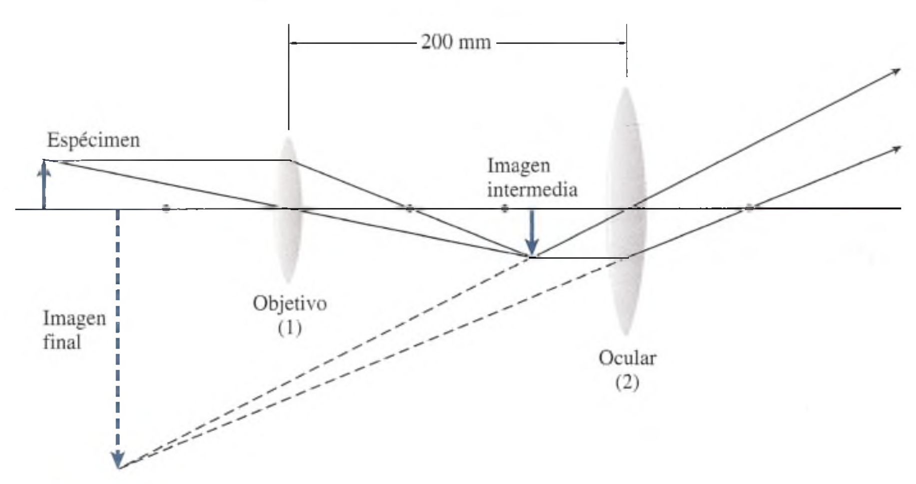


Figura 36.15 Combinaciones de lentes.

Ejemplo 36.5

En un microscopio compuesto el objetivo tiene una longitud focal de 8 mm y el ocular de 40 mm. La distancia entre las dos lentes es de 200 mm y la imagen final aparece a una distancia de 250 mm respecto al ocular. (a) ¿Cuán lejos está el objeto del objetivo? (b) ¿Cuál es la amplificación total? En la figura 36.15 aparece un diagrama de tal disposición de los elementos del microscopio.

Plan: Empezaremos por marcar el objetivo como 1 y el ocular como 2. Como se da más información acerca de los parámetros que afectan al ocular, primero calcularemos la posición de la imagen intermedia. Luego podremos usar esa información para determinar la ubicación del espécimen. La amplificación total es producto de las ampliaciones obtenidas con cada lente.

Solución (a): La distancia de la lente 2 a la imagen final es $q_2 = -250$ mm. La distancia a la imagen intermedia es p_2, que se halla a partir de la ecuación de las lentes.

$$p_2 = \frac{f_2 q_2}{q_2 - f_2} = \frac{(40 \text{ mm})(-250 \text{ mm})}{-250 \text{ mm} - 40 \text{ mm}}$$
$$= 34.5 \text{ mm}$$

El signo menos se usó para q_2 debido a la imagen *virtual*. Ahora que se conoce la distancia p_2 es posible calcular la distancia q_1 para la primera imagen formada por la lente 1.

$$q_1 = 200 \text{ mm} - 34.5 \text{ mm}; \qquad q_1 = 165.5 \text{ mm}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de las lentes para la lente 1 se determina la distancia al objeto, p_1.

$$p_1 = \frac{q_1 f_1}{q_1 - f_1} = \frac{(165.5 \text{ mm})(8 \text{ mm})}{165.5 \text{ mm} - 8 \text{ mm}}$$
$$= 8.41 \text{ mm}$$

En consecuencia, el objeto se halla a 8.41 mm frente al objetivo.

Solución (b): La amplificación total es el producto de las amplificaciones individuales:

$$M_1 = \frac{-q_1}{p_1} \qquad \text{y} \qquad M_2 = \frac{-q_2}{p_2}$$

La amplificación total es $M_T = M_1 M_2$, de forma que

$$M_T = \left(\frac{-q_1}{p_1}\right)\left(\frac{-q_2}{p_2}\right) = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}$$
$$M_T = \frac{(165.5 \text{ mm})(-250 \text{ mm})}{(8.41 \text{ mm})(34.5 \text{ mm})} = -143$$

La amplificación negativa indica que la imagen final está invertida. Este microscopio tiene una especificación nominal de 143X, y el objeto en estudio debe colocarse a 8.41 mm del objetivo.

FÍSICA HOY

La memoria holográfica

Los medios CD-ROM y DVD consisten en un disco delgado de policarbonato metalizado que almacena datos como hoyos y crestas. Los datos pueden leerse reflejando un haz láser a partir de esta superficie cambiante. Sin embargo, estos discos son en esencia bidimensionales y los datos se almacenan sólo sobre la superficie del disco. Una nueva tecnología podría producir datos ópticos en tres dimensiones: un holograma. En experimentos realizados en CalTech, cristales de niobato de litio contaminados con átomos de hierro y manganeso fueron excitados por diferentes tipos de luz y almacenaron esa energía hasta ser expuestos a luz roja o ultravioleta. El patrón almacenado, generado por un par coordinado de rayos láser en presencia de luz ultravioleta, se conservó en los electrones de los átomos de hierro y manganeso. IBM tiene gran interés en esta tecnología, que podría conducir a dispositivos de memoria óptica de lectura y escritura en tres dimensiones.

36.7 El telescopio

FÍSICA HOY

Contemplación de las estrellas

Un potente telescopio computarizado usa un rayo láser como "estrella" guía que rechaza los reflejos de la atmósfera superior, con lo que el telescopio puede localizar las estrellas verdaderas. Este instrumento usa la reflexión como un punto focal. Un espejo muy delgado dirigido al punto focal tiene 127 servomotores adheridos a la parte posterior; estos impulsores dirigen la computadora para ajustar las diminutas porciones del espejo entre 50 y 100 veces por segundo. Gracias a esto, las turbulencias del aire no afectan la nitidez de la visión.

El sistema óptico de un ***telescopio*** de refracción es fundamentalmente el mismo que el del microscopio. Ambos instrumentos emplean un *ocular* para ampliar la imagen producida por el objetivo, pero el telescopio se usa para examinar objetos grandes y distantes, mientras que el microscopio se utiliza para los objetos cercanos y pequeños.

En la figura 36.16 se presenta un telescopio de refracción. El objetivo forma una imagen real, invertida y reducida del objeto distante. Como en el microscopio, el ocular forma una imagen final aumentada y virtual del objeto distante.

Una imagen de telescopio generalmente es más pequeña que el objeto que se observa; por tanto, la amplificación lineal no es una forma práctica de describir la eficiencia de un telescopio. Una medida más adecuada es comparar el tamaño de la imagen final con el tamaño del objeto observado sin el telescopio. Si la imagen captada por el ojo es mayor de lo que sería sin el telescopio, el efecto será que el objeto parecerá más cercano al ojo de lo que realmente está.

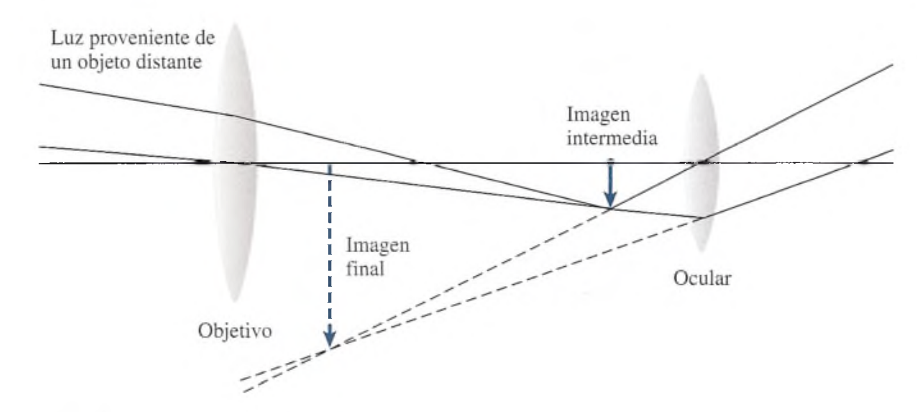


Figura 36.16 Telescopio de refracción.

36.8 Aberraciones de las lentes

Las lentes esféricas a menudo no logran producir imágenes perfectas debido a defectos inherentes a su construcción. Dos de los defectos más comunes se conocen como ***aberración esférica*** y ***aberración cromática***. La aberración esférica, como ya se mencionó para los espejos, es la imposibilidad de las lentes para enfocar todos los rayos paralelos hacia el mismo punto (véase la figura 36.17).

> La aberración esférica es un defecto de las lentes por el que los rayos de los extremos se enfocan más cerca de la lente que los rayos que entran cercanos al centro óptico de la lente.

Este efecto puede reducirse colocando un ***diafragma*** frente a la lente. El diagrama bloquea los rayos extremos, lo que permite producir una imagen más nítida acompañada de una reducción en la intensidad luminosa.

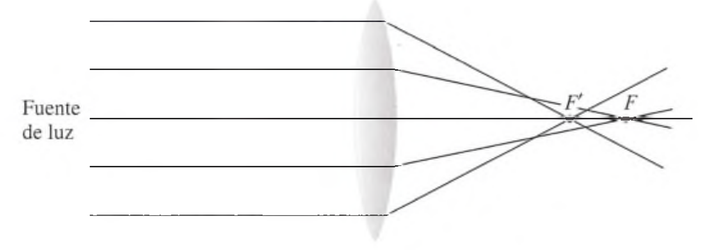


Figura 36.17 Aberración esférica.

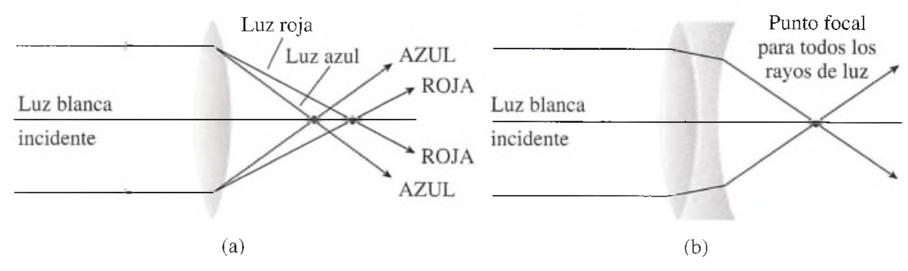


Figura 36.18 (a) Aberración cromática. (b) una lente acromática.

En el capítulo 35 se analizó el hecho de que el índice de refracción de un material transparente varía con la longitud de onda de la luz que pasa por él. Por tanto, si la luz blanca incide sobre una lente, los rayos de los colores componentes no son enfocados en el mismo punto. El defecto, conocido como *aberración cromática*, se ilustra en la figura 36.18a, donde la luz azul aparece enfocada más cerca de la lente que la luz roja.

> Aberración cromática es un defecto de una lente que indica su incapacidad para enfocar luz de diferentes colores en el mismo punto.

El remedio para este defecto es la ***lente acromática***, que se muestra en la figura 36.18b. Tales lentes pueden construirse mediante una combinación de lente convergente de vidrio *crown*, usado para instrumentos ópticos ($n = 1.52$), con una lente divergente de vidrio *flint* (cristal) ($n = 1.63$). Estas lentes se eligen y se construyen de modo que la dispersión de una sea igual y opuesta a la de la otra.

Resumen y repaso

Resumen

Una lente es un dispositivo transparente mediante el cual la luz converge o diverge hacia o desde un punto focal. Las lentes se utilizan abundantemente en el diseño de muchos instrumentos industriales, por lo que es muy útil comprender cómo se forman las imágenes en ellas. A continuación se presenta un resumen de los principales conceptos expuestos en este capítulo.

- La formación de imágenes por medio de lentes delgadas se puede comprender con mayor facilidad si se usa la técnica del trazado de rayos, como se presenta en la figura 36.9 para el caso de lentes convergentes y en la figura 36.10 para las lentes divergentes. Recuerde que el primer punto focal F_1 es el que se encuentra en el lado de la lente por el cual llega la luz incidente. El segundo punto focal F_2 se ubica en el lado opuesto.

  Rayo 1: Un rayo paralelo al eje pasa por el segundo punto focal F_2 de una lente convergente o parece provenir del primer punto focal F_1 de una lente divergente.
  Rayo 2: Un rayo que pasa por F_1 de una lente convergente o que avanza hacia F_2 de una lente divergente se refracta en dirección paralela al eje de la lente.
  Rayo 3: Un rayo que pasa por el centro geométrico de una lente no se desvía.

- La *ecuación del fabricante de lentes* es una relación entre la longitud focal, los radios de las superficies de las dos lentes y el índice de refracción del material de éstas. El significado de estos parámetros se ilustra en la figura 36.8.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \textit{Ecuación del fabricante de lentes}$$

  R_1 o R_2 es positivo si la superficie exterior es convexa, y negativo si es cóncava; f se considera positiva en una lente convergente y negativa en una lente divergente.

- Las ecuaciones para la ubicación del objeto y de la imagen y para la amplificación son las mismas ecuaciones que en el caso de los espejos.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad p = \frac{qf}{q-f}$$

$$q = \frac{pf}{p-f} \qquad f = \frac{pq}{p+q}$$

$$\textit{Amplificación} = \frac{\textit{tamaño de la imagen}}{\textit{tamaño del objeto}} \qquad M = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}$$

  p o q es positivo para imágenes reales y negativo para imágenes virtuales; y o y' es positivo si la imagen no está invertida y negativo si está invertida.

Conceptos clave

aberración acromática 708
aberración esférica 708
amplificación 704
diafragma 708
ecuación de las lentes 703
ecuación del fabricante de lentes 699
foco virtual 698
lente acromática 709
lente convergente 697
lente divergente 698
lente menisco 700
lente 696
longitud focal 698
microscopio 706
objetivo 706
ocular 706
telescopio 708

Preguntas de repaso

36.1. Ilustre por medio de diagramas el efecto de una lente convergente sobre un frente de ondas planas que pasa a través de ella. ¿Cuál sería el efecto de una lente divergente?

36.2. Explique por qué las aceitunas parecen más grandes cuando las vemos dentro de su recipiente cilíndrico de vidrio. ¿Cuál es la causa de esta amplificación: el líquido, el vidrio o ambos?

36.3. ¿Qué pasa con la distancia focal de una lente convergente que está sumergida en agua? ¿Qué pasa con la distancia focal de una lente divergente que se encuentra en el mismo caso?

36.4. Señale la diferencia entre un foco *real* y un foco *virtual*. ¿Cuál de ellos está en el mismo lado de la lente que la luz incidente?

36.5. Indique la diferencia entre el primer punto focal y el segundo punto focal según las definiciones antes dadas.

36.6. La longitud focal de una lente convergente es de 20 cm. Elija una escala apropiada y determine mediante una construcción gráfica la naturaleza, ubicación y amplificación que corresponden a las siguientes distancias del objeto: (a) 15 cm, (b) 20 cm, (c) 30 cm, (d) 40 cm, (e) 60 cm, (f) infinito.

36.7. Un objeto se desplaza desde la superficie de una lente hasta el punto focal de la misma. Explique qué sucede con la imagen cuando la lente es (a) convergente, (b) divergente.

36.8. Describa cómo cambian la amplificación y la ubicación de una imagen a medida que el objeto se mueve desde el infinito hasta la superficie de (a) una lente convergente, (b) una lente divergente.

36.9. Comente las semejanzas y las diferencias entre las lentes y los espejos.

36.10. Una cámara tiene un diafragma para controlar la cantidad de luz que llega a la película. En un día soleado, el diafragma se cierra casi por completo, mientras que en un día nublado debe abrirse mucho para exponer adecuadamente la película. Comente sobre la calidad de las imágenes que se obtienen en cada caso si la lente no tiene corrección para las aberraciones.

36.11. En un microscopio, la lente utilizada como objetivo tiene una longitud focal corta, mientras que el objetivo de un telescopio tiene una longitud focal larga. Explique la razón de esta diferencia en las longitudes focales.

36.12. Obtenga la ecuación de las lentes con ayuda de la figura 36.13.

36.13. Obtenga la relación de la amplificación [ecuación (36.4)] con ayuda de la figura 36.13.

36.14. Describa dos métodos que podría usar para calcular la longitud focal de una lente bicóncava.

36.15. Describa un experimento para determinar la distancia focal de una lente bicóncava.

36.16. Sin consultar el texto, escriba las diversas convenciones de signos que es preciso aplicar cuando se trabaja con lentes delgadas.

36.17. Según la convención, la distancia al objeto se considera negativa cuando esa medición corresponde a un *objeto virtual*. Proponga ejemplos de objetos virtuales.

Problemas

Sección 36.2 Longitud focal y la ecuación del fabricante de lentes

(Suponga que $n = 1.50$, a menos que se indique otra cosa.)

36.1. Se desea construir una lente plano-convexa de vidrio que tenga una longitud focal de 40 cm. ¿Cuál será el radio de curvatura de la superficie correspondiente? Resp. 20.0 cm

36.2. Si se usa una lente biconvexa de vidrio para obtener una distancia focal de 30 cm, ¿cuál deberá ser la curvatura de cada una de las superficies convexas?

36.3. La superficie curva de una lente plano-cóncava tiene un radio de −12 cm. ¿Cuál es la longitud focal si la lente es de un material cuyo índice de refracción es 1.54? Resp. −22.2 cm

36.4. Una lente menisco convergente tiene una superficie cóncava cuyo radio es −20 cm y una superficie convexa con un radio de 12 cm. ¿Cuál es la longitud focal?

36.5. Tenemos una lente convergente de vidrio como la que muestra la figura 36.8a. La primera superficie tiene un radio de 15 cm y el radio de la segunda superficie es de 10 cm. ¿Cuál es la longitud focal? Resp. 12.0 cm

36.6. Una lente menisco tiene una superficie convexa cuyo radio es de 20 cm y una superficie cóncava con un radio de −30 cm. ¿Cuál es la longitud focal si el índice de refracción es de 1.54?

36.7. Una lente plano-convexa fue obtenida de vidrio *crown* ($n = 1.52$). ¿Cuál debe ser el radio de la superficie curva si se desea que la longitud focal sea de 400 mm? Resp. 208 mm

36.8. Las magnitudes de las superficies cóncava y convexa de una lente de vidrio son 200 y 600 mm, respectivamente. ¿Cuál es la longitud focal? ¿La lente es convergente o divergente?

36.9. Una lente de plástico ($n = 1.54$) tiene una superficie convexa de 25 cm de radio y una superficie cóncava de −70 cm. ¿Cuál es la longitud focal? ¿Se trata de una lente convergente o divergente? Resp. 72.0 cm, convergente

Sección 36.3 Formación de imágenes mediante lentes delgadas

36.10. Un lápiz de 7 cm se coloca a 35 cm de una lente convergente delgada cuya longitud focal es de 25 cm. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen formada?

36.11. Un objeto de 8 cm de altura se encuentra a 30 cm de una lente convergente delgada cuya longitud focal es 12 cm. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen formada? Resp. real, invertida, $y' = -5.33$ cm, + 20 cm

36.12. Una imagen virtual no invertida parece estar a 40 cm adelante de una lente cuya longitud focal es 15 cm. ¿A qué distancia se encuentra el objeto?

36.13. Un objeto de 50 mm de altura está colocado a 12 cm de una lente convergente cuya longitud focal es 20 cm. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen? Resp. virtual, no invertida, $y' = 125$ mm, $q = -30$ cm

36.14. Un objeto colocado a 30 cm de una lente delgada produce una imagen real, invertida, a una distancia de 60 cm en el lado opuesto de la lente. ¿Cuál es la longitud focal de la lente?

36.15. Una fuente luminosa está a 600 mm de una lente convergente cuya longitud focal es 180 mm. Trace una imagen por medio de diagramas de rayos. ¿Cuál es la distancia de la imagen? ¿La imagen es real o virtual? Resp. 257 mm, real

36.16. Una lente plano-convexa se coloca a 40 mm de un objeto de 6 cm. ¿Cuáles son la naturaleza y la ubicación de la imagen formada si la longitud focal es de 60 mm?

36.17. Un objeto de 6 cm de altura se coloca a 4 cm de una lente menisco divergente cuya longitud focal es −24 cm. ¿Cuáles son la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen que se forma?
Resp. virtual, $y' = 5.14$ cm, $q = -3.43$ cm

***36.18.** La longitud focal de una lente convergente es 200 mm. Un objeto de 60 mm está montado sobre una guía móvil que permite modificar la distancia desde la lente. Calcule la naturaleza, el tamaño y la ubicación de la imagen que se forma cuando el objeto está a la distancia siguiente: (a) 150 mm, (b) 200 mm, (c) 300 mm, (d) 400 mm, (e) 600 mm.

36.19. Un objeto colocado a 450 mm de una lente convergente forma una imagen real a 900 mm de dicha lente. ¿Cuál es la longitud focal de la lente?
Resp. +30 cm

Sección36.4 Ecuación de las lentes y la amplificación

36.20. Un objeto está colocado a 20 cm de una lente convergente. Si la amplificación es de −2, ¿cuál es la distancia de la imagen?

36.21. Se coloca un lápiz a 20 cm de una lente divergente cuya longitud focal es −10 cm. ¿Cuál es la amplificación obtenida? Resp. +0.333

***36.22.** Tenemos una lupa cuya longitud focal es 27 cm. ¿Cuán cerca debe colocarse para producir una imagen no invertida tres veces más grande que el objeto?

***36.23.** Una lupa que se ha colocado a 40 mm de un espécimen produce una imagen no invertida del doble de tamaño que el objeto. ¿Cuál es la longitud focal de la lente? Resp. +80 mm

***36.24.** ¿Cuál es la amplificación de una lente si su longitud focal es de 40 cm y la distancia al objeto es 65 cm?

Problemas adicionales

36.25. El radio de la superficie curva de una lente plano-cóncava mide 20 cm. ¿Cuál es la longitud focal si $n = 1.54$? Resp. −37.0 cm

36.26. Una lente menisco delgada tiene una superficie cóncava de −40 cm de radio y una superficie convexa cuyo radio es +30 cm. Si la longitud focal resultante de esta lente es de 79.0 cm, ¿cuál era el índice de refracción del material transparente?

36.27. Una lente convergente tiene 20 cm de longitud focal. Un objeto está colocado a 15.0 cm de esa lente. Calcule la distancia de la imagen y la naturaleza de ésta. Resp. −60 cm, virtual

36.28. ¿A qué distancia de una fuente de luz se debe colocar una lente para formar una imagen a 800 mm de dicha lente? La longitud focal es de 200 mm.

36.29. Una fuente de luz colocada a 36 cm de una lente proyecta una imagen sobre una pantalla instalada a 18.0 cm de dicha lente. ¿Cuál es la longitud focal de la lente? ¿Es convergente o divergente?
Resp. 12.0 cm, convergente

36.30. ¿Cuál es el mínimo tamaño de película necesaria para proyectar la imagen de un estudiante de 2 m de estatura? Suponga que el estudiante está a 2.5 m de la lente de la cámara y que la longitud focal es 55.0 mm.

***36.31.** Cuando una luz paralela incide en una lente, la luz se dispersa y parece provenir de un punto situado 80 mm detrás de la lente. ¿A qué distancia del objeto se debe colocar esta lente para formar una imagen de la cuarta parte del tamaño del objeto? Resp. 320 mm

***36.32.** ¿A qué distancia de una lente divergente se debe colocar un objeto para que su imagen tenga la cuarta parte del tamaño del objeto? La longitud focal es de −35 cm.

***36.33.** La primera superficie de una lente delgada tiene un radio convexo de 20 cm. ¿Cuál tendrá que ser el radio de la segunda superficie para formar una lente convergente con longitud focal de 8.00 cm?
Resp. +5.00 cm

***36.34.** Dos lentes convergentes delgadas se encuentran a una distancia 60 cm una de otra y tienen el mismo eje. La primera lente tiene una longitud focal de 10 cm y la longitud focal de la segunda es de 15.0 cm. Si un objeto de 6.0 cm de altura se coloca a 20 cm del frente de la primera lente, ¿cuáles serán la ubicación y el tamaño de la imagen final? ¿Será ésta real o virtual?

***36.35.** Una lente convergente cuya longitud focal es de 25 cm se coloca 50 cm frente a una lente divergente cuya longitud focal es de −25 cm. Si se coloca un objeto a 75 cm del frente de la lente convergente, ¿cuál es la ubicación de la imagen final? ¿Cuál es la amplificación total? ¿La imagen es real o virtual?
Resp. $q_2 = -8.33$ cm al frente de la lente divergente, $M = -0.333$, virtual

Preguntas para la reflexión crítica

***36.36.** Una cámara consta de una lente convergente de 50 mm de longitud focal montada frente a una película sensible a la luz, como se muestra en la figura 36.19. Cuando se fotografían objetos en el infinito, ¿a qué distancia de la película debe estar la lente? ¿Cuál es la distancia de la imagen cuando un objeto se fotografía a 500 mm de la lente? ¿Cuál es la amplificación? Resp. 50 mm, 55.5 mm, −0.111

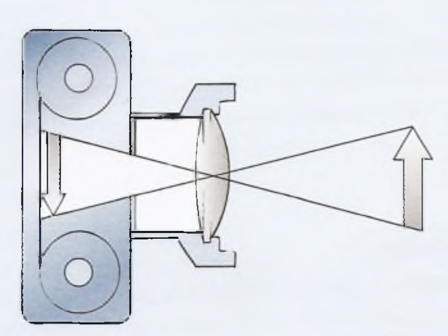


Figura 36.19 La cámara.

***36.37.** Un objeto está colocado a 30 cm de una pantalla. ¿En qué puntos entre el objeto y la pantalla se puede colocar una lente de 5 cm de longitud focal para producir una imagen en la pantalla?

***36.38.** La figura 36.20 presenta un esquema de un proyector simple. El condensador permite que la película reciba una iluminación uniforme de la fuente luminosa. El tamaño del cuadro de la película ordinaria de 8 mm es de 5 × 4 mm. Se desea proyectar una imagen de 600 × 480 mm sobre una pantalla colocada a 6 m de la lente del proyector. ¿Cuál debe ser la longitud focal de la lente de proyección? ¿A qué distancia de la lente deberá estar la película? Resp. $f = 49.6$ mm, $q = 50.0$ mm

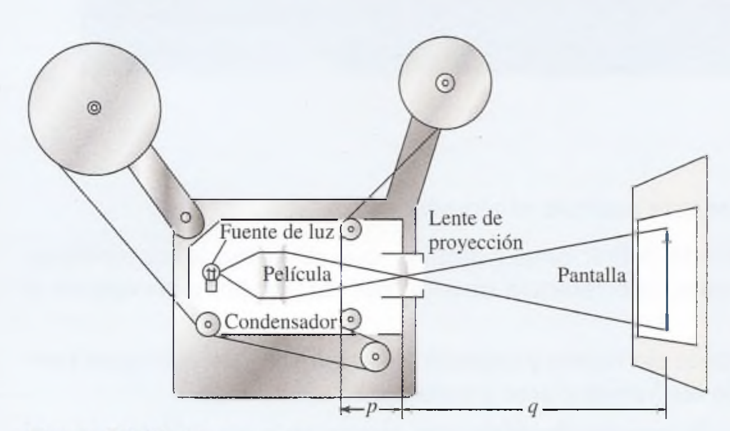


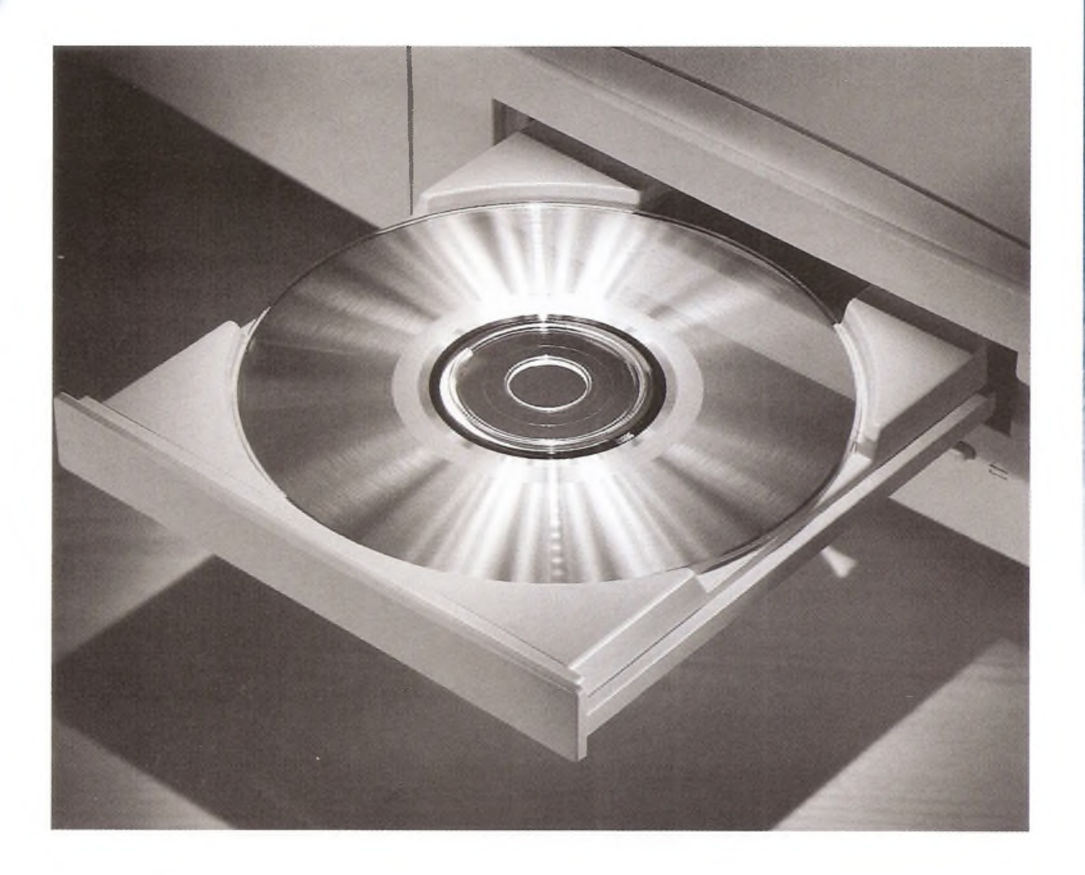
Figura 36.20 El proyector.

***36.39.** Un telescopio tiene como objetivo una lente cuya longitud focal es de 900 mm y un ocular con 50 mm de longitud focal. Dicho telescopio se usa para observar a un conejo de 30 cm a una distancia de 60 m. ¿Cuál es la distancia entre las lentes si la imagen final está a 25 cm del frente del ocular? ¿Cuál es la altura aparente del conejo visto a través del telescopio?

***36.40.** El telescopio de Galileo consta de un ocular formado por una lente divergente y un objetivo que es una lente convergente. La longitud focal del objetivo es 30 cm y la longitud focal del ocular es −2.5 cm. Un objeto colocado a 40 m del objetivo produce una imagen final ubicada 25 cm frente a la lente divergente. ¿Cuál es la separación entre las lentes? ¿Cuál es la amplificación total? Resp. 27.5 cm, −0.068

***36.41.** La longitud focal del ocular de un microscopio es de 3.0 cm y la longitud focal de su objetivo es de 19 mm. La separación entre las dos lentes es 26.5 cm y la imagen final formada por el ocular está en el infinito. ¿A qué distancia se deberá colocar la lente objetivo del espécimen que se desea examinar?

37 Interferencia, difracción y polarización



La interferencia de la luz reflejada desde un CD ilustra los patrones de franjas oscuras y claras que pueden ocurrir con la luz reflejada. En este capítulo estudiaremos las condiciones para la producción de franjas oscuras y claras debida a la interferencia de la difracción de la luz. (*Fotografía © vol. 88/ Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Demostrará, por medio de definiciones y dibujos, que comprende los términos *interferencia constructiva*, *interferencia destructiva*, *difracción*, *polarización* y *poder de resolución*.
2. Describirá el experimento de Young y utilizará los resultados de éste para predecir la localización de las franjas claras y oscuras.
3. Analizará la utilización de una red de difracción, deducirá la ecuación de la red y la aplicará a la resolución de problemas de óptica.

La luz es de naturaleza dual, puesto que algunas veces muestra propiedades de partícula y otras veces de onda. La prueba que demuestra la naturaleza ondulatoria de la luz surgió con el descubrimiento de la interferencia y la difracción. Más tarde, los estudios sobre polarización demostraron que, a diferencia de las ondas sonoras, las ondas luminosas son transversales en lugar de longitudinales.

En este capítulo se estudiarán estos fenómenos y se verá su importancia en la óptica física. Veremos que el procedimiento de rayos geométricos, que nos fue tan útil en el estudio de lentes y espejos, debe descartarse en este caso para favorecer un análisis ondulatorio más riguroso.

37.1 Difracción

Cuando las ondas luminosas pasan a través de una abertura o por el borde de un obstáculo, siempre se flexionan en cierta medida hacia la región que no está directamente expuesta a la fuente de luz. Este fenómeno se llama ***difracción***.

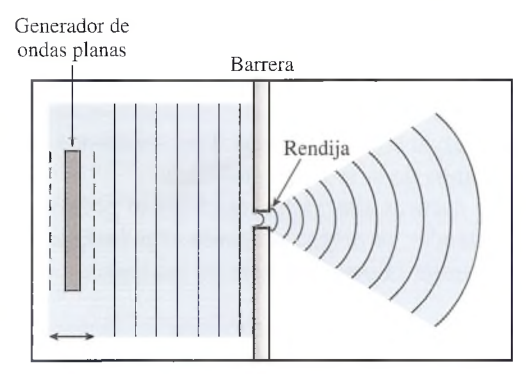


Figura 37.1 Diagrama que ilustra la difracción de ondas planas en agua al pasar por una rendija estrecha.

Difracción es la capacidad de las ondas para deflectarse alrededor de los obstáculos que encuentran en su trayectoria.

Para comprender esta flexión de las ondas, consideremos lo que ocurre cuando las ondas acuosas inciden sobre una abertura estrecha. Se puede usar un generador de ondas planas en una cuba de ondas, como muestra la figura 37.1. La banda metálica que vibra sirve como una fuente de ondas en un extremo de una bandeja con agua. Las ondas planas inciden en la barrera, dispersándose hacia la región situada al otro lado de la abertura. Las ondas difractadas parecen originarse en la abertura de acuerdo con el ***principio de las ondas de Huygens:*** *cada punto de un frente de onda puede considerarse como una nueva fuente de ondas secundarias.*

Es posible llevar a cabo un experimento similar con la luz, pero para poder observar la difracción, la rendija de la barrera tiene que ser estrecha. De hecho, la difracción se nota sólo cuando las dimensiones de una abertura o de un obstáculo son comparables a la longitud de las ondas que inciden sobre ellos. Este hecho explica por qué la difracción de las ondas acuosas y las sonoras se observa a menudo en la naturaleza, pero no ocurre lo mismo con la difracción de la luz.

37.2 Experimento de Young: interferencia

La primera prueba convincente de la difracción fue presentada por Thomas Young en 1801. En la figura 37.2 se muestra un diagrama esquemático del aparato de Young. La luz que proviene de una fuente monocromática incide en una rendija A, la cual actúa como una fuente de ondas secundarias. Dos rendijas más, S_1 y S_2, son paralelas a A y equidistantes de ella. La luz que viene de A pasa a través de S_1 y de S_2 y luego se proyecta sobre una pantalla. El patrón

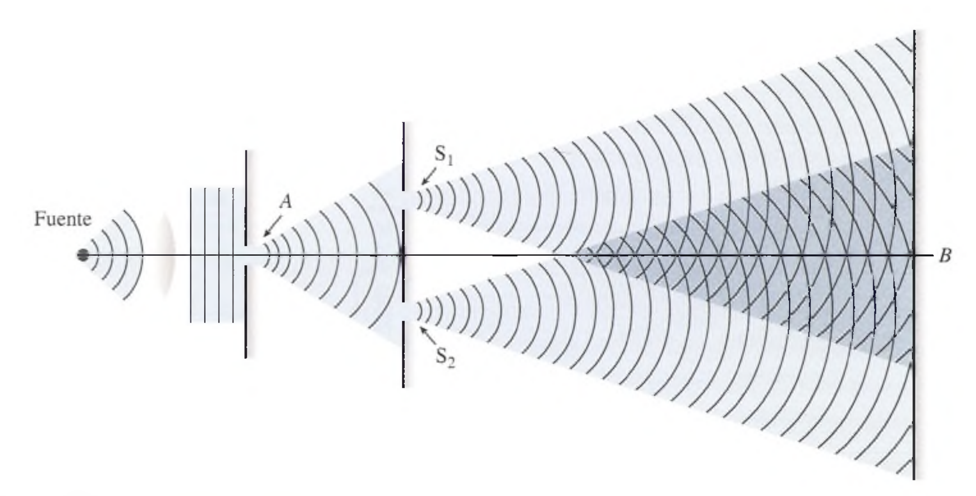


Figura 37.2 Ilustración del experimento de Young.

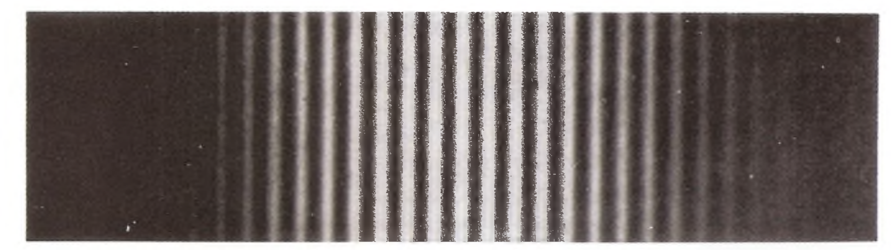


Figura 37.3 Fotografía de un patrón de difracción en el experimento de Young. (*De F. A. Jenkins y H. E. White, Fundamentals of Optics, 4a. ed., McGraw-Hill Company, Nueva York, 1976. Reproducida con autorización.*)

esperado son sólo dos bandas de luz sin interferencia, con el recordatorio de una pantalla completamente oscura. Pero en lugar de eso, la pantalla se ilumina, como muestra la figura 37.3. Incluso el punto *B*, situado detrás de la barrera en línea directa a la rendija *A*, está iluminado. Es fácil darse cuenta por qué este experimento hizo que los físicos de esa época dudaran de que la luz consistiera en partículas que se desplazaban en líneas rectas. Los resultados del experimento se podían explicar únicamente en términos de la teoría ondulatoria.

La iluminación de la pantalla en líneas claras y oscuras alternadas, también se podía explicar en términos de la teoría ondulatoria. Para entender su origen recuerde el ***principio de superposición***, presentado en el capítulo 21 para estudiar la ***interferencia*** de las ondas:

> Cuando dos o más ondas existen simultáneamente en un mismo medio, la amplitud resultante en cualquier punto es la suma de las amplitudes de las ondas compuestas en dicho punto.

Se dice que dos ondas interfieren *constructivamente* cuando la amplitud de la onda resultante es mayor que las amplitudes de cualquiera de las ondas componentes. Cuando la amplitud resultante es menor, se produce una *interferencia destructiva*.

En el experimento de Young, las ondas de luz que provienen de la rendija *A* llegan a las rendijas S_1 y S_2 al mismo tiempo y se originan en una sola fuente de una longitud de onda. Por tanto, las ondas secundarias que dejan las rendijas S_1 y S_2 están *en fase*. Se dice que las fuentes son ***coherentes***. La figura 37.4 muestra cómo se producen las bandas claras

FÍSICA HOY

Lentes oscuros reflejantes

Los lentes oscuros reflejantes se fabrican con varias capas, cada una con propiedades específicas de absorción o reflexión de la luz. La capa más cercana al ojo tiene un recubrimiento delgado de plata u otro compuesto metálico. Esta capa es lo suficientemente delgada para ver a través de ella, pero lo suficientemente gruesa para reflejar la luz. La siguiente capa es una película de absorción ultravioleta. Después de eso viene un filtro polarizador que elimina toda la luz que ha rebotado de la superficie horizontal de las calles o el agua. Aun cuando las capas están incrustadas, realizan sus funciones separadas, justo como si usted fuera a añadir las tres lentes juntas en el laboratorio.

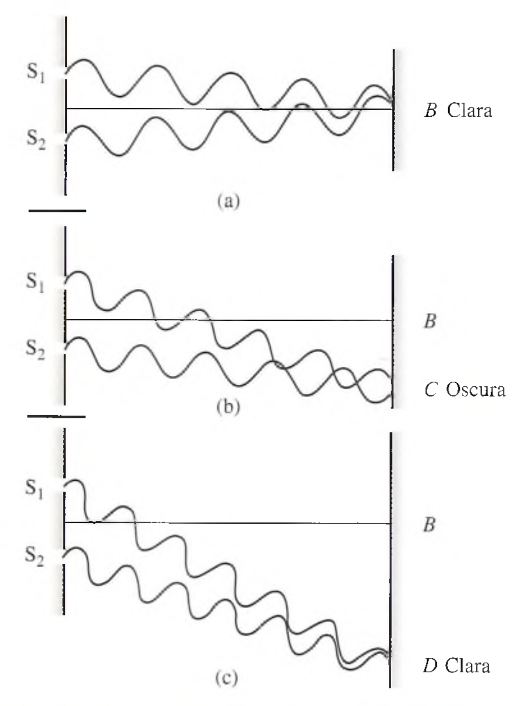


Figura 37.4 Origen de las bandas claras y oscuras en un patrón de interferencia.

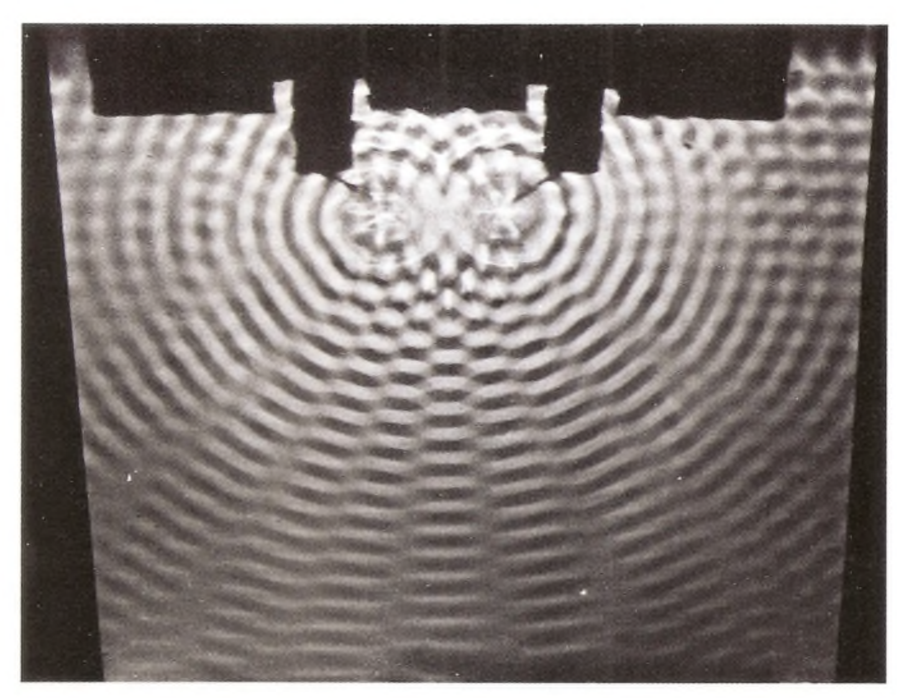


Figura 37.5 Patrón de interferencia de ondas en el agua formado por dos fuentes coherentes. (*Tomado de* PSCC Physics, *D. C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, 1965*).

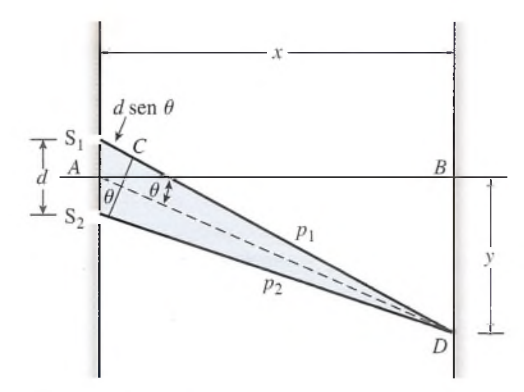


Figura 37.6 Interpretación teórica del experimento de la doble rendija.

y oscuras. Las bandas claras se presentan siempre que las ondas que llegan provenientes de las dos rendijas interfieran constructivamente. Las bandas oscuras se presentan cuando tiene lugar una interferencia destructiva. En el punto B, en el centro de la pantalla, la luz recorre las mismas distancias p_1 y p_2 desde cada rendija. La diferencia en la longitud de la trayectoria $\Delta p = 0$, y la interferencia constructiva da por resultado una banda central clara. En el punto C la diferencia en la longitud de las trayectorias Δp origina que las ondas interfieran destructivamente. Otra banda clara se presenta en el punto D cuando las ondas que provienen de cada una de las rendijas se refuerzan de nuevo entre sí. El modelo de interferencia total es similar al producido por las ondas de agua de la figura 37.5.

Consideremos ahora las condiciones teóricas necesarias para la producción de bandas claras y oscuras. Considere la luz que llega al punto D a una distancia y del eje central AB, como muestra la figura 37.6. La separación de las dos rendijas se representa por d, y la pantalla se localiza a una distancia x de las rendijas. El punto D en la pantalla forma un ángulo θ con el eje del sistema. La línea S_2C se dibuja de modo que las distancias CD y p_2 sean iguales. En vista de que la distancia x hasta la pantalla es mucho mayor que la separación de rendija d, podemos considerar que p_1, p_2 y DA son aproximadamente perpendiculares a la línea S_2C. Por tanto, el ángulo S_1S_2C es igual al ángulo θ, y la diferencia Δp en las longitudes de las trayectorias de la luz que proviene de S_1 y S_2 se expresa por

$$\Delta p = p_1 - p_2 = d \operatorname{sen} \theta$$

La interferencia constructiva ocurrirá en D cuando esta diferencia en la longitud de las trayectorias sea igual a

$$0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots, n\lambda$$

donde λ es la longitud de onda de la luz. Por consiguiente, las condiciones para las ***franjas*** claras están dadas por

$$d \operatorname{sen} \theta = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(37.1)}$$

donde d es la separación de rendijas y θ es el ángulo que forma la franja con el eje.

Las condiciones requeridas para la formación de las franjas oscuras en D se satisfacen cuando la diferencia de las trayectorias es de

$$\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \ldots$$

En estas condiciones, la interferencia destructiva cancelará las ondas. Es decir, las franjas oscuras se presentan cuando

$$d \operatorname{sen} \theta = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{37.2}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en una forma más útil en términos de las distancias medibles x y y. Para ángulos pequeños,

$$\operatorname{sen} \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{x}$$

La sustitución de y/x para sen θ en las ecuaciones (37.1) y (37.2) nos da

$$\text{Franjas claras:} \qquad \frac{yd}{x} = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{37.3}$$

$$\text{Franjas oscuras:} \qquad \frac{yd}{x} = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{37.4}$$

En experimentos diseñados para medir la longitud de onda de la luz, x y d se conocen desde el principio. La distancia y a una franja en particular se puede medir y usar para determinar la longitud de onda.

Ejemplo 37.1

En el ***experimento de Young***, las dos rendijas están separadas 0.04 mm, y la pantalla se encuentra alejada 2 m de las rendijas. La tercera franja clara a partir del centro está desplazada 8.3 cm de la franja central. (a) Determine la longitud de onda de la luz incidente. (b) ¿Dónde aparecerá la segunda franja oscura?

Plan: La tercera franja clara es resultado del tercer caso ($n = 3$) de la interferencia constructiva más allá del máximo central ($n = 0$). La longitud de onda de la luz debe ser consistente con la información dada para las franjas claras cuando $n = 3$. Las franjas oscuras ocurren cuando la longitud de la trayectoria difiere por múltiples impares de las longitudes de onda. Por tanto, la segunda franja oscura ocurre cuando $n = 3$ en la ecuación (37.4). El desplazamiento vertical en la pantalla se calcula al usar la misma longitud de onda que se determinó para la primera parte del problema. (Observe la figura 37.6.)

Solución (a): Para la tercera franja clara $n = 3$, $y = 8.3$ cm o 0.083 m, y $d = 0.04$ mm o 4×10^{-5} m. La longitud de onda se calcula a partir de la ecuación (37.3).

$$\frac{yd}{x} = 3\lambda \qquad \text{o} \qquad \lambda = \frac{yd}{3x}$$

$$\lambda = \frac{(0.083 \text{ m})(4 \times 10^{-5} \text{ m})}{3(2 \text{ m})} = 5.53 \times 10^{-7} \text{ m}$$

La longitud de onda de la luz debe ser 553 nm.

Solución (b): El desplazamiento de la segunda franja oscura se calcula al establecer que $n = 3$ en la ecuación (37.4).

$$\frac{yd}{x} = \frac{3\lambda}{2} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{3\lambda x}{2d}$$

$$y = \frac{3(5.53 \times 10^{-7}\ \text{m})(2\ \text{m})}{2(4 \times 10^{-5}\ \text{m})} = 4.15 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

La segunda franja oscura se presenta 4.15 cm debajo del máximo central.

37.3 La red de difracción

Si se dispone de rendijas paralelas similares a las utilizadas en el experimento de Young, espaciadas regularmente y del mismo ancho, se puede obtener un patrón de difracción más claro y nítido. A una disposición de ese tipo se le conoce como ***red de difracción***. Las redes se construyen al trazar miles de rayas paralelas equidistantes sobre una placa de vidrio con un buril de diamante. Las rayas actúan como barreras opacas a la luz, y los espacios o claros forman las rendijas. La mayor parte de las redes de laboratorio tienen de 10 000 a 30 000 líneas/in.

Un haz paralelo de luz monocromática que incide sobre una red de difracción, como muestra la figura 37.7, se difracta de una manera similar al haz del experimento de Young. Sólo unas cuantas rendijas aparecen en la figura, cada una separada por una distancia *d*. Cada rendija actúa como una fuente de ***ondas secundarias de Huygens***, lo que produce un patrón de interferencia. Para enfocar la luz de las rendijas sobre una pantalla se emplea una lente.

Los rayos difractados salen de las rendijas en muchas direcciones. En dirección hacia el frente, las trayectorias de todos los rayos serán de la misma longitud, creando condiciones para la interferencia constructiva. Una imagen central y clara de la fuente se forma en la pantalla. En algunas otras direcciones, los rayos difractados también estarán en fase, originando otras imágenes claras. Una de estas direcciones θ se ilustra en la figura 37.7. La primera línea clara formada en cualquiera de los lados de la imagen central se denomina imagen de ***primer orden***. La segunda línea clara en cualquier lado del máximo central se llama franja de *segundo orden*, y así sucesivamente. La condición para la formación de estas franjas claras es la misma que la que se dedujo del experimento de Young (figura 37.8). Por consiguiente, se escribe la ecuación de la red como

$$d \operatorname{sen} \theta_n = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{37.5}$$

donde d = espacio de las rendijas
λ = longitud de onda de la luz incidente
θ_n = ángulo de desviación para la n-ésima franja clara.

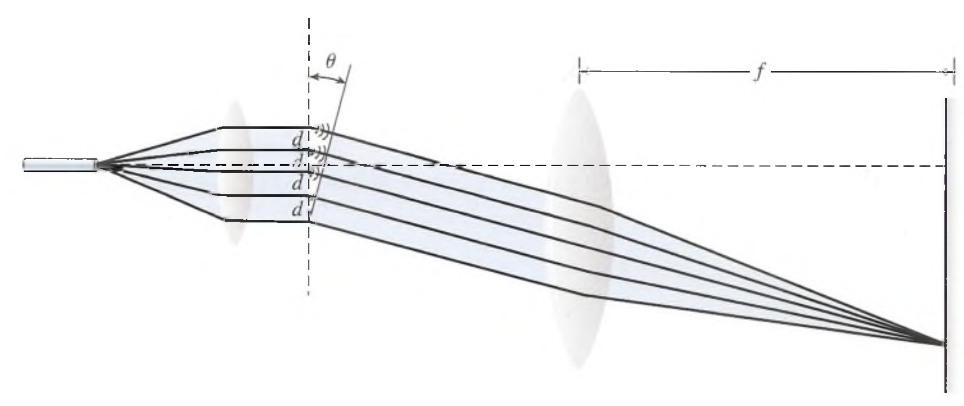


Figura 37.7 La red de difracción.

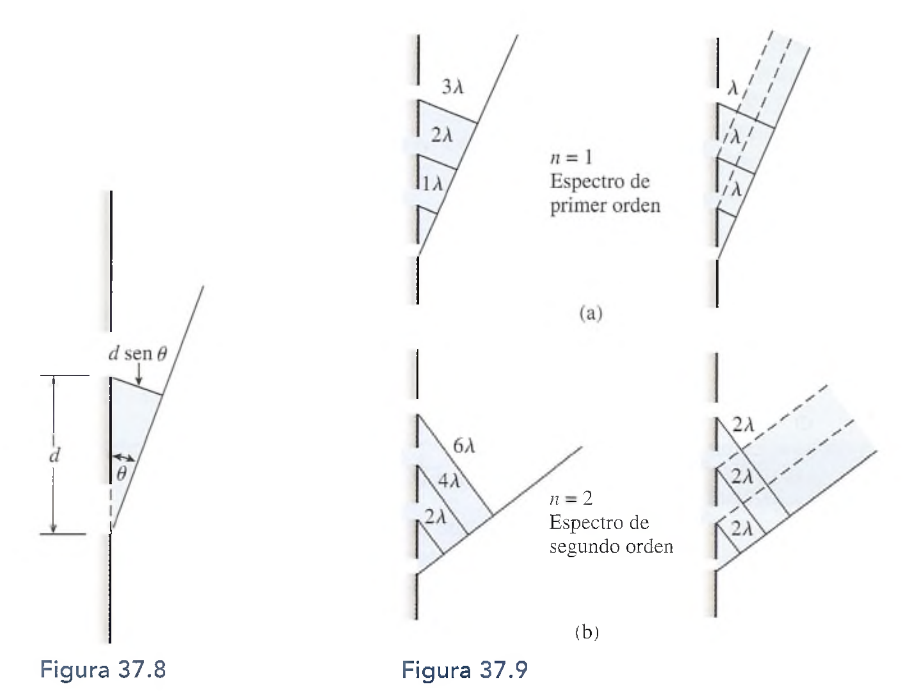


Figura 37.8

Figura 37.9

La franja clara de primer orden se presenta cuando $n = 1$. Como se ilustra en la figura 37.9a, esta imagen se forma cuando las trayectorias de los rayos difractados a partir de cada rendija difieren por una cantidad igual a una longitud de onda. La imagen de segundo orden se forma cuando las trayectorias difieren en dos longitudes de onda (figura 37.9b).

Ejemplo 37.2

Una red de difracción que tiene 20 000 líneas/in es iluminada por una luz paralela cuya longitud de onda es de 589 nm. ¿Cuáles son los ángulos en los cuales se forman las franjas claras de primero y segundo orden?

Plan: Primero consideramos que las "líneas por pulgada" en realidad son el recíproco de la separación de la luz de la rendija d, lo cual sería "pulgadas por línea". Por tanto, convertimos d en unidades del SI (m/línea) y sustituimos en la ecuación (37.5) para hallar las franjas de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$).

Solución: El espacio de la rendija d se determina como sigue:

$$d = \frac{1}{20\,000 \text{ líneas/in}}\left(\frac{0.0254 \text{ m}}{1 \text{ in}}\right); \qquad d = 1.27 \times 10^{-6} \text{ m/línea}$$

El ángulo para la franja clara de *primer orden* se calcula al sustituir $n = 1$ en la ecuación (37.5).

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{n\lambda}{d} = \frac{(1)(5.89 \times 10^{-7} \text{ m})}{1.27 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0.464$$

$$\theta_1 = 27.6°$$

El ángulo para la franja de *segundo orden* se forma cuando $n = 2$. Por lo que

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{n\lambda}{d} = \frac{(2)(5.89 \times 10^{-7} \text{ m})}{1.27 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0.928$$

$$\theta_2 = 68.1°$$

La franja de tercer orden no llega a formarse porque sen θ no puede tener un valor mayor de 1.00. El haz no se desviará en un ángulo mayor de 90°.

37.4 Poder de resolución de instrumentos

Hemos aprendido que la luz que cruza por una pequeña abertura o que pasa un obstáculo se difracta de modo tal que las imágenes formadas son borrosas. Las franjas de interferencia cercanas a los bordes de las imágenes algunas veces dificultan la determinación de la forma exacta de la fuente. La figura 37.10 muestra el patrón de difracción que se forma cuando la luz pasa a través de una pequeña abertura circular. Observe la extensa zona máxima central rodeada por franjas de interferencia claras y oscuras. Esta difracción es de gran importancia en los instrumentos ópticos, puesto que determina el límite final de posible amplificación.

Para entender esta limitación considere la luz que proviene de dos fuentes en la figura 37.11, la cual pasa a través de una pequeña abertura circular hecha en una barrera opaca. En la figura 37.11a las imágenes de las fuentes A y B se distinguen como imágenes separadas. Se dice que las fuentes están *resueltas*. Sin embargo, si ambas fuentes se acercan entre sí, como muestra la figura 37.11b, sus imágenes se traslapan, lo que da por resultado una imagen confusa. Cuando las fuentes están tan cerca (o la abertura es tan pequeña) que las imágenes separadas ya no se pueden distinguir, se dice que las fuentes *no están resueltas*.

El poder de resolución de un instrumento es una medida de su capacidad para producir imágenes separadas bien definidas.

Un método útil para expresar el ***poder de resolución*** de un instrumento es hacerlo en términos del ángulo θ subtendido en la abertura por los objetos a resolverse. (Véase la figura 37.11). El ángulo más pequeño θ_0 para el cual las imágenes se pueden distinguir separadamente es una medida del poder de resolución. No importa con qué grado de perfección se construya una lente, la imagen de una fuente puntual de luz no se enfocará en un punto. Aparecerá

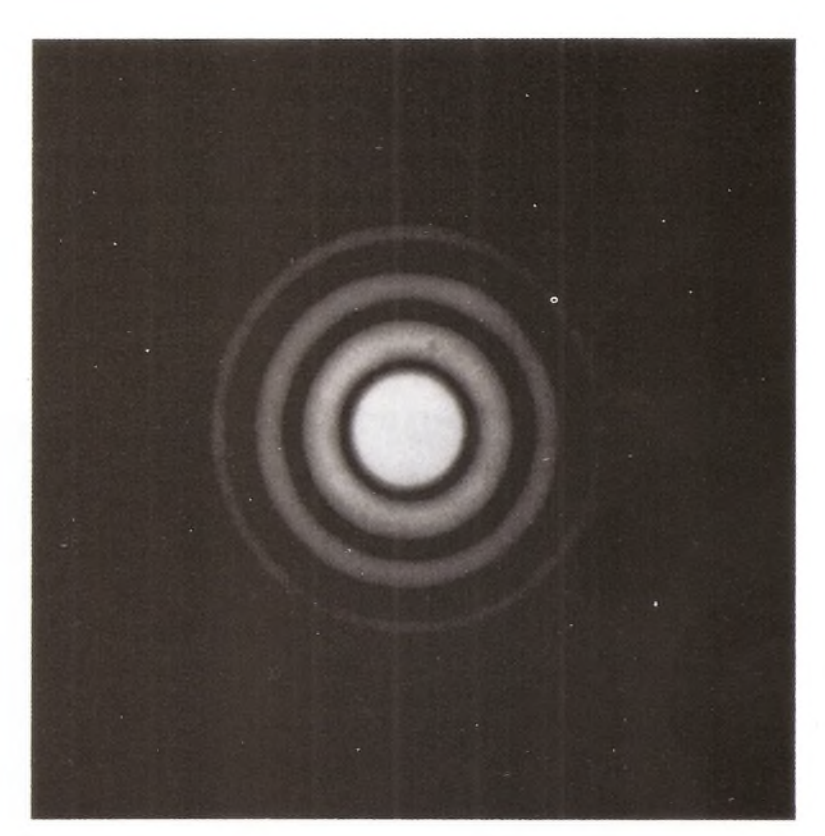


Figura 37.10 Fotografía del patrón de interferencia que se forma cuando la luz pasa a través de un orificio circular. (*Reproducido por Cagnet et al.,* Atlas of Optical Phenomena. *Springer-Verlag. Reproducido con autorización.*)

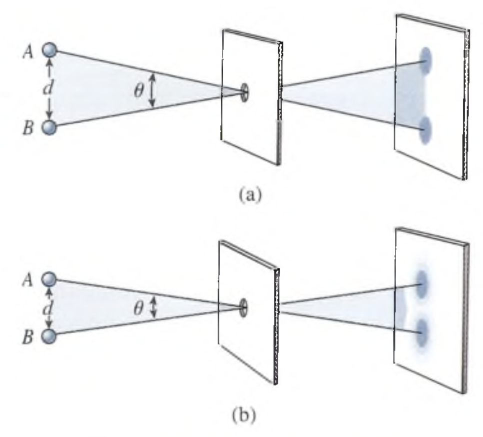


Figura 37.11 (a) Las imágenes de las fuentes A y B se distinguen fácilmente. (b) Cuando las fuentes se acercan entre sí, las imágenes se traslapan y el resultado es una imagen confusa.

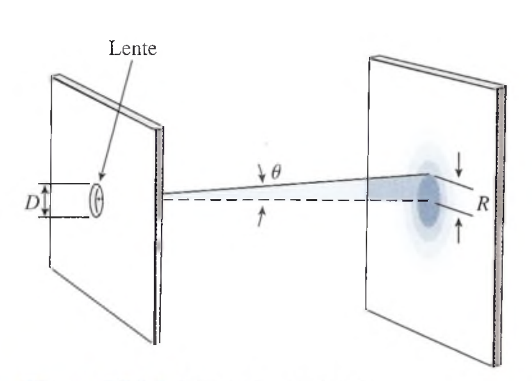


Figura 37.12 Límite de resolución.

tan sólo como un minúsculo punto claro rodeado de franjas claras y oscuras. La ***resolución*** mejora cuando el diámetro de una lente aumenta. Se puede demostrar que para una lente dada de diámetro D (véase la figura 37.12) la resolución óptima ocurre para una anchura angular θ_0, subtendida mediante el radio de la imagen central en el patrón de difracción. En un telescopio este ángulo límite es

$$\theta_0 = \frac{1.22\lambda}{D} \qquad \textbf{(37.6)}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz y D es el diámetro del objetivo.

La figura 37.13 ilustra la resolución en el caso de dos fuentes luminosas puntuales. En la figura 37.13a todavía se pueden distinguir bien las dos imágenes, pero en la figura 37.13b las imágenes están en el límite de resolución. De acuerdo con el criterio aplicado para obtener la ecuación (37.6), esas dos imágenes se resuelven precisamente cuando el máximo central de un patrón coincide con la primera franja oscura del otro patrón.

Para ilustrar el tema que hemos estudiado en esta sección, considere un telescopio. En la figura 37.14 dos objetos están separados por una distancia s_0 y se localizan a una distancia p del objetivo del telescopio. El ángulo entre los objetos, en radianes, es aproximadamente

$$\theta_0 = \frac{s_0}{p} \qquad \textbf{(37.7)}$$

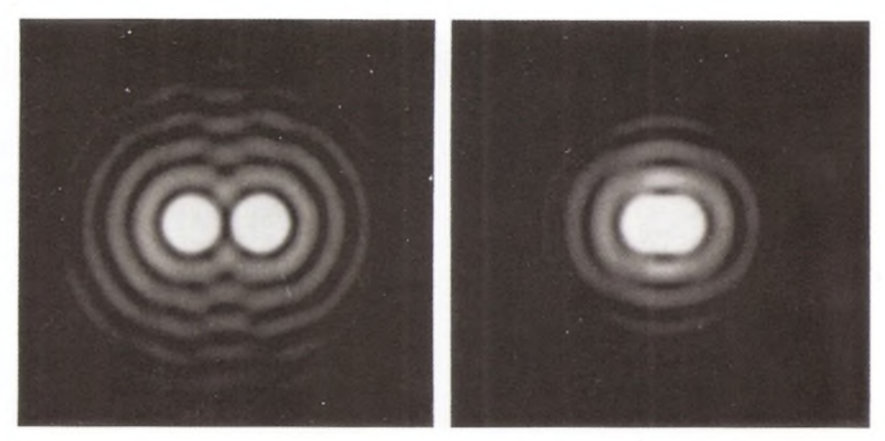


Figura 37.13 (a) Imágenes separadas formadas a partir de dos fuentes puntuales. (b) Las imágenes de dos fuentes en el límite de resolución. (*Tomado de Cagnet et al.*, Atlas of Optical Phenomena, *Springer-Verlag. Reproducido con autorización.*)

$$\theta_0 = \frac{S_0}{P}$$

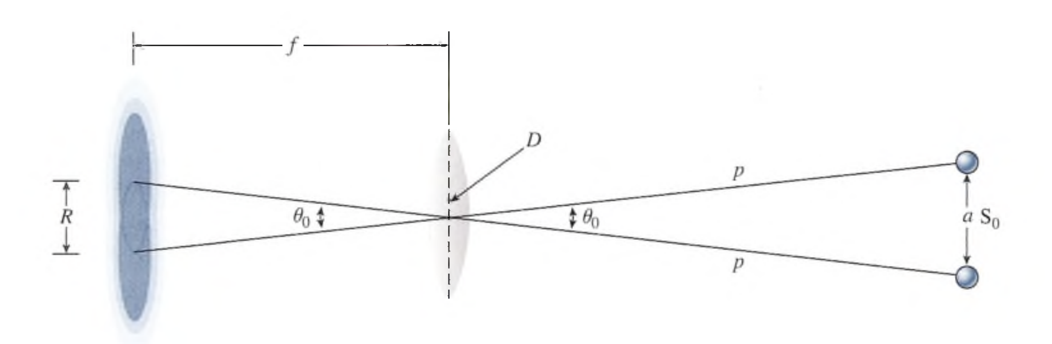


Figura 37.14 Resolución de dos objetos distantes por medio de una lente esférica.

El subíndice 0 se usa para mostrar que θ_0 y s_0 representan las *condiciones mínimas* de resolución. Por tanto, podemos escribir de nuevo la ecuación (37.6) como

$$\theta_0 = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{s_0}{p} \tag{37.8}$$

En vista de que θ_0 representa la separación *mínima* de los objetos para que puedan resolverse, la distancia se usa también para indicar el *poder de resolución* de un instrumento.

Ejemplo 37.3

Uno de los mayores telescopios de refracción en el mundo es un instrumento de 40 in de diámetro, del Yerkes Observatory en Wisconsin; su objetivo tiene una longitud focal de 19.8 m (65 ft). (a) ¿Cuál es la separación mínima de dos aspectos de la superficie de la Luna, de modo que puedan resolverse por este telescopio? (b) ¿Cuál es el radio del círculo máximo central en el patrón de difracción formado por la lente objetivo? Para luz blanca se puede utilizar la longitud de onda central de 500 nm para calcular la resolución. La Luna está a 3.84×10^8 m de la Tierra.

Plan: La separación mínima s_0 de dos imágenes en la superficie de la Luna se determina en el punto donde los patrones de difracción circular se traslapan en sus centros. El ángulo límite θ_0 para esta resolución está dado por la razón s_0/p y también por $1.22\lambda/D$. La igualdad de estas razones nos permite encontrar la separación desconocida s_0. El radio R del máximo central a una resolución mínima se calcula al considerar que la razón del radio con respecto a la longitud focal es igual a la razón s_0/p.

Solución (a): Primero tenemos que convertir la distancia a metros. Por tanto,

$$p = 3.84 \times 10^5 \text{ km} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$
$$\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$$
$$D = 40 \text{ in } (2.54 \times 10^{-2} \text{ m/in}) = 1.02 \text{ m}$$

La separación mínima s_0 se puede determinar despejando s_0 en la ecuación (37.8).

$$s_0 = 1.22\frac{\lambda p}{D}$$
$$= \frac{(1.22)(5 \times 10^{-7} \text{ m})(3.84 \times 10^8 \text{ m})}{1.02 \text{ m}} = 230 \text{ m}$$

Solución (b): A partir de la ecuación (37.7) y de la figura 37.14, el radio R del máximo central es

$$R = f\theta_0 = f\frac{s_0}{p}$$

$$= \frac{(19.8 \text{ m})(230 \text{ m})}{3.84 \times 10^8 \text{ m}} = 1.19 \times 10^{-5} \text{ m}$$

El telescopio reflectante de 200 in de Monte Palomar, en California, puede distinguir aspectos de la Luna con una separación de 46.3 m (o 152 ft).

37.5 Polarización

Todos los fenómenos que hemos analizado hasta este punto se pueden explicar ya sea sobre la base de las ondas transversales o de las longitudinales. La interferencia y la difracción se presentan en las ondas sonoras, las cuales son longitudinales, y también en las ondas acuosas, que son transversales. Se requiere de más pruebas experimentales para esclarecer si las ondas de luz son longitudinales o transversales. En esta sección se presenta una propiedad de las ondas luminosas que únicamente puede interpretarse en función de las ondas transversales.

Primero se considera un ejemplo mecánico a partir de ondas transversales que se forman en una cuerda que está vibrando. Si la fuente de la onda hace que cada partícula de la cuerda vibre hacia arriba y hacia abajo en un mismo plano, las ondas están ***polarizadas en un plano***. Si la cuerda vibra de tal manera que cada partícula se mueve al azar, en todos los ángulos posibles, las ondas *no están polarizadas*.

> Polarización es el proceso por el cual las oscilaciones transversales de un movimiento ondulatorio están confinadas a un patrón definido.

Como ejemplo de la ***polarización*** de una onda transversal, considere que la cuerda pasa por una rejilla, como muestra la figura 37.15. Las vibraciones no polarizadas pasan a través de la rejilla A y emergen polarizadas en un plano vertical. Esta rejilla recibe el nombre de ***polarizador***. Únicamente las ondas con vibraciones verticales pueden pasar a través de la rejilla; las demás vibraciones son bloqueadas. La rejilla B se llama ***analizador*** porque puede usarse para probar si las ondas que llegan están polarizadas en un plano. Si el analizador se gira, de modo que las rejillas en B sean perpendiculares a las de A, todas las ondas que inciden son detenidas. Esto puede ocurrir sólo si las ondas que llegan a B están polarizadas en un plano perpendicular a las rejillas en B.

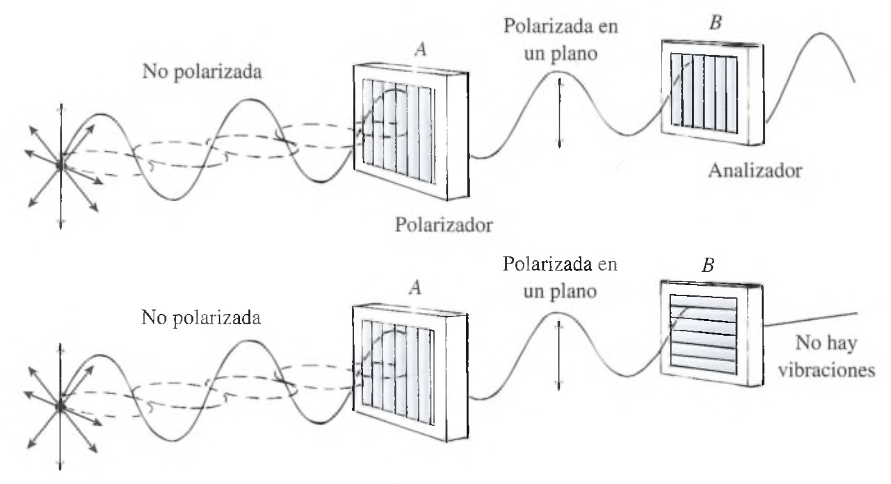


Figura 37.15 Analogía mecánica para explicar la polarización de una onda transversal.

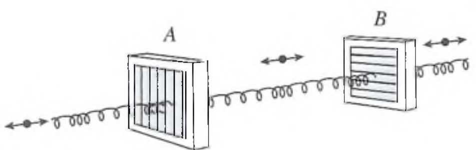


Figura 37.16 Una onda longitudinal no se puede polarizar.

La polarización es característica de las ondas *transversales*. Si la cuerda de nuestro ejemplo se reemplazara por un resorte, como en la figura 37.16, las ondas longitudinales pasarían a través de la rejilla, independientemente de su orientación.

Ahora consideremos las ondas luminosas. En el capítulo 33 se estudió la naturaleza electromagnética de las ondas de luz. Recuerde que ese tipo de onda consiste en un campo eléctrico oscilatorio y un campo magnético oscilatorio, perpendiculares entre sí y orientados en la dirección de la propagación. Por tanto, las ondas de luz consisten de *campos oscilatorios* en vez de partículas en vibración, como era el caso de las ondas en una cuerda. Si se demuestra que esas oscilaciones pueden polarizarse, se puede concluir que las oscilaciones son transversales.

Algunas sustancias muestran diferentes índices de refracción para luz, que tiene diferentes planos de polarización en relación con su estructura cristalina. Algunos ejemplos son la calcita, el cuarzo y la turmalina. Se pueden construir placas de estos materiales con el fin de que transmitan luz en un solo plano de oscilación. De esta manera, pueden ser usadas como polarizadoras para luz incidente cuyas oscilaciones se orienten al azar. En forma análoga a la cuerda que vibra y que pasa a través de la rejilla, se pueden emplear dos placas polarizadoras para determinar la naturaleza transversal de las ondas luminosas.

Como muestra la figura 37.17, la luz emitida por la mayoría de las fuentes no está polarizada. Después de pasar a través de una placa de turmalina (polarizadora), el haz de luz emerge polarizado en un plano, pero su intensidad se ha reducido. Otra placa sirve como analizador. Cuando esta placa se hace girar con respecto al polarizador, la intensidad de la luz que pasa a través del sistema se reduce gradualmente hasta que por fin deja de pasar luz a través del sistema. A partir de esto se puede deducir que las ondas luminosas son transversales y no longitudinales.

A pesar de que hace ya muchos años que el fenómeno de la polarización permitió demostrar en los laboratorios la naturaleza transversal de la luz, las aplicaciones prácticas de este conocimiento no se produjeron sino hasta hace pocos años cuando se desarrollaron las ***placas Polaroid***. Estas placas se fabrican colocando una capa delgada de cristales de sulfato de yodo entre dos láminas de plástico. Los cristales se alinean bajo el efecto de un campo eléctrico intenso. Dos placas de este tipo se emplean para controlar la intensidad de la luz. Los fotógrafos usan filtros Polaroid para variar la intensidad y reducir el resplandor de la luz reflejada. Se pueden llevar a cabo complejos estudios de ingeniería examinando patrones de esfuerzos en ciertos modelos de herramientas de plástico. Las franjas claras y oscuras formadas por la luz polarizada indican áreas de esfuerzo variable.

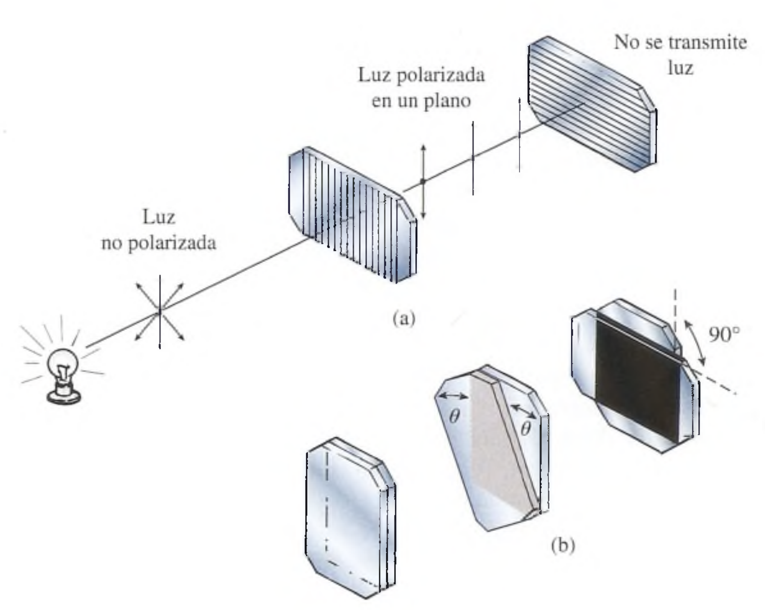


Figura 37.17 (a) Prueba de que la luz puede ser polarizada. (b) Reducción de la intensidad de la luz transmitida cuando el analizador se hace girar de 0° a 90°.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo hemos expuesto varios casos en los cuales la luz se comporta como una onda. La flexión de la luz alrededor de los obstáculos colocados en su trayectoria se llama *difracción*. Una combinación de la difracción y la interferencia de las ondas luminosas condujo al experimento de Young y a la red de difracción. Los instrumentos industriales modernos utilizan esos conceptos en gran variedad de aplicaciones. Las principales ideas expuestas en este capítulo se resumen a continuación.

- En el experimento de Young, la interferencia y la difracción explican la formación de franjas claras y oscuras. La ubicación de esas franjas se calcula por medio de las siguientes ecuaciones (véase la figura 37.6):

  Franjas claras: $\frac{yd}{x} = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

  Franjas oscuras: $\frac{yd}{x} = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

- En una red de difracción que tiene entre sus rendijas una separación d, las longitudes de onda de las franjas de orden n-ésimo se calculan mediante

$$d \operatorname{sen} \theta_n = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- El poder de resolución de un instrumento es una medida de su capacidad para producir imágenes separadas y bien definidas. La figura 37.14 ilustra las condiciones mínimas para la resolución. En este caso, la ecuación de la resolución es

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} = \frac{s_0}{p} \qquad \textit{Poder de resolución}$$

Conceptos clave

Preguntas de repaso

37.1. Las ondas de radio y las ondas de luz son radiaciones electromagnéticas. Explique por qué las ondas de radio pueden ser captadas detrás de edificios altos, mientras que las de luz no pueden llegar a esas áreas.

37.2. Considere el caso de ondas planas en agua que inciden en una barrera que tiene una abertura, como muestra la figura 37.1. Explique cómo varía la difracción cuando (a) disminuye la anchura de la rendija y (b) se reduce la longitud de onda de las ondas incidentes.

37.3. ¿Cuáles de los efectos del experimento de Young se deben a la difracción y cuáles a la interferencia?

37.4. En una red de difracción, ¿cómo influye el espaciamiento de las líneas en la separación de las franjas del patrón de interferencia?

37.5. Si en una red de difracción incide luz blanca en lugar de luz monocromática, ¿qué aspecto tendría el patrón de interferencia resultante?

37.6. En el experimento de Young, ¿qué efecto tendrá sobre el patrón de interferencia una reducción de la longitud de onda de la luz incidente?

37.7. ¿Cuál es el efecto de un incremento en la apertura de una lente sobre su poder de resolución? ¿Una mayor longitud de onda dará lugar a un incremento de la resolución si las demás condiciones se mantienen constantes?

37.8. El poder de resolución de algunos microscopios aumenta si el objeto se ilumina con luz ultravioleta. Explique la causa.

37.9. Una placa de polarización absorbe casi el 50 por ciento de la intensidad de un haz de luz no polarizada. ¿Cómo se explica este fenómeno?

37.10. Suponga que un haz de luz no polarizada pasa por un polarizador y un analizador como muestra la figura 37.17. El analizador ha girado en un ángulo θ a partir de la posición de transmisión máxima. Sólo el componente de la amplitud A del haz del plano polarizado que se encuentra sobre el eje se transmite por el analizador. Este componente está dado por $A \cos \theta$. La intensidad I de la luz es proporcional al cuadrado de la amplitud A. Demuestre que la in-

tensidad I del haz transmitido por el analizador se calcula mediante

$$I = I_0 \cos^2 \theta \qquad (37.9)$$

donde θ es el ángulo en el cual se coloca el analizador en relación con la posición correspondiente a la máxima intensidad transmitida I_0.

37.11. ¿Cuáles de las ondas siguientes pueden ser polarizadas: (a) los rayos X, (b) las ondas acuosas, (c) las ondas sonoras, (d) las ondas de radio?

37.12. Cuando una luz blanca incide en un prisma, se dispersa formando un espectro de colores, entre los cuales al componente rojo le corresponde la menor desviación. Compare este espectro con el que se produce por medio de una red de difracción.

37.13. Presente un argumento sólido en favor de la teoría ondulatoria de la luz. Contraponga a ese argumento buenas razones para considerar que la luz está formada por partículas.

37.14. Suponga que está utilizando una red de difracción con espaciamiento de 3 000 líneas por centímetro. Comente la utilidad de esa red para examinar (a) la radiación infrarroja con 3 nm de longitud de onda y (b) la radiación ultravioleta con longitud de onda de 100 nm.

Problemas

Sección 37.2 Experimento de Young: interferencia

37.1. La luz de un láser tiene una longitud de onda de 632 nm. Dos rayos de esta fuente siguen trayectorias de diferente longitud. ¿Cuál es la diferencia mínima requerida en las trayectorias para provocar (a) una interferencia constructiva y (b) una interferencia destructiva? Resp. 632 nm, 316 nm

37.2. Encuentre la diferencia necesaria en la longitud de las trayectorias del problema 37.1 para dar lugar a los casos inmediatamente subsiguientes de interferencia constructiva y destructiva.

37.3. Dos rendijas paralelas separadas entre sí 0.2 mm están iluminadas por luz monocromática. En una pantalla colocada a 1.0 m de las rendijas, existe una separación de 2.50 mm entre la primera franja clara y la franja central. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz? Resp. 500 nm

37.4. La luz monocromática procedente de una llama de sodio ilumina dos rendijas separadas entre sí por una distancia de 1.0 mm. Una pantalla de observación se encuentra a 1.0 m de las rendijas y la distancia entre la franja clara central y la franja clara más próxima es de 0.589 mm. ¿Cuál es la frecuencia de la luz?

37.5. Dos rendijas separadas por una distancia de 0.05 mm están iluminadas con luz verde, cuya longitud de onda es 520 nm. Un patrón de difracción se forma en una pantalla de observación colocada a 2.0 m de distancia. ¿Cuál es la distancia entre el centro de la pantalla y la primera franja clara? ¿Cuál es la distancia hasta la tercera franja oscura? Resp. 2.08 cm, 5.20 cm

***37.6.** En la situación descrita en el problema 37.5, ¿cuál es la separación de las dos franjas claras de primer orden localizadas a cada lado de la banda central?

***37.7.** Se realiza el experimento de Young con luz monocromática de 500 nm de longitud de onda. La separación de las rendijas es de 1.20 mm y la pantalla está a 5.00 m de distancia. ¿Cuál es la separación entre las franjas claras? Resp. 2.08 mm

***37.8.** En el experimento de Young se observa que la segunda franja oscura aparece a una distancia de 2.5 cm de la franja clara central. Suponga que la separación entre las rendijas es de 60 μm y que la pantalla está a 2.0 m de distancia. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz incidente?

Sección 37.3 La red de difracción

37.9. Una red de difracción que tiene 300 líneas por milímetro es iluminada con luz cuya longitud de onda es de 589 nm. ¿A qué ángulos se forman las franjas claras de primero y segundo orden? Resp. 10.2°, 20.7°

37.10. Una red de difracción tiene 250 000 líneas por metro. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz incidente si la franja clara de segundo orden se forma a 12.6°?

37.11. Una lámpara de sodio pequeña emite luz con una longitud de onda de 589 nm que ilumina una red marcada de 6 000 líneas por centímetro. Calcule la desviación angular de las franjas claras de primero y segundo orden. Resp. 20.7°, 45.0°

37.12. Un haz de luz paralela ilumina una red de difracción que tiene 6 000 líneas por centímetro. La franja clara de segundo orden se localiza a 32.0 cm de la imagen central en una pantalla colocada a 50 cm de la red. Calcule la longitud de onda de esa luz.

***37.13.** El espectro de la luz visible abarca longitudes de onda desde 400 hasta 700 nm. Encuentre la amplitud angular del espectro de primer orden producido al hacer pasar luz blanca por una red marcada con 20 000 líneas por pulgada. Resp. 15.1°

***37.14.** Un espectrómetro infrarrojo utiliza redes de difracción para dispersar luz infrarroja. Una de esas redes está marcada con 240 líneas por milímetro. ¿Cuál es la máxima longitud de onda que se puede estudiar con esa red?

Sección 37.4 Poder de resolución de los instrumentos

37.15. Una luz con longitud de onda de 600 nm incide sobre una abertura circular de 0.32 mm de diámetro. Así se forma un patrón de difracción en una pantalla colocada a 80 cm de distancia. ¿A qué distancia del centro del patrón se forma la primera franja oscura? Resp. 1.83 mm

37.16. El ángulo de resolución límite para una lente usada como objetivo en un instrumento óptico es de 3×10^{-4} rad para una fuente luminosa de 650 nm. ¿Cuál es el diámetro de la abertura circular?

37.17. Cierto radiotelescopio tiene un reflector parabólico de 70 m de diámetro. Las ondas de radio procedentes del espacio exterior tienen una longitud de onda de 21 cm. Calcule el límite teórico de resolución para este telescopio. Resp. 3.66×10^{-3} rad

37.18. Mediante un telescopio con una lente de 60 m de diámetro, encuentre a qué distancia permite su resolución distinguir dos objetos localizados en el espacio a una distancia igual a la que existe entre la Tierra y el Sol (93 millones de millas).

37.19. ¿Cuál es el límite angular de resolución del ojo humano cuando el diámetro de la abertura es de 3 mm? Suponga que la longitud de onda de la luz es 500 nm. Resp. 2.03×10^{-4} rad

37.20. ¿A qué distancia la resolución del ojo descrito en el problema 37.19 puede distinguir los alambres de un mosquitero para puerta instalados con un espaciamiento de 2.5 mm?

Problemas adicionales

37.21. En el experimento de Young, una luz de 600 nm ilumina una rendija colocada a 2.0 m de una pantalla. La segunda franja clara que se forma en la pantalla está a 5 mm del máximo que aparece en el centro. ¿Cuál es el ancho de la rendija? Resp. 480 μm

37.22. Una red de transmisión está marcada con 5 000 líneas por centímetro. Para la luz con longitud de onda de 550 nm, ¿cuál es la desviación angular de la franja clara de tercer orden?

37.23. A través de 2 rendijas separadas entre sí 0.24 mm pasa luz monocromática. En el patrón que se forma en una pantalla colocada a 50 cm, la distancia entre la primera franja clara a la izquierda del máximo central y la primera franja de la derecha es de 2.04 mm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz? Resp. 489.6 nm

37.24. Una red de transmisión que incluye 6 000 líneas por centímetro forma una franja clara de segundo orden a un ángulo de 53° de la franja central. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz incidente?

***37.25.** Si la separación de las dos rendijas utilizadas en el experimento de Young es de 0.10 mm y la distancia a la pantalla es de 50 cm, calcule la distancia entre la primera franja oscura y la tercera franja clara cuando las rendijas se iluminan con una luz cuya longitud de onda es de 600 nm. Resp. 7.50 mm

***37.26.** La luz de una lámpara de arco de mercurio incide en una red de difracción de 7 000 líneas por pulgada. El espectro consiste en una línea amarilla (579 nm) y una línea azul (436 nm). Calcule la separación angular (en radianes) de esas líneas en el espectro de tercer orden.

***37.27.** Un telescopio será utilizado para distinguir dos puntos en una montaña que se localiza a 160 km de distancia. Si la separación de los puntos es de 2.0 m, ¿cuál es el diámetro mínimo que deberá tener la lente usada como objetivo? Suponga que la luz tiene una longitud de onda promedio de 500 nm. Resp. 4.88 cm

Preguntas para la reflexión crítica

***37.28.** Un interferómetro de Michelson como el que muestra la figura 37.18 se puede usar para medir distancias pequeñas. La luz monocromática de longitud de onda λ que proviene de la fuente S se refleja en parte y se transmite en parte por el divisor del haz. Un espejo M_1 está fijo y otro espejo M_2 es móvil. Los rayos de luz que llegan al ojo desde cada espejo son diferentes, por lo cual patrones de interferencia constructiva y destructiva se mueven a través del visor cuando el espejo M_2 se desplaza una distancia x. Demuestre que esa distancia está dada por

$$x = m\frac{\lambda}{2}$$

donde m es el número de franjas oscuras que cruzan una línea indicadora del visor cuando el espejo se mueve una distancia x.

***37.29.** Un interferómetro de Michelson (véase el problema 37.28) se usa para medir el avance de un pequeño tornillo. ¿Cuánto ha avanzado el tornillo si se usa la luz de criptón 86 (λ = 606 nm) y se mueven 4 000 franjas a través del campo visual a medida que el tornillo avanza?

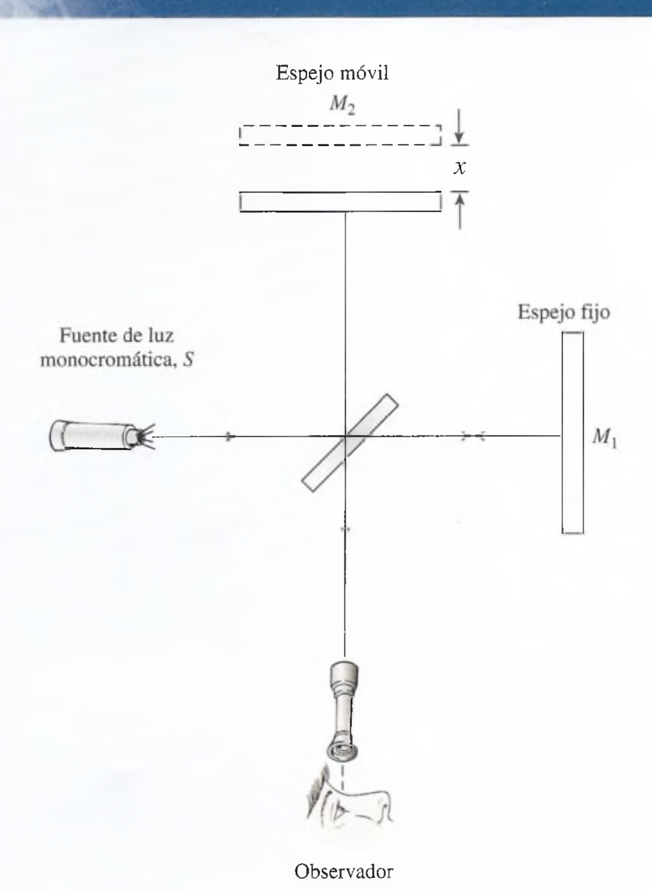


Figura 37.18 El interferómetro Michelson.

***37.30.** Una red de difracción tiene 500 líneas por milímetro marcadas en su superficie de vidrio. A través de esa red pasa luz blanca que forma varios espectros en una pantalla colocada a 1.0 m de distancia. ¿La desviación de colores por efecto de una red es diferente de la que se obtiene con un prisma? En la pantalla, ¿cuál es la distancia entre la línea azul de primer orden (400 nm) y la línea roja de primer orden (680 nm)? ¿Cuántos espectros completos (de 400-700 nm) son factibles en estas condiciones?

Resp. sí, $\Delta y = 15.9$ cm, dos ($n = 2.85$)

***37.31.** Las luces posteriores de un automóvil están a 1.25 m una de otra. Suponga que la pupila de los ojos de una persona tiene 5 mm de diámetro y que la luz tiene una longitud de onda promedio de 604 nm. Por la noche, en una carretera recta y larga, ¿a qué distancia la resolución del ojo permite distinguir las dos luces? Suponga que usted frunce los ojos, formando una rendija en la cual el ángulo límite cambia de $\theta_0 = 1.22\ \lambda/D$ a $\theta_0 = \lambda/d$. ¿Cuál es la nueva distancia para la resolución de las imágenes?

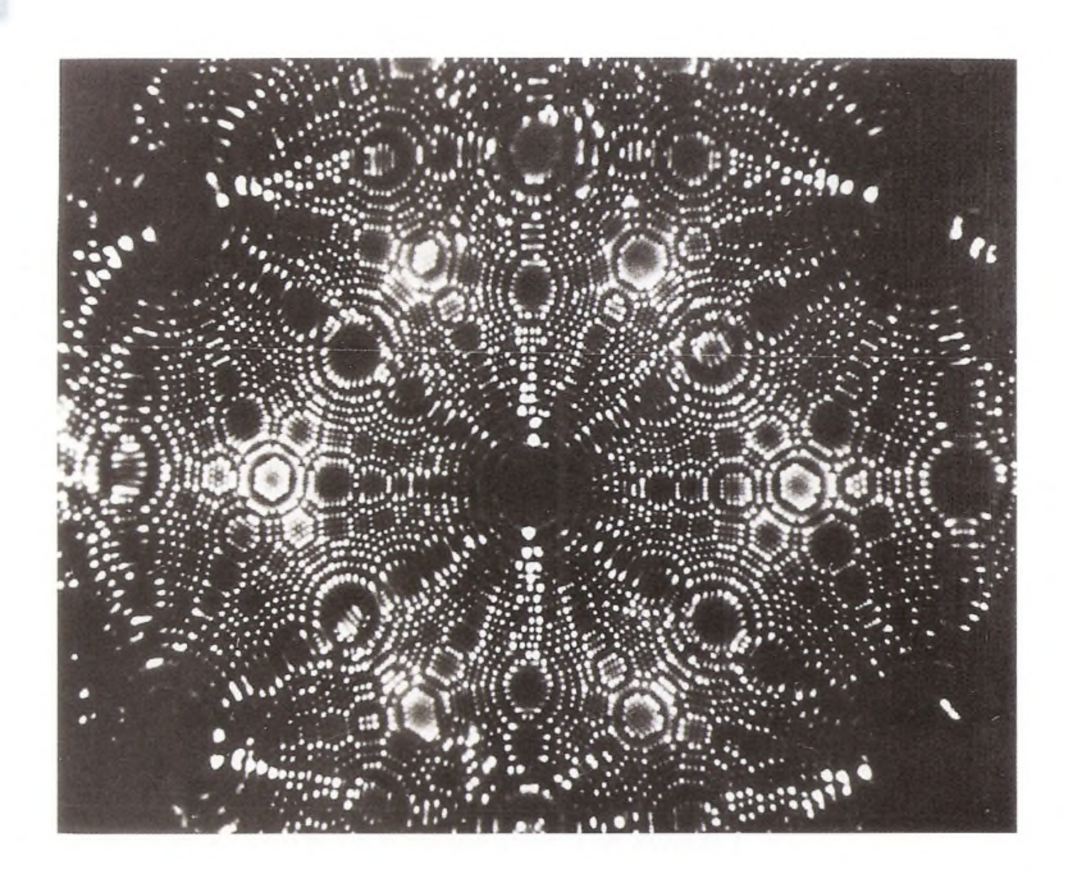
***37.32.** La intensidad de una luz no polarizada se reduce a la mitad cuando pasa por un polarizador. En el caso de la luz polarizada en un plano que llega al analizador, la intensidad I del haz transmitido está dada por

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

donde I_0 es la intensidad máxima transmitida y θ es el ángulo al cual se ha hecho girar el analizador. Supongamos que tres placas Polaroid están apiladas de manera que el eje de cada una de ellas está girado 30° con respecto a la placa precedente. ¿En qué porcentaje se reducirá la intensidad de la luz incidente cuando pase a través de las tres placas?

Resp. 28.1 por ciento

38 La física moderna y el átomo



La microfotografía de un cristal de tungsteno muestra el diseño de calidoscopio formado por átomos diminutos en un cristal casi perfecto. Esta microfotografía específica es de un trocito de tungsteno de radio igual a 25 nm que se ha amplificado 2 700 000 veces mediante un superpoderoso microscopio de ion de campos Muller. En este capítulo estudiaremos las características físicas y las aplicaciones producto del estudio del átomo. (*Fotografía © Betmann/ Corbis.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Analizará los postulados de Einstein y determinará los cambios relativos en la longitud, la masa y el tiempo.
2. Demostrará que entiende el efecto fotoeléctrico, la equivalencia de la masa y la energía, la longitud de onda según De Broglie y el modelo atómico de Bohr.
3. Demostrará su comprensión del espectro de emisión y de absorción y analizará por medio de esquemas las series espectrales de Balmer, Lyman y Paschen.
4. Calculará la energía emitida o absorbida por el átomo de hidrógeno cuando el electrón se mueve hacia un nivel energético más alto o más bajo.

Hacia 1900 ya se habían observado algunos fenómenos físicos que no era posible explicar satisfactoriamente mediante las leyes de la física clásica. La luz, considerada hasta entonces un fenómeno ondulatorio, exhibía propiedades de partícula según se fue descubriendo.

Los conceptos de Newton acerca de la masa, la longitud y el tiempo absolutos empezaron a tenerse por inadecuados para describir ciertos fenómenos físicos. La luz producida por una chispa eléctrica en el seno de un gas no originó un espectro continuo al pasar por un prisma o por una rejilla de difracción. Éstos y otros fenómenos inexplicables dieron lugar a formas completamente nuevas de contemplar el mundo que nos rodea.

En 1905 se publicó el primer trabajo de Einstein acerca de la relatividad, seguido en 1916 por un segundo trabajo. Con ellos se miró la física clásica desde un ángulo nuevo. La relatividad de Einstein sentó las bases para una física universal que limitó la física newtoniana clásica a situaciones que suponen velocidades considerablemente menores que la de la luz. El trabajo de Einstein estimuló las investigaciones de otros científicos que tuvieron amplias ramificaciones; al mismo tiempo, estableció parámetros para usar la energía al máximo, para emprender viajes espaciales, para la electrónica moderna, el análisis químico, los rayos X, las armas nucleares y muchas otras aplicaciones.

38.1 Relatividad

Los dos trabajos de Einstein sobre la relatividad ejercieron hondos efectos en la física, pero en general no fueron comprendidos por mucha gente aparte de la comunidad científica. Para entender la relatividad es preciso hacer a un lado todas las ideas preconcebidas y mostrar disposición para analizar los fenómenos físicos desde un enfoque nuevo.

La teoría especial de la relatividad, publicada en 1905, se basa en dos postulados. El primero establece que cada objeto está en movimiento en relación con algo, que *no existe el reposo absoluto*. Imagine un vagón de ferrocarril de carga que se mueve sobre la vía a 40 mi/h. Respecto al vagón, la carga no se mueve, pero en relación con la Tierra se mueve a 40 mi/h. De acuerdo con el primer postulado, es imposible pensar en algo que esté en reposo absoluto; un objeto está en reposo (o en movimiento) únicamente en relación con algún punto de referencia específico.

El primer postulado de Einstein también establece que si vemos que algo cambia de posición respecto a nosotros, no tenemos forma de saber si ese algo se mueve o somos *nosotros* los que lo hacemos. Si usted camina a la casa del vecino, es correcto decir, de acuerdo con el postulado, que la casa vino hasta usted. Esto parece absurdo porque estamos acostumbrados a usar la Tierra como marco de referencia. Las leyes de Einstein fueron diseñadas para ser completamente independientes de ese tipo de marcos referenciales. Desde el punto de vista de la física, el primer postulado se enuncia como sigue:

> Las leyes de la física son las mismas para todos los marcos de referencia que se muevan a una velocidad constante unos respecto de otros.

Los físicos del siglo XIX sugirieron que existía un marco de referencia privilegiado, el luminoso éter, que era considerado el medio por el que se creía que se propagaban las ondas electromagnéticas. Sin embargo, experimentos famosos, como el realizado por Michelson y Morley en 1887 (estudiado en el capítulo 33) y otros, fueron incapaces de demostrar la existencia del éter. Estos experimentos son la base del segundo postulado revolucionario de Einstein:

> La velocidad de la luz en el vacío (*c*) es constante para todos los observadores, independientemente de su estado de movimiento.

Para entender por qué este segundo postulado fue la causa de toda una revolución consideremos un autobús que viaja a 50 km/h, como se observa en la figura 38.1. Una persona que viaja en el autobús lanza una pelota de beisbol con una rapidez (en relación con la persona) de 20 km/h hacia el frente del autobús. Enseguida arroja una segunda pelota con la misma rapidez pero hacia la parte posterior del autobús. Para la persona que arrojó las pelotas, cada una de ellas viajó a 20 km/h, una hacia el frente del autobús y la otra hacia la parte posterior. Pero para un observador colocado fuera, en el suelo, la velocidad del vehículo se suma a la velocidad de la primera pelota, la cual parece viajar a 70 km/h en la misma dirección que el

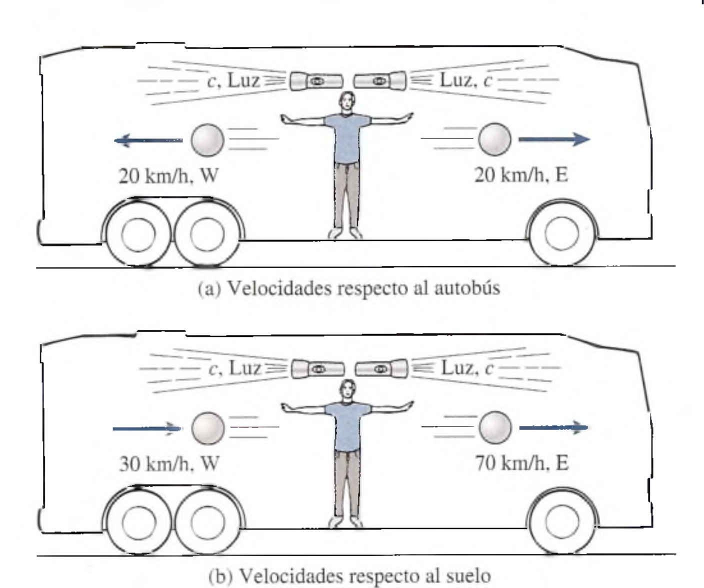


Figura 38.1 La velocidad de un autobús es de 50 km/h hacia la derecha (el Este). Se arrojan dos pelotas con igual rapidez (20 km/h), una a la derecha y otra a la izquierda, y en relación con el suelo tienen diferente rapidez. Sin embargo, la velocidad de la luz es independiente del marco de referencia.

autobús. Y cuando la velocidad del autobús se suma a la de la segunda pelota, el observador que está de pie en el suelo ve que viaja a 30 km/h *en la misma dirección que el autobús*. Pero la rapidez de la luz no cambia y le parecerá igual a la persona que va en el autobús y al observador en el suelo. La luz siempre se propaga a la misma rapidez constante:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

sin importar que viaje en favor o en contra de la fuente.

38.2 Hechos simultáneos: la relatividad del tiempo

Para comprender de manera general los ***postulados de Einstein*** no hacen falta profundos conocimientos de matemáticas. Tan sólo se necesita que observemos las cosas de una manera distinta, con frescura. El entendimiento del mundo que nos rodea se basa en gran medida en nuestra experiencia. El tiempo que dura un vuelo de Atlanta a Nueva York puede estar programado para realizarse en dos horas, y podríamos suponer que un observador que se encuentra en el suelo y otro que viaja en el avión registrarían el mismo lapso. Es cierto que nuestra propia experiencia parece sostener esa conclusión. Sin embargo, veremos que los intervalos de tiempo en un marco de referencia, en general, no son los mismos que los que se miden en relación con un segundo marco que se halla en movimiento relativo respecto al primero. Por tanto, el observador que va a bordo del avión juzgará que el viaje dura menos tiempo, y la persona que se quedó en tierra considerará que ese tiempo fue mayor. Por supuesto, la discrepancia aparente no es observable a rapideces normales.

Nuestras mediciones del tiempo se basan comúnmente en la ocurrencia de hechos simultáneos. Por ejemplo, la aguja del segundero en un cronómetro se aleja del punto cero justo cuando un corredor abandona la línea de salida. Luego la manecilla pasa por el punto 10 cuando el corredor cruza la meta. El juicio de que el lapso fue de 10 s se basó en la medición de estos hechos simultáneos. No obstante, los postulados de Einstein nos obligan a preguntarnos si los acontecimientos que se consideran simultáneos en relación con un marco de referencia lo serían también respecto a un marco de referencia en movimiento.

Einstein desarrolló un experimento reflexivo para ejemplificar la relatividad de las mediciones simultáneas. Imagine que un vagón de carga se mueve a lo largo de las vías a velocidad uniforme, como se muestra en la figura 38.2. Entonces caen dos rayos, uno en cada extremo del vagón, dejando las marcas A_0 y B_0 en él, y las marcas A y B en el piso. Un observador P_0 se

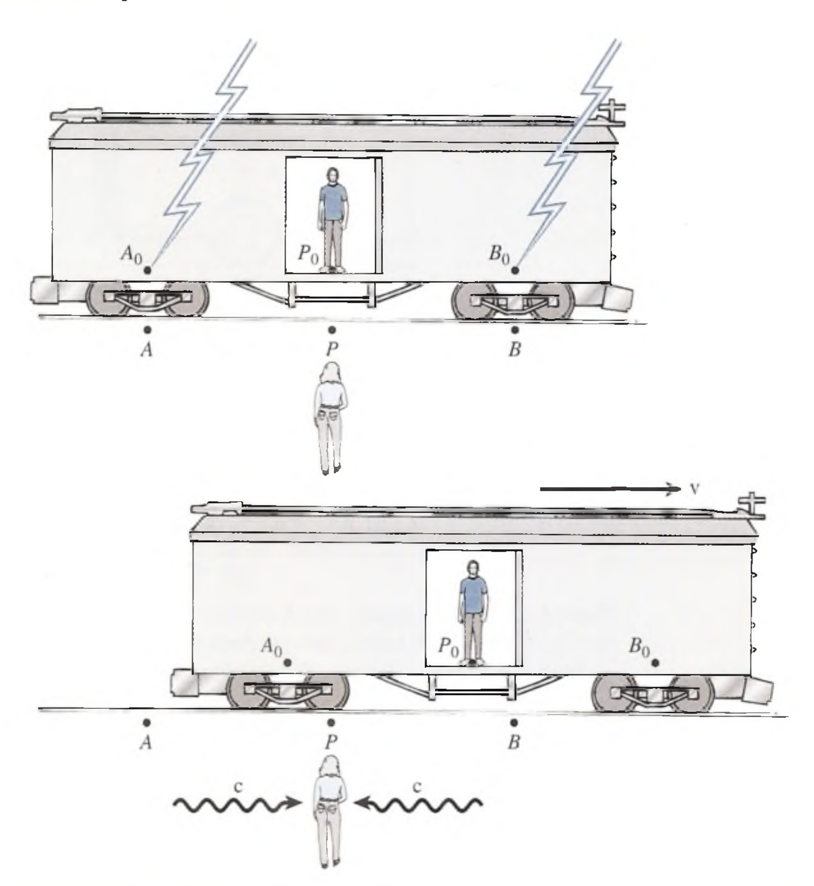


Figura 38.2 Dos rayos luminosos inciden en los extremos de un vagón y llegan tanto al carro como a la vía. La persona que se encuentra en el punto P, sobre el suelo, observa que los hechos son simultáneos. En cambio, la persona ubicada en el punto P_0 sobre el carro percibe que el evento en B_0 ocurre antes que el evento en A_0.

halla en el punto medio del vagón y otro observador P está junto a las vías, justo a la mitad del tramo entre los puntos A y B. Los hechos vistos por cada uno de esos observadores fueron las señales luminosas emitidas por los rayos. También debe tenerse en cuenta que la velocidad de la luz c es constante para cada observador y no se afecta por el movimiento del vagón.

Las señales luminosas que llegan al observador P, que está en el piso, parecen ocurrir al mismo tiempo. Dichas señales viajaron la misma distancia, y se cree que los hechos ocurrieron simultáneamente. Ahora consideremos los mismos eventos observados por la persona P_0 que está sobre el vagón. En el momento en que la señal luminosa de B_0 llega al punto P en el suelo ya ha pasado el punto P_0 sobre el vagón en movimiento. La luz que proviene de A_0 todavía no ha llegado al punto P_0. Por ende, la idea que se forma la persona que está sobre el vagón es que los acontecimientos no ocurrieron al mismo tiempo. ¿Quién tiene la razón? Según el principio de relatividad, no existe un marco de referencia privilegiado, por lo que concluimos que cada uno de ellos está en lo correcto desde su propio punto de vista.

38.3 Longitud, masa y tiempo relativos

La relatividad de las mediciones simultáneas tiene consecuencias de gran alcance cuando los objetos materiales se aproximan a la rapidez de la luz. Todas las mediciones físicas deben explicar el movimiento relativo. Las mediciones de tiempo, longitud y masa no serán las mismas para todos los observadores. Una comparación de mediciones realizadas desde marcos de referencia diferentes es algo sencillo si establecemos lo que se llama un marco de referencia "apropiado". Se puede hacer notar que dos hechos que ocurren en el *mismo* marco de referencia son más fundamentales que esos mismos acontecimientos observados desde otro marco. Se definirá un ***espacio de tiempo propio*** Δt_0 como un intervalo entre dos acontecimientos

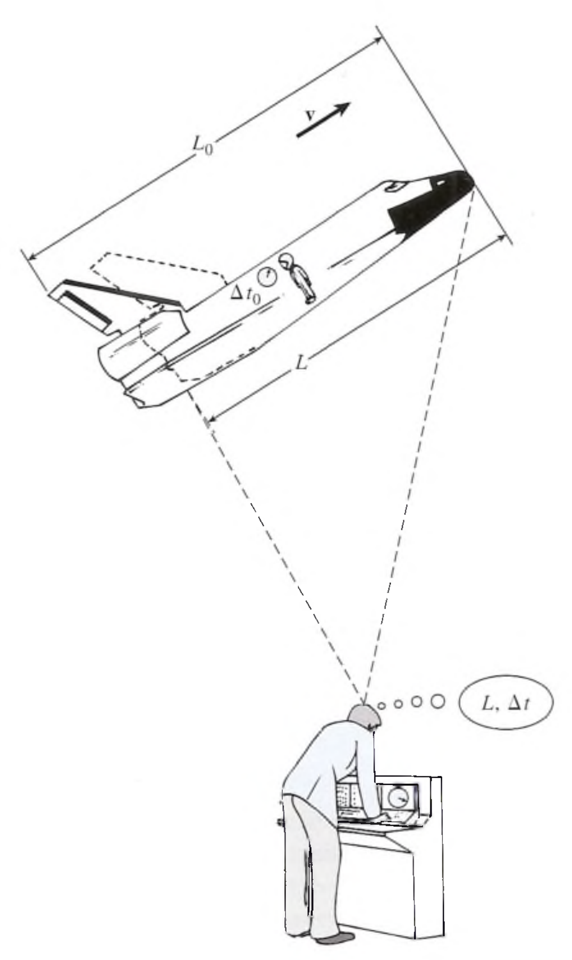


Figura 38.3 La longitud de los objetos y la duración de los sucesos se ven afectados por el movimiento relativo. La persona que viaja en el cohete mide la longitud L_0 y el espacio de tiempo Δt; la persona que está en el laboratorio observa una longitud más corta y registra un intervalo de tiempo Δt mayor.

que suceden en el mismo punto espacial. Considere el viaje de una nave espacial a una rapidez v, en relación con un observador que está en un laboratorio terrestre (véase la figura 38.3). Una persona que viaja a bordo de esta nave mide la *longitud propia* L_0, la *masa propia* m_0 y los *espacios de tiempo propios* Δt_0. Una persona que esté en la Tierra y realice sus propias mediciones de los mismos hechos que en realidad ocurren en la nave obtendrá valores diferentes, L, m y Δt. Cada observador está en lo correcto desde su respectivo punto de vista.

Se ha desarrollado una serie de ecuaciones correspondientes a la relatividad para predecir cómo se afectan las mediciones por el movimiento relativo. En cada caso, el efecto se vuelve más pronunciado cuando la velocidad v de los objetos se aproxima a la velocidad límite de la luz c. Si se determina que la longitud propia de una nave espacial (véase la figura 38.3) es L_0, su longitud L cuando se está moviendo a la rapidez relativa v se calculará mediante

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \textit{Contracción relativista} \qquad \mathbf{(38.1)}$$

Este acortamiento de la longitud en la dirección del movimiento se conoce como ***contracción relativista***.

Esto significa que la longitud L de un objeto en movimiento parece acortarse por un factor de $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ respecto a su longitud en reposo (su longitud propia). Un análisis de esta fórmula revelará que la longitud observada L será igual a la longitud propia L_0 cuando $v = 0$ (el momento en que el objeto está en reposo). La longitud empezará a acortarse a medida que la velocidad se aproxime a c.

Ejemplo 38.1

Cuando una nave espacial se encuentra en reposo respecto a nosotros, su longitud es de 100 m. ¿Qué longitud mediríamos cuando se moviera respecto a nosotros con una rapidez de 2.4×10^8 m/s, o $0.8c$?

Solución: En este caso, la longitud propia L_0 es de 100 m. Haciendo la sustitución en la ecuación (38.1) se obtiene

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (100 \text{ m}) \sqrt{1 - \frac{(0.8c)^2}{c^2}}$$

$$= (100 \text{ m}) \sqrt{1 - \frac{0.64c^2}{c^2}} = (100 \text{ m}) \sqrt{1 - 0.64}$$

$$= (100 \text{ m}) \sqrt{0.36} = (100 \text{ m})(0.6) = 60 \text{ m}$$

Como ya se ha dicho, los espacios de tiempo también resultan afectados por el movimiento relativo. Si una persona que viaja a bordo de una nave espacial lleva consigo un reloj, como se muestra en la figura 38.3, éste le indica un intervalo propio Δt_0 más corto que el intervalo correspondiente (Δt) medido en el laboratorio terrestre. El espacio de tiempo Δt, según lo registra el observador en la Tierra está dado por:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textit{Dilatación del tiempo} \qquad \textbf{(38.2)}$$

Este retardo del tiempo (intervalos más largos) como función de la velocidad se conoce como ***dilatación del tiempo***.

Para estar seguros de que se ha entendido esta ecuación, debe reconocer que Δt y Δt_0 representan *intervalos*, o el tiempo que pasa desde el principio hasta el final de un hecho. En consecuencia, un reloj que avanza más despacio registra espacios de tiempo más largos. Podemos decir que el tiempo se ha detenido cuando se vuelve imposible medir un fenómeno; en otras palabras, el espacio de tiempo es infinito. Esto es exactamente lo que predice la ecuación de dilatación del tiempo en el límite en que $v = c$.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - c^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{\Delta t_0}{0} = \infty$$

Ejemplo 38.2

Suponga que observamos una nave espacial que pasa frente a nosotros a $0.85c$, como en el ejemplo anterior. Medimos el tiempo entre dos sonidos consecutivos del tic tac del reloj de la nave y registramos 1.67 s. ¿Qué tiempo entre los dos tic tac consecutivos mide el capitán de la nave?

Plan: El *tiempo propio* Δt_0 es el lapso indicado por el reloj en movimiento que se halla en la nave espacial. Ahí es donde ocurre el fenómeno en sí. Puesto que nosotros registramos un tiempo de 1.67 s desde una posición externa a la del reloj en movimiento, nuestra medida es el ***tiempo relativo*** Δt_0. Una vez que hemos distinguido entre el tiempo relativo y el propio, al aplicar la ecuación de la dilatación del tiempo obtendremos el resultado.

Solución: Sustituyendo $\Delta t_0 = 1.67$ en la ecuación (38.2) se obtiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{o} \qquad \Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Delta t_0 = (1.67 \text{ s}) \sqrt{1 - \frac{(0.85c)^2}{c^2}} = (1.67 \text{ s}) \sqrt{1 - 0.722}$$

$$= (1.67 \text{ s})(0.527) = 0.880 \text{ s}$$

El tiempo propio medido por el capitán es sólo 52.7% del tiempo relativo medido por nosotros.

Consideremos ahora otra cantidad física que varía con la velocidad relativa. Para que la cantidad de movimiento lineal se conserve, independientemente de cuál sea el marco de referencia, la masa de un cuerpo debe variar en la misma proporción que la longitud y el tiempo. Si la *masa en reposo*, o *masa propia* de un cuerpo es m_0, la masa relativística m de un cuerpo que se mueve con rapidez v estará dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textit{Masa relativística} \qquad \textbf{(38.3)}$$

Recuerde que el subíndice 0 se refiere a la masa propia o masa en reposo.

Ejemplo 38.3

La masa en reposo de un electrón es 9.1×10^{-31} kg. Un técnico de laboratorio determina que la velocidad de un electrón en un tubo de vacío es 90% de la velocidad de la luz. ¿Cuál será la medida de la masa del electrón en el laboratorio?

Plan: Puesto que la masa m se determinará en el laboratorio, será la ***masa relativística***. La masa $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ kg es la masa *propia*. Se hallará m mediante la sustitución directa en la ecuación de la masa *relativística*.

Solución: La masa medida por el técnico de laboratorio está dada por la ecuación (38.3)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})}{\sqrt{1 - \dfrac{(0.9c)^2}{c^2}}}$$

$$= 20.9 \times 10^{-31}\text{ kg}$$

La masa relativística de un electrón es mayor que su masa en reposo por un factor de 2.30.

Cabe aclarar, con base en la ecuación (38.3), que si m_0 no es igual a cero, el valor de la masa relativística m se aproxima al infinito a medida que v se aproxima a c. Esto significa que sería necesaria una fuerza infinita para acelerar una masa diferente de cero hasta la velocidad de la luz. Aparentemente, la velocidad de la luz en el vacío representa el límite superior para la rapidez de ese tipo de masas. Sin embargo, si la masa en reposo *es* de cero, como en el caso de los fotones de la luz, entonces la ecuación de la masa relativística *permite* que $v = c$.

Aun cuando las predicciones que se desprenden de las ecuaciones de Einstein son asombrosas, día a día se confirman por medio de experimentos de laboratorio. Las conclusiones correspondientes nos asombran únicamente porque no tenemos experiencia directa con esas fantásticas rapideces. Los gigantescos dispositivos capaces de romper el átomo, como el betatrón y muchos otros aparatos para acelerar partículas, se usan en muchos países para acelerar las partículas atómicas y nucleares a rapideces muy cercanas a la de la luz. En el gran acelerador de Brookhaven, los protones ya han sido acelerados hasta 99.948% de la rapidez de la luz. La masa de esas partículas aumenta exactamente en la forma que lo predice la relatividad. Actualmente se pueden acelerar los electrones a más de $0.9999999c$, lo que origina que su masa se incremente más de 40 000 veces respecto a su valor en reposo.

38.4 Masa y energía

Antes de Einstein, los físicos siempre habían considerado la masa y la energía como cantidades separadas, que era preciso *conservar* en forma independiente. En la actualidad la masa y la energía deben considerarse como diferentes maneras de expresar la misma cantidad. Si decimos que la masa se convierte en energía y la energía en masa, debemos reconocer que la masa y la energía se refieren a lo mismo, pero expresado en diferentes unidades. Einstein encontró que el factor de conversión es igual al cuadrado de la velocidad de la luz.

$$E_0 = m_0c^2 \qquad \textbf{(38.4)}$$

Por la forma como está escrita la ecuación, es fácil observar que una masa muy pequeña corresponde a una enorme cantidad de energía. Por ejemplo, un objeto cuya masa en reposo m_0 es de 1 kg tiene una energía en reposo E_0 de 9×10^{16} J.

Un estudio más a fondo de la energía debe tener en cuenta los efectos de la relatividad. La expresión para la energía total de una partícula de masa en reposo m_0 y cantidad de movimiento $p = mv$ se puede escribir como

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + p^2c^2} \tag{38.5}$$

Si ahora se sustituye m_0 en la ecuación (38.3), que indica la relación de la masa relativística, la energía total se reduce a

$$E = mc^2 \tag{38.6}$$

donde m representa la masa relativística. Ésta es la forma más general de expresar la energía total de una partícula.

Observe que la ecuación (38.5) se reduce a $E_0 = m_0c^2$ cuando la velocidad es cero y por consiguiente $p = 0$. Más aún, si tomamos en cuenta velocidades considerablemente menores que c, la ecuación se simplifica así

$$E = \frac{1}{2}m_0v^2 + m_0c^2 \tag{38.7}$$

Ésta es la ecuación que se emplea con más frecuencia para expresar la energía cinética, con la adición de un nuevo término para la *energía en reposo*.

La expresión más general para la energía cinética de una partícula debe tener en cuenta los efectos de la relatividad. Conviene recordar que la energía cinética E_K a una rapidez v se define como el trabajo que debe realizarse para acelerar una partícula desde el reposo hasta la rapidez v. Por los métodos de cálculo es posible demostrar que la energía cinética relativística de una partícula se obtiene mediante

$$E_K = (m - m_0)c^2 \tag{38.8}$$

Esto representa la diferencia entre la energía total de una partícula y su energía de la masa en reposo.

Ejemplo 38.4

Un electrón es acelerado a una rapidez de $0.9c$. Compare su energía cinética relativística con el valor que tendría tomando como base la mecánica de Newton.

Plan: En el ejemplo 38.3 se demostró que la masa relativística de un electrón a esta rapidez sería de 20.9×10^{-31} kg. Como su masa en reposo es de 9.1×10^{-31} kg, es posible utilizar estos valores para hallar la energía cinética relativística a partir de la ecuación (38.8). Con fines de comparación con la energía cinética newtoniana, usaremos la masa en reposo a una rapidez de $0.9c$.

Solución: La energía cinética relativística es

$$\begin{aligned} E_k &= (m - m_0)c^2 \\ &= (20.9 \times 10^{-31}\text{ kg} - 9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})(3 \times 10^8\text{ m/s})^2 \\ &= (11.8 \times 10^{-31}\text{ kg})(9 \times 10^{16}\text{ m}^2/\text{s}^2) \\ &= 10.6 \times 10^{-14}\text{ J} \end{aligned}$$

El valor newtoniano se basa en $K = \frac{1}{2}m_0v^2$, donde $v = 0.9c$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_0v^2 &= \frac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.9c)^2 \\ &= (4.55 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.81c^2) \\ &= (4.55 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.81)(3 \times 10^8\text{ m/s})^2 \\ &= 3.32 \times 10^{-14}\text{ J} \end{aligned}$$

La energía cinética relativística tiene un valor de más del triple de su valor newtoniano.

38.5 Teoría cuántica y el efecto fotoeléctrico

Recuerde que en el capítulo 33 se vio que el ***efecto fotoeléctrico*** conduce al establecimiento de la teoría dual de la luz (véase la figura 38.4). Los electrones emitidos como resultado de la luz incidente no podrían explicarse en términos de la teoría electromagnética existente.

En un intento de hacer concordar el experimento con la teoría, Max Planck postuló que la energía electromagnética es absorbida o emitida en paquetes discretos, conocidos como *cuantos*. La energía de dichos cuantos, o *fotones*, es proporcional a la frecuencia de la radiación. La ***ecuación de Planck*** se puede escribir como sigue:

$$E = hf \tag{38.9}$$

donde h es la constante de proporcionalidad conocida como *constante de Planck*. Su valor es

$$h = 6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Einstein usó la ecuación de Planck para explicar el efecto fotoeléctrico. En su razonamiento supuso que si la luz es emitida en forma de fotones de energía hf, también debe propagarse como fotones. Cuando un cuanto de luz incide en una superficie metálica, tiene una energía igual a hf. Si toda esta energía se transfiere a un solo electrón, cabría esperar que el electrón saliera despedido el metal con una energía hf. Sin embargo, es necesario emplear por lo menos una cantidad de energía W para expulsar el electrón del metal. El término W se llama ***función de trabajo*** de la superficie. Por tanto, el electrón proyectado sale con una energía cinética máxima representada por

$$E_K = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = hf - W \tag{38.10}$$

Ésta es la *ecuación fotoeléctrica de Einstein*.

A medida que la frecuencia de la luz incidente varía, la energía máxima del electrón emitido cambia. La frecuencia más baja f_0 a la que el electrón es emitido se presenta cuando $E_K = 0$. En este caso,

$$f_0 = \frac{W}{h} \tag{38.11}$$

La cantidad f_0 se llama ***frecuencia de umbral***.

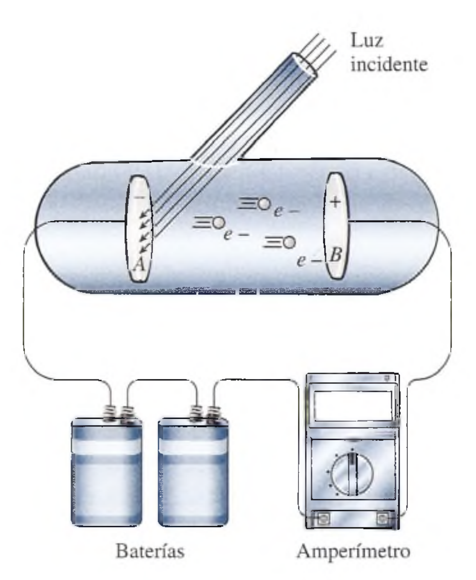


Figura 38.4 El efecto fotoeléctrico.

Ejemplo 38.5 Se necesita luz de 650 nm de longitud de onda para expulsar electrones de una superficie metálica. ¿Cuál es la energía cinética de los electrones emitidos si la superficie es bombardeada con luz de longitud de onda de 450 nm?

Plan: Primero se determinará la energía (en joules) suministrada por la longitud de onda de umbral, que en este caso corresponde a 650 nm. Ésa será la función de trabajo W para la superficie. En ese punto, los electrones tienen una velocidad igual a cero. Luego se restará la función de trabajo de la energía proporcionada por la luz cuya longitud de onda es de 450 nm, con lo que se obtendrá la energía cinética disponible para los electrones expulsados. En esencia, se trata de aplicar la ecuación del efecto fotoeléctrico.

Solución: La función de trabajo $W = hf_0$ de la superficie es igual a la energía de la longitud de onda de umbral de 650 nm ($\lambda_0 = 650$ nm). Si recordamos que $f_0 = c/\lambda_0$ es posible escribir:

$$W = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8\ \text{m/s})}{650 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$

$$= 3.06 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

La energía de la luz de 450 nm es

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8\ \text{m/s})}{450 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$

$$= 4.42 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

A partir de la ecuación fotoeléctrica de Einstein,

$$E_K = hf - W$$

$$= 4.42 \times 10^{-19}\ \text{J} - 3.06 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.36 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

38.6 Ondas y partículas

La radiación electromagnética tiene un carácter dual en su interacción con la materia. Algunas veces exhibe propiedades de onda, como se demostró al explicar la interferencia y la difracción. Otras veces, como en el efecto fotoeléctrico, se comporta como partículas, a las que se ha llamado *fotones*. En 1924, Louis de Broglie fue capaz de demostrar esta dualidad de la materia deduciendo una relación para la longitud de onda de una partícula.

Esta relación se advierte analizando dos expresiones para la energía del fotón. Ya hemos visto a partir del trabajo de Planck que la energía de un fotón se puede expresar como función de su longitud de onda λ.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Antes vimos otra expresión para la energía de una partícula de masa en reposo m_0, en la sección sobre relatividad. La ecuación (38.5) establece que

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + p^2c^2}$$

Esta ecuación muestra que los fotones tienen una cantidad de movimiento $p = mv$ debido a sus masas relativísticas. Sin embargo, la masa en reposo m_0 de un fotón es cero, de modo que la ecuación (38.5) se convierte en

$$E = \sqrt{p^2c^2} = pc \qquad \textbf{(38.12)}$$

Puesto que sabemos que $E = hc/\lambda$, podemos escribir

$$\frac{hc}{\lambda} = pc$$

de donde se obtiene que la longitud de onda de un fotón está dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (38.13)$$

De Broglie propuso que todos los objetos tienen longitudes de onda relacionados con su cantidad de movimiento, independientemente de si los objetos presentan características de onda o de partícula. Por ejemplo, la longitud de onda de un electrón o de cualquier partícula se obtiene mediante la ecuación de de Broglie, y puede volverse a escribir como

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad \textit{Longitud de onda de de Broglie} \qquad (38.14)$$

Ejemplo 38.6

¿Cuál es la longitud de onda de de Broglie de un electrón que tiene una energía cinética de 100 eV?

Plan: Para determinar la longitud de onda de de Broglie de este electrón es preciso establecer su masa y su velocidad. Es sabido que la masa de un electrón es 9.1×10^{-31} kg, en tanto que su velocidad se halla a partir de su energía cinética. Hay que convertir 100 eV a joules y luego aplicar la expresión newtoniana de la energía cinética. Si la velocidad es razonable y no se aproxima a rapideces relativísticas, podemos usarla para determinar la longitud de onda de de Broglie.

Solución: Si recordamos que 1 eV = 1.6×10^{-19} J podemos convertir fácilmente los 100 eV a joules.

$$K = 100 \text{ eV}\left(\frac{1.6 \times 10^{-19}\text{ J}}{1 \text{ eV}}\right) = 1.60 \times 10^{-17}\text{ J}$$

La energía cinética newtoniana es $\frac{1}{2}m_0v^2$, de forma que la velocidad se obtiene como sigue:

$$K = \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad \text{o} \qquad v^2 = \frac{2K}{m_0}$$

$$v^2 = \frac{2(1.6 \times 10^{-17}\text{ J})}{9.1 \times 10^{-31}\text{ kg}} = 3.52 \times 10^{13}\text{ m}^2/\text{s}^2$$

En consecuencia, la velocidad del electrón es

$$v = \sqrt{3.52 \times 10^{13}\text{ m}^2/\text{s}^2} = 5.93 \times 10^6\text{ m/s}$$

Como la velocidad es mucho menor que 10% la velocidad de la luz, no es relativística y se justifica la aplicación de la relación newtoniana de la energía. Ahora se calculará la longitud de onda de de Broglie con la ecuación (38.14)

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{(9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})(5.93 \times 10^6\text{ m/s})}$$
$$= 1.23 \times 10^{-10}\text{ m} = 0.123\text{ nm}$$

A partir de la ecuación de de Broglie, observe que cuanto mayor es la velocidad de la partícula, *más corta* es la longitud de onda. Recuerde que debe usarse la masa relativa si la velocidad de una partícula es lo suficientemente grande para que se deba aplicar dicha masa. En términos generales, si la velocidad de una partícula es mayor que 10% la velocidad de la luz, han de considerarse valores relativísticos.

38.7 El átomo de Rutherford

Los primeros intentos de explicar la estructura del átomo reconocieron que la materia es eléctricamente neutra y que si al interior del átomo había cargas, de alguna forma debían hallarse neutralizadas, lo que supone una misma cantidad de cargas positivas y negativas. En 1911, Ernest Rutherford llevó a cabo experimentos en los que bombardeó una lámina delgada de metal con un flujo de partículas alfa, como se muestra en la figura 38.5. Una ***partícula alfa*** es una minúscula partícula con carga positiva, emitida por una sustancia radiactiva como el radio. En el experimento, de todas las partículas con carga positiva, algunas se desviaron ligeramente, pero la mayoría penetró fácilmente la lámina, lo cual se observó por un destello que se activaba cuando golpeaban la pantalla de sulfuro de cinc. Para sorpresa de Rutherford, otras se desviaron en ángulos extremos; incluso algunas se desviaron hacia atrás. (Rutherford mismo declaró que era como disparar un cañón a través de una hoja de papel para encontrarse que algunas balas rebotaban para golpear su rostro). Las desviaciones hacia los extremos no podían explicarse en términos del modelo atómico de Thomson. Si las cargas se hallaban dispersas por todo el átomo, las fuerzas eléctricas serían demasiado grandes para repeler las partículas alfa en los grandes ángulos observados en la realidad.

Rutherford explicó estos resultados suponiendo que toda la carga positiva de un átomo se concentraba en una pequeña región, llamada el *núcleo* del átomo. Supuso que los electrones se hallaban distribuidos en el espacio alrededor de la carga positiva. Si en efecto el átomo consistía en su mayor parte de espacio vacío, el hecho de que la mayoría de las partículas alfa pasaran en forma directa a través de la hoja se explicaba fácilmente. Más aún, Rutherford encontró que el gran ángulo con el que se dispersaban las partículas era resultado de la repulsión electrostática. Una vez que las partículas alfa penetraban el espacio donde se encontraban los electrones dispuestos en torno de la carga positiva, se encontraban más cerca de una fuerte carga positiva de gran masa. Por tanto, era de esperarse que en ese proceso actuaran fuerzas electrostáticas importantes.

Rutherford ha recibido el crédito por haber descubierto el núcleo debido a que fue capaz de desarrollar fórmulas para predecir la dispersión de las partículas alfa. Con base en sus cálculos, el diámetro del núcleo se estimó en aproximadamente una diezmilésima parte del diámetro del átomo mismo. Se consideró que la parte positiva del átomo se concentra en el núcleo y que tiene un diámetro aproximado de 10^{-5} nm. Rutherford creyó que los electrones estaban agrupados alrededor del núcleo, de tal modo que el diámetro de todo el átomo era de 0.1 nm aproximadamente.

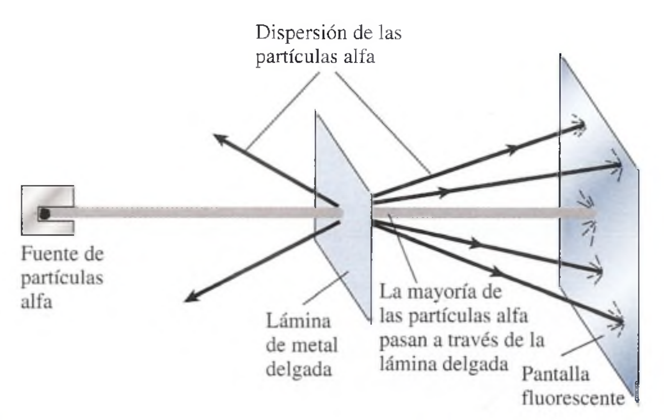
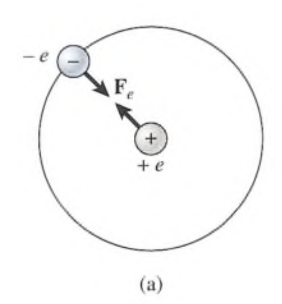


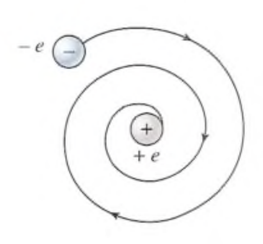
Figura 38.5 La dispersión de las partículas alfa, según Rutherford, proporcionó los primeros datos sobre el núcleo atómico.

38.8 Órbitas electrónicas

Una dificultad inmediata que surgió con el modelo atómico de Rutherford tuvo relación con la estabilidad de los electrones atómicos. Por la ley de Coulomb sabemos que los electrones tendrían que ser atraídos hacia el núcleo. Una explicación posible era que los electrones se movieran en círculos alrededor del núcleo de forma similar a como lo hacen los planetas girando alrededor del Sol. La fuerza centrípeta necesaria sería provista por la atracción de Coulomb.



(a)



(b)

Figura 38.6 (a) Una órbita estable del electrón en la que la fuerza electrostática F_e suministra la fuerza centrípeta. (b) La inestabilidad ocasionada por la radiación electromagnética podría ocasionar que el electrón perdiera energía y que siguiera una trayectoria en forma de espiral hasta llegar al núcleo.

Considere, por ejemplo, el átomo de hidrógeno, que está formado por un solo protón y un solo electrón. Cabría esperar que el electrón permaneciera en una órbita constante alrededor del núcleo, como se ilustra en la figura 38.6a. La carga del electrón se denota con $-e$, y la carga igual pero opuesta del protón se representa con $+e$. A una distancia r del núcleo, la fuerza electrostática de atracción sobre el electrón se determina aplicando la ley de Coulomb, donde $k = \frac{1}{4}\pi\epsilon_0$.

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{38.15}$$

donde cada carga tiene una magnitud e. Para una órbita estable, esta fuerza debe ser exactamente igual a la fuerza centrípeta, determinada por

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \tag{38.16}$$

donde m es la masa del electrón que se desplaza con una velocidad v. Si se iguala $F_e = F_c$, tenemos

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{38.17}$$

Al resolver para el radio r se obtiene

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \tag{38.18}$$

De acuerdo con la teoría clásica, con la ecuación (38.18) debería ser posible predecir el radio orbital r del electrón como una función de su rapidez v.

El problema con esta aproximación es que el electrón debe acelerarse en forma continua bajo la influencia de la fuerza electrostática. Según la teoría clásica, un electrón acelerado debe irradiar energía. La energía total del electrón debería entonces disminuir gradualmente, haciendo disminuir también la rapidez del electrón. Como se observa a partir de la ecuación (38.18), la reducción gradual en la rapidez v del electrón resulta en órbitas cada vez más pequeñas. Por tanto, el electrón describiría una espiral hasta llegar al núcleo, como se mira en la figura 38.6b. Este hecho es la razón de la principal inconsistencia que presenta el modelo atómico de Rutherford.

38.9 Espectro atómico

Todas las sustancias irradian ondas electromagnéticas cuando se calientan. Puesto que cada elemento es diferente, cabe esperar que la radiación emitida dé una pista sobre la estructura atómica. Estas ondas electromagnéticas se analizan mediante un ***espectrómetro***, el cual usa un prisma o una rejilla de difracción para organizar la radiación en un patrón llamado *espectro*. Con una fuente de luz incandescente el espectro es *continuo*, es decir, contiene todas las longitudes de onda de forma similar a un arco iris. Sin embargo, si la fuente de luz proviene de un gas calentado a baja presión, el espectro de la luz emitida consiste en una serie de franjas brillantes separadas por regiones oscuras. Dicho espectro se denomina ***espectro de líneas de emisión***. La composición química del material vaporizado puede determinarse comparando su espectro con otro conocido.

En la figura 38.7 se muestra un espectro de líneas de emisión correspondiente al hidrógeno. La secuencia de líneas, llamada ***serie espectral***, tiene un orden definido: las líneas se juntan cada vez más a medida que se aproximan al límite de la serie. Cada línea corresponde a una frecuencia o longitud de onda (color) características. La línea de mayor longitud de onda, 656.3 nm, está en el rojo y se denota con H_α. Las otras se representan, en orden, con H_β, H_γ y así sucesivamente.

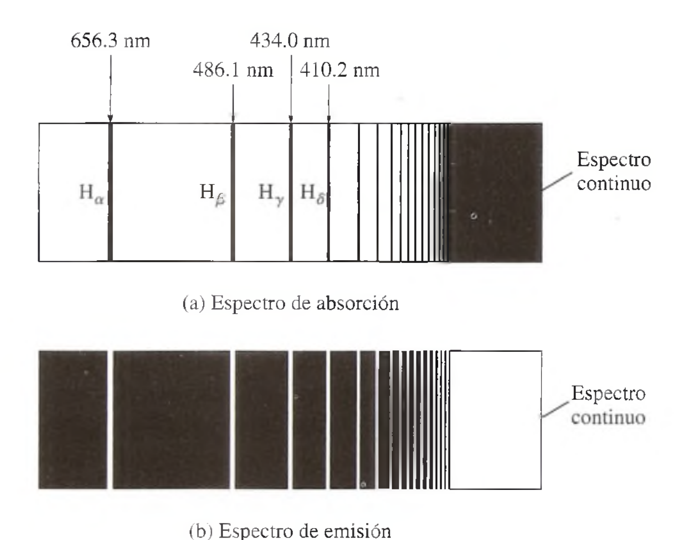


Figura 38.7 Espectro de líneas de la serie de Balmer del átomo de hidrógeno.

También es posible obtener una información similar a partir de un gas o vapor en estado no excitado. Cuando pasa luz a través de un gas, ciertas longitudes de onda discretas son *absorbidas*. Este ***espectro de absorción*** es parecido a los que se producen por emisión, excepto que las longitudes de onda características aparecen en forma de líneas *oscuras* sobre un fondo luminoso. El espectro de absorción correspondiente al hidrógeno se compara con el espectro de emisión en la figura 38.7.

Desde 1884, Johann Jakob Balmer encontró una relación matemática sencilla para predecir las longitudes de onda características de algunas de las líneas en el espectro de hidrógeno. Su fórmula es

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{38.19}$$

donde λ = longitud de onda
R = constante de Rydberg
$n = 3, 4, 5, \ldots$

Si λ se mide en metros, el valor de R es

$$R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

La serie de longitudes de onda que predice la ecuación (38.19) se llama *serie de Balmer*.

Ejemplo 38.7

Con la ecuación de Balmer, determine la longitud de onda de la línea H_α en el espectro de hidrógeno. (Esta primera línea se presenta cuando $n = 3$.)

Solución: Por sustitución directa se tiene que

$$\frac{1}{\lambda} = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1.524 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

de donde

$$\lambda = 656.3 \text{ nm}$$

Otras longitudes de onda características se determinan estableciendo $n = 4, 5, 6$, y así sucesivamente. El límite de la serie se encuentra haciendo $n = \infty$ en la ecuación (38.19).

A partir del descubrimiento de la ecuación de Balmer se han encontrado algunas otras series para el hidrógeno. En general, todos estos descubrimientos se resumen en una sola ecuación

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{38.20}$$

donde l y n son enteros, con $n > l$. La serie predicha por Balmer corresponde a $l = 2$ y $n = 3, 4, 5, \ldots$ La *serie de Lyman* se ubica en la región ultravioleta y corresponde a $l = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; la *serie de Paschen* está ubicada en el infrarrojo y corresponde a $l = 3$, $n = 4, 5, 6, \ldots$; y la *serie de Brackett* también se encuentra en la región de las ondas infrarrojas y corresponde a $l = 4$, $n = 5, 6, 7, \ldots$

38.10 El átomo de Bohr

Las observaciones del espectro atómico han indicado que los átomos emiten sólo unas cuantas frecuencias bien definidas. Este hecho no concuerda con el modelo de Rutherford, el cual predice un átomo inestable que emite energía radiante de todas las frecuencias. Cualquier teoría sobre estructura atómica debe explicar las regularidades observadas en el espectro atómico.

La primera teoría satisfactoria para explicar el espectro de líneas del átomo de hidrógeno fue postulada por Niels Bohr en 1913. Él supuso, igual que Rutherford, que los electrones se encontraban en órbitas circulares alrededor de un denso núcleo cargado positivamente, pero decidió que la teoría electromagnética no se podía aplicar en forma estricta en el nivel atómico. De este modo, esquivó el problema de la inestabilidad orbital debida a la radiación emitida. El primer postulado de Bohr es el siguiente:

> Un electrón puede existir únicamente en aquellas órbitas donde la cantidad de movimiento o momento angular es un múltiplo entero de $h/2\pi$.

Por tanto, contrariamente a la predicción clásica, los electrones pueden estar en ciertas órbitas específicas sin emitir energía radiante.

El fundamento del primer postulado de Bohr se puede analizar en términos de las longitudes de onda estudiadas por de Broglie. Las órbitas estables son las que tienen un número entero de longitudes de onda electrónicas en la circunferencia de la órbita de Bohr. Tales órbitas permitirían ondas estacionarias, como se muestra en la figura 38.9 para cuatro longitudes de onda. Las condiciones para la presencia de dichas ondas estacionarias se obtienen de

$$n\lambda = 2\pi r \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{38.21}$$

donde r es el radio de una órbita electrónica que contiene n longitudes de onda.

Puesto que $\lambda = h/mv$, podemos escribir de nuevo la ecuación (38.21) como

$$n\frac{h}{mv} = 2\pi r$$

de donde se puede demostrar que la cantidad de movimiento angular mvr se obtiene por

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \tag{38.22}$$

El número n, llamado el ***número cuántico principal***, puede tomar los valores $n = 1, 2, 3, \ldots$

Un *segundo postulado* de Bohr impone todavía más restricciones a la teoría atómica mediante la incorporación de la teoría cuántica.

> Si un electrón cambia de una órbita estable a cualquier otra, pierde o gana energía, en cuantos discretos, igual a la diferencia en energía entre los estados inicial y final.

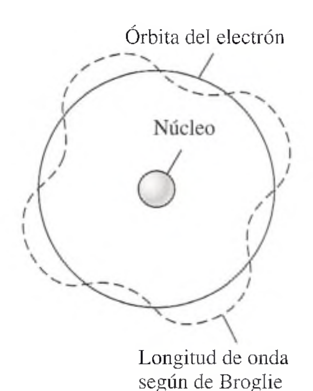


Figura 38.8 Órbita estable del electrón que muestra una circunferencia igual a cuatro longitudes de onda de de Broglie.

En forma de ecuación, el segundo postulado de Bohr se escribe

$$hf = E_i - E_f$$

donde hf = energía de un fotón emitido o absorbido
E_i = energía inicial
E_f = energía final

Es preciso regresar al análisis del átomo de hidrógeno para saber si los postulados de Bohr ayudarán a armonizar la teoría y el espectro observado. Recuérdese que la aplicación de la ley de Coulomb y la ley de Newton resultaron en la ecuación (38.18) para el radio r de la órbita del electrón.

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mv^2}$$

De acuerdo a la teoría de Bohr,

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

Si se resuelven estas dos ecuaciones en forma simultánea para obtener el radio r y la velocidad v queda

$$r = n^2\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \tag{38.23}$$

$$v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 nh} \tag{38.24}$$

Estas ecuaciones predicen los radios y las velocidades posibles para el electrón, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

A continuación se deduce una expresión para la energía total del átomo de hidrógeno para cualquier órbita del electrón.

$$E_T = E_K + E_P$$

La energía cinética se determina sustituyendo en la ecuación (38.24),

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \tag{38.25}$$

La energía potencial del átomo para cualquier órbita es

$$E_P = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{4\epsilon_0^2 n^2 h^2} \tag{38.26}$$

después de sustituir r en la ecuación (38.23). La energía potencial es negativa debido a que es necesario trabajo exterior para extraer el electrón del átomo. Si se suman las ecuaciones (38.25) y (38.26) se determina que la energía total es

$$E_T = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \tag{38.27}$$

Regresando al segundo postulado de Bohr, ahora es posible predecir la energía de un fotón emitido o absorbido. Normalmente, el electrón está en su estado fundamental, correspondiente a $n = 1$. Si el átomo *absorbe* un fotón, el electrón puede saltar hacia alguna de las órbitas exteriores. A partir del estado *excitado* regresará nuevamente a una órbita interior más baja y *emitirá* un fotón en el proceso.

Suponga un electrón que se encuentra en una órbita exterior de número cuántico n_i y que luego regresa a una órbita más baja de número cuántico n_f. La disminución de energía debe ser igual a la energía del fotón emitido.

$$E_i - E_f = hf$$

Sustituyendo la energía total para cada estado a partir de la ecuación (38.27) se obtiene

$$\begin{aligned} hf &= E_i - E_f \\ &= -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n_i^2 h^2} + \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n_f^2 h^2} \\ &= \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \end{aligned}$$

Al dividir ambos miembros de esta relación entre h y recordando que $f = c/\lambda$ es posible escribir

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad \textbf{(38.28)}$$

Al sustituir estos valores se obtiene

$$\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.097 \times 10^7\, m^{-1}$$

que es igual a la constante R de Rydberg. Por tanto, la ecuación (38.28) se simplifica a

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad \textbf{(38.29)}$$

La relación anterior es exactamente la misma que la de la ecuación (38.20), que fue enunciada por Balmer y otros investigadores a partir de datos experimentales. Por consiguiente, el ***átomo de Bohr*** logra que la teoría concuerde con las observaciones.

Ejemplo 38.8 Determine la longitud de onda de un fotón emitido por un átomo de hidrógeno cuando el electrón salta del primer estado excitado al estado base.

Plan: El primer estado excitado corresponde a $n_i = 2$, en tanto que el estado base es $n_f = 1$. Por consiguiente, la energía del fotón emitido se determina con la ecuación (38.28).

Solución: Si se recuerda que $R = 1.097 \times 10^7$ m^{-1} se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \\ &= (1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 8.23 \times 10^6\ \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Al resolver para λ se obtiene la longitud de onda

$$\lambda = 1.22 \times 10^{-7}\ \text{m} = 122\ \text{nm}$$

La energía del fotón emitido se determinaría con base en $E = hf = (hc/\lambda)$.

38.11 Niveles de energía

Gracias al trabajo de Bohr ahora tenemos una imagen de un átomo en la cual los electrones en las órbitas pueden ocupar cierto número de ***niveles energéticos***. La energía total en el nivel n-ésimo se calcula a partir de la ecuación (38.27).

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \qquad \textbf{(38.30)}$$

Cuando el átomo de hidrógeno se encuentra en su *estado base* estable, el número cuántico n es igual a 1. Los posibles estados *excitados* están dados por $n = 2, 3, 4, \ldots$

Ejemplo 38.9 Determine la energía de un electrón en el estado base para un átomo de hidrógeno.

Plan: El estado base del átomo de hidrógeno se representa mediante el primer nivel de energía, el cual corresponde al número cuántico $n = 1$. La energía de este estado representa la energía total necesaria para sacar un electrón al infinito, y puede determinarse con la ecuación (38.30).

Solución: Se necesitan las constantes que siguen:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2 \qquad h = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$
$$m = 9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg} \qquad e = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Por sustitución directa en la ecuación (38.30), con $n = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \\ &= -\frac{(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^4}{8(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)^2(1)^2(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2} \\ &= -2.17 \times 10^{-18}\ \text{J} \end{aligned}$$

Una unidad más conveniente para medir la energía en el nivel atómico es el electrón-volt (eV). Recuerde, del capítulo 23, que un electrón-volt es la energía adquirida por un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 V. En consecuencia,

$$1\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

En aplicaciones donde se requiere una mayor unidad de energía, el megaelectrón-volt (MeV) es más apropiado

$$1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV}$$

En el ejemplo anterior, la energía del electrón en estado base puede expresarse en electrón-volts de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} E_1 &= -2.17 \times 10^{-18}\ \text{J}\,\frac{1\ \text{eV}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}} \\ &= -13.6\ \text{eV} \end{aligned}$$

Este resultado se puede usar para escribir la ecuación (38.30) en una forma más sencilla:

$$E_n = \frac{-13.6\ \text{eV}}{n^2} \qquad \textbf{(38.31)}$$

Mediante cálculos similares se obtendrían valores negativos menores para las órbitas exteriores. Si el electrón se desplazara totalmente del átomo, un caso donde $n = \infty$, se requerirían 13.6 eV de energía ($E_\infty = 0$). De igual forma, un fotón de 13.6 eV de energía podría ser emitido si un electrón fuera capturado mediante un átomo de hidrógeno ionizado y llegara hasta el estado base.

El espectro atómico observado para el hidrógeno se entiende ahora en términos de niveles de energía. La serie de Lyman proviene de los electrones que regresan de un estado excitado al estado base, como se muestra en la figura 38.9. Las series de Balmer, Paschen y Brackett se presentan cuando los estados finales corresponden a órbitas para las que $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$, respectivamente.

En la figura 38.10 se muestra un diagrama de niveles de energía para el hidrógeno. Tales diagramas se utilizan con frecuencia para describir los diversos estados energéticos de los átomos.

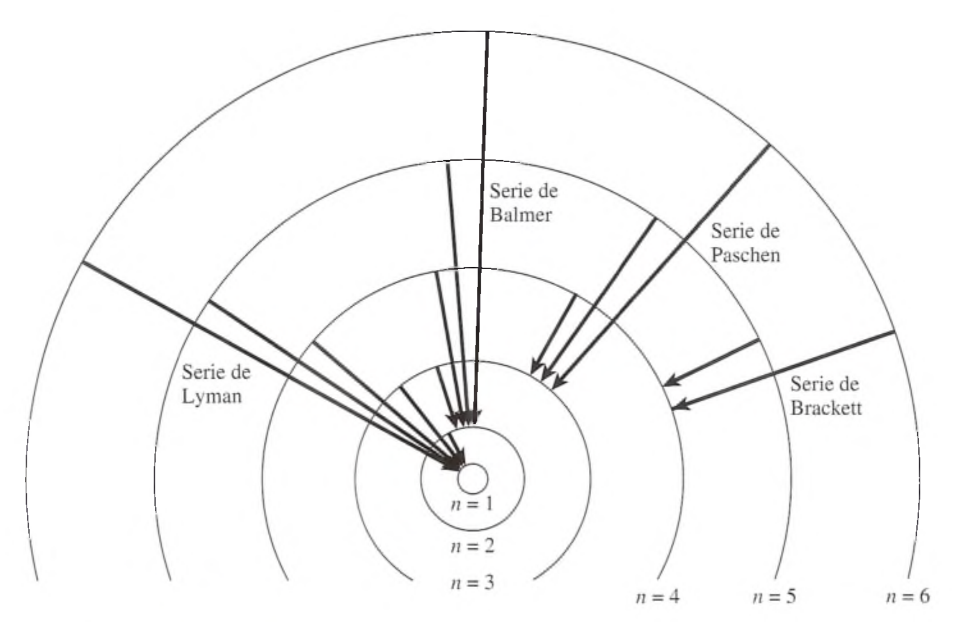


Figura 38.9 El átomo de Bohr y la descripción del origen de las series espectrales de Lyman, Balmer, Paschen y Brackett.

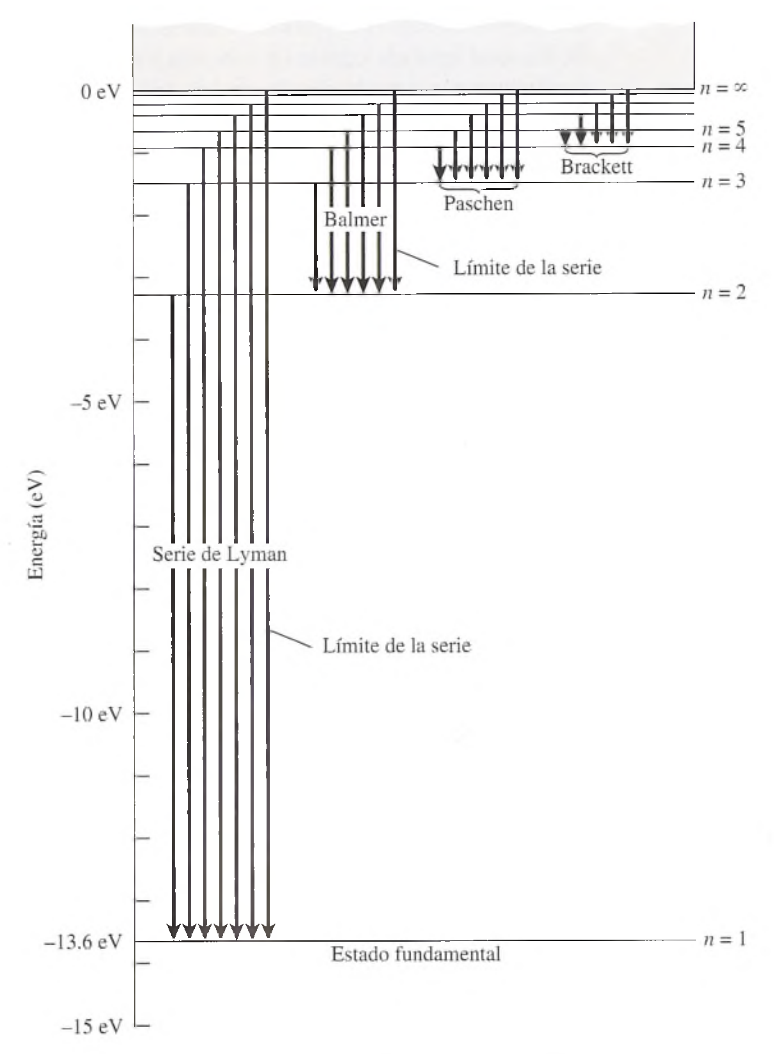


Figura 38.10 Diagrama de los niveles de energía del átomo de hidrógeno.

38.12 Láser y luz láser

El láser es una de las aplicaciones más útiles que se apoyan en la física cuántica y en el estudio del átomo. La luz intensa, enfocada con mucha precisión y de naturaleza coherente, que emiten estos dispositivos es el punto de partida de muchos avances científicos. En medicina, los oftalmólogos debidamente capacitados pueden corregir la retina del ojo por medio de puntos de soldadura aplicados con un instrumento láser. La combinación de la luz láser con la óptica de fibras (véase la sección 35.6) está engendrando una revolución en el ámbito de la electrónica y las comunicaciones. Se han desarrollado poderosos láser incluso para hacer pequeñas perforaciones en los diamantes.

El principio que sustenta el funcionamiento de los rayos láser es relativamente fácil de comprender. Se trata de una simple aplicación de la teoría cuántica que ya fue expuesta en este capítulo para los niveles de energía atómicos. Básicamente, hay tres formas en las que los fotones pueden interactuar con la materia: (1) *absorción*, (2) *emisión espontánea* y (3) *emisión estimulada*. Cada una de estas formas se describe en la figura 38.11.

La absorción y la emisión se explicaron en la sección anterior, donde se indicó que la absorción de un fotón puede excitar a un átomo, elevando un electrón a un nivel energético superior, como se muestra en la figura 38.11a. Dicho electrón se encuentra en un ***estado excitado***, pero posteriormente caerá a su nivel original y causará lo que se llama emisión espontánea (véase la figura 38.11b). En cada uno de los casos, el fotón absorbido o emitido tiene una energía que se calcula con la expresión

$$E_2 - E_1 = hf$$

A la emisión espontánea se debe la luz que vemos en las lámparas y muchas otras fuentes tradicionales de luz. Aun cuando la luz tiene una energía definida hf para un determinado fotón, la luz total emitida consta de muchos fotones con energías variables. La emisión espontánea produce luz que no es direccional y, por tanto, no puede enfocarse nítidamente.

La emisión estimulada brinda la clave del funcionamiento y la eficacia de los rayos láser. En realidad, la palabra *láser* es una abreviatura de *light amplification by stimulated emission of radiation* (amplificación de la luz por emisión estimulada de radiación). Suponga que un átomo se encuentra inicialmente en un estado excitado E_2, como se ve en la figura 38.11c, y que un segundo fotón, de energía $hf = E_2 - E_1$ incide sobre el átomo. Puesto que la energía del fotón que incide es la misma que la energía de excitación del electrón, hay una probabilidad mayor de que el electrón caiga a su nivel más bajo de energía y que emita un segundo fotón de la misma energía. Esa emisión estimulada, cuando va acompañada de la existencia de un fotón incidente, tiene el efecto de producir dos fotones a partir de un solo fotón incidente. Todos los fotones tienen la misma energía, dirección y polarización. Estos fotones pueden, a su vez, estimular a otros átomos para que emitan fotones similares. Por consiguiente, ocurre una reacción en cadena en la que un gran número de fotones de luz son emitidos, lo cual da lugar a la luz intensa y coherente característica de los rayos láser.

Existen otros factores importantes para el funcionamiento eficiente de un láser. Por ejemplo, para que ocurra la emisión estimulada, los átomos de la sustancia que se utilice deben encontrarse en un estado excitado. A temperatura ambiente, la mayoría de los átomos tienen electrones en el nivel base y sólo unos cuantos en el nivel superior. Esta población normal se muestra en la figura 38.12a. Proporcionando energía externa en forma de calor, de luz intensa o de descargas eléctricas es posible invertir la población de electrones. En la figura 38.12b, debido a una inversión de la población hay más electrones en el nivel energético superior que en el inferior. Por tanto, las condiciones son propicias para estimular una avalancha de fotones, todos de la misma frecuencia, que es posible dirigir con mucha facilidad.

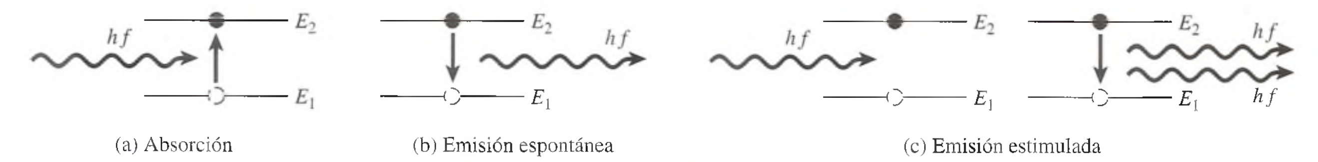


Figura 38.11 (a) Un electrón, originalmente en su estado base E_1, es lanzado hacia un nivel más alto E_2 debido a la absorción de un fotón. (b) La emisión espontánea ocurre y se emite un fotón, $hf = E_2 - E_1$. (c) La emisión estimulada ocurre cuando un fotón incidente de energía hf origina la emisión de un segundo fotón de la misma energía.

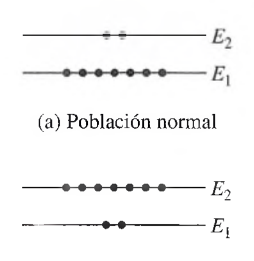


Figura 38.12 La inversión de la población se presenta cuando al aplicar energía externa produce átomos con más electrones en el nivel de energía superior que en el nivel de energía inferior.

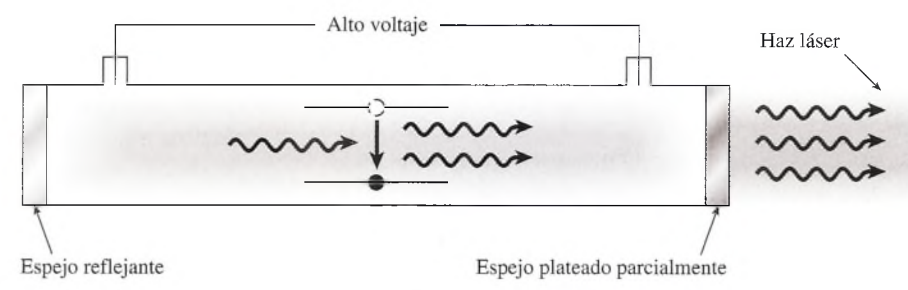


Figura 38.13 Esquema de un láser de helio-neón.

El láser de helio-neón que se ilustra en la figura 38.13 se encuentra con frecuencia en los laboratorios de física. Se aplica un alto voltaje a una mezcla a baja presión de helio y neón confinada en un tubo de vidrio. En primer lugar, se produce una emisión espontánea que luego se convierte en una reacción en cadena de emisiones estimuladas. Ambos extremos del tubo están recubiertos de plata y tienen la textura de espejos que reflejen los fotones hacia uno y otro lado, lo cual incrementa las oportunidades de que haya emisiones estimuladas adicionales. Un extremo se platea sólo parcialmente, de modo que algunos fotones puedan escapar del tubo y formen un haz láser.

38.13 Teoría atómica moderna

Aun cuando el átomo de Bohr sigue siendo una forma útil de describir el átomo, se ha hecho necesaria una teoría mucho más detallada. El modelo del electrón como una partícula puntual que se mueve en órbitas circulares perfectas no explica gran número de fenómenos atómicos. Los números cuánticos adicionales se han establecido para describir la forma y la orientación de la nube de electrones alrededor del núcleo, al igual que el movimiento de espín de los electrones. De igual manera se ha enunciado que no pueden existir dos electrones del mismo átomo exactamente en el mismo estado, aun cuando los mismos puedan existir en el mismo nivel energético según Bohr. Una descripción más completa de la teoría atómica moderna se puede encontrar en textos de física atómica.

Resumen y repaso

Resumen

Los trabajos de Einstein, Bohr, de Broglie, Balmer y muchos otros nos han permitido comprender mucho más claramente la naturaleza. Ya no contemplamos el mundo como si todos los fenómenos pudieran ser vistos, tocados y observados de la manera tradicional. El mayor conocimiento del átomo ha desembocado en numerosas aplicaciones industriales basadas en los principios expuestos en este capítulo. A continuación presentamos un resumen de los principales temas.

- Según las ecuaciones de la relatividad de Einstein, la longitud, la masa y el tiempo resultan afectados por las rapideces relativísticas. Esos cambios se vuelven más significativos a medida que la razón entre la velocidad v de un objeto y la de la luz en el espacio libre (c) adquiere un valor mayor.

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \textit{Contracción relativística}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textit{Masa relativística}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textit{Dilatación del tiempo}$$

En las ecuaciones anteriores, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

- La energía total de una partícula cuya masa en reposo es m_0 y su rapidez v se puede expresar en cualquiera de las siguientes formas:

$$E = mc^2 \qquad E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} \qquad \textit{Energía total}$$

En estas ecuaciones, m es la masa relativística determinada a partir de la rapidez v, y p es la cantidad de movimiento (mv).

- La *energía cinética relativística* se calcula mediante

$$E_K = (m - m_0)c^2 \qquad \textit{Energía cinética relativística}$$

- La teoría cuántica de la radiación electromagnética relaciona la energía de dicha radiación con su frecuencia f o longitud de onda λ.

$$E = hf \qquad E = \frac{hc}{\lambda} \qquad h = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

- En el efecto fotoeléctrico, la energía cinética de los electrones emitidos es la energía de la radiación incidente hf menos la función de trabajo de la superficie W.

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = hf - W \qquad \textit{Ecuación fotoeléctrica}$$

- La frecuencia más baja (f_0) a la cual es emitido un fotoelectrón se conoce como frecuencia de umbral. Corresponde a la energía de la función de trabajo W.

$$f_0 = \frac{W}{h} \qquad W = hf_0 \qquad \textit{Frecuencia de umbral}$$

- Al combinar la teoría ondulatoria con la teoría de las partículas, de Broglie logró desarrollar la ecuación siguiente para calcular la longitud de onda de cualquier partícula cuya masa y velocidad son conocidas:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad h = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \qquad \textit{Longitud de onda de de Broglie}$$

- El primer postulado de Bohr establece que la cantidad de movimiento angular de un electrón en cualquier órbita debe ser un múltiplo de $h/2\pi$. Su segundo postulado establece que la energía absorbida o emitida por un átomo constituye cantidades discretas iguales a la diferencia que existe en los niveles de energía de un electrón. Estos conceptos se expresan a continuación en forma de ecuaciones:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \qquad hf = E_i - E_f \qquad \textit{Postulados de Bohr}$$

- Los espectros de absorción y de emisión para gases comprueban la naturaleza discreta de la radiación. La longitud de onda λ o la frecuencia f que corresponde a un cambio en los niveles de energía del electrón se calcula mediante

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad f = Rc\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^3c} = 1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1} \qquad \textit{Constante de Rydberg}$$

- La energía total de un estado cuántico particular n para el átomo de hidrógeno se calcula mediante

$$E_n = -\frac{me^4}{8\,{}_0^2n^2h^2} \qquad \text{o} \qquad E_n = -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}$$

donde $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$
$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C
$m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
$h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s

Conceptos clave

Preguntas de repaso

38.1. Un astronauta lleva un reloj de masa m y longitud L. Suponga que el astronauta pasa frente a usted con una rapidez relativa. Compare sus propias mediciones de m, L y Δt con las que realizó el astronauta para el mismo reloj.

38.2. Recuerde la segunda ley del movimiento de Newton y explique qué sucede con los requisitos de impulso para propulsar cohetes con una rapidez relativa cada vez mayor. Teóricamente, ¿qué fuerza se requeriría para alcanzar la velocidad de la luz?

38.3. Suponga que está encerrado en una caja que tiene seis paredes opacas. ¿Los experimentos que puede realizar dentro de la caja le permiten demostrar que está usted (a) moviéndose con una velocidad lineal constante, (b) acelerando o (c) girando a una velocidad angular constante?

38.4. Combine las ecuaciones (38.5) y (38.3) y obtenga la ecuación de Einstein para la energía relativa total, $E = mc^2$.

38.5. Suponga que desea que algunos fotoelectrones tengan una energía cinética E_K y conoce la función de trabajo W de la superficie; ¿cómo determinaría usted la longitud de onda λ requerida en la luz incidente?

38.6. Describa un experimento que podría realizar para determinar la función de trabajo de una superficie, suponiendo que tenga una fuente luminosa de longitud de onda variable.

38.7. Presente en un solo diagrama la serie de Balmer y la serie de Lyman para el espectro de emisión del hidrógeno. ¿Qué significa *límite de la serie*?

38.8. Explique con claridad a qué nos referimos al decir que la energía del estado fundamental es de -13.6 eV para el átomo de hidrógeno. ¿Qué significado tiene el signo menos?

38.9. Describa un experimento que demuestre (a) un espectro de líneas de emisión, (b) un espectro de líneas de absorción y (c) un espectro continuo.

38.10. Átomos de hidrógeno en su estado base son bombardeados por electrones que han sido acelerados a través de una diferencia de potencial de 12.8 V. ¿Qué líneas de la serie de Lyman serán emitidas por los átomos de hidrógeno?

Problemas

Sección 38.1 Relatividad

38.1. Una nave espacial pasa junto a un observador con una rapidez de $0.85c$. Una persona que viaja en dicha nave observa que demora 6.0 s en cruzar su cabina de lado a lado. ¿Qué tiempo registraría el observador para el mismo evento? Resp. 11.4 s

38.2. Un cohete A pasa junto a un laboratorio espacial B a una rapidez de $0.9c$. Un técnico de laboratorio registra 3.50 s como la duración de un evento ocurrido en el cohete. ¿Cuál es la duración del mismo evento para una persona que viaja a bordo del cohete?

38.3. La luz parpadeante de una nave espacial pasa junto a un observador a $0.75c$. El observador registra que la luz parpadea con una frecuencia de 2.0 Hz. ¿Cuál es la frecuencia real de la luz parpadeante?

Resp. 3.02 Hz

38.4. Una partícula colocada sobre una mesa tiene un diámetro de 2 mm cuando está en reposo. ¿Cuál deberá ser la rapidez de un observador para que al medir dicho diámetro obtenga 1.69 mm?

38.5. Hay una regla graduada azul de un metro a bordo de la nave A y una regla graduada roja de un metro a bordo de la nave B. Si la nave A rebasa a la B a $0.85c$, ¿cuál será la longitud de cada regla a juicio de una persona que viaja en la nave A?

Resp. $L_B = 1.00$ m, $L_R = 52.7$ cm

38.6. Tres reglas graduadas de un metro pasan junto a un observador con rapidez de $0.1c$, $0.6c$ y $0.9c$, respectivamente. ¿Qué longitudes registrará dicho observador?

38.7. ¿Qué masa se requiere para encender 1 millón de lámparas de 100 W durante 1 año? Resp. 35.0 g

38.8. Las partículas elementales llamadas *mesones* mu caen a través de la atmósfera a 2.97×10^8 m/s. En reposo, el mesón mu se desintegra en un promedio de 2 μs después de haberse formado. ¿Cuál es la duración del ciclo de vida de esas partículas desde el punto de vista de un observador que está en la Tierra?

Sección 38.5 La teoría cuántica y el efecto fotoeléctrico

38.9. Una superficie de cobre emite los primeros fotoelectrones cuando la longitud de onda de la radiación incidente es 282 nm. ¿Cuál es la frecuencia de umbral para el cobre? ¿Cuál es la función de trabajo para una superficie de cobre? Resp. 1.06×10^{15} Hz, 4.40 eV

38.10. Si la función de trabajo fotoeléctrico de un material es 4.0 eV, ¿qué frecuencia mínima debe tener la luz para la emisión de fotoelectrones? ¿Cuál es la frecuencia de umbral?

38.11. La energía E de un fotón, expresada en joules, se calcula a partir del producto hf. Con frecuencia tenemos la longitud de onda de la luz y necesitamos calcular su energía en electrón-volts. Demuestre que

$$E = \frac{1240}{\lambda}$$

de modo que si λ está en nanómetros, E será la energía en electrón-volts.

38.12. Aplique la ecuación obtenida en el problema 38.11 para comprobar que una luz con longitud de onda de 490 nm tiene una energía de 2.53 eV. Demuestre también que un fotón provisto de una energía de 2.10 eV tiene una longitud de onda de 590 nm.

***38.13.** La frecuencia de umbral de cierto metal es de 2.5×10^{14} Hz. ¿Cuál es la función de trabajo? Si una luz de 400 nm de longitud de onda brilla sobre esa superficie, ¿cuál será la energía cinética de los fotoelectrones emitidos? Resp. 1.04 eV, 2.07 eV

***38.14.** Cuando una luz de frecuencia 1.6×10^{15} Hz incide en la superficie de un material, los electrones empiezan de inmediato a abandonar la superficie. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por esa superficie cuando está iluminada por una luz de frecuencia 2.0×10^{15} Hz?

***38.15.** La función de trabajo de una superficie de níquel es 5.01 eV. Si una superficie de níquel se ilumina con una luz con longitud de onda de 200 nm, ¿cuál será la energía cinética de los electrones emitidos? Resp. 1.21 eV

***38.16.** El potencial de frenado es un voltaje inverso que basta para evitar que los electrones sean emitidos en una aplicación fotoeléctrica. Por tanto, el potencial de frenado es igual a la energía cinética de los fotoelectrones emitidos. Calcule el potencial de frenado para el problema 38.13.

Sección 38.6 Ondas y partículas

38.17. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) cuando se mueve con una rapidez de 2×10^7 m/s? Resp. 1.99×10^{-14} m

38.18. La longitud de onda de De Broglie de una partícula es 3×10^{-14} m. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de la partícula?

38.19. Recuerde las fórmulas de la energía cinética y la cantidad de movimiento y demuestre que, para rapideces no relativas, la cantidad de movimiento de una partícula se puede calcular a partir de

$$p = \sqrt{2mE_k}$$

donde E_k es la energía cinética y m es la masa de la partícula.

***38.20.** Calcule la energía cinética de un electrón si su longitud de onda de de Broglie es 2×10^{-11} m.

***38.21.** ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de las ondas asociadas a un electrón que ha sido acelerado a través de una diferencia de potencial de 160 V? Resp. 9.71×10^{-11} m

***38.22.** La carga de un protón es $+1.6 \times 10^{-19}$ C y su masa en reposo es 1.67×10^{27} kg. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie en el caso de un protón que ha sido acelerado, a partir del reposo, haciéndolo pasar a través de una diferencia de potencial de 500 V?

Sección 38.9 Espectro atómico

38.23. Calcule la longitud de onda de las tres primeras líneas espectrales del hidrógeno atómico en la serie de Balmer. Resp. 656, 486 y 434 nm

38.24. Calcule las longitudes de onda de las tres primeras líneas espectrales del hidrógeno atómico en la serie de Paschen.

38.25. Calcule el radio del nivel de Bohr $n = 4$ del átomo clásico de hidrógeno de Bohr. Resp. 850 nm

38.26. ¿Cuál es el radio clásico de la primera órbita de Bohr en el átomo de hidrógeno?

38.27. Calcule la longitud de onda del fotón emitido por un átomo de hidrógeno cuando el electrón salta del nivel de Bohr $n = 3$ al estado base. Resp. 103 nm

***38.28.** ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un fotón incidente capaz de ionizar un átomo de hidrógeno originalmente en su segundo estado excitado ($n = 3$)?

***38.29.** ¿Cuáles son las longitudes de onda más corta y más larga posibles en la serie de Balmer? Resp. 364.6 y 656.34 nm

Problemas adicionales

38.30. Al costo de 9 centavos por kilowatt, ¿cuál es el costo de la máxima energía que se puede liberar de una masa de 1 kg?

38.31. Un evento que se presenta en una nave espacial que viaja a $0.8c$ en relación con la Tierra dura 3 s cuando lo observa una persona a bordo de una nave. ¿Cuánto duraría el evento si fuera observado por una persona en la Tierra? ¿Qué distancia habrá viajado la nave espacial durante este evento, según la persona que se encuentra en la Tierra? Resp. 5.00 s, 1.2×10^9 km

38.32. Cuando una luz monocromática de 450 nm de longitud de onda incide en un cátodo, algunos fotoelectrones son emitidos con una velocidad de 4.8×10^5 m/s. ¿Cuál es la función de trabajo para esa superficie en electrón-volts? ¿Cuál es la frecuencia de umbral?

38.33. En el átomo de hidrógeno, un electrón cae del nivel $n = 5$ al nivel $n = 2$ y emite un fotón en la serie de Balmer. ¿Cuáles son la longitud de onda y la energía de la luz emitida? Resp. 434 nm, 2.86 eV

38.34. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de la línea H_β de la serie de Balmer. La transición es a partir desde el nivel $n = 4$ del átomo de Bohr.

38.35. Una nave espacial A pasa junto a otra nave B con una velocidad relativa de $0.2c$. Un observador que viaja en B cronometra que una persona a bordo de la nave A demora 3.96 s exactamente en realizar una tarea. ¿Cuál será la duración del mismo evento cuando sea cronometrado por el observador A? Resp. 3.88 s

***38.36.** La masa de un electrón en reposo es de 9.1×10^{-31} kg. ¿Cuál es la masa de un electrón que se desplaza con una rapidez de 2×10^8 m/s? ¿Cuál es la energía total del electrón? ¿Cuál es su energía cinética relativística?

***38.37.** ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón cuya energía cinética es de 50 MeV? Resp. 0.174 pm

***38.38.** La masa en reposo de un protón es de 1.67×10^{-27} kg. ¿Cuál es la energía total de un protón que ha sido acelerado hasta una velocidad de 2.5×10^8 m/s? ¿Cuál es su energía cinética relativística?

***38.39.** Calcule la masa y la rapidez de unos protones cuya energía cinética relativística es de 235 MeV. La masa en reposo de un protón es 1.67×10^{-27} kg. Resp. 2.09×10^{-27} kg, 1.8×10^8 m/s

***38.40.** ¿Cuánto trabajo se requiere para acelerar una masa de 1 kg desde el reposo hasta una rapidez de $0.1c$? ¿Cuánto trabajo se necesita para acelerar esta masa desde una rapidez inicial de $0.3c$ hasta una rapidez final de $0.9c$? (Aplique el teorema trabajo-energía.)

***38.41.** Una partícula de masa m se desplaza a $0.9c$. ¿De acuerdo con qué factor su energía cinética relativística es mayor que su energía cinética newtoniana? Resp. 3.20

***38.42.** ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un fotón de 40 eV? ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón que tiene la misma cantidad de movimiento que ese fotón?

***38.43.** Cuando una luz monocromática cuya longitud de onda es 410 nm incide en un cátodo, se emiten fotoelectrones con una velocidad de 4.0×10^5 m/s. ¿Cuál es la función del trabajo para la superficie y cuál es la frecuencia de umbral? Resp. 2.58 eV, 6.21×10^{14} Hz

***38.44.** ¿Cuál es la velocidad de un neutrón ($m = 1.675 \times 10^{-27}$ kg) que tiene una longitud de onda de De Broglie de 0.1 nm? ¿Cuál es su energía cinética en electrón-volts?

***38.45.** ¿Cuál es la velocidad de una partícula cuya energía cinética relativa es igual al doble de su energía cuando su masa está en reposo? Resp. $0.943c$

***38.46.** Calcule la masa relativística y la rapidez de los electrones cuya energía cinética relativa es 1.2 MeV. Resp. 30.4×10^{-31} kg, 2.86×10^8 m/s

Preguntas para la reflexión crítica

38.47. Una nave espacial azul viaja a $0.8c$ en relación con una nave espacial roja. En la nave azul, una persona mueve un bloque azul una distancia de 8 m en 3.0 s. En la nave roja, una persona mueve un bloque rojo una distancia de 4 m en 2.0 s. (a) ¿Cuáles son las mediciones de esos cuatro parámetros desde el punto de vista de la persona que viaja en la nave azul? (b) ¿Cuáles son las mismas mediciones desde la perspectiva de la persona que viaja en la nave roja?
Resp. Azul: $L_a = 8.00$ m, $t_a = 3.00$ s, $L_r = 2.40$ m, $t_r = 3.33$ s. Rojo: $L_a = 4.80$ m, $t_a = 5.00$ s, $L_r = 4.00$ m, $t_r = 2.00$ s

***38.48.** Aplique el teorema trabajo-energía y compare el trabajo que se requiere para cambiar la rapidez relativística con valores obtenidos de la física newtoniana. (a) Los cambios de rapidez de $0.1c$ a $0.2c$. (b) Los cambios de rapidez de $0.7c$ a $0.8c$.

***38.49.** Un electrón del átomo de hidrógeno cae del nivel $n = 5$ al nivel $n = 1$. ¿Cuáles son la frecuencia, la longitud de onda y la energía del fotón emitido? ¿En qué serie se presenta este fotón? ¿Cuánta energía debe absorber el átomo para que el electrón regrese al nivel quinto?
Resp. 95.0 nm, 3.16×10^{15} Hz, 2.09×10^{-18} J, Lyman, 2.09×10^{15} J

***38.50.** En el experimento fotoeléctrico ilustrado en la figura 38.14, una fuente de fem está conectada en serie con un galvanómetro G. La luz que incide sobre el cátodo de metal produce fotoelectrones. La fuente de fem está polarizada contra el flujo de electrones y retarda su movimiento. La diferencia de potencial V_0 que apenas es suficiente para contener a los fotoelectrones más energéticos se conoce como el *potencial de frenado*. Suponga que una superficie está iluminada con una luz cuya longitud de onda es 450 nm, por lo cual los electrones son emitidos por la superficie con una rapidez máxima de 6×10^5 m/s. ¿Cuál es la función de trabajo para esa superficie y cuál es el potencial de frenado?

***38.51.** En un experimento fotoeléctrico, una luz de 400 nm incide sobre cierto metal y algunos fotoelectrones son emitidos. El potencial necesario para contener el flujo de electrones es 0.20 V. ¿Cuál es la energía de los fotones incidentes en este caso? ¿Cuál es la función de trabajo? ¿Cuál es la frecuencia de umbral?

Resp. 3.11 eV, 2.91 eV, 7.02×10^{14} Hz

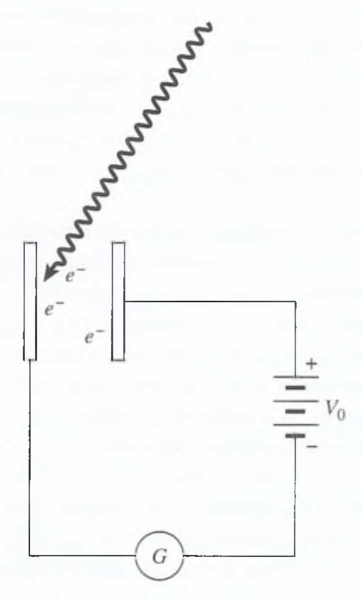
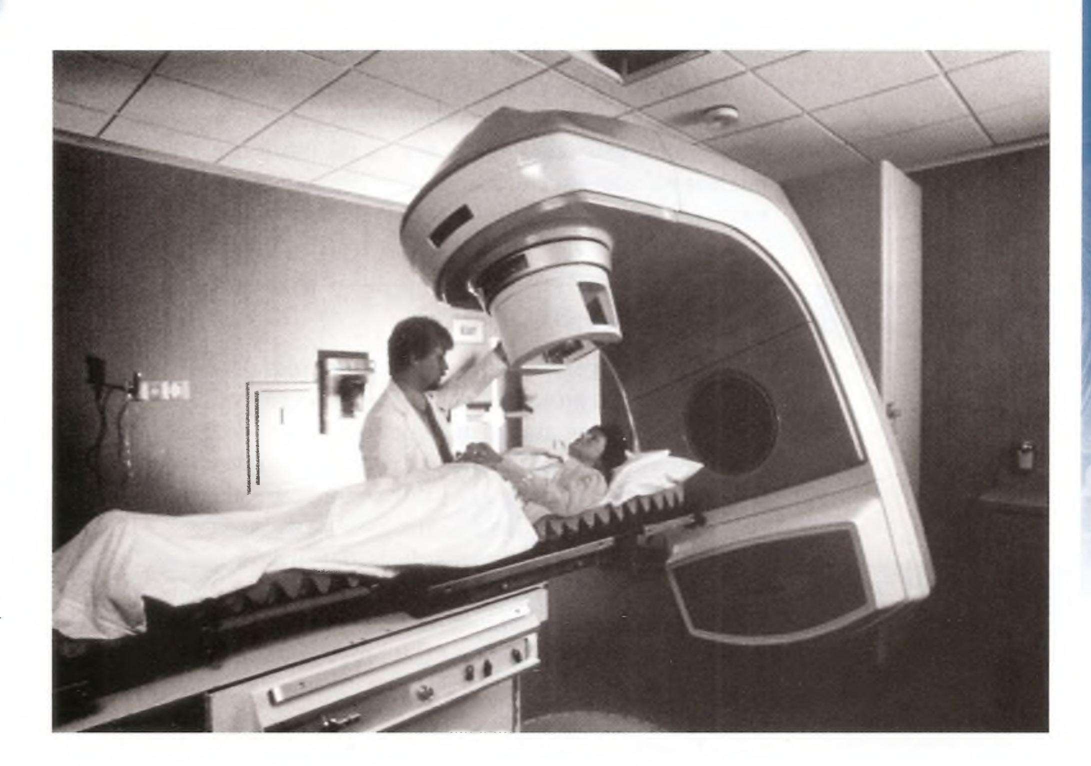


Figura 38.14 El potencial de frenado V_0 es la diferencia de potencial que retarda la transición de los fotoelectrones con más energía, proyectados a causa de la radiación incidente.

39 La física nuclear y el núcleo



Un acelerador lineal (LINAC) es el dispositivo de uso más común para los tratamientos de radiación externa en pacientes con cáncer. El acelerador lineal también puede usarse en la radiocirugía estereotáctica. Suministra una dosis uniforme de rayos X de alta energía a la región donde está el tumor del paciente. Estos rayos X pueden destruir las células con cáncer, al mismo tiempo que reparan el tejido normal que las rodea. (*Fotografía © Larry Mulvehill/Photo Researchers, Inc.*)

Objetivos

Cuando termine de estudiar este capítulo el alumno:

1. Definirá el *número de masa* y el *número atómico*, y demostrará su comprensión acerca de la naturaleza de las partículas nucleares fundamentales.
2. Definirá los *isótopos* y analizará el uso de un espectrómetro de masa para separar isótopos.
3. Calculará el defecto de masa y la energía de enlace por cada nucleón para un isótopo en particular.
4. Demostrará su comprensión acerca del decaimiento radiactivo y las reacciones nucleares, y describirá las partículas alfa, las partículas beta y los rayos gamma, mencionando además sus propiedades.
5. Calculará la actividad y la cantidad de isótopo radiactivo remanente después de un periodo, si se conocen las vidas medias y los valores iniciales.
6. Enunciará las diversas leyes de conservación y analizará su aplicación a reacciones nucleares.
7. Trazará el dibujo esquemático de un reactor nuclear, describiendo sus diversos componentes y sus funciones en la producción de potencia nuclear.

Los trabajos de Rutherford y de Bohr nos dejaron una imagen del átomo como un núcleo denso cargado positivamente y rodeado de una nube de electrones en distintos niveles de energía. Desde este punto de vista, el núcleo es el centro de un átomo y contiene la mayor parte de la masa atómica. El comportamiento del átomo también resulta afectado por el núcleo en virtud de que, en el átomo neutro, el número total de cargas positivas tiene que ser igual al número de electrones.

En este capítulo estudiaremos la estructura interna básica del núcleo. Nos daremos cuenta de que la física clásica no es adecuada para describir las interacciones que se producen en este nivel. Los temas que se presentan incluyen la energía de enlace, la radiactividad y la energía nuclear. Se insistirá en el propósito de proporcionar una amplia comprensión del núcleo atómico y su comportamiento.

La tecnología nuclear se ha desarrollado enormemente desde sus inicios, a principios de la década de 1940. El estudio del núcleo atómico era un tema de estudio reservado sobre todo a los físicos, pero en la actualidad es raro encontrar a alguien que no haya tenido alguna relación con algún aspecto de la ciencia nuclear. Como pacientes nos damos cuenta de que el médico utiliza materiales radiactivos para diagnosticar o tratar algún padecimiento. Como ciudadanos, estamos interesados en las promesas y los riesgos de la producción de energía nuclear en gran escala. Ahora más que nunca, los técnicos y los ingenieros necesitan de un vasto conocimiento sobre el núcleo atómico y su potencial.

39.1 El núcleo atómico

Toda la materia está compuesta de diferentes combinaciones de *por lo menos* tres partículas fundamentales: protones, neutrones y electrones. Por ejemplo, un átomo de berilio (figura 39.1) consta de un núcleo que contiene cuatro protones y cinco neutrones. El hecho de que el berilio sea eléctricamente neutro pone de manifiesto la necesidad de que el núcleo esté rodeado por cuatro electrones. Los dos electrones interiores se encuentran en un nivel de energía ($n = 1$) diferente que los dos electrones externos ($n = 2$).

Los experimentos acerca de la desviación que realizó Rutherford demostraron que el núcleo contiene la mayor parte de la masa de un átomo y que el núcleo corresponde tan sólo a aproximadamente la diezmilésima parte del diámetro del átomo. Por tanto, un átomo típico con un diámetro de 10^{-10} m (100 pm) tendría un núcleo de unos 10^{-14} (10 fm) de diámetro. Los prefijos *pico* (10^{-12}) y *femto* (10^{-15}) son útiles para expresar dimensiones nucleares. Puesto que el diámetro de un átomo es 10 000 veces mayor que el de su núcleo, el átomo, y por tanto la materia, está formada en su mayor parte de espacio que se encuentra casi vacío.

Es necesario que reseñemos lo que se conoce como partículas fundamentales. El electrón tiene una masa de 9.1×10^{-31} kg y una carga de $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C. El protón es el núcleo de un átomo de hidrógeno. Tiene una masa de 1.673×10^{-27} kg y una carga positiva igual en magnitud a la carga de un electrón ($+e$). En vista de que la masa de un electrón es extremadamente pequeña, la masa de un protón es más o menos igual que la masa de un átomo de hidrógeno, el cual consta de un protón y un electrón. El protón tiene un diámetro de 3 fm aproximadamente.

FÍSICA HOY

Un instrumento nuevo, el escáner de tomografía de emisiones de positrones, o escáner PET, utiliza isótopos que emiten positrones. Un isótopo como éstos se incluye en una solución inyectada en el cuerpo del paciente. En el cuerpo, el isótopo se desintegra liberando un positrón. El positrón aniquila un electrón, emitiendo dos rayos gamma. El escáner PET detecta los rayos gama y ubica con exactitud el sitio del isótopo emisor de positrones. Se utiliza una computadora para hacer un mapa tridimensional de la distribución de isótopos. Este mapa puede mostrar detalles como el uso de los nutrimentos en ciertas áreas del cerebro.

Continúa

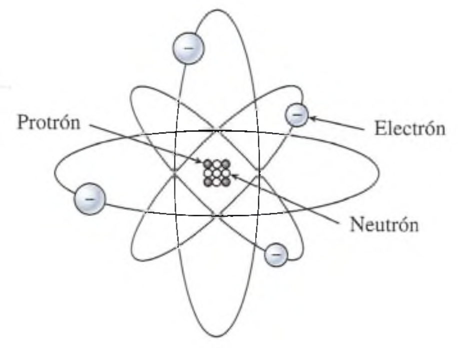


Figura 39.1 Un modelo del átomo de berilio. El núcleo consta de cuatro protones y cinco neutrones rodeados por cuatro electrones. La carga positiva de los protones se equilibra exactamente con los electrones cargados negativamente en el electrón neutro.

FÍSICA HOY

Continuación
Por ejemplo, si una persona en un escáner PET fuera a resolver un problema físico, más nutrimentos fluirían a la parte del cerebro que está usando para resolver el problema. La desintegración de los positrones en esta parte del cerebro aumentaría, y el escáner PET podría trazar el mapa de esta área.

Tabla 39.1

Partículas fundamentales

Partícula	Símbolo	Masa, kg	Carga, C
Electrón	e	9.1×10^{-31}	-1.6×10^{-19}
Protón	p	1.673×10^{-27}	$+1.6 \times 10^{-19}$
Neutrón	n	1.675×10^{-27}	0

La otra partícula nuclear, el neutrón, está presente en el núcleo de todos los elementos, con excepción del hidrógeno. Tiene una masa de 1.675×10^{-27} kg, que es ligeramente mayor que la del protón, pero no tiene carga. Por consiguiente, los neutrones contribuyen a la masa de un núcleo, pero no afectan la carga positiva neta del núcleo, la cual depende únicamente de los protones. El neutrón también tiene un diámetro de aproximadamente 3 fm. En la tabla 39.1 se resumen los datos que hemos mencionado, para el caso de las tres partículas fundamentales.

A partir de lo que sabemos sobre las tres partículas fundamentales, es obvio que los diagramas como el de la figura 39.1 no deben ser tomados como la realidad. En general, las distancias no están representadas a escala en tales representaciones esquemáticas. Más aún, las leyes clásicas de la física a menudo no se aplican al micromundo del núcleo.

Para comprender claramente los eventos atómicos y nucleares, es preciso adoptar una nueva forma de pensar. Por ejemplo, se puede preguntar por qué se mantiene unido el núcleo. Es evidente que si la repulsión electrostática de Coulomb se aplica al núcleo, ésta tiene que ser superada en él por una fuerza mucho mayor. Tanto esta fuerza mucho más grande como la fuerza electrostática son inmensas, comparadas con la fuerza gravitacional. Esta tercera fuerza se llama ***fuerza nuclear***.

La fuerza nuclear es muy intensa y de corto alcance. Si dos ***nucleones*** (que son protones o neutrones) están separados por aproximadamente 1 fm, se produce una fuerza de atracción muy intensa que decae rápidamente a cero a medida que aumenta su separación. Tal parece que la fuerza es la misma, o casi la misma, entre dos protones o dos neutrones, o entre un neutrón y un protón. Si un nucleón está completamente rodeado de otros nucleones, su campo de fuerza nuclear estará saturado y no podrá ejercer fuerza alguna sobre otros nucleones, excepto sobre aquellos que lo rodean.

39.2 Los elementos

Durante muchos siglos, los científicos han estudiado los diversos elementos que existen en la Tierra. Se han realizado múltiples intentos de organizar los diferentes elementos, de acuerdo con sus respectivas propiedades químicas o físicas. El agrupamiento moderno de los elementos se conoce como tabla periódica. Una de las formas en las cuales se representa la tabla periódica se ilustra en la tabla 39.2.

A cada elemento se le asigna un número que lo distingue de los demás. Por ejemplo, el número del hidrógeno es 1, el del helio es 4 y el del oxígeno es 8. Estos números son iguales al número de protones que hay en el núcleo de ese elemento. El número recibe el símbolo Z y se llama ***número atómico***.

El número atómico Z de un elemento es igual al número de protones que hay en el núcleo de un átomo de ese elemento.

Del número atómico dependen indirectamente las propiedades químicas de cada elemento, en virtud de que Z determina el número de electrones que se necesitan para equilibrar la carga positiva del núcleo. La naturaleza química de un átomo depende del número de electrones que lo forman, en particular los más externos o electrones de valencia.

Al aumentar el número de protones en el núcleo, también aumenta el número de neutrones. En los elementos más ligeros, el incremento es aproximadamente de uno a uno, pero los

Tabla 39.2

La tabla periódica

Grupo

Periodo	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB			IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	0
	s		d										p					
1	1 H 1.008																	2 He 4.0026
2	3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B 10.811	6 C 12.0111	7 N 14.0067	8 O 15.999	9 F 18.998	10 Ne 20.183
3	11 Na 22.990	12 Mg 24.305	Elementos de transición										13 Al 26.982	14 Si 28.086	15 P 30.9738	16 S 32.066	17 Cl 35.453	18 Ar 39.948
4	19 K 39.098	20 Ca 40.078	21 Sc 44.956	22 Ti 47.867	23 V 50.942	24 Cr 51.996	25 Mn 54.938	26 Fe 55.847	27 Co 58.933	28 Ni 58.71	29 Cu 63.54	30 Zn 65.39	31 Ga 69.723	32 Ge 72.61	33 As 74.9216	34 Se 78.96	35 Br 79.904	36 Kr 83.80
5	37 Rb 85.468	38 Sr 87.62	39 Y 88.906	40 Zr 91.224	41 Nb 92.906	42 Mo 95.94	43 Tc 97.907	44 Ru 101.07	45 Rh 102.906	46 Pd 106.4	47 Ag 196.967	48 Cd 112.411	49 In 114.82	50 Sn 118.71	51 Sb 121.75	52 Te 127.60	53 I 126.904	54 Xe 131.290
6	55 Cs 132.905	56 Ba 137.327	57 La 138.91	72 Hf 178.49	73 Ta 180.948	74 W 183.85	75 Re 186.2	76 Os 190.21	77 Ir 192.2	78 Pt 195.09	79 Au 196.967	80 Hg 200.59	81 Tl 204.383	82 Pb 207.19	83 Bi 208.980	84 Po 208.982	85 At 209.987	86 Rn 222.018
7	87 Fr 223.020	88 Ra 226.025	89 Ac 227.028	104 Rf 261.109	105 Db 262.114	106 Sg 263.119	107 Bh 264.121	107 Hs 265.131	109 Mt 266	110 Ds (281)	111 Rg (272)	112 Uub* (277)		114 Uug* (289)		116 Uuh* (289)		118 Uuo* (293)

f

Serie de los lantánidos	58 Ce 140.12	59 Pr 140.908	60 Nd 144.24	61 Pm 144.913	62 Sm 150.36	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.925	66 Dy 162.50	67 Ho 164.930	68 Er 168.26	69 Tm 168.934	70 Yb 173.04	71 Lu 174.967
Serie de los actínidos	90 Th 238.03	91 Pa 231.036	92 U 238.03	93 Np 237.048	94 Pu 244.064	95 Am 243.061	96 Cm 247.070	97 Bk 247.070	98 Cf 251.080	99 Es 252.083	100 Fm 257.095	101 Md 258.099	102 No 259.101	103 Lr 262

Clave

Número atómico → 6
Símbolo — C
Masa atómica (peso) → 12.0111

Los valores del peso atómico que aparecen entre paréntesis son aproximados.
***Indica los elementos sin nombre.**

elementos más pesados pueden tener un número de neutrones más de $1\frac{1}{2}$ veces mayor que el número de protones. Por ejemplo, el oxígeno tiene 8 protones y 8 neutrones, mientras que el uranio tiene 92 protones y 146 neutrones. El número total de nucleones en un núcleo se conoce como ***número de masa*** A.

El número de masa A de un elemento es igual al número total de protones y neutrones que hay en su núcleo.

Si representamos el número de neutrones por N, podemos escribir el número de masa A en términos del número atómico Z y del número de neutrones.

$$A = Z + N \tag{39.1}$$

Por tanto, el número de masa del uranio es 92 + 146, o sea 238.

Una forma general de describir el núcleo de un átomo en particular es indicar el símbolo del elemento con su número de masa y su número atómico en la siguiente forma:

$$^{\text{número de masa}}_{\text{número atómico}}[\text{símbolo}] = {}^{A}_{Z}\text{X}$$

Por ejemplo, el átomo de uranio tiene el símbolo $^{238}_{92}\text{U}$.

En la tabla 39.3 se presenta un listado, en orden alfabético, de todos los elementos. Las estructuras y símbolos que corresponden a los cuatro primeros elementos se muestran en la figura 39.2.

Elemento	Símbolo	Protones	Neutrones	Electrones
Hidrógeno	$^{1}_{1}\text{H}$	1	1	1
Helio	$^{4}_{2}\text{He}$	2	4	2
Litio	$^{7}_{3}\text{Li}$	3	7	3
Berilio	$^{9}_{4}\text{Be}$	4	9	4

Ejemplo 39.1 ¿Cuántos neutrones tiene el núcleo de un átomo de mercurio $^{201}_{80}\text{Hg}$?

Plan: El símbolo del mercurio muestra que el número atómico es 80 y el número de masa es 201. El número atómico da el número de neutrones en el núcleo y el número de masa es el número de partículas nucleares incluyendo protones y neutrones.

Solución: El número de neutrones se calcula al resolver para N en la ecuación (39.1)

$$N = A - Z = 201 - 80; \qquad N = 121 \text{ neutrones}$$

39.3 La unidad de masa atómica

Las masas tan pequeñas de las partículas nucleares hacen necesaria una unidad de masa extremadamente pequeña. Los científicos por lo general expresan las masas atómicas y nucleares en ***unidades de masa atómica*** (u).

Una unidad de masa atómica (1 u) es exactamente igual a un doceavo de la masa de la forma más abundante del átomo de carbono.

En relación con el kilogramo, la unidad de masa atómica es

$$1 \text{ u} = 1.6606 \times 10^{-27} \text{ kg} \tag{39.2}$$

Tabla 39.3

Pesos atómicos internacionales (basados en el carbono 12)*

Elemento	Símbolo	Número atómico	Peso atómico	Elemento	Símbolo	Número atómico	Peso atómico	Elemento	Símbolo	Número atómico	Peso atómico
Actinio	Ac	89	(227)	Fósforo	P	15	30.9738	Platino	Pt	78	195.09
Aluminio	Al	13	26.9815	Francio	Fr	87	(223)	Plomo	Pb	82	207.19
Americio	Am	95	(243)	Gadolinio	Gd	64	157.25	Plutonio	Pu	94	(244)
Antimonio	Sb	51	121.75	Galio	Ga	31	69.72	Polonio	Po	84	(210)
Argón	Ar	18	39.948	Germanio	Ge	32	72.59	Potasio	K	19	39.102
Arsénico	As	33	74.9216	Hafnio	Hf	72	178.49	Praseodimio	Pr	59	140.907
Astatino	At	85	(210)	Helio	He	2	4.0026	Prometio	Pm	61	(145)
Azufre	S	16	32.064	Hidrógeno	H	1	1.00797	Protactinio	Pa	91	(231)
Bario	Ba	56	137.34	Hierro	Fe	26	55.847	Radio	Ra	88	(226)
Berilio	Be	4	9.0122	Holmio	Ho	67	164.930	Radón	Rn	86	(222)
Berkelio	Bk	97	(247)	Indio	In	49	114.82	Renio	Re	75	186.22
Bismuto	Bi	83	208.980	Iridio	Ir	77	192.2	Rodio	Rh	45	102.91
Boro	B	5	10.811	Iterbio	Yb	70	173.04	Rubidio	Rb	37	85.47
Bromo	Br	35	79.909	Itrio	Y	39	88.905	Rutenio	Ru	44	101.07
Cadmio	Cd	48	112.40	Kriptón	(Véase Criptón)			Samario	Sm	62	150.35
Calcio	Ca	20	40.08	Lantano	La	57	138.91	Selenio	Se	34	78.96
Californio	Cf	98	(251)	Lawrencio	Lr	103	(262)	Silicio	Si	14	28.086
Carbono	C	6	12.01115	Litio	Li	3	6.939	Sodio	Na	11	22.9898
Cerio	Ce	58	140.12	Lutecio	Lu	71	174.97	Talio	Tl	81	204.37
Cesio	Cs	55	132.905	Magnesio	Mg	12	24.312	Tántalo	Ta	73	180.948
Cloro	Cl	17	35.453	Manganeso	Mn	25	54.9380	Tecnecio	Tc	43	(99)
Circonio	(Véase Zirconio)			Mendelevio	Md	101	(256)	Telurio	Te	52	127.60
Cromo	Cr	24	51.996	Mercurio	Hg	80	200.59	Terbio	Tb	65	158.924
Cobalto	Co	27	58.9332	Molibdeno	Mo	42	95.94	Titanio	Ti	22	47.90
Colombio	(Véase Niobio)			Neodimio	Nd	60	144.24	Torio	Th	90	232.038
Cobre	Cu	29	63.546	Neón	Ne	10	20.183	Tungsteno	W	74	183.85
Criptón	Kr	36	83.80	Neptunio	Np	93	(237)	(Wolframio)			
Curio	Cm	96	(247)	Niobio	Nb	41	92.906	Tulio	Tm	69	168.934
Disprosio	Dy	66	162.50	(Colombio)				Uranio	U	92	238.03
Einstenio	Es	99	(254)	Níquel	Ni	28	58.71	Vanadio	V	23	50.942
Erbio	Er	68	167.26	Nitrógeno	N	7	14.0067	Wolframio	W	74	183.85
Escandio	Sc	21	44.956	Nobelio	No	102	(254)	(Tungsteno)			
Estaño	Sn	50	118.69	Oro	Au	79	196.967	Xenón	Xe	54	131.30
Estroncio	Sr	38	87.62	Osmio	Os	76	190.2	Yodo	I	53	126.9044
Europio	Eu	63	151.96	Oxígeno	O	8	15.9994	Zinc	Zn	30	65.37
Fermio	Fm	100	(253)	Paladio	Pd	46	106.4	Zirconio	Zr	40	91.22
Flúor	F	9	18.9984	Plata	Ag	47	107.868	(Circonio)			

*Los valores entre paréntesis son los números de masa de los isótopos de mayor vida o más conocidos.

Ejemplo 39.2 La tabla periódica muestra que la masa atómica media del bario es de 137.34 u. ¿Cuál es la masa media del núcleo de bario?

Plan: Primero convertiremos la masa de un electrón de kilogramos a unidades de masa atómica. Luego, la masa promedio del núcleo de bario se calcula al restar la masa de la nube de electrones que lo rodea, de la masa promedio de todo el átomo.

Solución: La masa de un electrón es 9.1×10^{-31} kg, por tanto,

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31}\text{ kg}\left(\frac{1\text{ u}}{1.6606 \times 10^{-27}\text{ kg}}\right) = 5.5 \times 10^{-4}\text{ u}$$

Puesto que el número atómico Z del bario es 56, debe haber el mismo número de electrones para que todo el átomo sea eléctricamente neutro. Esta masa total es

$$m_T = 56\text{ electrones}\left(\frac{5.5 \times 10^{-4}\text{ u}}{\text{electrón}}\right) = 0.0308\text{ u}$$

La masa atómica media se da como 137.34 u. Por tanto, la masa nuclear media es

$$m_{\text{prom}} = 137.34\text{ u} - 0.0308\text{ u} = 137.31\text{ u}$$

En el ejemplo 39.2, debe recalcarse que el análisis involucró los valores *medios* y no representa la masa de un núcleo de bario en particular. Mientras que todos los núcleos de bario deben tener el mismo número de protones, algunos pueden contener más o menos neutrones que otros. La tabla periódica proporciona el promedio de los átomos de bario que existen en forma natural. Además, las masas de los átomos que aparecen en la tabla periódica incluyen las masas de los electrones.

En nuestro estudio de la física nuclear, será útil recordar las masas siguientes expresadas en unidades de masa atómica:

Masa del protón: $m_p = 1.007276$ u
Masa del neutrón: $m_n = 1.008665$ u
Masa del electrón: $m_e = 0.00055$ u

Debe recordarse del capítulo 38 que la masa puede igualarse con unidades de energía gracias a la relación de Einstein

$$E = mc^2$$

En consecuencia, una masa de 1 u corresponde a una energía que se calcula por

$$(1\text{ u})\,c^2 = (1.66 \times 10^{-27}\text{ kg})(3 \times 10^8\text{ m/s})^2 = 1.49 \times 10^{-10}\text{ J}$$

Escrita en electrón-volts, que es la unidad más conveniente,

$$(1\text{ u})c^2 = 1.49 \times 10^{-10}\text{ J}\,\frac{1\text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19}\text{ J}}$$
$$= 9.31 \times 10^8\text{ eV} = 931\text{ MeV}$$

El factor de conversión de las unidades de masa (u) a unidades de energía (MeV) es, por tanto

$$c^2 = 931\text{ MeV/u} \qquad \textbf{(39.3)}$$

Como ejercicio, conviene que verifique que la energía de las masas en reposo del electrón y del protón son de 0.511 y 938 MeV, respectivamente.

39.4 Isótopos

Es posible que dos átomos del mismo elemento tengan un núcleo que contiene diferente número de neutrones. Este tipo de átomos se llaman ***isótopos***.

Los isótopos son átomos que tienen el mismo número atómico *Z* pero diferentes números de masa *A*.

Por ejemplo, el carbono que existe en forma natural es una mezcla de dos isótopos. La forma más abundante, $^{12}_{6}C$, tiene seis protones y seis neutrones en su núcleo. La otra forma, $^{13}_{6}C$, tiene un neutrón adicional. Algunos elementos tienen hasta 10 formas isotópicas diferentes.

La comprobación experimental de la existencia de isótopos se realiza con un ***espectrómetro de masas***. Este dispositivo, que muestra la figura 39.3, permite separar los isótopos de un elemento. Una fuente de átomos ionizados de una sola clase de un elemento particular se coloca sobre el selector de velocidades. A estos iones les falta un electrón y por tanto tienen una carga de $+e$. Son impulsados con diferente rapidez en los campos cruzados **E** y **B** del selector de velocidades. Los iones que tienen velocidades suficientes para hacer que la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ sea igual y opuesta a la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ pasarán a través de la ranura que hay en el fondo sin desviarse. Si se recuerda que $F_e = eE$ y que $F_m = evB$, escribimos

$$evB = eE$$

de donde se obtiene

$$v = \frac{E}{B} \tag{39.4}$$

Únicamente los iones con esta velocidad pasarán a través de la ranura del fondo del selector.

Los iones positivos que se mueven con mayor rapidez, pasarán después hacia la región de abajo, donde otro campo **B** actúa sobre ellos haciendo que experimenten una fuerza magnética perpendicular. La magnitud de esta fuerza será constante e igual a evB, pero su dirección formará siempre ángulos rectos con respecto a la velocidad del ion. El resultado es una trayectoria circular de radio *R*. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria. En este caso, tenemos

$$F_{\text{magnética}} = F_{\text{centrípeta}}$$

o bien

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

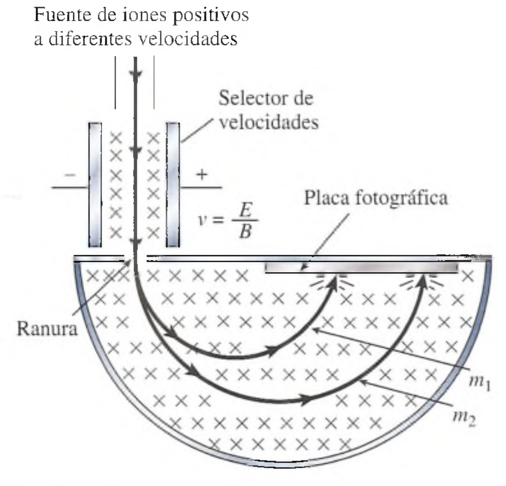


Figura 39.2 El espectrómetro de masas se utiliza para separar isótopos de masa diferente; las cruces indican que la dirección del campo magnético es hacia adentro del papel.

donde m es la masa del ion de carga e. Despejando R, encontramos que el radio de la trayectoria semicircular se obtiene mediante esta expresión

$$R = \frac{mv}{eB} \tag{39.5}$$

En vista de que v, e y B son constantes, la ecuación (39.5) permite obtener el radio como una función de la masa de los iones específicos. Los iones de masa diferente incidirán sobre la placa fotográfica en diferentes posiciones, debido a que sus trayectorias semicirculares son distintas. Siempre que un haz de iones incide en la placa, se producirá una línea oscura. La distancia de una línea particular con respecto a la ranura es el doble del radio en el cual se mueve ese haz de iones. De esta manera, la masa se puede determinar a partir de la ecuación (39.5).

El espectrómetro de masas se utiliza para separar y estudiar los isótopos. La mayoría de los elementos están formados en realidad por mezclas de átomos con diferentes números de masa. Por ejemplo, si se inyecta un haz de iones de litio puro en un espectrómetro de masas, se observan dos tipos de átomos. La banda más oscura se presenta porque el 92 por ciento de los átomos tiene aproximadamente una masa de 7.016 u. El 8 por ciento restante produce una banda más clara y corresponde a átomos con una masa de 6.015 u. Estos dos isótopos de litio se escriben como ${}^{7}_{3}\text{Li}$ y ${}^{6}_{3}\text{Li}$, respectivamente.

Puesto que algunos elementos, por ejemplo el estaño, presentan formas isotópicas muy diferentes, no debe sorprendernos que las masas atómicas medias de los elementos, a menudo no tengan un valor cercano a un número entero. Las masas atómicas medias son afectadas por los números de masa y la abundancia relativa de cada forma isotópica. Por ejemplo, el cloro tiene una masa atómica media de 35.453 u, que resulta de una mezcla de dos isótopos, ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ y ${}^{37}_{17}\text{Cl}$. El isótopo más ligero del cloro es casi tres veces más abundante que el isótopo más pesado.

Ejemplo 39.3

Al estudiar el cloro con el espectrómetro de masas, se observó que se produce una línea intensa a 24 cm de la ranura de entrada. Otra línea más clara aparece a una distancia de 25.37 cm. Si la masa de los iones que forman la primera línea es de 34.980 u, ¿cuál es la masa del otro isótopo?

Plan: Las distancias dadas deben convertirse de diámetros a radios para las dos trayectorias de iones. Observe la figura 39.2. La ecuación 39.5 da una expresión para el radio de una trayectoria de iones en términos de su masa y su velocidad. Como la velocidad y la carga de cada ión son iguales, la razón de las dos masas debe ser igual a la razón de diámetros correspondiente. Esto nos permitirá resolver para la masa de los iones desconocida.

Solución: Los radios para las dos trayectorias son

$$R_1 = 12 \text{ cm} \quad \text{y} \quad R_2 = 12.685 \text{ cm}$$

Ahora, a partir de la ecuación (39.5),

$$R_1 = \frac{m_1 v}{eB} \qquad \text{y} \qquad R_2 = \frac{m_2 v}{eB}$$

Puesto que e, v y B son constantes, tenemos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

a partir de lo cual, la masa m_2 resulta ser

$$m_2 = \frac{m_1 R_2}{R_1} = \frac{(34.980 \text{ u})(12.685 \text{ cm})}{(12 \text{ cm})}$$
$$= 36.977 \text{ u}$$

39.5 Defecto de masa y energía de enlace

Uno de los hechos sorprendentes que es posible demostrar con un espectrómetro de masas es que la masa de un núcleo no es exactamente igual a la suma de las masas de sus nucleones. Consideremos, por ejemplo, el átomo de helio ^4_2He, que tiene dos electrones alrededor del núcleo, el cual contiene dos protones y dos neutrones. La masa atómica se busca en la tabla periódica y es de 4.0026 u.

Ahora hay que comparar este valor con la masa de todas las partículas individuales que forman el átomo:

$$\begin{aligned} 2p &= 2(1.007276 \text{ u}) = 2.014552 \text{ u} \\ 2n &= 2(1.008665 \text{ u}) = 2.017330 \text{ u} \\ 2e &= 2(0.00055 \text{ u}) = \underline{0.001100 \text{ u}} \\ \text{Masa total} &= 4.032982 \text{ u} \end{aligned}$$

La masa de las partes (4.0330 u) es aparentemente mayor que la masa del átomo (4.0026 u).

$$\begin{aligned} m_{\text{partes}} - m_{\text{átomo}} &= 4.0330 \text{ u} - 4.0026 \text{ u} \\ &= 0.0304 \text{ u} \end{aligned}$$

Cuando se unen los protones y los neutrones para formar un núcleo de helio, la masa disminuye durante el proceso. Esta diferencia se llama ***defecto de masa***. Se puede demostrar que el defecto de masa existe para los átomos de todos los elementos.

El defecto de masa se define como la diferencia entre la masa en reposo de un núcleo y la suma de las masas en reposo de los nucleones que lo forman.

Hemos visto a partir de los trabajos de Einstein que la masa y la energía son equivalentes. Por tanto, podemos suponer que la masa disminuye al unirse los nucleones y da por resultado una disminución en la energía. Puesto que la energía se conserva, una disminución de energía del sistema significa que debe liberarse energía al unirse el sistema. En el caso del helio, esta energía podría provenir de una masa de 0.0304 u y sería igual a

$$E = mc^2 = (0.0304 \text{ u})\frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = 28.3 \text{ MeV}$$

A la energía total que debería liberarse si en efecto pudiéramos construir un núcleo a partir de protones y neutrones se le conoce como *energía de enlace* del núcleo. Como ya hemos visto, la energía de enlace del ^4_2He es 28.3 MeV, lo cual se ilustra en la figura 39.3a.

También se puede invertir el proceso anterior y enunciar que la ***energía de enlace*** es la energía requerida para romper el núcleo y separarlo en las partículas que lo integran.

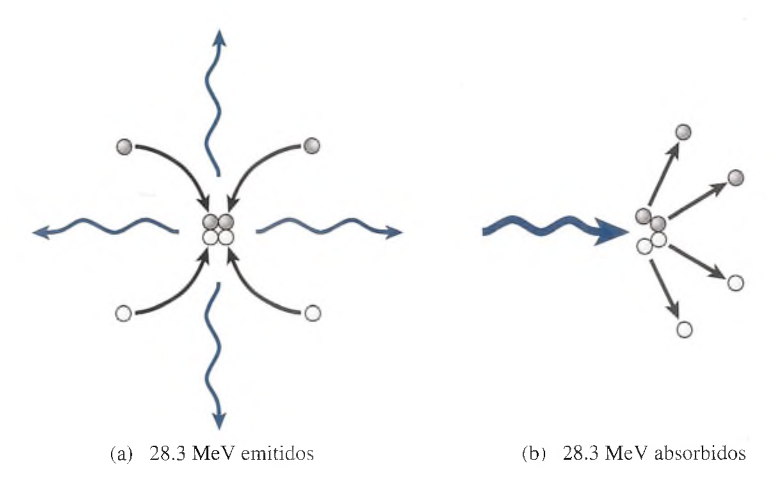


Figura 39.3 (a) Cuando dos protones y dos neutrones se fusionan para formar un núcleo de helio, se libera energía. (b) La misma cantidad de energía se requiere para separar el núcleo en los nucleones que lo forman.

La energía de enlace de un núcleo se define como la energía requerida para separar un núcleo en los nucleones que lo forman.

En nuestro ejemplo, se debe suministrar una energía de 28.3 MeV al $^4_2$He para separar el núcleo en dos protones y dos neutrones (figura 39.3b).

Un isótopo de número atómico Z y número de masa A consta de Z protones, Z electrones y $N = (A - Z)$ neutrones. Si se desprecia la energía de enlace de los electrones, un isótopo neutral tendría la misma masa que Z átomos neutros de hidrógeno más la masa de los neutrones. Las masas de $^1_1$H y m_n son

$$m_H = 1.007825 \text{ u} \qquad m_n = 1.008665 \text{ u} \tag{39.6}$$

Si representamos la masa atómica con M, la energía de enlace E_B se puede calcular en forma aproximada mediante

$$E_B = [(Zm_H + Nm_n) - M]c^2 \qquad \textit{Energía de enlace} \tag{39.7}$$

Al aplicar esta ecuación debemos recordar que $N = A - Z$ y que $c^2 = 931$ MeV/u.

Ejemplo 39.4

Determine la energía de enlace total y la energía de enlace por nucleón para el núcleo de $^{14}_7$N. Suponga que la masa atómica del nitrógeno 14 es 14.003074 u.

Plan: Sumaremos las masas de todos los protones, neutrones y electrones dentro del núcleo y determinaremos la masa total de las partes individuales del átomo. Por tanto, restaremos del total la masa atómica del átomo de nitrógeno 14. La diferencia es el defecto de masa, el cual puede convertirse a la energía de enlace al multiplicar por c^2. Todo el proceso puede concluirse al sustituir en la ecuación (39.7). Observe que la masa de electrones se cuida al usar la masa de un átomo de hidrógeno, el cual incluye los electrones.

Solución: Para el nitrógeno 14, $Z = 7$, $N = 7$ y $M = 14.003074$ u.

$$\begin{aligned} E_B &= [(Zm_H + Nm_n) - M]c^2 \\ &= \{[7(1.007825 \text{ u}) + 7(1.008665 \text{ u})] - 14.003074 \text{ u}\}(931 \text{ MeV/u}) \\ &= (0.112356 \text{ u})(931 \text{ MeV/u}) = 104.6 \text{ MeV} \end{aligned}$$

En vista de que el $^{14}_7$N contiene 14 nucleones, la energía de enlace por nucleón es

$$\frac{E_B}{A} = \frac{104.6 \text{ MeV}}{14 \text{ nucleones}} = 7.47 \text{ MeV/nucleón}$$

La masa atómica M que aparece en la ecuación (39.7) debe ser tomada para un isótopo particular del elemento, no a partir de la tabla periódica (tabla 39.2) o de la tabla 39.3. Estas tablas proporcionan las masas atómicas de la mezcla natural de isótopos para cada elemento. La masa atómica del $^{12}_6$C, por ejemplo, es por definición exactamente igual a 12.0000 u. La tabla periódica indica un valor de 12.01115 u porque el carbono que se encuentra en la naturaleza contiene pequeñas cantidades de $^{13}_6$C además de la forma más abundante $^{12}_6$C. El término ***núclido*** se usa para referirse a un isótopo particular que tiene un número específico de partículas nucleares y, por tanto, una masa determinada. Las masas de diversos núclidos de los más comunes aparecen en la tabla 39.4. Éstas son las masas que deberían usarse para determinar los defectos de masa y las energías de enlace. Las masas de electrones están incluidas, de modo que las masas proporcionadas son básicamente las masas del núcleo más la de los electrones atómicos Z.

La energía de enlace por nucleón, tal como se calculó en el ejemplo 39.4, es una forma importante de comparar el núcleo de diversos elementos. Una gráfica de la energía de enlace por nucleón como función del número de masa aparece en la figura 39.4 para gran número de

Tabla 39.4

Masas atómicas de diversos núclidos

Núclido	Número atómico	Número de masa	Masa atómica
Hidrógeno	1	1	1.007825 u
Deuterio	1	2	2.014102 u
Tritio	1	3	3.016049 u
Helio 3	2	3	3.016030 u
Helio 4	2	4	4.002603 u
Litio 6	3	6	6.015126 u
Litio 7	3	7	7.016003 u
Berilio 9	4	9	9.012186 u
Boro 11	5	11	11.009305 u
Carbono 12	6	12	12.000000 u
Carbono 13	6	13	13.003354 u
Nitrógeno 14	7	14	14.003074 u
Oxígeno 16	8	16	15.994915 u
Oxígeno 17	8	17	16.999132 u
Neón 20	10	20	19.992440 u
Cobre 64	29	64	63.929759 u
Estaño	50	120	119.902108 u
Oro 197	79	197	196.966541 u
Mercurio 204	80	204	203.973865 u
Talio 206	81	206	205.976104 u
Polonio 216	84	216	216.001922 u
Radón 222	86	222	222.017531 u
Radio 224	88	224	224.020218 u
Radio 226	88	226	226.025360 u
Torio 233	90	233	233.041469 u
Torio 234	90	234	234.043630 u
Protactinio 233	91	233	233.040130 u
Uranio 238	92	238	238.050786 u

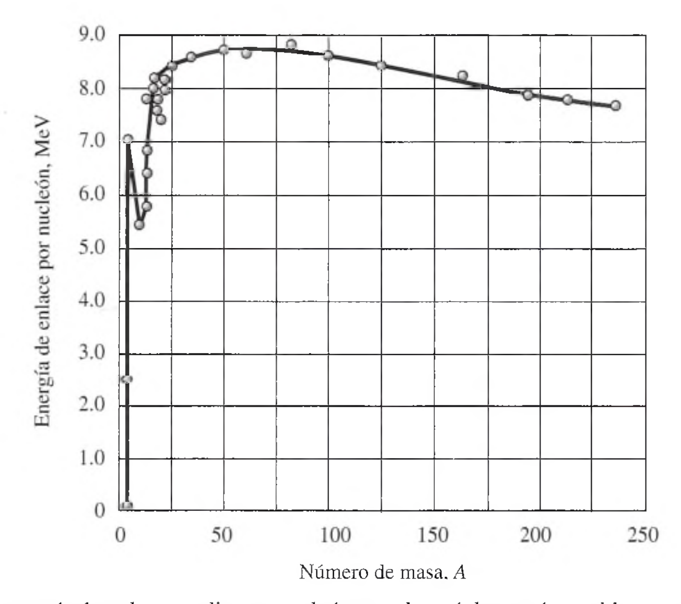


Figura 39.4 La energía de enlace media por nucleón para los núcleos más estables en relación con el número de masa.

núcleos estables. Observe que los números de masa hacia el centro (50 a 80) tienen la energía de enlace más alta por nucleón. Los elementos que se encuentran entre $A = 50$ y $A = 80$ son los más estables.

39.6 Radiactividad

La intensa fuerza nuclear mantiene a los nucleones unidos al núcleo, logra superar la fuerza de repulsión de Coulomb que ejercen los protones. Sin embargo, el equilibrio de fuerzas no siempre se conserva, y algunas veces ciertas partículas o fotones son emitidos desde el núcleo de los átomos. Se dice que dichos núcleos inestables son *radiactivos* y tienen una propiedad que se conoce como la ***radiactividad***.

Todos los elementos que en su estado natural tienen números atómicos mayores que 83 son radiactivos. Esos elementos decaen lentamente hasta que desaparecen de la Tierra. El uranio y el radio son dos de los ejemplos mejor conocidos de elementos naturalmente radiactivos. Se han descubierto también algunos otros elementos que se presentan en su estado natural, los cuales son más ligeros y menos activos.

Los núcleos inestables también se producen en forma artificial como subproductos de los reactores nucleares, para ser estudiados en laboratorios o para otros propósitos. Además, algunos elementos se transforman en naturalmente radiactivos al bombardearlos con fotones de alta energía.

Existen tres formas principales de emisión radiactiva del núcleo atómico:

1. ***Partículas alfa*** (α). Una partícula alfa es el núcleo de un átomo de helio y consta de dos protones y dos neutrones. Tiene una carga de $+2e$ y una masa de 4.001506 u. Debido a sus cargas positivas y a sus rapideces relativamente bajas ($\approx 0.1c$), las partículas alfa no tienen gran poder de penetración.
2. Las ***partículas beta*** (β). Hay dos clases de partículas beta, la partícula beta negativa indicada con el signo menos (β^-) y la partícula beta positiva (β^+). La partícula beta negativa es simplemente un electrón de carga $-e$ y una masa igual a 0.00055 u. Una partícula beta positiva, también llamada *positrón*, tiene la misma masa que un electrón, pero carga opuesta ($+e$). Estas partículas generalmente se emiten a rapideces cercanas a la velocidad de la luz. Las partículas beta negativas son mucho más penetrantes que las partículas alfa, pero las partículas beta positivas se combinan fácilmente con los electrones; por esa razón puede producirse una rápida aniquilación, tanto de los positrones como de los electrones, con la correspondiente emisión de rayos gamma.
3. ***Rayos gamma*** (γ). Un rayo gamma es una onda electromagnética de alta energía semejante al calor y a la luz, pero de una frecuencia mucho mayor. Estos rayos no tienen carga o masa en reposo y representan la radiación más penetrante emitida por elementos radiactivos.

Para comprender por qué se emiten estas formas de radiación, es útil analizar núcleos que son relativamente estables. Al graficar el número de neutrones N contra el número de protones Z para estos núcleos estables se obtiene una relación aproximada que muestra la figura 39.5. Observe que los elementos ligeros son estables cuando el cociente de Z entre N es cercano a 1. Se requieren más neutrones para lograr estabilidad en los elementos más pesados. Las fuerzas nucleares de los neutrones adicionales son necesarias para equilibrar las grandes fuerzas eléctricas resultantes mientras se reúnen más protones. Cuando un núcleo se desvía mucho de la línea, es inestable y emitirá alguna forma de radiación, y por tanto tenderá a lograr estabilidad.

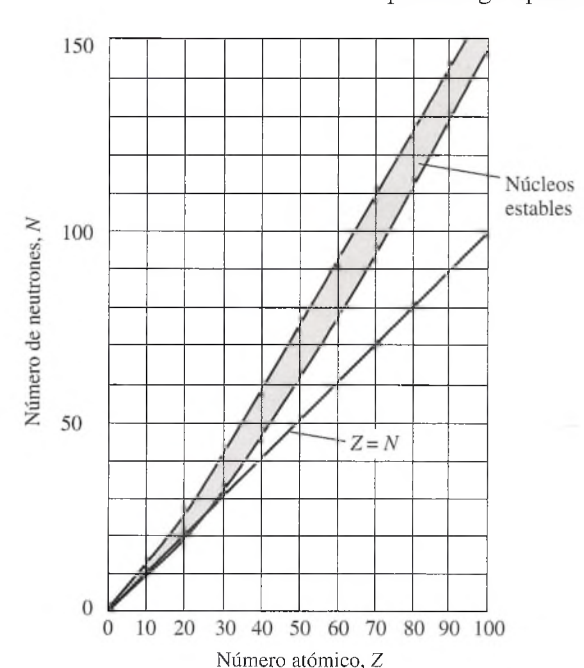


Figura 39.5 Comparación del número de neutrones como función del número atómico. Observe que los núcleos de mayor Z tienen la mayor proporción de neutrones.

39.7 Decaimiento radiactivo

Analicemos el decaimiento radiactivo debido a partículas alfa, beta y gamma y estudiemos lo que sucede durante cada proceso. La emisión de una partícula alfa ${}^{4}_{2}\alpha$ reduce el número de protones en el núcleo padre en 2 y el número de nucleones en 4. Simbólicamente escribimos

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\alpha + \text{energía} \tag{39.8} $$

El término designado aquí como "energía" resulta del hecho de que la energía en reposo de los productos es menor que la del átomo padre. La diferencia en energía es extraída principalmente como una energía cinética impartida a la partícula alfa. La energía cinética de retroceso del átomo producido, con mucho mayor masa, es comparativamente más pequeña.

Ejemplo 39.5 Escriba la reacción que ocurre cuando el ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ decae debido a la emisión alfa.

Solución: Al aplicar la ecuación (39.8), escribimos

$$ {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha + \text{energía} $$

Observe que el elemento radio inestable se ha transformado aquí en un nuevo elemento, el radón, que está más cerca de la línea de estabilidad.

Ahora considere la emisión de partículas beta negativas del núcleo. Si las partículas beta negativas son electrones, ¿cómo puede provenir un electrón de un núcleo que contiene sólo protones y neutrones? Esto puede responderse, al menos parcialmente, por una analogía con el átomo de Bohr. Hemos visto que los fotones, que no existen en el átomo, son emitidos por los átomos cuando cambian de un estado a otro. De modo parecido los electrones, que no existen en el núcleo, se pueden emitir en forma de radiación cuando el núcleo cambia de un estado a otro. Cuando ocurre un cambio de ese tipo, la carga total debe conservarse. Esto requiere la conversión de un neutrón en un protón y un electrón.

$$ {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{\;\,0}_{-1}e $$

Por consiguiente, en una emisión beta negativa, un neutrón es reemplazado por un protón. El número atómico Z se incrementa en 1 y el número de masa no cambia. Simbólicamente,

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{\quad A}\mathrm{Y} + {}^{\;\,0}_{-1}\beta + \text{energía} \tag{39.9} $$

Un ejemplo de emisión beta es el decaimiento de un isótopo de neón en sodio:

$$ {}^{23}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{\;\,0}_{-1}\beta + \text{energía} $$

El incremento en Z es necesario para conservar la carga.

En forma similar, en la emisión de positrón (beta positivo), un protón del núcleo decae en un neutrón y un positrón.

$$ {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{\;\,0}_{+1}e $$

El número atómico Z disminuye en 1, y el número de masa A no cambia. Simbólicamente,

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-1}^{\quad A}\mathrm{Y} + {}^{\;\,0}_{+1}\beta + \text{energía} \tag{39.10} $$

Un ejemplo de emisión de positrón es el decaimiento de un isótopo de nitrógeno en un isótopo de carbono:

$$ {}^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{\;\,0}_{+1}\beta + \text{energía} $$

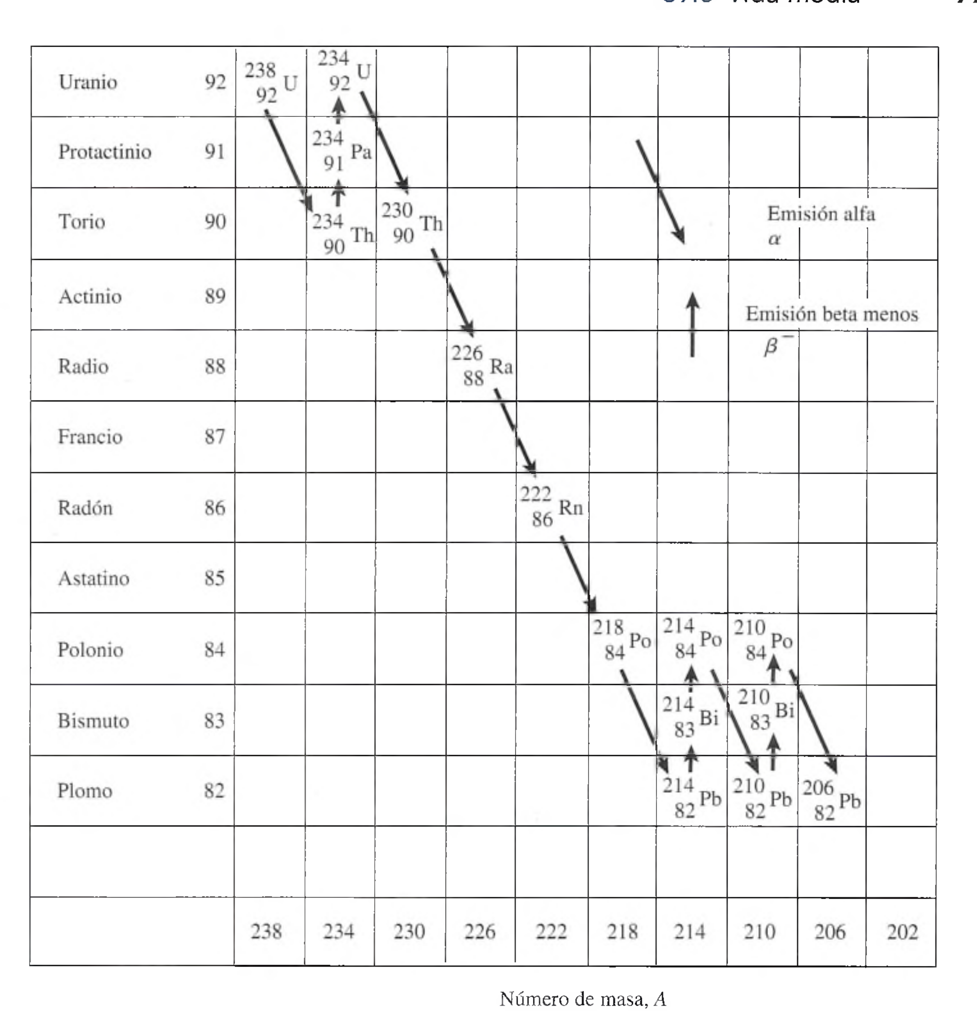


Figura 39.6 Serie de desintegración del uranio. Decaimientos del uranio, a través de una serie de emisiones alfa y beta negativa, de ^{238}U a ^{206}Pb.

En ambos tipos de emisión beta, la mayor parte de la energía cinética es compartida por la partícula beta y otra partícula denominada *neutrino*. A pesar de que el neutrino no tiene ni masa en reposo ni carga eléctrica, sí puede tener energía y cantidad de movimiento.

En la emisión gamma, el núcleo padre mantiene el mismo número atómico Z y el mismo número de masa A. Un fotón gamma simplemente extrae energía de un núcleo inestable. Con frecuencia, una sucesión de decaimientos alfa y beta va acompañada de decaimientos gamma, que extraen el exceso de energía.

La desintegración radiactiva del $^{238}_{92}U$ se muestra en la figura 39.6, como una serie de decaimientos a través de cierto número de elementos hasta que se transforma en un núcleo estable de $^{206}_{82}Pb$.

39.8 Vida media

Un material radiactivo continúa emitiendo radiación hasta que todos los átomos inestables del mismo han decaído. El número de núcleos inestables que decaen o se desintegran cada segundo se puede predecir, para un isótopo determinado, en términos de probabilidad. Este número se conoce como ***actividad R***, y se obtiene mediante la siguiente expresión

$$R = \frac{-\Delta N}{\Delta t} \tag{39.11}$$

donde N es el número de núcleos que no ha decaído. El signo menos se incluye debido a que N decrece con el tiempo. Las unidades para R son el recíproco de segundos (s^{-1}).

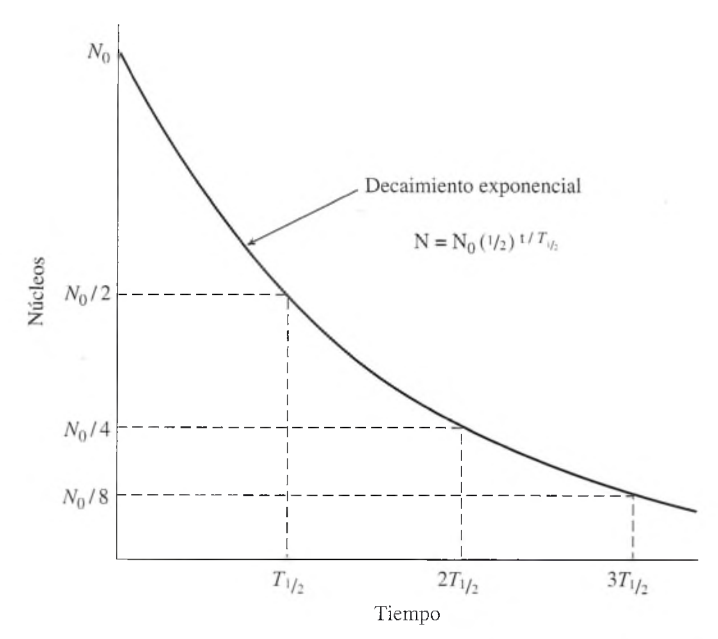


Figura 39.7 La curva de decaimiento radiactivo muestra la vida media como el tiempo $T_{1/2}$ requerido para que decaigan a la mitad los núcleos inestables presentes en el instante $t = 0$.

En la práctica, la actividad en desintegraciones por segundo es tan grande que una unidad más conveniente resulta ser el ***curie*** (Ci), que se define a continuación.

Un curie (Ci) es la actividad de un material radiactivo que decae con una rapidez de 3.7×10^{10} desintegraciones por segundo.

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} \tag{39.12}$$

La actividad de 1 g de radio es ligeramente menor que 1 Ci.

La naturaleza azarosa del decaimiento nuclear significa que la actividad R en cualquier instante es directamente proporcional al número de núcleos restantes; es decir, a medida que el número de núcleos que van quedando sin decaer disminuye con el tiempo, la actividad también decrece. Por tanto, si se grafica el número de núcleos restantes como una función del tiempo, como ilustra la figura 39.7, vemos que el decaimiento radiactivo no es lineal. El tiempo que tarda, según la curva, en caer hasta la mitad de su valor original es diferente para cada isótopo radiactivo y se le llama ***vida media***.

La vida media $T_{1/2}$ de un isótopo radiactivo es el lapso en el que decae la mitad de sus núcleos inestables.

Por ejemplo, la vida media del radio 226 es de 1620 años; 1 g de este isótopo decaerá a 0.5 g en 1 620 años, a 0.25 g en 2(1 620 años), a 0.125 g en 3(1 620 años), y así sucesivamente.

Se puede usar esta definición de la vida media para determinar cuántos núcleos están presentes en un tiempo t. Si se empieza a contar en un tiempo $t = 0$ con un número N_0 de núcleos inestables, entonces después de que han transcurrido n vidas medias, habrá quedado un número de núcleos N que se calcula por

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{39.13}$$

El número n de vidas medias en el periodo t es, por supuesto, $t/T_{1/2}$. Entonces, una forma de la relación anterior que se aplica con mayor frecuencia es

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

Puesto que la cantidad de material radiactivo se determina por el número de núcleos presentes, se puede utilizar una ecuación similar a la ecuación (39.13) para calcular la masa de material radiactivo que queda después de cierto número de vidas medias.

La misma idea aplicada a la actividad R de una muestra radiactiva nos conduce a la relación

$$R = R_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \quad \text{y} \quad m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \tag{39.14}$$

Ejemplo 39.6

El peor subproducto de los reactores nucleares ordinarios es el isótopo radiactivo plutonio 239, cuya vida media es de 24 400 años. Suponga que la actividad inicial de una muestra que contiene 1.64×10^{20} $^{239}_{94}$Pu núcleos es de 4 mCi. (a) ¿Cuántos de estos núcleos quedarán después de 73 200 años? (b) ¿Cuál será la actividad después de ese tiempo?

Plan: Después de cada ciclo de vida el número de núcleos radiactivos se reduce a la mitad. Determinaremos cuántas vidas medias están contenidas en 73 200 años y usaremos el resultado como el exponente de $\frac{1}{2}$. Este número se multiplica por el número de núcleos iniciales para obtener el número restante. Un cálculo parecido puede hacerse para la radiactividad.

Solución (a): Al sustituir en la ecuación (39.13) obtenemos

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = 1.64 \times 10^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{73\,200\text{ yr}/24\,400\text{ años}}$$

$$= 1.64 \times 10^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1.64 \times 10^{20}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 2.05 \times 10^{19}\text{ núcleos}$$

Solución (b): Se obtiene la actividad remanente a partir de la ecuación (39.14).

$$R = R_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = 4\text{ mCi}\left(\frac{1}{8}\right) = 0.5\text{ mCi}$$

Para ambos cálculos se supone que ningún nuevo núcleo de $^{239}_{94}$Pu se está creando por otros procesos. Es fácil advertir a partir de este ejemplo por qué los desechos de los materiales radiactivos representan un grave problema.

39.9 Reacciones nucleares

En una reacción química los átomos de dos moléculas reaccionan para formar diferentes moléculas. En una *reacción nuclear*, los núcleos, la radiación o los nucleones chocan para formar diferentes núcleos, radiación y nucleones. Si los objetos que chocan están cargados, cuando menos una de las masas que chocan debe acelerarse hasta alcanzar una velocidad relativamente alta. En general, la partícula que se usa para bombardear es ligera, por ejemplo, un protón ^1_1p o una partícula alfa $^4_2\alpha$. Estos proyectiles nucleares se aceleran mediante diversos dispositivos, tales como generadores Van de Graaff, ciclotrones y aceleradores lineales.

En las reacciones nucleares que estudiaremos, se deben observar algunas leyes de conservación, principalmente: la ***conservación de la carga***, la ***conservación de los nucleones*** y la ***conservación de la masa-energía***.

Conservación de la carga: La carga total de un sistema no puede ni aumentar ni disminuir en una reacción nuclear.

Conservación de nucleones: El número total de nucleones en la interacción debe permanecer inalterado.

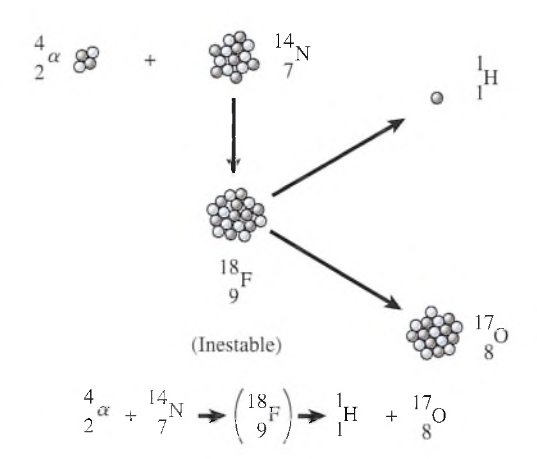


Figura 39.8 Choque de una partícula alfa contra un núcleo de nitrógeno 14.

Conservación de la masa-energía: La masa-energía total de un sistema debe permanecer inalterada en una reacción nuclear.

Ahora se analizará lo que sucede cuando una partícula alfa $^{4}_{2}\alpha$ golpea un núcleo en una muestra de gas nitrógeno $^{14}_{7}N$. (Consulte la figura 39.9.) El primer paso es la entrada de la partícula alfa que añade 2 protones y 2 neutrones al núcleo. El número atómico Z se incrementa en 2, y el número de masa A aumenta en 4. El núcleo resultante es un núcleo compuesto *inestable* de flúor $^{18}_{9}F$. Este núcleo inestable se desintegra rápidamente produciendo los productos finales, oxígeno $^{17}_{8}O$ e hidrógeno $^{1}_{1}H$. La reacción total se puede escribir como

$$^{4}_{2}\alpha + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{1}_{1}H + ^{17}_{8}O \tag{39.15}$$

Observe cómo la carga y los nucleones se conservan en estas reacciones. Hay una carga neta de $+9e$ antes de la reacción y una carga neta de $+9e$ después de la reacción, y hay 18 nucleones antes y después de la reacción.

39.10 Fisión nuclear

Antes del descubrimiento del neutrón en 1932, las partículas alfa y los protones eran las partículas fundamentales usadas para bombardear el núcleo atómico, pero como todas las partículas con carga, tenían la desventaja de ser repelidas electrostáticamente por el núcleo. En consecuencia, se requerían grandes cantidades de energía antes de que se llevaran a cabo las reacciones nucleares.

Puesto que los neutrones no tienen carga eléctrica, pueden penetrar fácilmente el núcleo de un átomo sin que se presente la repulsión de Coulomb (electrostática). Los neutrones rápidos pueden pasar por completo a través de un núcleo o pueden provocar su desintegración. Los neutrones lentos pueden ser capturados por el núcleo, originando un isótopo inestable, que a su vez se puede desintegrar.

Siempre que la absorción de un neutrón que ingresa origina que un núcleo se divida en dos núcleos más pequeños, la reacción se denomina ***fisión nuclear*** y los núcleos producidos se llaman *fragmentos de fisión*.

La fisión nuclear es el proceso por el cual los núcleos pesados se dividen en dos o más núcleos de números de masa intermedios.

Cuando un neutrón lento es capturado por un núcleo de uranio $^{235}_{92}U$, se produce un núcleo inestable ($^{236}_{92}U$) que puede decaer de varias formas hasta producir núcleos más pequeños (véase la figura 39.9). Dichas reacciones de fisión pueden producir neutrones rápidos, partículas beta y rayos gamma además de los núcleos producto. Por esta razón, los productos de un proceso de fisión, incluso los que se producen en una explosión nuclear, son altamente radiactivos.

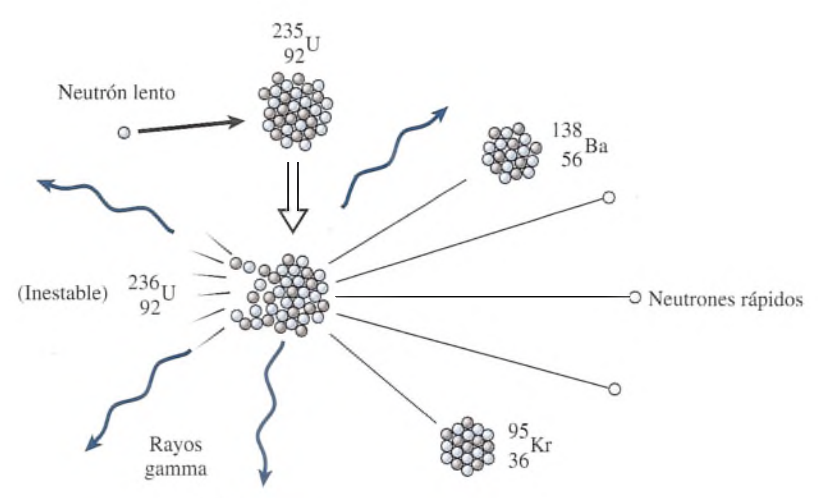


Figura 39.9 Fisión nuclear de ^{235}U mediante la captura de un neutrón lento.

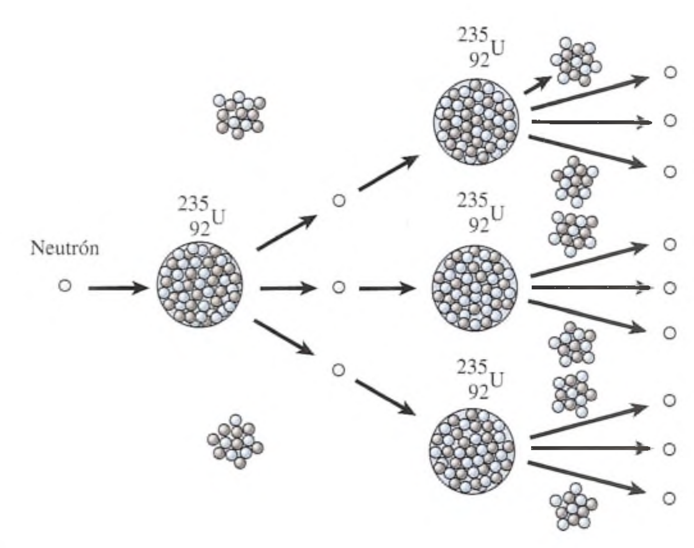


Figura 39.10 Reacción nuclear en cadena.

Los fragmentos de la fisión tienen un número de masa menor y, por tanto, como 1 MeV de mayor energía de enlace por cada nucleón (véase la sección 39.5). Como resultado la fisión libera una gran cantidad de energía. En el ejemplo anterior se producen aproximadamente 200 MeV por la fisión.

Debido a que cada fisión nuclear libera más neutrones, que pueden conducir a una fisión adicional, es posible que ocurra una ***reacción en cadena***. Como se aprecia en la figura 39.10, los tres neutrones liberados de la fisión del $^{235}_{92}U$ producen tres fisiones adicionales. Por tanto, se empieza con un neutrón y se han liberado nueve después de sólo dos etapas. Si ese tipo de reacción en cadena no se controla, puede provocar una explosión de enorme magnitud.

39.11 Reactores nucleares

Un ***reactor nuclear*** es un dispositivo que controla la fisión nuclear de material radiactivo, produciendo nuevas sustancias radiactivas y grandes cantidades de energía. Estos dispositivos se emplean para suministrar calor capaz de generar energía eléctrica, como medio de propulsión y en procesos industriales; para producir nuevos elementos o materiales radiactivos que tienen numerosas aplicaciones, y para proporcionar neutrones con el fin de utilizarlos en la experimentación científica.

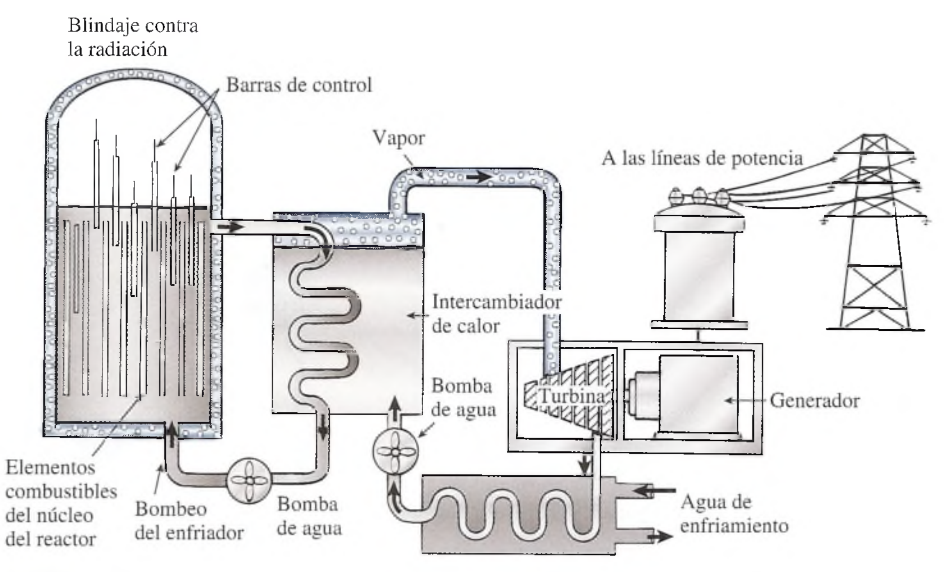


Figura 39.11 Diagrama esquemático de un reactor nuclear. El agua calentada bajo presión en el núcleo del reactor se bombea hacia el intercambiador de calor, y allí se produce vapor que sirve para operar una turbina.

Un diagrama esquemático de un reactor típico se muestra en la figura 39.11. Los componentes básicos son: (1) un *núcleo* para el combustible nuclear, (2) un *moderador* para reducir la velocidad de los neutrones rápidos, (3) las *barras de control* u otros medios para regular el proceso de fisión, (4) un *intercambiador de calor* para extraer el calor generado en el núcleo, y (5) *blindaje* para evitar la salida de radiación. El vapor que se produce por medio del reactor se usa para impulsar una turbina que genera electricidad. El vapor gastado se transforma en agua en un condensador y se bombea para que vuelva al intercambiador de calor con el fin de utilizarlo en un nuevo ciclo.

El ingrediente esencial en los reactores es el material fisionable, o combustible nuclear. El único material fisionable que se encuentra en forma natural es el $^{235}_{92}U$, el cual constituye aproximadamente el 0.7 por ciento del uranio natural disponible. El 99.3 por ciento restante es $^{238}_{92}U$. Por fortuna, el $^{238}_{92}U$ es un material *fértil*, lo cual significa que se puede transformar en material fisionable cuando es bombardeado con neutrones. El plutonio $^{239}_{94}Pu$ que se produce en esta forma puede proporcionar nuevo combustible para el reactor.

La producción de combustible adicional como parte del funcionamiento del reactor ha conducido al diseño de reactores *reproductores* o generadores en los cuales hay un incremento neto de material fisionable. En otras palabras, el reactor produce más combustible del que consume. Esto no viola la ley de conservación de la energía, sino que simplemente es capaz de producir material fisionable a partir de materiales fértiles.

El combustible fisionable que se usa en la mayoría de los reactores depende de la disponibilidad de neutrones lentos, los cuales son más aptos para producir el proceso de fisión. Por tanto, los neutrones rápidos liberados mediante la fisión deben reducir su velocidad. Por esta razón, el combustible del reactor debe sumergirse en una sustancia adecuada llamada ***moderador***. La función de esta sustancia es volver más lentos a los neutrones sin llegar a capturarlos.

Los neutrones tienen una masa casi igual a la de un átomo de hidrógeno. Por consiguiente, es lógico suponer que las sustancias que contienen átomos de hidrógeno pueden ser moderadores eficaces de los neutrones. El neutrón es análogo a una canica en movimiento, la cual podría frenarse mediante una colisión con otra canica, pero rebotaría si chocara contra una bala de cañón debido a la gran diferencia de ambas masas. El agua (H_2O) y el agua pesada, que contienen ^2_1H en lugar de ^1_1H, se utilizan a menudo como moderadores. Otros materiales disponibles son el grafito y el berilio.

Para controlar el horno nuclear es necesario regular el número de neutrones que inician el proceso de fisión. Ciertas sustancias, como el boro y el cadmio, capturan neutrones efi-

cazmente y son excelentes materiales de control. Un reactor típico está provisto de barras de control que pueden insertarse en el reactor a diferentes distancias. La actividad del horno nuclear se controla ajustando la posición de estas barras. Se dispone de un conjunto de barras suplementarias para permitir que el reactor se detenga por completo en caso de emergencia.

39.12 Fusión nuclear

En nuestro análisis anterior acerca del defecto de masa, se calculó en 28.3 MeV la energía liberada en la formación de ^4_2He a partir de sus nucleones componentes. A esta unión de núcleos ligeros para formar un solo núcleo pesado se le denomina ***fusión nuclear***. Este es el proceso que proporciona el combustible para las estrellas como nuestro propio Sol, y es también el principio en el que está basada la bomba de hidrógeno. Muchos científicos consideran que la fusión del hidrógeno para formar helio es el combustible fundamental del universo.

El uso de la fusión nuclear como una fuente controlada de energía presenta todavía muchos problemas. La mayoría de los físicos aún piensa que se requerirán temperaturas extremadamente altas para sostener la fusión nuclear. Sería necesario aplicar millones de electrón volts a los núcleos fusionables para sobrepasar su repulsión de Coulomb (electrostática). En el caso de la bomba de hidrógeno, esta enorme energía es suministrada por una explosión atómica, que dispara el proceso de fusión. La producción de fusión para fines pacíficos por este método presenta el problema de su contención. El combustible nuclear necesitaría estar tan caliente que desintegraría instantáneamente cualquier sustancia conocida. Los métodos de investigación actuales incluyen como medios de contención campos magnéticos o calentamiento rápido mediante poderosos láser. Es fácil percibir por qué la idea de "fusión en frío" a través de un proceso electrolítico ha despertado tanto entusiasmo.

Si los problemas en torno a la fusión se llegan a resolver, esta fuente de energía podría proporcionar una solución al tremendo problema de los recursos no renovables. El deuterio que se encuentra comúnmente en el agua de mar, nos podría proporcionar un suministro casi inagotable de combustible. Esto representaría más de mil millones de veces la energía disponible actual, si se suman todas las reservas de carbón y de petróleo. Además, tal parece que los reactores de fusión tendrían muchos menos problemas, en relación con los residuos radiactivos, que los que normalmente se tienen con los reactores de fisión.

Resumen y repaso

Resumen

En este capítulo estudiamos las partículas fundamentales que constituyen el núcleo de los átomos. Los protones y neutrones se mantienen juntos en el núcleo unidos por la acción de intensas fuerzas nucleares que actúan únicamente dentro del núcleo. Cuando dichas partículas se reúnen, la masa resultante es menor que las partes constituyentes. En el caso de núcleos pesados, se dijo también que la energía resulta de la división de esos núcleos. En cualquier caso, hay un enorme potencial para obtener energía útil. Los principales conceptos que es conveniente recordar de este capítulo se presentan a continuación.

- Las partículas nucleares fundamentales mencionadas en este capítulo aparecen resumidas en la tabla siguiente. Las masas están expresadas en unidades de masa atómica (u) y la carga está en función de la carga electrónica $+e$ o bien $-e$, la cual es 1.6×10^{-19} C.

Partículas fundamentales

Partículas	Símbolo	Masa, u	Carga
Electrón	${}_{-1}^{0}e$, ${}_{-1}^{0}\beta$	0.00055	$-e$
Protón	${}_{1}^{1}p$, ${}_{1}^{1}\text{H}$	1.007276	$+e$
Neutrón	${}_{0}^{1}n$	1.008665	0
Positrón	${}_{+1}^{0}e$, ${}_{+1}^{0}\beta$	0.00055	$+e$
Partícula alfa	${}_{2}^{4}\alpha$, ${}_{2}^{4}\text{He}$	4.001506	$+2e$

Las masas atómicas de los diversos elementos aparecen en el texto.

- El número atómico Z de un elemento es el número de protones que hay en su núcleo. El número de masa A es la suma del número atómico y el número de neutrones N. Estos números se usan para escribir el símbolo del núcleo:

$$A = Z + N \qquad \textit{Símbolo: } {}_{Z}^{A}X$$

- Una *unidad de masa atómica* (1 u) es igual a un doceavo de la masa del átomo de carbono más abundante. Su valor en kilogramos se presenta a continuación. Además, en virtud de que $E = mc^2$, podemos escribir el factor de conversión de masa a energía como c^2.

$$1 \text{ u} = 1.6606 \times 10^{-27} \text{ kg} \qquad c^2 = 931 \text{ MeV/u}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

En el espectrómetro de masas, la velocidad v y el radio R de las partículas ionizadas individuales son

$$v = \frac{E}{B} \qquad R = \frac{mv}{eB} \qquad \textit{Espectrómetro de masas}$$

- El *defecto de masa* es la diferencia entre la masa en reposo de un núcleo y la suma de las masas en reposo de sus nucleones. La *energía de enlace* se obtiene multiplicando el defecto de masa por c^2.

$$E_B = [(Zm_H + Nm_n) - M]c^2 \qquad \textit{Energía de enlace}$$

donde $m_H = 1.007825$ u
$m_n = 1.008665$ u
$c^2 = 931$ MeV/u
M = masa atómica
$N = A - Z$
Z = número atómico

- Varias ecuaciones generales referentes al decaimiento radiactivo son

$${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}\alpha + \text{energía} \qquad \textit{Decaimiento alfa}$$

$${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}\beta + \text{energía} \qquad \textit{Decaimiento beta negativa}$$

$${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{+1}^{0}\beta + \text{energía} \qquad \textit{Decaimiento beta positiva}$$

- La *actividad* R de una muestra es la rapidez con la cual decaen sus núcleos radiactivos. Generalmente se expresa en curies (Ci).

Un *curie* (1 Ci) = 3.7×10^{10} desintegraciones por segundo (s^{-1})

- La *vida media* de una muestra es el tiempo $T_{1/2}$ en el cual decae la mitad de sus núcleos inestables.
- El número de núcleos inestables que quedan después de un tiempo t depende del número n de vidas medias que hayan transcurrido. Si existen N_0 núcleos en el tiempo $t = 0$, entonces existe un número N en el tiempo t. Tenemos

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{donde } n = \frac{t}{T_{1/2}}$$

- La actividad R y la masa m de la porción radiactiva de una muestra se obtienen a partir de relaciones similares:

$$R = R_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad m = m_i\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- En cualquier ecuación nuclear, el número de nucleones del lado izquierdo debe ser igual al número de nucleones del lado derecho. Asimismo, la carga neta debe ser la misma en ambos lados.

Conceptos clave

Preguntas de repaso

39.1. Escriba el símbolo ${}^{A}_{Z}X$ para los isótopos más abundantes de (a) cadmio, (b) plata, (c) oro, (d) polonio, (e) magnesio y (f) radón.

39.2. A partir de la curva que describe la energía de enlace por nucleón (figura 39.4, ¿esperaría usted que el defecto de masa fuera mayor en el caso del cromo ${}^{52}_{24}Cr$ o en el del uranio ${}^{238}_{92}U$? ¿Por qué?

39.3. La energía de enlace es mayor para los números de masa que corresponden a la parte central de la tabla periódica. Comente la importancia de esto en relación con la fisión nuclear y la fusión nuclear. ¿Cómo explica usted la liberación de energía en la fusión y en la fisión, considerando el hecho de que el primero de esos procesos une a los núcleos y el segundo los divide?

39.4. ¿En qué forma influye en la estabilidad de un isótopo la razón entre el número de masa *A* y el número atómico *Z*? ¿El elemento cuya razón se aproxima más a 1 parece ser siempre el más estable?

39.5. Defina y compare entre sí las partículas alfa, las partículas beta y los rayos gamma. ¿Cuál de ellos puede ocasionar más daños a los tejidos humanos?

39.6. Imagine una fuente que emite radiación alfa, beta y gama. Mediante un diagrama, ilustre cómo podría usted mostrar la carga y el poder de penetración de cada tipo de radiación. Suponga que dispone de varias láminas delgadas de aluminio y una fuente que produce un campo magnético.

39.7. Describa y explique paso a paso el decaimiento de ${}^{238}_{92}U$ hasta convertirse en el isótopo estable del plomo, ${}^{206}_{82}Pb$. (Consulte la figura 39.6.)

39.8. Escriba el símbolo que falta, en la forma ${}^{A}_{Z}X$, para las siguientes desintegraciones nucleares:

a. ${}^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + $ ______
b. ${}^{32}_{15}P \rightarrow $ ______ $+ {}^{1}_{+0}e$
c. ${}^{239}_{94}Pu \rightarrow {}^{234}_{90}Th + $ ______
d. ${}^{238}_{92}U \rightarrow $ ______ $+ {}^{4}_{2}\alpha$

39.9. Escriba el símbolo faltante en las siguientes reacciones nucleares:

a. ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}H + $ ______
b. ${}^{25}_{12}Mg + $ ______ $\rightarrow {}^{28}_{13}Al + {}^{1}_{1}H$
c. ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{12}_{6}C + $ ______
d. ${}^{1}_{1}H + $ ______ $\rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He$

39.10. Explique la función de los siguientes componentes de un reactor nuclear: (a) uranio, (b) blindaje contra la radiación, (c) moderador, (d) barras de control, (e) intercambiador de calor y (f) condensador.

39.11. Proponga ejemplos que demuestren la forma en que el decaimiento beta y el decaimiento alfa tienden a hacer que los núcleos inestables se aproximen a la curva de estabilidad de la figura 39.5.

39.12. El radón tiene una vida media de 3.8 días. Suponga que una muestra de radón tiene una masa *m* y una actividad *R*. ¿Cuánta masa de radón radiactivo queda después de 3.8 días? ¿Significa esto que la actividad se reduce a la mitad en el tiempo de una vida media?

39.13. El carbono radiactivo ${}^{14}_{7}C$ tiene una vida media de 5 570 h. En los organismos vivos, la concentración relativa de este isótopo es igual a la que existe en la atmósfera, en virtud del intercambio de materiales que se produce entre los organismos y el aire. Sin embargo, cuando un organismo muere, ese intercambio cesa, el deterioro radiactivo comienza y ya no es reemplazado por materia del organismo vivo. Explique cómo se puede aplicar este principio para determinar la edad de los restos fósiles.

Problemas

Tome como referencia la tabla 39.4 para consultar las masas de los núclidos.

Sección 39.2 Los elementos

39.1. ¿Cuántos neutrones hay en el núcleo del $^{208}_{82}Pb$? ¿Y cuántos protones? ¿Cuál es la razón N/Z?
Resp. 126, 82, 2.54

39.2. El núcleo de cierto isótopo contiene 143 neutrones y 92 protones. Escriba el símbolo que corresponde a este núcleo.

39.3. A partir de una curva de estabilidad se ha determinado que la razón entre neutrones y protones, en el caso de un núcleo de cesio, es 1.49. ¿Cuál es el número de masa de este isótopo de cesio? Resp. 137

39.4. La mayoría de los núcleos tienen una forma casi esférica y la magnitud aproximada de su radio se puede calcular por medio de

$$r = r_0 A^{1/3} \qquad r_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m}$$

¿Cuál es la magnitud aproximada del radio del núcleo de un átomo de oro ($^{197}_{79}Au$)?

39.5. Estudie la tabla 39.4 que contiene información sobre los diversos núclidos. Determine la razón de N/Z para los siguientes núclidos: berilio 9, cobre 64 y radio 224. Resp. 1.25, 1.21, 1.55

Sección 39.3 La unidad de masa atómica

39.6. Calcule la masa en gramos de una partícula de oro que contiene dos millones de unidades de masa atómica.

39.7. Considere un cilindro de cobre de 2 kg. ¿Cuál es la masa en unidades de masa atómica? ¿En megaelectrón-volts? ¿En joules? Resp. 1.20×10^{27} u, 1.12×10^{30} MeV, 1.79×10^{17} J

39.8. Cierta reacción nuclear libera una energía de 5.5 MeV. ¿Cuánta masa (en unidades de masa atómica) se requiere para producir esta energía?

39.9. Según la tabla periódica, la masa promedio de un átomo de plata es 107.842 u. ¿Cuál es la masa promedio del núcleo de plata? Resp. 107.816 u

***39.10.** Considere el espectrómetro de masa que ilustra la figura 39.2. Un campo magnético uniforme de 0.6 T se coloca a través de las secciones superior e inferior del espectrómetro, y el campo eléctrico del selector de velocidad es de 120 V/m. Un solo átomo cargado de neón ($+1.6 \times 10^{-19}$ C) de masa 19.992 u, pasa a través del selector de velocidad y llega al espectrómetro. ¿Cuál es la velocidad del átomo de neón cuando sale del selector de velocidad?

***39.11.** ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular del átomo de neón descrito en el problema 39.10?
Resp. 6.92 cm

Sección 39.5 El defecto de masa y la energía de enlace

***39.12.** Calcule el defecto de masa y la energía de enlace del átomo de neón 20 ($^{20}_{10}Ne$).

***39.13.** Calcule la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón del tritio ($^{3}_{1}H$). ¿Cuánta energía en joules se requiere para dividir el núcleo en los nucleones que lo constituyen?
Resp. 8.48 MeV, 2.83 MeV/nucleón, 1.36×10^{-12} J

***39.14.** Calcule el defecto de masa del $^{7}_{3}Li$. ¿Cuál es la energía de enlace por nucleón?

***39.15.** Determine la energía de enlace por nucleón para el carbono 12 ($^{12}_{6}C$). Resp. 7.68 MeV/nucleón

***39.16.** ¿Cuáles son el defecto de masa y la energía de enlace de un átomo de oro ($^{197}_{79}Au$)?

***39.17.** Calcule la energía de enlace por nucleón del estaño 120 ($^{120}_{50}Sn$). Resp. 8.50 MeV/nucleón

Sección 39.7 Decaimiento radiactivo

39.18. La actividad de una muestra ha sido clasificada como 2.8 Ci. ¿Cuántos de sus núcleos se desintegrarán en un lapso de 1 minuto?

39.19. El núcleo de cobalto ($^{60}_{27}Co$) emite rayos gamma de 1.2 MeV aproximadamente. ¿Cuánta masa pierde el núcleo cuando emite un rayo gama de esta energía?
Resp. 0.00129 u

39.20. La vida media del isótopo radiactivo indio 109 es 4.30 h. Si la actividad de una muestra es 1 mCi al principio, ¿cuánta actividad persistirá después de 4.30, 8.60 y 12.9 h?

39.21. La actividad inicial de una muestra constituida por 7.7×10^{11} núcleos de bismuto 212 es 4.0 mCi. La vida media de este isótopo es de 60 minutos. ¿Cuántos núcleos de bismuto 212 quedan después de 30 minutos? ¿Cuál es la actividad al final de ese tiempo?
Resp. 5.44×10^{11} núcleos, 2.83 mCi

***39.22.** El estroncio 90 se produce en la atmósfera en cantidades considerables durante una explosión nuclear. Si este isótopo tiene una vida media de 28 años, ¿cuánto tiempo tardará la actividad inicial en descender a la cuarta parte de su actividad original?

***39.23.** Suponga una muestra pura de 4.0 g de galio 67 radiactivo. Si la vida media es de 78 h, ¿cuánto tiempo se requiere para el decaimiento de 2.8 g de esta muestra? Resp. 135.5 h

***39.24.** Si la quinta parte de una muestra radiactiva pura persiste después de 10 h, ¿cuál es su vida media?

Sección 39.9 Reacciones nucleares

***39.25.** Calcule la energía mínima liberada en la siguiente reacción nuclear

$$^{19}_{9}F + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{16}_{8}O + \text{energía}$$

La masa atómica del $^{19}_{9}F$ es 18.998403 u.

Resp. 8.11 MeV

***39.26.** Calcule aproximadamente la energía cinética que se imparte a la partícula alfa cuando el radio 226 decae para formar radón 222. No tome en cuenta la energía impartida al núcleo de radón.

***39.27.** Calcule la energía que interviene en la producción de dos partículas alfa en la siguiente reacción

$$^{7}_{3}Li - ^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{4}_{2}He + \text{energía}$$

Resp. 17.3 MeV

***39.28.** Calcule la energía cinética liberada en el decaimiento menos beta del torio 233.

***39.29.** ¿Cuál debe ser la energía de una partícula alfa si al $^{17}_{8}O$ y $^{1}_{1}H$?, ¿($^{17}_{8}O$ = 16.999130 u)?

$$^{4}_{2}He + ^{14}_{7}N + \text{Energía} \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H$$

Resp. 1.19 MeV

Problemas adicionales

***39.30.** ¿Cuál es la masa promedio, en kilogramos, del núcleo de un átomo de boro 11?

***39.31.** ¿Cuáles son el defecto de masa y la energía de enlace por nucleón en el caso del boro 11?

Resp. 0.0818 u, 6.92 megaelectrón-volts por nucleón

***39.32.** Calcule la energía de enlace por nucleón en el caso del talio 206.

***39.33.** Calcule la energía necesaria para separar los nucleones del mercurio 204. Resp. 1.61 GeV

***39.34.** La vida media de una muestra radiactiva es 6.8 h. ¿Cuánto tiempo pasa antes que la actividad descienda a la quinta parte de su valor inicial?

***39.35.** ¿Cuánta energía se requiere para separar un átomo de deuterio? Resp. 2.22 MeV

***39.36.** El plutonio 232 decae a causa de la emisión de partículas alfa cuya vida media es de 30 minutos. ¿Cuánto quedará de esta sustancia al cabo de 4 h si la muestra original tenía una masa de 4.0 g? Escriba la ecuación de este decaimiento.

***39.37.** Si 32×10^9 átomos de un isótopo radiactivo se reducen a sólo 2×10^9 átomos en un lapso de 48 h, ¿cuál es la vida media de este material?

Resp. 12.0 h

***39.38.** Cierto isótopo radiactivo retiene sólo el 10 por ciento de su actividad original al cabo de un periodo de 4 h. ¿Cuál es su vida media?

***39.39.** Cuando un núcleo de $^{6}_{3}Li$ es bombardeado por un protón, se liberan una partícula alfa o un núcleo resultante. Escriba la ecuación de esta reacción. ¿Cuál es la transferencia neta de energía en este caso?

Resp. 4.02 MeV

***39.40.** El uranio 238 tiene un decaimiento alfa. Escriba la ecuación de esta reacción y calcule la energía de desintegración.

***39.41.** Una muestra de 9 g de material radiactivo tiene una actividad inicial de 5.0 Ci. Cuarenta minutos después, la actividad del material es de sólo 3.0 Ci. ¿Cuál es la vida media? ¿Cuánto queda todavía de la muestra pura? Resp. 54.3 min, 5.40 g

Preguntas para la reflexión crítica

***39.42.** La fusión nuclear es un proceso que puede producir enormes cantidades de energía sin los perniciosos subproductos de la fisión nuclear. Calcule la energía liberada en la siguiente reacción de fusión nuclear:

$$^{3}_{2}H + ^{3}_{2}He \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H$$

Resp. 12.9 MeV

***39.43.** El carbono 14 decae muy lentamente, ya que su vida media es de 5 740 años. La datación por medio de carbono se puede realizar observando qué fracción del carbono 14 persiste aún y suponiendo que el proceso de decaimiento comenzó en el momento que el organismo vivo murió. ¿Cuál sería la edad de un trozo de carbón vegetal si se averiguara que el carbono 14 radiactivo restante era tan sólo el 40 por ciento de lo que cabría esperar en un organismo vivo?

***39.44.** El selector de velocidad de un espectrómetro de masas tiene un campo magnético de 0.2 T perpendicular a un campo eléctrico de 50 kV/m. El mismo campo magnético pasa a través de la región inferior. ¿Cuál es la velocidad de los átomos de litio 7 con una sola carga, al salir del selector? Si el radio de la trayectoria circular del espectrómetro es 9.10 cm, ¿cuál es la masa atómica del átomo de litio?

Resp. 2.50×10^5 m/s, 7.014 u

***39.45.** Un reactor nuclear funciona con un nivel de potencia de 2.0 MW. Suponiendo que unos 200 MeV de

energía sean liberados en una sola fisión de uranio 235, ¿cuántos procesos de fisión se están produciendo cada segundo en el reactor?

***39.46.** Suponga que en un experimento se bombardea $^{14}_{7}N$ con una partícula alfa. Uno de los dos núclidos resultantes es $^{1}_{1}H$. La reacción es

$$^{4}_{2}He + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{A}_{Z}X + ^{1}_{1}H$$

¿Cuál es el núcleo resultante representado por el símbolo X? ¿Cuánta energía cinética debe tener la partícula alfa para producir la reacción?

Resp. 1.19 MeV

***39.47.** Cuando una corriente de átomos de litio ionizado pasa por un espectrómetro de masas, el radio de la trayectoria que sigue el $^{7}_{3}Li$ (7.0169 u) es de 14.00 cm. Una línea más clara está formada por el $^{6}_{3}Li$ (6.0151 u). ¿Cuál es el radio de la trayectoria descrita por los isótopos del $^{6}_{3}Li$?



Introducción

En el presente documento se ofrece una introducción al uso de la calculadora graficadora HP 50G, dirigida de manera particular a quienes estén usando la séptima edición de la obra *Física, conceptos y aplicaciones*, de Paul E. Tippens, publicada por McGraw-Hill, para estudiar la asignatura correspondiente. Nos centraremos en algunas habilidades indispensables que el estudiante puede usar a lo largo de ese curso. Cabe adelantar que cada habilidad se examina en el contexto de ejemplos de este libro.

En esta sección se describe la disposición del teclado básico de la HP 50G. En la fila superior de teclas (encerradas en el recuadro rojo en la figura 1) se hallan las teclas de menú, que llevan las etiquetas F1, F2, F3… F6. Estas teclas cambian constantemente su función, con base en el menú que aparece en la parte inferior de la pantalla. En la figura 1, con F1 se activa o desactiva el trazador, en tanto que con F6 se sale del graficador tridimensional.

La HP 50G tiene su propio sistema computarizado de álgebra (CAS, *Computer Álgebra System*) que le permite funcionar simbólicamente en estructuras algebraicas. El CAS tiene muchos comandos, de forma que fueron agrupados por temas matemáticos; por ejemplo, aritmética (Arth), álgebra (Alg) y cálculo (Calc) (en el recuadro azul en la figura 1).

En los ejemplos siguientes usaremos estas funciones.

Los ejemplos

Empezaremos la introducción a la HP 50G para el estudio de la física con ejemplos que implican graficar y resolver problemas, ya que en cualquier curso de esa materia se pide al estudiante solucione ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Como la HP 50G es una calculadora graficadora, es posible obtener esas soluciones gráfica, simbólica o numéricamente. Enseguida abordamos los tres métodos. Cada una de las secciones que siguen comienza por indicar el tema, el ejemplo del libro y las páginas donde se halla.

Tema 1. Resolución de ecuaciones
Ejemplo 2.5, página 15

En este ejemplo se pide la solución de la ecuación $3x^2 - 5x - 12 = 0$. Primero resolveremos gráficamente el problema; luego repetiremos los pasos para hallar la solución con el solucionador numérico.

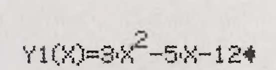


Figura 1. Introduzca la expresión cuadrática.

Resolución gráfica

1. Oprima ← F1 (Y=) para acceder a las funciones de trazado (Plot Functions); presione F2 (ADD) para agregar una función nueva e introduzca el miembro izquierdo de la ecuación de arriba (figura 1):



2. Oprima F5 (ERASE) para borrar la ventana de gráfica en uso; luego presione F6 (DRAW) para ver la gráfica trazada en la ventana predeterminada (figura 2). Como esta última ventana no reviste gran interés, nos acercaremos verticalmente a la gráfica para tener una mejor visión de nuestra función.

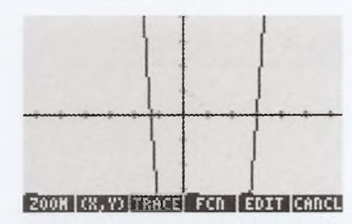


Figura 2. La gráfica predeterminada.

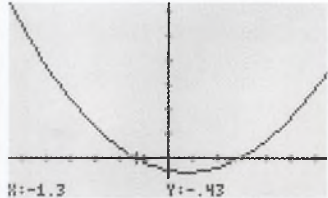


Figura 3. Trace la raíz.

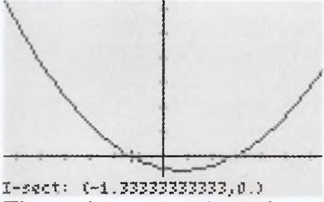


Figura 4. La raíz más a la izquierda, $x = -1.33\ldots$

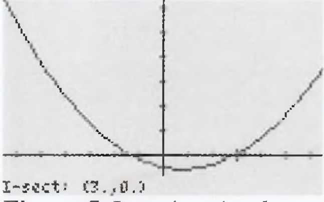


Figura 5. La raíz más a la derecha en $x = 3$.

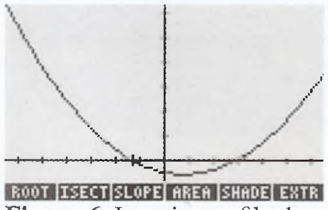


Figura 6. La primera fila de la carpeta FCN.

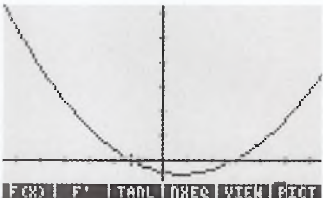


Figura 7. Segunda fila de la carpeta FCN.

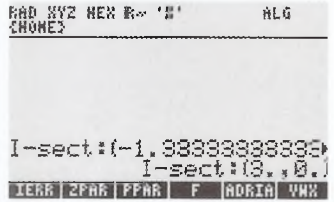


Figura 8. Las raíces se copian en la pantalla inicial.

3. Presione F1 (ZOOM) para acceder a los comandos de acercamiento (de Zoom). Luego oprima NXT para ver la segunda fila de comandos y enseguida elija F6 (ZAUTO). Presione NXT para ver la última página de comandos y F6 para volver al menú de graficación predeterminado (figura 3). Observará que hay dos raíces, una cerca de $x = -1$ y otra de $x = 3$. Oprima F3 (TRACE), luego F1 (X,Y) para activar el trazador y hacer aparecer las coordenadas. Presione ◀ varias veces para llegar a $x = -1.3$, punto muy cercano a la raíz que buscamos (figura 3).

4. Con el cursor en $x = -1.3$, oprima F1 (FCN) para acceder a los comandos analíticos en el entorno de graficación. Presione F2 (ISECT) y la HP 50G mostrará la aproximación más cercana a esta raíz que le es posible trazar: $x = -1.333\ldots$ (figura 4). Este resultado coincide con el ejemplo del texto: $(5 - 13)/6 = -8/6$ o $-4/3$.

5. Mueva el cursor a la derecha para colocarlo cerca de la raíz positiva. Observe que no se necesita que el trazador esté activo. Oprima cualquier tecla de menú para que aparezca éste y elija de nuevo el comando de intersección (Intersection) para ver la raíz positiva en $x = 3$ (figura 5). Este resultado también coincide con el ejemplo del texto: $(5 + 13)/6 = 18/6$ o 3.

6. Presione cualquier tecla de menú para que aparezca otra vez el menú FCN. Esta carpeta contiene muchos comandos que le ayudarán a analizar funciones. Mientras estamos aquí, analizaremos brevemente el resto de los comandos de este menú (figura 6):

- ROOT determina la raíz de una función
- ISEC halla una intersección de dos funciones
- SLOPE encuentra la pendiente de una función en un punto
- AREA determina el área debajo de una función entre dos puntos
- SHADE sombrea un área
- EXTR halla un extremo, ya sea un máximo o un mínimo

ROOT, SLOPE y EXTR funcionan igual. La HP 50G toma el valor que tiene de x el cursor como dato para determinar el resultado buscado. Observe que no es necesario que el trazador esté activo para que estas funciones trabajen.

7. Oprima NXT para ver la segunda página del menú FCN (figura 7):

- F(X) indica el valor para la función en uso.
- F' indica el valor de la derivada de la función en uso en ese punto.
- TANL calcula y traza la tangente para la función en uso en un punto en esa función.
- NXEQ elige la función siguiente de la lista si hay graficadas varias funciones.
- VIEW muestra la función en uso.
- PICT hace volver al menú de gráficas (Graph).

F(X), F' y TANL funcionan igual que ROOT, es decir, toman el valor que tiene de x el cursor como dato y entregan un resultado con base en él.

Con la HP 50G, ON se usa muchas veces también para hacer una cancelación. Observe que la leyenda escrita debajo de esa tecla dice CANCEL en azul. Oprima ON una o un par de veces para volver a la pantalla inicial (Home), donde las raíces se han pegado de manera automática.

Resolución con el solucionador numérico

1. Oprima ↱ 7 (NUM.SLV) para hacer arrancar el solucionador. Puesto que vamos a trabajar con una ecuación, acepte la opción predeterminada de la lista (1. Solve equation...) presionando F6 (OK). La HP 50G usa automáticamente la ecuación en uso (Y1(X)) como la que ha de resolver. Sin embargo, debemos editar esa ecuación para lo que deseamos. Presione F1 (EDIT) y edite la expresión para que se lea Y = Y1(X):



Con la ecuación editada para que diga Y = Y1(X), la HP 50G reconoce que se trata de una ecuación en dos variables, X y Y. Ahora habrá campos nuevos para introducir valores para esas variables. Oprima ▼ o ▲ para moverse entre X, Y y Eq. Es posible ingresar los valores para X o Y. Resalte la variable que desea resolver, luego oprima F6 (SOLVE). Vamos a practicar hallando la raíz en X = −4/3.

2. Introduzca 0 para Y, como en la figura 2. En la sección anterior aprendimos que hay dos valores de x para los que $y = 0$, $x = -4/3$ y $x = 3$. Así como el comando ROOT usó para graficar un valor inicial de x a fin de determinar la raíz más cercana, el solucionador requiere un valor inicial de x para guiarse en busca de la solución. Ingrese 0 para X y luego resalte el campo X. Oprima F6 (SOLVE) para ver X = −1.333..., como aparece en la figura 3. Resalte de nuevo el valor de X, introduzca 2 para X y resuelva otra vez para ver a segunda raíz en $x = 3$.

3. Puede emplear el solucionador para hacer evaluaciones con la misma facilidad que halla soluciones. Introduzca 20 para X y "despeje" para Y; verá Y = 1088, como en la figura 4.

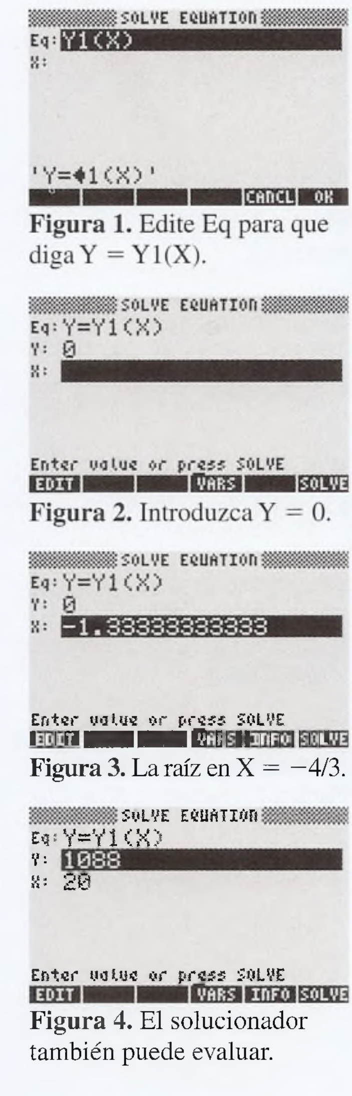


Figura 1. Edite Eq para que diga Y = Y1(X).

Figura 2. Introduzca Y = 0.

Figura 3. La raíz en X = −4/3.

Figura 4. El solucionador también puede evaluar.

Tema 2: gráficas de datos
Sección 2.6, página 19

En la figura 2.4 de la página 19 se muestra la gráfica del tiempo necesario para recorrer 1 km en función de la velocidad. En esta sección usaremos el entorno de estadísticas (Statistics) para construir una función inversa para los datos.

1. Oprima ↱ 5 (STAT) para establecer la HP 50G en el entorno de estadísticas. Elija la tercera opción, 3. Fit data.. y luego presione ENTER (figura 1).

2. La HP 50G guarda los datos para el análisis estadístico en una variable llamada ΣDAT. Resalte ese campo y oprima F1 (EDIT) para introducir los datos del ejemplo, como aparece en la figura 2. Cuando termine de ingresar la información, presione ENTER para volver al menú.

3. De manera predeterminada, el modelo usado para acomodar los datos es el lineal. A partir de ellos se advierte que Tiempo × Velocidad = 3600 para cada fila de datos. Al resolver para la velocidad se obtiene Velocidad = 3600/Tiempo. La HP 50G usa x como la variable independiente y y como la dependiente, de modo que $y = 3600/x$. Ésta es una función inversa, la cual pertenece a la familia de las potencias. Para cambiar el modelo lineal por el de potencia, resalte el campo Model y oprima F2 (CHOOS); enseguida seleccione la opción Power, como en la figura 3.

Observe que el menú F4 dice PRED. La línea que está arriba de la etiqueta del menú indica que se trata de una carpeta o de un entorno que contiene un conjunto de funciones. En este menú puede introducir un valor para x o y y luego encontrar el valor predicho de la otra variable con base en el modelo de ajuste que haya elegido.

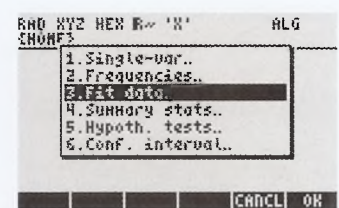


Figura 1. Entorno de estadísticas.

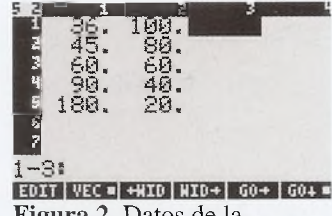


Figura 2. Datos de la página 19.

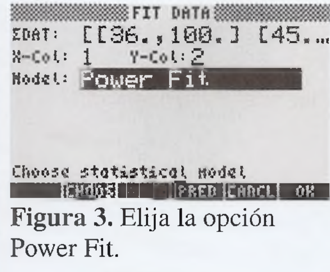


Figura 3. Elija la opción Power Fit.

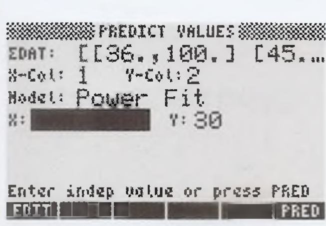


Figura 4. Antes de resolver x.

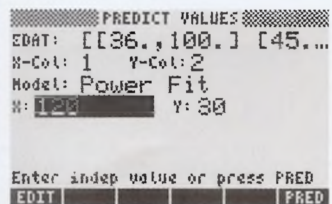


Figura 5. Encontrar X = 120

En la página 19 del libro, el autor advierte que el ajuste puede arrojar información que no estaba disponible en el conjunto de datos; por ejemplo, se precisarían 120 s para recorrer la distancia a 30 km/h. Usaremos el menú de predicción de valores, Predict Value, para ilustrarlo.

4. Oprima F4 (PRED) para ver el menú e introduzca 30 como valor de Y. Luego resalte el campo de X y presione F6 (PRED) para resolver para X cuando Y = 30. En las figuras 4 y 5 se ilustra esto antes y después de resolver para X.

5. Como dijimos, la tecla ON puede usarse para cancelar una operación pendiente. También sirve para salir de un entorno. Presione ON para volver al menú Fit Data; oprímala de nuevo para volver a la pantalla inicial. Observe que el ajuste de la potencia, $3600{*}X^{-1}$, junto con la correlación de -1, se han pegado automáticamente en la historia que se usará más adelante, en caso de que así lo desee usted (figura 6).

6. Mientras estamos aquí, aprovecharemos la oportunidad de presentarle el sistema computarizado de álgebra (CAS) de la HP 50G. Oprima f para bajar el valor de la covarianza; oprímala de nuevo para bajar el valor de la correlación. Cuando la expresión ajustada se halle en la fila inferior de la historia, oprima ▼. Se trata de un atajo. Al presionar esa tecla siempre irá al objeto que se halla al final de la historia y se le mostrará en el editor más adecuado. Como en este caso ese objeto es una ecuación algebraica, el mejor editor para ella es el Equation Writer (figura 7). Presione F6 (SIMP) para simplificar la expresión como se muestra en la figura. Oprima ENTER dos veces para colocar la expresión simplificada en la historia.

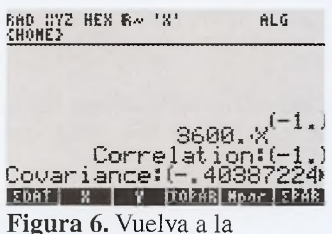


Figura 6. Vuelva a la pantalla principal.

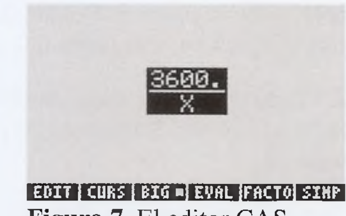


Figura 7. El editor CAS.

Tema 3: movimiento de un proyectil
Ejemplo 6.12, páginas 130-131

Este ejemplo se refiere a un proyectil que es disparado con una velocidad inicial de 80 m/s, en un ángulo de 30° respecto a la horizontal. Con tales condiciones, las componentes de la posición y la velocidad son, respectivamente:

- $x(t) = 80\cos(30)t$ y $y(t) = 80\text{sen}(30)t + 0.5(-9.8)t^2$
- $v_x(t) = 80\cos(30)$ y $v_y(t) = 80\text{sen}(30) + (-9.8)t$

Puesto que las dos ecuaciones tratan x y y por separado en términos de t, usaremos ecuaciones paramétricas para explorar este ejemplo. La HP 50G reconoce las ecuaciones paramétricas introducidas en el formato $(x(t), y(t))$. Básicamente, se trata de un formato de par ordenado (x, y), con expresiones en la variable t introducidas tanto para x como para y. Por tanto, nuestras ecuaciones se convierten en:

- $XY1(T) = (80\cos(30)T, 80\text{sen}(30)T + 0.5(-9.8)T^2)$
- $XY2(T) = (80\cos(30), 80\sin(30)T)$

1. En la pantalla inicial, oprima ↱ F4 (2D/3D) para entrar en el menú Plot Setup (configuración del trazado). Resalte el campo Type y presione F2 (CHOOS); luego seleccione Parametric de la lista. Resalte el campo del ángulo y presione F2 (CHOOS) para escoger grados en vez de radianes. Por último, resalte el campo Indep y escriba T como la variable independiente. En la figura 1 se muestran todas las configuraciones. Oprima ENTER para volver a la pantalla inicial.

PLOT SETUP
Type: Parametric ∡: Deg
EQ:
Indep: T ☑Simult ✓Connect
H-Tick: 1. V-Tick: 10. _Pixels
Plot functions simultaneously?
EDIT ✓CHK AXES ERASE DRAW

Figura 1. Elija los parámetros y grados.

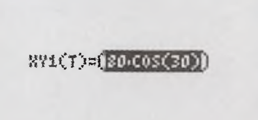


Figura 2. Introduzca las funciones de posición.

2. En la pantalla inicial, oprima SPC F1 (Y=) para entrar en el menú Plot-Parametric (trazado de ecuaciones paramétricas). Como no hay ninguna ecuación en uso, presione F2 (ADD) para añadir funciones paramétricas nuevas, lo que lo llevará de nuevo al Equation Writer. Empezaremos por introducir la función para la posición. En la figura 2 se muestra la primera parte de esa función para x: XY1(T)=80*cos30... Para abreviarla, resáltela y luego presione F4 (EVAL) a fin de evaluar esta subexpresión (80cos(30)=69.28). Ahora introduzca el resto de la expresión, como aparece en la figura 3. Presione ENTER para pegar la expresión en el menú Plot-Parametric.

3. Ahora añada las expresiones para la velocidad como XY2(T). Le quedará una lista de ecuaciones paramétricas, como se muestra en la figura 4. Oprima ENTER para volver a la pantalla inicial.

4. Una vez que hemos definido XY1(T) y XY2(T), podemos usarlas donde sea. Presione VAR para ver el menú de variables que hemos creado hasta ahora. Use la tecla NXT para pasar por las varias páginas de ese menú. Oprima la tecla de menú debajo de la variable XY1 para acceder a ella. Usaremos el menú de variables para acceder a XY1(T) y luego a XY2(T). El ejemplo pregunta la posición del proyectil después de 6 s. Para calcular XY1(6), sólo escriba esta expresión en la línea de comando y oprima ENTER. En la figura 5 se muestran las posiciones de x (X1(6)=415.69...) y de y (Y1(6)=63. 6) cuando t = 6, en forma de par ordenado. En la figura también se observa que está introduciéndose XY2(6). Al terminar de hacerlo, la HP 50G mostrará la velocidad de x (X2=69.28...) y la de y (Y2=−18.8) después de 6 s, como par de soluciones para el inciso (a) del ejemplo 2.5.

5. También podemos usar nuestras definiciones para resolver ecuaciones. En la segunda parte del ejemplo 2.5 se pregunta cuál es el punto máximo en la trayectoria del proyectil, y se señala que en ese punto la velocidad será igual a cero. Como nuestra ecuación para la velocidad es XY2(T), queremos resolver T en XY2(T)=0. En la pantalla inicial, presione ↰ 7 (S.SLV) y elija la sexta opción para pegar el comando Solve en la línea de comando. Luego introduzca nuestra ecuación arriba. Por último, agregue una coma y luego la variable para resolver para (T). En la figura 6 se muestra cómo debe quedar el comando completo, en tanto que en la 7 se presentan los resultados. El resultado negativo no nos interesa; el positivo, T=4.08... coincide con la solución del libro.

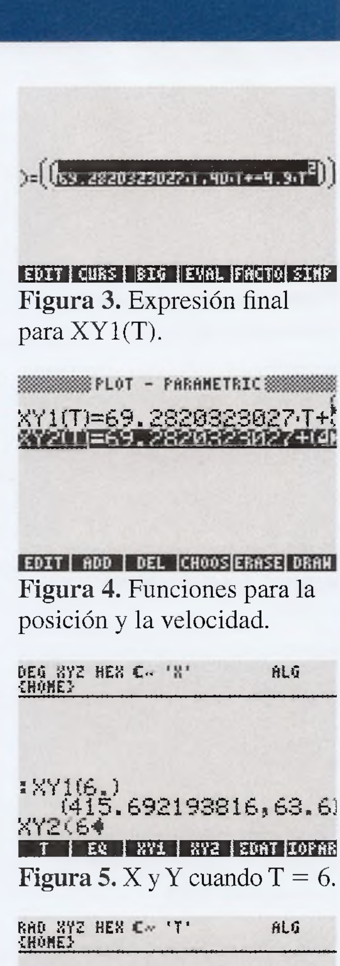


Figura 3. Expresión final para XY1(T).

Figura 4. Funciones para la posición y la velocidad.

Figura 5. X y Y cuando T = 6.

Figura 6. El comando Solve.

Tema 4: Ley de Ohm
Ejemplo 27.4, página 541

Este ejemplo se refiere a un cable de cobre de 20 m de largo y 0.8 mm de diámetro, cuyos extremos están colocados en las terminales de una batería de 1.5 volts. Cabe señalar que la resistividad del cobre es de $1.72 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot$ cm, lo que equivale a los $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m que se dan en el ejemplo. En esta sección presentaremos la biblioteca de ecuaciones (Equation Library) de la HP 50G, la cual contiene más de 100 entradas, catalogadas en 15 temas que van de electricidad a análisis de esfuerzo. En esta sección también expondremos cómo manejar las unidades en la HP 50G.

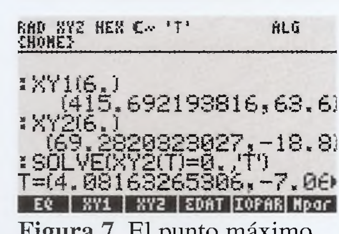


Figura 7. El punto máximo en T=4.08...

1. Para entrar en la biblioteca de ecuaciones oprima:

APPS ▲ (12.Equation Library) F6 (OK) F6 F6 ENTER

En la lista de temas, resalte Electricity y oprima ENTER (figura 1).

2. Empezaremos por calcular la resistencia del cable, así que selccione Wire Resistance de la lista de temas de electricidad y luego oprima ENTER.

3. Con la ecuación para calcular la resistencia del cable mostrada en la pantalla, las teclas de menú le dan acceso a varias funciones útiles:

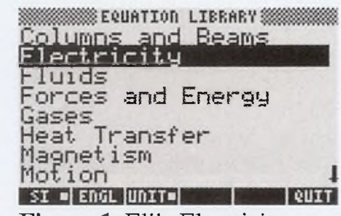


Figura 1. Elija Electricity.

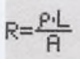


Figura 2. Ecuación de la resistencia del cable.

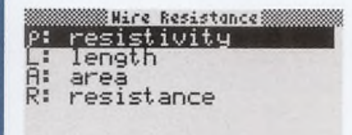


Figura 3. Definiciones y variables.

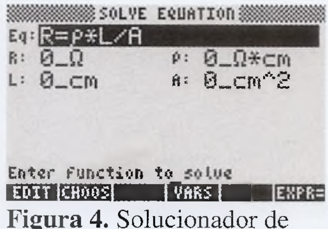


Figura 4. Solucionador de ecuaciones listo.

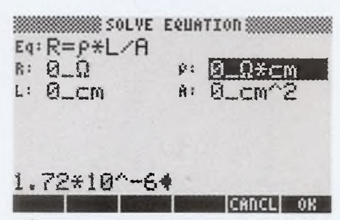


Figura 5. Introduzca un nuevo valor.

- SOLV carga la o las ecuaciones en uso en el solucionador numérico.
- EQN muestra la ecuación en notación estándar de libro de texto (figura 2).
- VARS enumera las variables y sus definiciones (figura 3).
- PICS muestra una representación gráfica relevante para la ecuación, si está disponible.
- ⊠STK copia la o las ecuaciones en la pantalla inicial.
- EXIT le lleva a la pantalla anterior.

4. Para cargar la ecuación en el solucionador numérico y entrar en el solucionador mismo oprima:



Observe que todas las variables toman valores de cero y que van acompañadas de sus unidades correctas.

5. Para la resistividad, introduzca $1.72*10^{-6}$ Ωcm, como se muestra en la figura 5. Luego tenemos L = 2000 cm y A = π*0.04^2. Sólo debemos ingresar los valores numéricos; la HP 50G les asigna las unidades correspondientes. Tras introducir todos los valores, resalte el campo R y oprima F6 (SOLVE) para ver R = 0.684... Para ver el valor completo, con todo y unidades, presione F1 (EDIT), como aparece en la figura 6. Este resultado coincide con la solución del libro: R = 0.684 Ω.

6. Presione ON para ir a la pantalla inicial y observe que el valor de R se ha pegado en la historia. Ahora vuelva al Equation Writer, seleccione el tema Electricity y luego Ohm's Law (ley de Ohm). Repita los pasos descritos, a partir del 4, para ver el solucionador con las nuevas ecuaciones introducidas. Ingrese 1.5 para los volts, como en el ejemplo, y luego resuelva para I para ver lo mostrado en la figura 7. De nuevo, el resultado, I = 2.19 A, coincide con el del libro.

Como último ejemplo, repasaremos el tema de cuerpos en caída libre. En este caso, mostraremos las herramientas avanzadas que ofrece la HP 50G para que el estudiante mejore la compresión de conceptos tanto de las funciones como de la física.

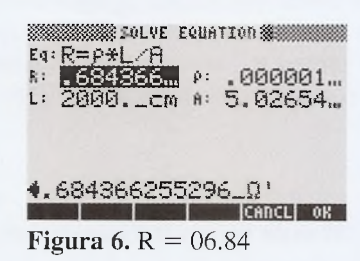


Figura 6. R = 06.84

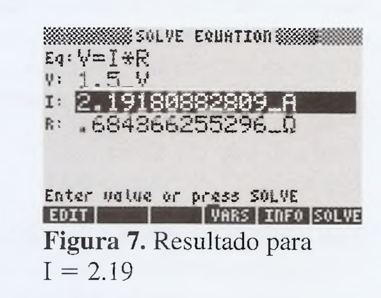


Figura 7. Resultado para I = 2.19

Tema: desplazamiento, velocidad y aceleración
Ejemplo 6.10, páginas 124-126

En este ejemplo se lanza verticalmente una bola de béisbol al aire desde el techo de un edificio de 23 m, con una velocidad inicial de 20 m/s. El ejemplo pregunta cuánto demora la bola en alcanzar la altura máxima y cuál es ésta. Luego pregunta cuál será la altura y la velocidad de la bola tras 1.5 s y 5 s de haber sido arrojada.

Empecemos poniendo de relieve dos aspectos significativos.
Como la HP 50G puede tratar las variables ya sea como objetos simbólicos o bien, como contenedores para guardar valores numéricos debe cerciorarse de que las que quiera tratar simbólicamente no tengan almacenados valores numéricos. Purgue la variable para asegurarse de ello. En este ejemplo, purgaremos EQ, Y1 y Y2. Oprima TOOL F5 (PURGE) a fin de pegar el comando para purgar (*purgue*) en la línea de comando. Luego presione VAR para entrar en la lista de variables. Oprima la tecla de menú para la variable que desea purgar. En la figura 1, se accedió a EQ mediante F1; su menú de

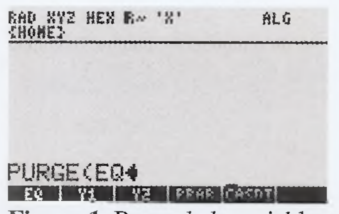


Figura 1. Purga de la variable EQ.

variable podría ser distinto del mostrado en esa figura. Repita los pasos para purgar Y1 y Y2. En la figura 2 se muestra que en el menú de variables ya no aparecen EQ, Y1 ni Y2 después de la purga.

Oprima ← F4 (2D/3D) y cerciórese de que el tipo de trazado es de función (es decir, que en la parte superior de la pantalla dice Plot–Function); si es necesario, cámbielo a función pulsando F2 (CHOOS).

1. La función de desplazamiento es $h(t)=23+20t-4.9t^2$. La introduciremos en la HP 50 como sigue:

Y1(X)=23+20*X−4.9*X^2

Oprima ← F1 (Y=) para entrar en el menú Plot-Function. Si quedan ahí algunas otras funciones de otro trabajo, puede usar F3 (DEL) para borrarlas. Como fuere, oprima F2 (ADD) para agregar nuestra función de desplazamiento (figura 3).

2. La derivada de nuestra función de desplazamiento es la función de velocidad. En vez de calcular esta última nosotros mismos, simplemente introduzcamos una segunda función:

Y2(X)=d/dx(Y1(X))

Para ingresar la derivada, oprima → COS (∂), como se muestra en la figura 3. Resalte el miembro derecho y presione F4 (EVAL) para ver la derivada (figura 4).

3. Procedamos a configurar la ventana de graficación. Presione ← F2 (WIN) para entrar en la ventana de trazado (Plot Window) y ver sus funciones. Fije las vistas horizontal y vertical como se muestra en la figura. Nosotros elegimos −0.5 a 6 para la vista horizontal porque la pantalla de la HP 50G se forma por columnas de 131 pixeles. Como resultado, al fijar la vista horizontal en un múltiplo de 131 se hará que el trazador lea un número con menos dígitos. En este caso, 6.5/130 = 0.05, así que el trazador se moverá en incrementos de 0.05.

4. La sección que sigue es optativa, pero la incluimos para mostrarle cómo adaptar la gráfica. Oprima ← F4 (2D/3D) para entrar en el menú de configuración de gráficas (Plot Setup). Observe que EQ muestra la lista de funciones que hemos introducido para que sean graficadas: Y1(X) y Y2(X). Fije la marca H en 1 para ver en el eje *x* una marca por cada segundo. Luego fije la marca V en 10 para ver una marca en el eje y cada 10 metros. Quite la marca de la opción Pixels a fin de que la HP 50G interprete el 1 y el 10 como unidades, no como pixeles. El resultado se muestra en la figura 7.

5. Oprima F5 (ERASE) para borrar la ventana de gráfica en uso; luego presione F6 (DRAW) para ver la gráfica, como aparece en la figura 8. La función de desplazamiento es la parábola, en tanto que la de la velocidad es la gráfica lineal. Observe que la función de velocidad tiene un valor de cero donde la función de desplazamiento alcanzó su máximo, como cabría esperar. Asimismo, note que la función de velocidad es positiva antes de cero y negativa después de él.

6. A fin de determinar el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima, trazamos el máximo y usamos las funciones analíticas de la HP 50G. Oprima F3 y F2 para hacer arrancar el trazador y active las coordenadas. Coloque el trazador cerca del máximo; por ejemplo, (2.05, 43.40775) es un punto muy cercano al máximo (figura 9). Presione cualquier tecla de menú para abrir el menú de trazado, luego oprima F4 (FCN) para acceder a las funciones analíticas. Presione F6 (EXTR) para ver que el máximo, 43.408 m, se alcanza en 2.04 s (figura 10). Al restar los 23 m de altura del edificio se

Figura 2. El menú VAR después de la purga.

Figura 3. La función de desplazamiento.

Figura 4. Y2(X) remite a Y1(X).

Figura 5. Use EVAL para ver la derivada.

Figura 6. Configuraciones disponibles para la ventana.

Figura 7. Listo para graficar.

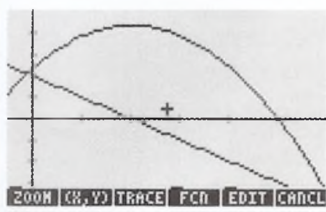


Figura 8. Las gráficas iniciales.

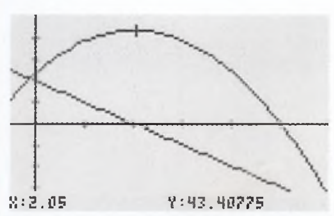


Figura 9. Trazo cercano al máximo.

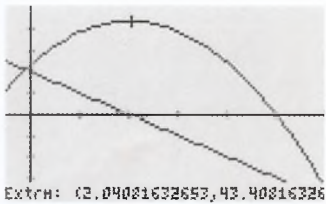


Figura 10. El máximo en 2.04 s.

obtiene la altura máxima sobre éste: 43.408 − 23 = 20.408 m, como en el libro.

7. En el inciso (*c*) del ejemplo, se pide hallar la posición y la velocidad después de 1.5 segundos. Oprima ON una o dos veces para volver a la pantalla inicial. Observe que se han pegado los extremos en la historia. El cálculo de la posición después de 1.5 s se hace simplemente introduciendo Y1(1.5). Puede ingresar esta expresión directamente desde el teclado o puede oprimir VAR para entrar directamente en las variables. En la figura 11 se muestra el cálculo Y1(1.5)=41.975. Presione − 2 3 ENTER para restar la altura de 23 m del edificio. El resultado, 18.975, coincide con el valor dado en el libro: 19 m (figura 11).

8. En la figura 12 aparece el cálculo de la velocidad después de 1.5 segundos, realizado de modo similar mediante la función Y2. De nuevo, el resultado concuerda con el del libro. Use el mismo procedimiento para calcular la posición y la velocidad después de 5 s, a fin de responder al inciso (*d*) del ejemplo del libro.

```
RAD XYZ HEX R~ 'X'          ALG
{HOME}

Extrm:(2.04081632653,4▸
:Y1(1.5)
                     41.975
:ANS(1.)-23.
                     18.975
 EQ | Y1 | Y2 | PPAR | CASDI |
```

Figura 11. La altura después de 1.5 segundos.

```
RAD XYZ HEX R~ 'X'          ALG
{HOME}
Extrm:(2.04081632653,4▸
:Y1(1.5)
                     41.975
:ANS(1.)-23.
                     18.975
:Y2(1.5)
                        5.3
 EQ | Y1 | Y2 | PPAR | CASDI |
```

Figura 12. Le velocidad tras 1.5 segundos.

Llegamos al final de este breve tutorial sobre el uso de la calculadora graficadora HP 50G para apoyar el estudio de la física con el libro *Física, conceptos y aplicaciones*, de Paul E. Tippens, en su séptima edición. Para aprender más acerca de este aparato u obtener el manual de uso, visite por favor www.ho.com/calculators.

Índice

La *f* en itálicas se refiere a las figuras, y la *t* a las tablas.

A

B

D

E

F

G

K

L

M

N

O

P

R

S

T

Múltiplos y submúltiplos para las unidades SI

Prefijo	Símbolo	Multiplicador	Uso
tera	T	$1{,}000{,}000{,}000{,}000 = 10^{12}$	1 terámetro (Tm)
giga	G	$1{,}000{,}000{,}000 = 10^{9}$	1 gigametro (Gm)
mega	M	$1{,}000{,}000 = 10^{6}$	1 megametro (Mm)
kilo	k	$1{,}000 = 10^{3}$	1 kilómetro (km)
centi*	c	$0.01 = 10^{-2}$	1 centímetro (cm)*
mili	m	$0.001 = 10^{-3}$	1 milímetro (μm)
micro	μ	$0.000001 = 10^{-6}$	1 micrometro (nm)
nano	n	$0.000000001 = 10^{-9}$	1 nanometro (nm)
—	Å	$0.0000000001 = 10^{-10}$	1 angstrom (Å)*
pico	p	$0.000000000001 = 10^{-12}$	1 picometro (pm)

* El uso del centímetro y el angstrom está en desuso, pero aún se utilizan ampliamente.

Unidades básicas del SI para las siete magnitudes básicas y dos complementarias

Magnitud	Unidad	Símbolo
	Unidades básicas	
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampére	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol
	Unidades complementarias	
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

La séptima edición de *Física, Conceptos y aplicaciones*, recibió el premio McGuffey presentado por la Text and Academic Authors Association (TAA), este prestigioso y antiguo galardón es otorgado a los libros de texto cuya excelencia se ha demostrado a lo largo de los años.

Su contenido abarca todos los campos de la física: mecánica, física térmica, movimiento ondulatorio, sonido, electricidad, luz y óptica, y física atómica y nuclear. El énfasis en las aplicaciones y esta sucesión normal de temas se adecua a las necesidades de la educación media superior e introductoria a niveles superiores.

Esta séptima edición revisada cuenta con un OLC (Online Learning Center): **www.mhhe.com/bachillerato/tippens7e**, en el cual el alumno podrá encontrar animaciones y presentaciones en PowerPoint; y el profesor, la solución a todos los problemas de final de capítulo, manual del laboratorio y presentaciones en PowerPoint.

Características que presenta esta edición:

- Un capítulo de repaso de las matemáticas
- Objetivos del capítulo
- Estrategias de resolución de problemas
- Ejemplos resueltos
- Resúmenes
- Palabras clave
- Preguntas de repaso
- Problemas
- Preguntas de pensamiento crítico
- Problemas y ejemplos conceptuales



The McGraw·Hill Companies